ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MALIK KOUBI

Croissance uniforme dans les groupes hyperboliques

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 5 (1998), p. 1441-1453

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_5_1441_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 5 (1998), 1441–1453

CROISSANCE UNIFORME DANS LES GROUPES HYPERBOLIQUES

par Malik KOUBI

---

1. Introduction.

Si G est un groupe de type fini et S un système fini de générateurs de G, on définit la boule $B(n)$ de rayon n de (G, S) comme l'ensemble des éléments qui sont produits d'au plus n éléments de $S \cup S^{-1}$. On s'intéresse ici au taux de croissance exponentiel $\tau(G, S)$ de (G, S) défini par

$$\tau(G, S) = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\operatorname{Card}(B(n))}.$$

Ce nombre est encore appelé entropie algébrique de (G, S) ([11]), par analogie avec l'entropie d'une variété riemannienne M munie d'une métrique normalisée g. L'entropie volumique d'une variété est d'ailleurs reliée à l'entropie algébrique de son groupe fondamental (op.cit.).

On dit qu'un groupe hyperbolique est élémentaire s'il est fini ou s'il contient $\mathbf{Z}$ comme sous-groupe d'indice fini. Un groupe non élementaire hyperbolique au sens de Gromov [7] [4] est à croissance exponentielle ($\tau(G, S) > 1$). Il existe des groupes à croissance intermédiaire (i.e tels que $\tau = 1$ et Card(B(n)) croît plus vite que tout polynôme en n) [5]. Pour le groupe libre F_p de rang p considéré avec une base S, ce taux vaut $2p - 1$.

Dans [6], R. Grigorchuk et P. de la Harpe définissent pour un groupe G de type fini le réel

$$w(G) = \inf_X \{\tau(G, X)\}$$

Mots-clés : Groupes hyperboliques – Croissance – Entropie.
Classification math. : 20F32 – 20F38 – 20L17.

où l'inf est pris sur tous les systèmes générateurs et demandent si $w(G) > 1$ pour tout groupe hyperbolique non élémentaire. Cette croissance minimale s'apparente à l'entropie minimale des variété riemannienne dont il est question dans [12].

Le résultat que l'on démontre est le :

THÉORÈME 1.1. — *Soit G un groupe hyperbolique non élémentaire. Il existe une constante $c_G > 1$ telle que pour tout système générateur X de G, on a $\tau(G,X) \geqslant c_G$.*

Notons que le résultat était déjà connu [6] dans le cas d'un groupe hyperbolique *sans torsion*.

La méthode que l'on se propose de suivre est celle suggérée dans [6] qui consiste, étant donné G, à trouver une constante N_G ayant la propriété que pour n'importe quel système de générateurs X, on peut trouver deux éléments de longueur plus petite que N_G dans X, et qui engendrent un groupe libre de rang 2 (théorème 5.1). La minoration du taux de croissance découle alors directement de ce fait.

On se place d'abord dans le cadre plus général d'un espace métrique géodésique δ-hyperbolique E, muni d'un groupe d'isométries G. Si X est un système générateur de ce groupe, on s'intéresse au déplacement d'un point de E par l'ensemble X (section 3). On donne une condition suffisante sur le déplacement minimal pour qu'un produit d'au plus deux éléments de X soit hyperbolique, en particulier d'ordre infini (proposition 3.2). On obtient comme corollaire le :

THÉORÈME 1.2. — *Soit G un groupe fini d'isométries de E, un espace métrique géodésique δ-hyperbolique. Il existe $p \in E$ tel que le diamètre de l'orbite de p soit plus petit que 100δ. En particulier, un groupe hyperbolique n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis.*

On se place ensuite (section 4) dans le cas où G muni du système générateur S est un groupe δ-hyperbolique, on prend pour E le graphe de Cayley $E_{(G,S)}$ de (G,S) et le groupe d'isométries de E est G lui-même.

De ce cas suit la partie la plus nouvelle (section 4) qui est la :

PROPOSITION 1.3. — *Soit G un groupe hyperbolique infini. Il existe un entier M_G tel que pour tout système générateur X de G, le groupe G muni de la distance associée à X admet un élément hyperbolique (i.e. d'ordre infini) de longueur plus petite que M_G.*

Le problème de trouver un tel élément ne se pose évidemment pas dans le cas d'un groupe hyperbolique sans torsion, dont tous les éléments non triviaux sont hyperboliques.

On construit alors à partir de cet élément et grâce à un résultat de [3] deux éléments de petites longueurs qui engendrent un sous-groupe libre de rang 2, ce qui permet de minorer la croissance (section 5).

Notations. — La lettre δ désigne un entier positif, E est un espace métrique géodésique δ-hyperbolique ([4], p. 28) et G un groupe d'isométries de E. À partir de la section 4, le groupe G est hyperbolique, et on lui associe une fois pour toutes un système générateur que l'on note S. L'espace E est alors le graphe de Cayley de (G,S) et δ est la constante d'hyperbolicité de (G,S). Le couple (G,S) est alors fixé, sauf au 4.2 où on cherche une estimation plus générale.

Les systèmes générateurs considérés sont finis. La lettre X désigne un système générateur *variable* de G, c'est-à-dire qui n'est pas fixé une fois pour toutes.

Remerciements : je remercie T. Delzant pour des explications patientes et de multiples discussions qui ont beaucoup apporté à ce travail.

2. Préliminaires.

Soit E un espace métrique géodésique δ-hyperbolique. La distance de p à q dans E est notée $|p-q|$. Dans le cas où $E = E_{(G,S)}$ est le graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique (G,S), c'est la longueur de l'élément $p^{-1}.q$. On note $(r|t)_p$ le produit de Gromov de r et t par rapport à un point p de E. Ce produit est donné par

$$(r|t)_p = \frac{1}{2}(|r-p| + |t-p| - |r-t|).$$

Le résultat suivant peut être trouvé dans [1, chap. 9]. Les isométries d'un espace hyperbolique sont classées suivant leur ensemble limite et elles sont de trois types : elliptique, parabolique ou hyperbolique. Le type d'une isométrie est invariant par conjugaison et si g est une telle isométrie, g et $g^k, k \neq 0$ sont du même type.

DÉFINITION 2.1. — *Si u est une isométrie hyperbolique de E, on notera $\{u^{-\infty}, u^{+\infty}\}$ son ensemble limite.*

On a de plus les lemmes suivants :

LEMME 2.2. — *Soient p, r, t trois points de E, et soit $l = (r|t)_p$. Notons $[p, r]$ un segment géodésique joignant p à r. Alors pour tout $l' \leqslant l$, le point $m \in [p, r]$ tel que $|m - p| = l'$ vérifie : $|t - p| \geqslant |m - p| + |t - m| - 4\delta$.*

Démonstration. — Soit m le point de $[p, r]$ situé à distance l' de p. Soit m' sur une géodésique de p à t situé à la distance l' de p. Comme $l' \leqslant (r|t)_p$, la finesse des triangles implique que $|m - m'| \leqslant 4\delta$. Ainsi, $|t - p| = |m' - p| + |t - m'|$ et $|t - p| \geqslant |m - p| + |t - m| - 4\delta$. □

LEMME 2.3 [1, lemme 9.2.3]. — *Soient g, h deux isométries non hyperboliques vérifiant $\min\{|g.p - p|, |h.p - p|\} \geqslant 2(g.p|h.p)_p + 6\delta$ pour un certain $p \in E$. Alors $g.h$ (et $h.g$) sont hyperboliques.*

Pour deux isométries d'un espace hyperbolique, on a le critère de liberté suivant :

LEMME 2.4. — *Soient f et g deux isométries d'un espace δ-hyperbolique E. Supposons qu'il existe $p \in E$ et $a > 0$ tels que*

$$\forall\, U, V \in \{f^{\pm 1}, g^{\pm 1}\}, \forall\, \epsilon, \nu \in \{-1, 1\},$$

si $(U, \epsilon) \neq (V, \nu)$, alors $|U^\epsilon.p - V^\nu.p| \geqslant \max(|U^\epsilon.p - p|, |V^\nu.p - p|) + 2\delta + a$.

Alors f et g engendrent un groupe libre de rang 2.

Démonstration. — Soit $w = y_1.y_2 \cdots y_k$ un mot réduit en $\{f^{\pm 1}, g^{\pm 1}\}$ et pour $i \leqslant k$. Posons $w_i = y_1.y_2 \cdots y_i$ le produit partiel. Considérons la suite de points de E définie par $x_i = w_i.p$. Cette suite vérifie les hypothèses de [2, lemme 1.1, p. 178]. En effet, on a :

$$\begin{aligned} |w_{i+2}.p - w_i.p| &= |y_{i+2}.p - y_{i+1}^{-1}.p| \\ |w_{i+2}.p - w_{i+1}.p| &= |y_{i+2}.p - p| \\ |w_{i+1}.p - w_i.p| = |y_{i+1}.p - p| &= |y_{i+1}^{-1}.p - p|. \end{aligned}$$

Comme le mot considéré est réduit, on a par ailleurs $y_{i+2} \neq y_{i+1}^{-1}$. Ainsi, l'hypothèse du lemme devient

$$|w_{i+2}.p - w_i.p| \geqslant \max(|w_{i+2}.p - w_{i+1}.p|, |w_{i+1}.p - w_i.p|) + 2\delta + a$$

i.e l'hypothèse de [2, lemme 1.1, p. 178]. Par conséquent, on a : $|w.p - p| \geqslant k.a$ et w n'est pas le mot trivial. □

3. Déplacement d'un point par un ensemble d'isométries.

Dans cette section, on considère toujours E un espace métrique géodésique δ-hyperbolique muni d'un groupe d'isométries G. Étant donné X, un système générateur de G, on établit une condition suffisante pour qu'un produit d'au plus deux éléments de X soit une isométrie hyperbolique. Cette condition porte sur le déplacement minimal du système X.

DÉFINITION 3.1. — *Soit X un ensemble fini d'isométries de E. Pour $p \in E$, on définit le déplacement de p par X comme*

$$\lambda(p, X) = \max_{x \in X} |x.p - p|.$$

On dit que p est à déplacement minimal pour X si

$$\lambda(p, X) \leqslant \delta + \inf_{p' \in E} \lambda(p', X).$$

On montre la :

PROPOSITION 3.2. — *Soit E un espace métrique géodésique δ-hyperbolique muni d'un groupe d'isométries G engendré par un système fini X. Alors une au moins des deux propositions suivantes est vérifiée :*

- *il existe un élément hyperbolique de G qui est produit de 1 ou 2 éléments de X;*
- *il existe $p \in E$ tel que $\lambda(p, X) \leqslant 100\delta$.*

Démonstration. — Choisissons p à déplacement minimal pour X et soit $X' = \{x \in X, |x.p - p| \geqslant 50\delta\}$ l'ensemble des éléments qui ont une grande distance de translation et qu'on suppose non vide. Supposons aussi tous les éléments de X non hyperboliques. Soit x_1 dans X' tel que $|x_1.p - p| = \lambda(p, X)$.

Soit $l = \min\{(x_1.p|x.p)_p, x \in X'\}$.

Cas 1 : $l \leqslant 20\delta$. Dans ce cas, par définition de l, il existe $x \in X'$ tel que $(x_1.p|x.p)_p \leqslant 20\delta$. Comme $|x.p - p|$ et $|x_1.p - p|$ sont plus grands que 50δ, on peut appliquer le lemme 2.3 à x_1 et x et en déduire que $x_1.x$ est hyperbolique, ce qui est le premier cas de la proposition.

Cas 2 : $l > 20\delta$. On va montrer que quitte à changer le point-base, on peut réduire la distance de translation des éléments de X' sans trop augmenter celle des autres éléments de X.

Commençons par fixer une géodésique $[p, x_1.p]$. Soit m_1 sur cette géodésique tel que $|m_1 - p| = 20\delta$. Pour chaque $x \in X'$, choisissons aussi un segment géodésique $[m_1, x.p]$. Comme $(x_1.p|x.p)_p \geqslant l \geqslant 20\delta$, le lemme 2.2 appliqué à tous les triplets $(p, x_1.p, x.p)$, implique que la géodésique par morceaux $[p, m_1] \cup [m_1, x.p]$ est géodésique à 4δ près. Prenons m_1 comme nouveau point base et soit $x \in X$.

Affirmation :

- si $x \in X'$, alors $|x.m_1 - m_1| \leqslant |xp - p| - 28\delta$;
- si $x \notin X'$, alors $|x.m_1 - m_1| \leqslant 90\delta$.

Admettons l'affirmation un instant et montrons que dans ce cas 2, on a $\lambda(p, X) \leqslant 100\delta$, ce qui est le deuxième cas de la proposition. Si $\lambda(p, X) > 100\delta$, l'affirmation implique que

$$\lambda(m_1, X) \leqslant \max\{\lambda(p, X) - 28\delta, 90\delta\} < \lambda(p, X) - 10\delta$$

ce qui contredit que p soit à déplacement minimal pour X. □

Démonstration de l'affirmation. — Dans le premier cas ($x \in X'$), on introduit des points intermédiaires. Soit $m \in [p, x.p]$ tel que $|m - p| = 20\delta$. Soit $y \in [p, x.p]$ tel que $|y - x.p| = 20\delta$. Comme x est non hyperbolique, d'après [1, lemme 9.2.2], on a : $|x^2.p - p| \leqslant |x.p - p| + 2\delta$, ce qui s'écrit aussi : $(x^2.p|p)_{x.p} \geqslant \frac{1}{2}|x.p - p| - \delta$. Cette quantité est donc plus grande que 24δ et la finesse du triangle $\{p, x.p, x^2.p\}$ implique alors $|x.m - y| \leqslant 4\delta$. Ainsi

$$\begin{aligned} |x.m - x.m_1| = |m - m_1| &\leqslant 4\delta \\ \text{et} \qquad |x.m - y| &\leqslant 4\delta. \end{aligned}$$

Plaçons-nous maintenant sur le segment $[p, x.p]$. On a

$$|x.p - p| = |x.p - y| + |y - m| + |m - p|$$

et donc

$$|y - m| = |x.p - p| - 40\delta.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |x.m_1 - m_1| &\leqslant |x.m_1 - x.m| + |x.m - y| + |y - m| + |m - m_1| \\ &\leqslant 4\delta + 4\delta + (|x.p - p| - 40\delta) + 4\delta \\ &\leqslant |x.p - p| - 28\delta. \end{aligned}$$

Dans le second cas ($x \notin X'$), on a

$$\begin{aligned}|x.m_1 - m_1| &\leqslant |x.m_1 - x.p| + |x.p - p| + |p - m_1| \\ &\leqslant 20\delta + 50\delta + 20\delta \\ &\leqslant 90\delta.\end{aligned}$$ □

Remarque. — Un exemple important qui sera utilisé dans la section 4 est le cas où $E = E_{(G,S)}$ est le graphe de Cayley d'un groupe δ-hyperbolique. Dans ce cas, pour tout couple (g,p) d'éléments de G, la quantité $|g.p - p| = |p^{-1}.g.p - 1|$ est la longueur de $p^{-1}.g.p$ dans (G,S). C'est pourquoi affirmer que p est minimal pour le système X revient à dire que $p^{-1}.X.p$ minimise (à δ près), parmi les conjugués Y de X, la quantité $\max_{y \in Y} |y|$ (plus grande longueur des éléments de Y dans le système (G,S)).

COROLLAIRE 3.3. — *Soit G un groupe fini d'isométries de E, un espace métrique géodésique δ-hyperbolique. Il existe $p \in E$ tel que le diamètre de l'orbite de p est plus petit que 100δ.*

Démonstration. — On applique la proposition 3.2 à $X = G$ tout entier. □

On retrouve aussi de manière simple un résultat connu [8] :

COROLLAIRE 3.4. — *Un groupe hyperbolique n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes finis.*

Démonstration. — Soit G un groupe hyperbolique et S un système générateur de G. Soit δ la constante d'hyperbolicité de (G,S). Soit H un sous-groupe fini de G. Il agit par isométries sur $E_{(G,S)}$, le graphe de Cayley de G. De plus, il ne contient que des éléments non hyperboliques. D'après la proposition 3.2 appliquée à $X = H$, il existe $p \in G$ dont l'orbite par H est de diamètre inférieur à 100δ. Or pour $h \in H$, la quantité |h.p-p| n'est autre que la longueur de l'élément $p^{-1}.h.p$ dans le système S et tous les éléments de $p^{-1}.H.p$ appartiennent à la boule de rayon 100δ de (G,S). □

4. Existence d'un élément hyperbolique de petite longueur.

Dans cette section, on suppose G hyperbolique infini. On cherche un majorant sur la longueur du plus court élément hyperbolique, indépendante du système générateur. Il est facile de voir qu'un majorant dépendant de X existe toujours. En effet :

LEMME 4.1. — *Soit (G, X) un groupe $d(X)$-hyperbolique infini avex $d(X)$ un entier non nul. Alors (G, X) possède un élément hyperbolique de longueur inférieure ou égale à $12d(X)$.*

Démonstration. — Supposons que tous les éléments de longueur inférieure à $12d(X)$ soient elliptiques. Comme G est supposé infini, il existe $u \in G$ de longueur $12d(X)$. Soit m un milieu de $[1, u]$. Les éléments $g = m^{-1}$ et $h = m^{-1}.u$ vérifient les hypothèses du lemme 2.3. □

4.1. Démonstration de la proposition 1.3.

On suppose toujours G hyperbolique infini. On fixe jusqu'à la fin de la démonstration un système générateur S et l'espace métrique géodésique δ-hyperbolique E que l'on considère est le graphe de Cayley $E_{(G,S)}$ de (G, S).

On définit $F_{(G,S)}$ comme l'ensemble (fini) des systèmes générateurs de G totalement inclus dans la boule de rayon 100δ de (G, S). Pour chaque système générateur, on sait trouver par le lemme 4.1 un élément hyperbolique. Pour $Y \in F_{(G,S)}$, notons $l(Y)$ la longueur de l'élément correspondant. La constante

$$M'(G, S) = \max\{l(Y), Y \in F_{(G,S)}\}$$

majore la longueur du plus petit élément hyperbolique dans tous les systèmes de $F_{(G,S)}$.

Par ailleurs, cette borne est valable pour tout système conjugué à un système de $F_{(G,S)}$, les groupes $(G, g^{-1}.Y.g)$ et (G, Y) étant isométriques.

Maintenant si X est un système générateur fini de G, et s'il n'entre pas dans la catégorie précédente, il existe d'après la proposition 3.2, un élément hyperbolique de G qui est produit de 1 ou 2 éléments de X.

Finalement, l'entier $M(G) = \max\{M'(G, S), 2\}$ majore donc la longueur minimale d'un élément hyperbolique de G, indépendamment du système de générateurs. □

4.2. Une remarque.

Dans ce paragraphe seulement, on fait varier le couple (G, S). Étant donnés deux entiers non nuls δ et c, soit $\mathcal{A}(\delta, c)$ l'ensemble des groupes δ-hyperboliques (G, S) tels que S soit de cardinal c. Alors il existe un entier $M(\delta, c)$ tel que pour tout groupe δ-hyperbolique (G, S) et tout système générateur fini X de G, le plus petit élément hyperbolique de (G, X) est de longueur majorée par $M(\delta, c)$.

En effet, l'ensemble $\mathcal{A}(\delta, c)$ contient un nombre fini de groupes deux à deux non isomorphes, car, d'après [4, Proposition 4.17], un tel groupe admet une présentation dont les relations sont de longueurs inférieures à $12\delta + 6$. D'autre part la constante $M(G)$ de la proposition 1.3 ne dépend que de la classe d'isomorphisme du groupe G. Il suffit donc de prendre le maximum sur toutes ces classes.

5. Minoration de la croissance.

Dans le reste de l'article, on fixe G un groupe hyperbolique non élémentaire et S un système générateur. On note δ la constante d'hyperbolicité de (G, S). L'espace géodésique δ-hyperbolique E que l'on considère est le graphe de Cayley $E = E_{G,S}$ muni de G lui-même comme groupe d'isométries. On note b_n le cardinal de la boule de rayon n dans (G, S). On montre d'abord le :

THÉORÈME 5.1. — *Soit G un groupe hyperbolique non élémentaire. Il existe un entier N_G tel que pour tout système de générateurs X de G, le groupe G muni de la distance associée à X admette deux éléments de longueur plus petite que N_G qui engendrent librement un groupe libre.*

On obtient ensuite une minoration du taux de croissance indépendante du système générateur de G. Admettons pour l'instant ce théorème pour montrer le théorème 1.1 :

Démonstration du théorème 1.1. — Soit X un système générateur quelconque de G. Le théorème 5.1 donne deux éléments α et β, de longueurs au plus N_G dans le système X, qui engendrent un groupe libre de rang 2.

Pour un entier n, considérons la boule de rayon $n.N_G$ de (G, X). Elle contient les mots réduits (qui représentent des éléments distincts) de longueur au plus n du groupe libre sur (α, β). On a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(B(n.N_G)) &\geqslant 3^n \\ &\geqslant (3^{\frac{1}{N_G}})^{n.N_G}\end{aligned}$$

et il suffit de prendre $c_G = 3^{\frac{1}{N_G}} > 1$. □

La fin de l'article est consacrée à la preuve du thèorème 5.1. On construit les deux éléments cherchés à partir de l'élément fourni par la proposition 1.3.

5.1. Séparation des axes.

DÉFINITION 5.2. — *Soient E un espace δ-hyperbolique. Si K et L sont deux géodésiques, on note (K/L) la longueur du plus long segment de L qui est 8δ-proche de K.*

On aura besoin des résultats suivants :

LEMME 5.3 [3, lemme 3.3, p. 679]. — *Soit G un groupe hyperbolique. Il existe un entier $n_0 = 200\delta[b_{8\delta}^2]!$ tel que, pour tout élément u hyperbolique, u^{n_0} laisse invariante une géodésique et agit sur celle-ci par translation.*

LEMME 5.4. — *Soient u, v deux éléments hyperboliques agissant par translation de même longueur t sur deux géodésiques L_u et L_v. On note $\{u^{-\infty}, u^{+\infty}\}$ l'ensemble limite de u et $\{v^{-\infty}, v^{+\infty}\}$ celui de v. Alors : soit $(L_u/L_v) = \infty$ et $\{u^{-\infty}, u^{+\infty}\} = \{v^{-\infty}, v^{+\infty}\}$; soit $(L_u/L_v) \leqslant t.b_{24\delta} + 50\delta$.*

Démonstration. — Soit D le segment de L_u qui est 8δ-proche de L_v. On le suppose de longueur plus grande que $t.b_{24\delta} + 50\delta$. Quitte à changer u et v en leurs inverses, on peut supposer que les orientations $(u^{-\infty}, u^{+\infty})$ de L_u et $(v^{-\infty}, v^{+\infty})$ de L_v coïncident près de D, et que D n'est pas infini du côté de $u^{-\infty}$. Soient e l'extrémité de D située du côté de $u^{-\infty}$, et $p \in D$ à distance 8δ de e et q sur L_v situé à distance 8δ de p. Considérons les suites de points $p_i = (u^i.p)_{0 \leqslant i \leqslant b_{24\delta}}$ $(p_i \in L_u)$ et $q_i = (v^i.q)_{0 \leqslant i \leqslant b_{24\delta}}$ $(q_i \in L_v)$.

Affirmation : $|p_i - q_i| \leqslant 24\delta$. En effet soit r un point de L_u qui est 8δ-proche de q_i. Alors par inégalité triangulaire $||r-p| - |q_i - q|| \leqslant 16\delta$ ce qui implique $|r - p_i| \leqslant 16\delta$. Ainsi $|p_i - q_i| \leqslant 24\delta$.

Il existe par conséquent $i \neq j$ tels que $p_i^{-1} q_i = p_j^{-1} q_j$. Ainsi si $k = j - i$, on a $k \neq 0$ et $u^k = v^k$. Les isométries u et v ont même ensemble limite et donc $(L_u/L_v) = \infty$. □

5.2. Preuve du théorème 5.1.

Soit maintenant X un système générateur de G. D'après la proposition 1.3, il existe un élément hyperbolique u de G dont la longueur dans le système X est plus petite que M_G. On fabrique à partir de u deux éléments de G de petites longueurs dans le système X qui engendrent librement un groupe libre.

PROPOSITION 5.5. — *Il existe $x \in X$ et un entier n_1 ne dépendant que de G tels que $\alpha = u^{n_1}$ et $\beta = x^{-1}.u^{n_1}.x$ engendrent un groupe libre de rang* 2.

Démonstration. — Comme G n'est pas élémentaire, il existe $x \in X$ tel que x ne stabilise pas $\{u^{-\infty}, u^{+\infty}\}$. Considérons alors les éléments $U = u^{n_0}$ et $V = x^{-1}.u^{n_0}.x$, où n_0 est la constante du lemme 5.3. D'après ce même lemme, U et V stabilisent respectivement deux géodésiques L_U et L_V et agissent par translation de longueur t sur celles-ci. De plus, $t \geqslant \dfrac{n_0}{b_{8\delta}} \geqslant 200\delta$ car la norme stable d'un élément hyperbolique est toujours plus grande que $\dfrac{1}{b_{8\delta}}$ ([13, proposition 3.2, p. 39, claim 2]).

On va appliquer le lemme 2.4 à des puissances bien choisies des isométries U et V. Soit D le segment de L_U qui est 8δ-proche de L_V et l sa longueur. Soit p sur L_U situé au milieu de ce segment, et t la distance de translation de U et V.

D'après le lemme 5.4, on a : $l \leqslant t.b_{24\delta} + 50\delta$. Soit $n_2 = b_{24\delta} + 1$. Les isométries U^{n_2} et V^{n_2} ont pour distance de translation $n_2.t$. Par conséquent

$$\min\{|U^{\pm n_2}.p - p|, |V^{\pm n_2}.p - p|\} \geqslant t.(b_{24\delta} + 1) \geqslant t.b_{24\delta} + 200\delta.$$

D'autre part, la démonstration de [10, lemme 1, p. 653] permet d'affirmer que $2(U^{\pm n_2}.p|V^{\pm n_2}.p)_p \leqslant t.b_{24\delta} + 150\delta$. On en conclut

$$|U^{\pm n_2}.p - V^{\pm n_2}.p| \geqslant \max\{|U^{\pm n_2}.p - p|, |V^{\pm n_2}.p - p|\} + 50\delta.$$

Les autres inégalités à vérifier pour appliquer le lemme 2.4 à U^{n_2} et V^{n_2} sont évidentes. Ces deux isométries engendrent donc un groupe libre de rang 2. Comme $U^{n_2} = u^{n_0 \cdot n_2}$ et $V^{n_2} = x^{-1}.u^{n_0 \cdot n_2}.x$, il suffit de prendre $n_1 = n_0.n_2$. □

Achevons la preuve du théorème 5.1. Soit u l'élément de longueur plus petite que M_G donné par la proposition 1.3. La proposition précédente dit que pour un entier n_1 ne dépendant que de G, les éléments u^{n_1} et $x^{-1}.u^{n_1}.x$

engendrent un groupe libre de rang 2. La longueur de ces éléments est plus petite que $N_G = M_G.n_1 + 2$, qui ne dépend que de G, ce qui achève la preuve du théorème.

Remarque. — Comme au 4.2, la constante N_G peut être choisie de façon à ne dépendre que de δ et c. En effet $n_0 = 200\delta[b_{8\delta}^2]!$, ainsi que $n_2 = b_{24\delta} + 1$ et $n_1 = n_0.n_2$ peuvent être majorés par des fonctions ne dépendant que de ces deux paramètres. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. COORNAERT, T.DELZANT, A. PAPADOPOULOS, Géométrie et théorie des groupes, Lecture Notes in Mathematics, 1441 (1990).

[2] T. DELZANT, Sous-groupes à deux générateurs des groupes hyperboliques, Group Theory from a Geometrical Viewpoint, World Scientific, 1990, 177-189.

[3] T. DELZANT, Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques, Duke Math. J., 83, Vol. 3 (Juin 1996), 661-682.

[4] E. GHYS, P. de la HARPE, Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov, Birkhäuser, Boston, 1990.

[5] R. GRIGORCHUK, On growth in group theory, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. I, II (Kyoto, 1990), 325-338.

[6] R. GRIGORCHUK, P. de la HARPE, On finitely generated groups and problems related to growth, Preprint, Genève, Novembre 1996.

[7] M. GROMOV, Hyperbolic groups, in Essays in Group Theory, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 8, Springer-Verlag, New-York, 1987, 75-263.

[8] S.V. IVANOV, A.Y. OLSHANSKII, Hyperbolic groups and their quotients of bounded exponents, Trans. Amer. Math. Soc., 348, vol 6 (1996), 2091-2138.

[9] R.C. LYNDON, P.E. SCHUPP, Combinatorial group theory, Springer, 1977.

[10] F. PAULIN, Points fixes des automorphismes de groupe hyperbolique, Annales de l'Institut Fourier, 39-3 (1989), 651-662.

[11] G. ROBERT, Invariants topologiques et géométriques reliés aux longueurs des géodésiques et aux sections harmoniques de fibrés, Thèse Institut Fourier (Grenoble), Octobre 1994.

[12] A. SAMBUSETTI, Minimal entropy and simplicial volume, Preprint Institut Fourier (Grenoble), 1997.

[13] H. SHORT, Notes on hyperbolic groups, Group Theory from a Geometrical Viewpoint, World Scientific, 1990, 3-63.

Manuscrit reçu le 26 novembre 1997,
accepté le 6 mai 1998.

Malik KOUBI,
Université Paul Sabatier (Toulouse)
Laboratoire E. Picard U.M.R. 5580
118, route de Narbonne
31045 Toulouse Cedex (France).
koubi@picard.ups-tlse.fr