CHRISTINE HUYGHE

$D^{\dagger}(\infty)$-affinité des schémas projectifs

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 4 (1998), p. 913-956

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_4_913_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 4 (1998), 913–956

$\mathcal{D}^\dagger(\infty)$ - AFFINITÉ DES SCHÉMAS PROJECTIFS

par Christine HUYGHE (*)

Table des matières.

(*) L'auteur bénéficie du soutien du réseau European TMR Network Contract ERB FM RX 960006 "Arithmetic algebraic geometry".
Mots-clés : $\mathcal{D}$-modules arithmétiques – $\mathcal{D}^\dagger(\infty)$-modules – Schémas projectifs – Théorèmes d'annulation pour les $\mathcal{D}$-modules – Coefficients p-adiques.
Classification math. : 14F30 – 14F10 – 14G20.

Introduction.

Soient K un corps de caractéristique 0, X un schéma lisse de type fini sur Spec$K$, $\mathcal{D}$ le faisceau des opérateurs différentiels usuel sur X (16.8 de [7]), et U l'ouvert complémentaire d'un diviseur sur X. Comme l'immersion $j : U \hookrightarrow X$ est affine, le faisceau $j_*\mathcal{D}$ et les $j_*\mathcal{D}$-modules cohérents se comportent cohomologiquement comme sur l'ouvert complémentaire du diviseur. Nous montrons ici un analogue p-adique de cette remarque, dans le cas des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques introduits par P. Berthelot, d'abord pour des schémas formels projectifs lisses, munis d'un diviseur ample, puis pour des schémas formels projectifs et lisses munis d'un diviseur, et qui sont birationnellement équivalents à un schéma projectif du type précédent. L'analogue du faisceau $j_*\mathcal{D}$ sera le faisceau des opérateurs différentiels à singularités surconvergentes le long du diviseur. Ce résultat rapproche le point de vue de Berthelot de celui de Z. Mebkhout et L. Narvaez-Macarro, qui introduisent un faisceau d'opérateurs différentiels sur un schéma faiblement formel de Meredith ([13]). Nous préciserons ce lien en 6.

Soient V un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, d'uniformisante π, K le corps des fractions de V, $\mathcal{S}$ le schéma formel Spf$V$, $\mathcal{X}$ un schéma projectif lisse sur $\mathcal{S}$ de dimension relative N, que l'on munit d'un diviseur relatif ample $\mathcal{Z}$, et $\mathcal{U}$ l'ouvert affine complémentaire du diviseur. Les réductions modulo π de ces schémas seront désignés par respectivement par X_0, U_0, Z_0 et S_0. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module, on notera $\mathcal{F}_{\mathbf{Q}} = \mathcal{F} \underset{V}{\otimes} K$. Dans [4], P. Berthelot construit le faisceau des opérateurs de niveau m sur $\mathcal{X}$: $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. Ce faisceau est filtré par les faisceaux des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant n$ notés $\mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}$. P. Berthelot introduit aussi dans [4] des coefficients $\mathcal{B}^{(m)}$, munis d'une structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-modules, et qui sont définis localement par $\mathcal{B}^{(m)} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T]/(f^{p^{m+1}}T - p)$, si f est une équation locale du diviseur $\mathcal{Z}$. On pose alors, $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty) = \mathcal{B}^{(m)} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ son complété p-adique et $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty) = \varinjlim_{m} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$ qui est le faisceau des opérateurs différentiels à pôles surconvergents le long de $\mathcal{Z}$. Ce faisceau est cohérent à droite et à gauche et on dispose de théorèmes A et B (4.3.6 de [4]). Des exemples de $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$-modules cohérents sont donnés par les images directes par spécialisation des isocristaux sur X_0, surconvergents le long de Z_0, d'après un résultat de P. Berthelot (4.4.12 de [4]). Ces coefficients sont acycliques sur $\mathcal{X}$ d'après le résultat de P. Berthelot de l'appendice de [10]. Nous montrons ici plus généralement que les $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$-

modules cohérents sont acycliques sur $\mathcal{X}$. En outre, les sections globales du faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ forment une algèbre cohérente et il existe une équivalence de catégories naturelle entre les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents et les $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$-modules cohérents. On dira que $\mathcal{X}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-affine si ces deux propriétés sont vérifiées et si on dispose en outre d'un théorème d'acyclicité pour les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents. Nous donnons enfin une version relative du théorème d'acycliclité.

Pour étendre ce résultat d'affinité au cas de certains schémas propres et lisses, nous montrons un théorème d'invariance birationnelle (déjà exposé dans [8]) : si deux schémas munis de diviseurs sont birationnellement équivalents, les foncteurs image directe et inverse pour les modules cohérents sur le faisceau des opérateurs différentiels à pôles surconvergents sont exacts et se réduisent respectivement à l'image directe (comme $\mathcal{O}$-module) et à une extension des scalaires. Ceci généralise un résultat de P. Berthelot pour les isocristaux surconvergents (cf. 2.3.1 de [3]) et permet de généraliser le théorème principal comme annoncé.

Le résultat d'affinité était déjà connu dans le cas de l'espace projectif, vu comme compactification de l'espace affine de dimension N (cf. [9]). Dans ce cas, les sections globales du faisceau d'opérateurs $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ s'identifient à la complétée faible de l'algèbre de Weyl

$$A_N(K)^\dagger = \left\{ \sum_{\underline{l}\in\mathbf{N},\underline{k}\in\mathbf{N}} a_{\underline{l},\underline{k}}\, \underline{x}^{\underline{l}}\, \underline{\partial}_x^{[\underline{k}]} : a_{\underline{l},\underline{k}} \in K \right.$$
$$\left. \text{et } \exists c>0, \eta<1 \ \text{ tels que } \ |a_{\underline{l},\underline{k}}| < c\eta^{|\underline{k}|+|\underline{l}|} \right\},$$

où $x_1,\ldots,x_N$ sont des coordonnées sur l'espace affine et $\underline{\partial}_x^{[\underline{k}]} = \prod \partial_{x_i}^{k_i}/k_i!$ les opérateurs différentiels correspondants. Dans le cas de l'espace projectif, vu comme compactification de $\mathbf{G}_m^N$, le calcul des sections globales du faisceau d'opérateurs $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ se fait de la même façon que dans [9] et ces sections globales s'identifient à

$$B_N(K)^\dagger = \left\{ \sum_{\underline{l}\in\mathbf{Z},\underline{k}\in\mathbf{N}} a_{\underline{l},\underline{k}}\, \underline{x}^{\underline{l}}\, \underline{\partial}_x^{[\underline{k}]} : a_{\underline{l},\underline{k}} \in K \right.$$
$$\left. \text{et } \exists c>0, \eta<1 \ \text{ tels que } \ |a_{\underline{l},\underline{k}}| < c\eta^{|\underline{k}|+|\underline{l}|} \right\},$$

où $x_1,\ldots,x_N$ sont des coordonnées sur $\mathbf{G}_m^N$. On dispose ainsi d'une interprétation géométrique des $B_N(K)^\dagger$-modules cohérents. Notons que cette algèbre contient l'algèbre d'opérateurs aux différences p-adiques sur $\mathbf{G}_m^N$ introduite par F. Loeser ([12]), pour traiter le principe de Boyarski.

Le résultat présenté ici montre en particulier la cohérence des algèbres $A_N(K)^\dagger$ et $B_N(K)^\dagger$, qui sont des résultats assez techniques à établir si l'on procède à la main (la cohérence de $A_N(K)^\dagger$ était déjà traitée dans [13] par Z. Mebkhout and L. Narvaez-Macarro).

Donnons maintenant une idée de la démonstration du théorème principal. Le point essentiel consiste à montrer qu'un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent est acyclique, ce que l'on commence par montrer dans une situation infiniment ramifiée. Soit $V^{(k)} = V[X]/(p^k X - \pi)$ qui est un anneau de valuation discrète complet d'indice de ramification sur V égal à p^k et d'uniformisante π_k, la classe de X. Soit $A = \varinjlim_k V^{(k)}$. L'anneau A est cohérent et il est facile de voir que le faisceau d'opérateurs différentiels $A \otimes_V \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ est un faisceau d'anneaux cohérent. On montre en fait un énoncé d'affinité pour cet anneau $A \otimes_V \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$. L'énoncé analogue pour $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ s'en déduira par fidèle platitude de A sur V.

L'idée de la démonstration du théorème principal est de considérer une filtration croissante de $A \otimes \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ par des faisceaux d'opérateurs différentiels p-adiquement complets $\widehat{\mathcal{E}}^{(m',m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$, et tels que les $\widehat{\mathcal{E}}^{(m',m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents soient acycliques. Cette idée était déjà exploitée dans le cas de l'espace projectif dans 3.2.2 de [10] (et sans extension des scalaires).

Indiquons comment construire les $\widehat{\mathcal{E}}^{(m',m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$. Nous commençons pour cela par une construction générale. Nous introduisons de nouveaux coefficients $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, munis d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-module et qui, sur un ouvert $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{Z} \bigcap \mathcal{U} = V(f)$, sont donnés par : $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}_{|\mathcal{U}}} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}}[T]/(f^{p^{m+1}}T - \pi)$. Soit $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ le complété p-adique de $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}}$. Ces faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ forment un système inductif d'algèbres et comme en 4.2.5 de [4], on peut construire des faisceaux d'opérateurs différentiels $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$. Ces coefficients ont les mêmes propriétés cohomologiques que les coefficients analogues introduits par P. Berthelot (cf. l'appendice de [10]). L'intérêt est que si l'on part d'un $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-module cohérent $\mathcal{E}$, le module $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{E}$ est engendré par ses sections globales à π-près dès que m' est assez grand. Fixons un tel m' tel que les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X},n}$ soient engendrés par leurs sections globales à π-près pour tout $n \leqslant p^m$ et posons $\xi = \pi^{N+2}$. Le sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}}$-algèbres de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ engendré par les $\xi^i \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X},i})$ pour $i \leqslant p^m$ forme un sous-faisceau d'opérateurs différentiels noté $\mathcal{E}^{(m',m)}_{\mathcal{X}}$. Le point clé est que ce faisceau est filtré de telle façon que l'algèbre graduée associée soit commutative et un quotient d'une algèbre symétrique du type $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \otimes \mathbf{S}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^a)$. Cette propriété de l'algèbre graduée est analogue au fait que sur l'espace projectif l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{D}^{(m)}$ est un quotient d'une algèbre symétrique d'une somme directe de faisceaux amples, utilisée dans [10]. Le premier corollaire est la cohérence du faisceau complété $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$ du faisceau $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$. En outre, des arguments identiques à ceux utilisés dans [10] permettent de montrer que les $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m',m)}$-modules cohérents sont acycliques. De même, on montre qu'il y a une équivalence de catégories naturelles entre les $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m',m)}$-modules cohérents et leurs sections globales.

Notons maintenant $\mathcal{S}^{(k)} = \mathrm{Spf} V^{(k)}$, $\mathcal{X}^{(k)} = \mathcal{S}^{(k)} \times \mathcal{X}$ et f_k la projection $\mathcal{X}^{(k)} \to \mathcal{X}$. Pour un entier κ et une suite croissante d'entiers convenable (u_m), on considère $\widehat{\mathcal{E}}^{(m)} = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}^{(m+\kappa)},\mathbf{Q}}^{(u_m,m)}$. On dispose d'un homomorphisme d'anneaux injectif canonique $\varinjlim_m \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)} \hookrightarrow A \underset{V}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\infty)$. En 5.2.3, on construit explicitement une section à cette application, ce qui montre que c'est un isomorphisme. La propriété d'acyclicité des $A \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\infty)$-modules cohérents se déduit alors de celle des $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)}$-modules cohérents. De même, il existe une équivalence de catégories naturelle entre les $A \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\infty)$-modules cohérents et leurs sections globales qui sont des $\Gamma(\mathcal{X}, A \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\infty))$-modules cohérents. On déduit de cela le théorème de $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\infty)$-affinité de $\mathcal{X}$.

Le point clef de la démonstration du théorème d'invariance birationnelle est la cohérence par image inverse par un morphisme birationnel f entre deux schémas $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{X}$, munis de diviseurs. On montre, via un lemme de géométrie rigide et des estimations p-adiques, que le faisceau qui permet de calculer l'image inverse s'identifie au faisceau des opérateurs différentiels (sur $\mathcal{Y}$), à pôles surconvergents le long du diviseur.

Je remercie Pierre Berthelot pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail et ses remarques pertinentes lors d'un exposé sur cet article : j'espère que le texte qui suit y a gagné en clarté.

1. Préliminaires.

1.1. Notations.

Nous reprenons ici les notations du début de l'introduction. On notera de plus k le corps résiduel de V, $V_i = V/\pi^i$, S_i le schéma $\mathrm{Spec} V_i$ et $\mathcal{X}$

un schéma formel projectif et lisse sur $\mathcal{S}$, de dimension relative N. Nous noterons $X_i = S_i \times_{\mathcal{S}} \mathcal{X}$ et γ_i l'immersion fermée $X_i \hookrightarrow \mathcal{X}$.

Par hypothèse, $\mathcal{X}$ est muni d'un diviseur relatif ample $\mathcal{Z}$, ce qui signifie que pour tout $i \in \mathbf{N}$, $\mathcal{Z} \times X_i$ est un diviseur ample de X_i. Il existe alors un plongement $\imath$ dans un espace projectif formel $\mathcal{Y}$ de dimension M tel que, si $[y_0, \cdots, y_M]$ sont les coordonnées projectives sur $\mathcal{Y}$, le diviseur $\mathcal{Z}$ s'identifie à $\imath^{-1}(V(y_0))$.

Notons $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1)$ le twist de Serre sur $\mathcal{Y}$. Le faisceau $\imath^*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1)$ sera noté $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(1)$ et s'identifie au faisceau inversible associé au diviseur $\mathcal{Z}$: $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Si $r \in \mathbf{N}$, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(r)$ sera le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(1)^{\otimes r}$ et si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module, le faisceau $\mathcal{E}(r)$ sera le faisceau $\mathcal{E} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(r)$.

Lorsqu'il sera nécessaire de préciser le diviseur, le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ sera noté $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$.

Si $\mathcal{A}$ est un faisceau de V-algèbres, $D^-_{\mathrm{coh}}(\mathcal{A})$ (resp. $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{A})$, $D^-_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A})$, $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A})$) sera la sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-modules à gauche cohérents (resp. parfaits) qui sont à cohomologie bornée supérieurement (resp. bornée). On rappelle qu'un $\mathcal{A}$-module est parfait s'il admet localement une résolution à degrés bornés et à termes localement projectifs de type fini. Si $\mathcal{A}$ est de dimension cohomologique finie, les notions de cohérence et de perfection coïncident.

1.2. Description locale des opérateurs différentiels sur $\mathcal{X}$.

Nous aurons besoin d'une description en coordonnées locales des faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$. Pour les justifications des affirmations qui suivent, nous renvoyons à [4]. Si k est un entier, $v_p(k)$ est sa valuation p-adique et $q_k^{(m)}$ désigne le quotient de la division euclidienne de k par p^m. Si $\underline{k} = (k_1, \cdots, k_N)$ est un multi-indice, on note

$$q_{\underline{k}}^{(m)}! = \prod_i q_{k_i}^{(m)}!.$$

Si $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathcal{X}$ muni de coordonnées locales $x_1, \cdots, x_N$, le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{V}}$ est le $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$-module libre de base les

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}} = \prod_i \partial_{x_i}^{\langle k_i \rangle_{(m)}},$$

où les opérateurs $\partial_{x_i}^{\langle k_i \rangle_{(m)}}$ vérifient la relation

$$\frac{k_i!}{q_{k_i}^{(m)}!}\partial_{x_i}^{\langle k_i \rangle_{(m)}} = \partial_{x_i}^{k_i},$$

l'opérateur ∂_{x_i} étant la dérivation usuelle par rapport à x_i. Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{V},n}^{(m)}$ est le $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}$-module libre de base les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}$ avec $|\underline{k}| \leqslant n$. L'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{D}_{\mathcal{V}}^{(m)}$ est engendrée par les classes des éléments $\partial_{x_i}^{\langle p^j \rangle_{(m)}}$ pour $j \leqslant m$ (2.2.5 de [4]). Nous utiliserons aussi les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcccl}
\dfrac{|\underline{k}|}{p-1} - N\log_p(|\underline{k}|+1) - N & \leqslant & v_p(\underline{k}!) & \leqslant & \dfrac{|\underline{k}|}{p-1}, \\
\dfrac{|\underline{k}|}{p^m(p-1)} - N\log_p(|\underline{k}|+1) - \dfrac{Np}{p-1} & \leqslant & v_p(q_{\underline{k}}^{(m)}!) & \leqslant & \dfrac{|\underline{k}|}{p^m(p-1)}.
\end{array}$$

2. Les coefficients $\widehat{\mathcal{B}}$.

Introduisons V, k, $\mathcal{S}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Z}$ comme en 1.1 et S le $\mathbf{Z}_{(p)}$-schéma Spec$V$. Nous définissons les coefficients $\mathcal{B}$ pour un $\mathcal{S}$-schéma formel lisse $\mathcal{X}$ mais il va de soi que les énoncés et définitions qui suivent s'adaptent au cas d'un S-schéma lisse.

2.1. Définitions.

Définition 2.1.1. — Soient $f \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ et r un entier multiple de p^{m+1}. On pose $\mathcal{B}(f,r) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T]/(f^rT - \pi)$. Nous avons alors un énoncé identique à la proposition 4.2.1 de [4].

Proposition 2.1.2. — (i) *Il existe sur $\mathcal{B}(f,r)$ une structure canonique de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module compatible avec sa structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre.*

(ii) *Si $g \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ et $f' = gf$, l'homomorphisme*

$$\rho_g : \mathcal{B}(f,r) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T]/(f^rT - \pi) \to \mathcal{B}(f',r) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}[T']/(f'^rT' - \pi),$$

défini par $\rho_g(T) = g^rT'$ est $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-linéaire.

(iii) *Si r est un multiple de $p^{m'+1}$ avec $m' \geqslant m$, la structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module de $\mathcal{B}(f,r)$ est induite par sa structure de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m')}$-module.*

La démonstration est la même que celle de 4.2.1 de [4]. Pour la définition des objets nous renvoyons à [4]. Soit $\mathcal{P}_{\mathcal{X},(m)}^n$ le voisinage à puissances divisées partielles de niveau m de $\mathcal{X}$. Pour montrer (i) il faut définir une m-PD-stratification, i.e. des isomorphismes de $\mathcal{P}^n_{\mathcal{X},(m)}$-algèbres ε_n :

$$\mathcal{P}^n_{\mathcal{X},(m)} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{B}(f,r) \simeq \mathcal{B}(f,r) \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{P}^n_{\mathcal{X},(m)},$$

vérifiant une condition de cocycle. Par fonctorialité, on se ramène au cas des S-schémas et au cas où $X = \mathrm{Spec} V[t]$ et $f(t) = t$. Soient $t_1 = t \otimes 1$, $t_2 = 1 \otimes t \in \mathcal{O}_{X \times X}$ et A la m-PD-algèbre polynomiale $A = V[t_1]\langle t_2 - t_1 \rangle_{(m)}$. Si I est le m-PD-idéal de cette algèbre et $I^{\{n\}}$ la filtration m-PD-adique, l'algèbre $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$ s'identifie à $A/I^{\{n+1\}}$. On définit ensuite un élément $\varphi_r^{(m)}(t_1,t_2) \in I$ par la relation $\pi\varphi_r^{(m)}(t_1,t_2) = t_2^r - t_1^r$, $T_2 = 1 \otimes T \in \mathcal{P}^n_{X,(m)} \otimes \mathcal{O}_X[T]$, $T_1 = T \otimes 1 \in \mathcal{O}_X[T] \otimes \mathcal{P}^n_{\mathcal{X},(m)}$ et un homomorphisme ε_n de (m)-PD-algèbres :

$$\mathcal{P}^n_{X,(m)} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_X[T]/(t^rT - \pi) \to \mathcal{O}_X[T]/(t^rT - \pi) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{P}^n_{X,(m)},$$

par la formule $\varepsilon_n(T_2) = T_1(1 + T_1\varphi_r^{(m)}(t_1,t_2))^{-1}$, ce qui a un sens car $\varphi_r^{(m)}(t_1,t_2)$ est nilpotent dans $\mathcal{P}^n_{X,(m)}$.

L'égalité $\varphi_r^{(m)}(t_1,t_2)+\varphi_r^{(m)}(t_2,t_3) = \varphi_r^{(m)}(t_1,t_3)$ entraîne la condition de cocycle . Les assertions (ii) et (iii) se montrent de façon identique à ce qui est fait dans [4].

Les applications ρ_g données en (ii) de la proposition permettent de définir par recollement le faisceau $\mathcal{B}(\mathcal{Z},p^{m+1})$ si $\mathcal{Z}$ est un diviseur relatif de $\mathcal{X}$. Dans la suite, nous noterons $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}} = \mathcal{B}(\mathcal{Z},p^{m+1})$ si le diviseur $\mathcal{Z}$ est fixé. D'après le (ii) de la proposition, ce faisceau est muni d'une action de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$. Il découle de (iii) que l'on dispose de morphismes de faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-linéaires : $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{B}^{(m')}_{\mathcal{X}}$ pour $m' \geqslant m$.

Soit $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ l'algèbre complétée de $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}}$. Cette algèbre est cohérente, à sections noethériennes sur les ouverts affines et hérite d'une structure de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-module compatible avec la structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre. En outre, on dispose d'homomorphismes d'anneaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-linéaires $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}}$, pour $m' \geqslant m$. En fait, nous ne considérerons dans la suite que la structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-module de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, qui est a fortiori compatible avec la structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, et telle que les flèches $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}}$ soient $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-linéaires.

2.2. Opérateurs différentiels à coefficients $\widehat{\mathcal{B}}$.

D'après la formule de Leibnitz pour les opérateurs différentiels, l'action du faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ sur $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}}$ permet de munir le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ d'une structure de faisceau d'anneaux pour tout $m' \geqslant m$ (cf. 2.3.5 de [4]). Ce faisceau d'anneaux est muni d'une filtration par l'ordre des opérateurs différentiels déduite de celle de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ et le gradué associé à cette filtration est noethérien sur les ouverts affines. La famille des ouverts affines sur lesquels $\mathcal{Z}$ est défini par une équation locale est une base d'ouverts de $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ sont deux tels ouverts,

$$\mathcal{B}^{(m)}_{X_i}(\mathcal{V}) = \mathcal{O}_{X_i}(\mathcal{V}) \underset{\mathcal{O}_{X_i}(\mathcal{U})}{\otimes} \mathcal{B}^{(m)}_{X_i}(\mathcal{U}),$$

et les algèbres $\mathcal{B}^{(m)}_{X_i}(\mathcal{V})$ sont plates sur $\mathcal{B}^{(m)}_{X_i}(\mathcal{U})$. Il en est de même des algèbres complétées.

Ceci permet de voir que les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ vérifient les hypothèses de 3.1.2 de [4] et qu'ils sont cohérents à droite et à gauche. On dispose d'autre part pour $m_1 \geqslant m$ et pour $m'_1 \geqslant \max\{m_1, m'\}$ d'homomorphismes de faisceaux d'anneaux : $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(m'_1)}_{\mathcal{X}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}^{(m_1)}_{\mathcal{X}}$. La structure de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}}$-module de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ sera toujours donnée par la multiplication à gauche sur ce faisceau d'anneaux.

2.3. Propriétés des $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérents.

Replaçons-nous dans la situation de 1.1. Si μ est la multiplication par $y_0^{p^{m+1}}$, il existe une suite exacte analogue à A.2 de [10] :

$$0 \to \mathbf{S}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(p^{m+1})) \overset{\mu-\pi}{\to} \mathbf{S}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(p^{m+1})) \to \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}} \to 0.$$

Les résultats établis par P. Berthelot dans l'appendice de [10] restent donc valables dans notre situation. Les énoncés qui suivent sont aussi vrais pour les $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-modules cohérents. En particulier, nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3.1. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\hat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-module cohérent. Alors :*

(i) *Il existe des entiers r et a_r tels que l'on ait un homomorphisme surjectif*

$$\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(-r)^{a_r} \to \mathcal{E}.$$

(ii) *Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{H}^n(\mathcal{X},\mathcal{E})$ est un V-module de type fini de torsion.*

(iii) *Il existe un entier r_0 tel que pour tout entier $r \geqslant r_0$ et tout $k \geqslant 1$ on ait $\mathrm{H}^k(\mathcal{X},\mathcal{E}(r)) = 0$.*

Nous utiliserons aussi une propriété de finitude des sections globales d'un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module cohérent. Un calcul analogue à celui effectué dans 3.1.1.3 de [8] montre que $\Gamma(\mathcal{Y},\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}^{(m)})$ est noethérien, et donc aussi $\Gamma(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)})$. Ce calcul montre aussi que l'algèbre $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$ vérifie la condition (D) énoncée en 4.1 de [10]. Un corollaire est que si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-module cohérent, $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})$ est de type fini sur $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}^{(m)})$ (4.1.2 de [10]). À partir de là, de ce qui est fait dans [10] sur la finitude des sections globales, des propriétés cohomologiques des $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$ et des $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-modules cohérents, il n'est pas difficile d'en déduire que si $\mathcal{E}$ est un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-module cohérent, $\Gamma(\mathcal{Y},\mathcal{E})$ est un $\Gamma(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)})$-module de type fini. En particulier, $\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ est une algèbre finie sur $\Gamma(\mathcal{Y},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)})$ puisque $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \simeq \imath^*\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$. Finalement, on obtient la proposition :

Proposition 2.3.2 — *Si $\mathcal{E}$ est un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module cohérent, $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{E})$ est un $\Gamma(\mathcal{X},\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$-module de type fini.*

Ajoutons l'énoncé suivant.

Proposition 2.3.3 — *Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module cohérent. Il existe alors un entier $m_1 \geqslant m$ tel que, pour tout entier $m' \geqslant m_1$, il existe une suite exacte de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$-modules cohérents :*

$$(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')})^a \to \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \underset{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}}{\otimes} \mathcal{E} \to \mathcal{C}_{m'} \to 0,$$

où a est un entier et $\pi\mathcal{C}_{m'} = 0$.

Démonstration. — Il suffit de montrer l'énoncé pour un $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-module cohérent puisque $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \simeq \imath^*\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$. D'après la proposition 2.3.1, il suffit de montrer le résultat pour $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(-r)$ avec $r \in \mathbf{Z}$. Comme le faisceau $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(-r)$ est engendré par ses sections globales comme $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}$-module si r est négatif, on peut supposer que r est strictement positif. Soit U_l l'ouvert $D_+(y_l)$. On calcule

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(U_l) \simeq V\left\{\frac{y_k}{y_l}\right\}_{k\neq l}\left\{\pi\left(\frac{y_l}{y_0}\right)^{p^{m+1}}\right\}.$$

En outre, le module $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(-r)(U_l)$ est le $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m)}(U_l)$-module libre de base $\dfrac{1}{y_l^r}$. Supposons maintenant que $m' \geqslant \max\{\log_p(r)-1, m\}$ (i.e. $p^{m'+1} \geqslant r$), alors

$$\frac{\pi}{y_0^r} = \pi \left(\frac{y_l}{y_0}\right)^{p^{m'+1}} \left(\frac{y_0}{y_l}\right)^{p^{m'+1}-r} \frac{1}{y_l^r} \in \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m')}(-r)(U_l).$$

Comme ceci est vrai pour tout l, l'élément $\dfrac{\pi}{y_0^r}$ se prolonge en un élément de $\Gamma(\mathcal{Y}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m')})$ et définit un morphisme $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m')}$-linéaire $\sigma : \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m')} \to \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m')}(-r)$. On voit facilement sur chaque U_l que ce morphisme est injectif. De plus, sur U_l, $\dfrac{\pi}{y_l^r} = \left(\dfrac{y_0}{y_l}\right)^r \dfrac{\pi}{y_0^r}$, de sorte que le conoyau de σ est annulé par π. D'où finalement l'assertion.

3. Construction des algèbres $\mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel comme en 1.1. Nous indiquons ici la construction des algèbres d'opérateurs différentiels décrits dans l'introduction. Donnons d'abord une construction à m fixé.

3.1. Construction du préfaisceau d'algèbres d'opérateurs différentiels $\mathcal{A}$.

Dans la situation générale de 1.1 nous construisons ici, pour m' assez grand, un sous-faisceau d'anneaux du faisceau d'opérateurs différentiels $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. Ce sous-faisceau est filtré et le gradué associé à cette filtration est un quotient d'une algèbre du type $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathbf{S}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^a)$ pour un certain entier a.

3.1.1. Préliminaires.

Soient $\mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant n$, et n_0 un entier. D'après la proposition 2.4.3, il existe $m' \geqslant m$ tel que pour tout $n \leqslant n_0$, les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}$ soient engendrés par leurs sections globales à π près. En particulier, pour tout $n \leqslant n_0$, il existe des suites exactes de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$-modules

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \underset{\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')})}{\otimes} \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}) \to \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)} \to \mathcal{C}_n \to 0,$$

où $\pi\mathcal{C}_n = 0$. Dans la suite, nous supposerons que m' est fixé, vérifiant cette propriété, et nous noterons $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$, $\mathcal{D}(\infty) = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, $\mathcal{D}_n(\infty) = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}$, $B = \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}})$.

3.1.2. Définitions.

Comme $\mathcal{D}(\infty)$ est sans torsion, car c'est un faisceau localement libre sur $\widehat{\mathcal{B}}$, qui est sans torsion (lemme 4.3.3 de [4]), c'est aussi le cas de $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}(\infty))$. Notons $\xi = \pi^{N+2}$, $\Delta_i = \xi^i\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_i(\infty))$ pour $i \geqslant 0$ et $\Delta_i = B$ pour $i \leqslant 0$.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathcal{X}$ et $l_{\mathcal{U}}$ l'application de restriction $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}(\infty)) \to \mathcal{D}(\infty)(\mathcal{U})$. Quand il n'y aura pas d'ambiguités, cette application sera simplement notée l. Soit maintenant $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ la sous-$\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-algèbre de $\mathcal{D}(\infty)(\mathcal{U})$ engendrée par $l_{\mathcal{U}}(\Delta_0) + \cdots + l_{\mathcal{U}}(\Delta_{n_0})$. Les $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ forment un préfaisceau et, comme groupe abélien, $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ est engendré par les éléments $P_1 \cdots P_s$, avec $s \in \mathbf{N}$ et $P_i \in l(\Delta_1) \bigcup \cdots \bigcup l(\Delta_{n_0}) \bigcup \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$.

Si K et H sont deux parties de $\mathcal{A}(\mathcal{U})$, on note $K{\cdot}H$ le sous-groupe abélien engendré par les $P{\cdot}Q$ avec $(P, Q) \in K \times H$.

Lemma 3.1.2.1 — *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert affine de $\mathcal{X}$ et i, j deux entiers $\leqslant n_0$. Alors :*

(i) $[\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}), l(\Delta_i)] \subset \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}){\cdot}l(\Delta_{i-1})$,

(ii) $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}){\cdot}l(\Delta_i){\cdot}\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}){\cdot}l(\Delta_j) \subset \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}){\cdot}l(\Delta_i){\cdot}l(\Delta_j) + \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}){\cdot}l(\Delta_{i-1}){\cdot}l(\Delta_j)$.

Démonstration. — Montrons d'abord (i) : pour $i \in \{0, 1\}$, l'assertion est claire. Supposons que $i \geqslant 2$. Soient P un opérateur de Δ_i et $b \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$. L'opérateur P peut s'écrire $P = \xi^i Q$ où Q est une section globale de $\mathcal{D}_i(\infty)$. L'opérateur $[l(Q), b]$ est dans $\mathcal{D}_{i-1}(\infty)(\mathcal{U})$ de sorte que d'après les suites exactes données en 3.1.1, $\pi[l(Q), b]$ est dans $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}){\cdot}l(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{i-1}(\infty)))$. On en déduit que $\xi^i[l(Q), b]$ est dans $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}){\cdot}l(\Delta_{i-1})$, c'est-à-dire que $[l(P), b] \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}){\cdot}l(\Delta_{i-1})$.

Le (ii) résulte immédiatement de (i) d'après la formule suivante. Si $(P, b) \in \Delta_i \times \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$ on a l'égalité : $l(P)b = bl(P) + [l(P), b] \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})l(\Delta_i) + \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}){\cdot}l(\Delta_{i-1})$.

Posons $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ le $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-module engendré par les produits $P_1 \cdots P_s$ avec $s \in \mathbf{N}$ et $P_i \in l(\Delta_1) \bigcup \cdots \bigcup l(\Delta_{n_0})$.

PROPOSITION 3.1.2.2. — *Si $\mathcal{U}$ est un ouvert affine de $\mathcal{X}$, on a l'égalité $\mathcal{R}(\mathcal{U}) = \mathcal{A}(\mathcal{U})$.*

Démonstration. — Le $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-module $\mathcal{R}(\mathcal{U})$ est naturellement inclus dans $\mathcal{A}(\mathcal{U})$. Comme ce module contient tous les $l(\Delta_i)$, il suffit de montrer que c'est en fait une $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-algèbre. Par linéarité, il suffit de montrer que les produits $aP_1 \cdots P_n bQ_1 \cdots Q_{n'}$ avec $a, b \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$, $P_i \in l(\Delta_{r_i})$, $Q_j \in l(\Delta_{s_j})$, pour $i \leqslant n$ et $j \leqslant n'$, sont dans $\mathcal{R}(\mathcal{U})$. On procède pour cela par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est clair. Écrivons ensuite l'égalité

$$(*) \qquad aP_1 \cdots P_n bQ_1 \cdots Q_m = aP_1 \cdots P_{n-1}([P_n, b] + bP_n)Q_1 \cdots Q_m.$$

D'après le lemme précédent, l'opérateur $[P_n, b]$ est dans $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) \cdot l(\Delta_{r_i - 1})$ et on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence.

3.1.3. Filtration d'anneaux du préfaisceau $\mathcal{A}$.

Étant donné des entiers s, n on définit $\Omega_{s,n} = \{\underline{r} \in \{1, \ldots, n_0\}^s$ tels que $|\underline{r}| \leqslant n\}$. Soit $\mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ le sous-$\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-module de $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ engendré par

$$\{P_1 \cdots P_s,\ s \in \mathbf{N},\ \text{tels que } \forall i \leqslant s,\ P_i \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) \cdot l(\Delta_{r_i}) \text{ et } \underline{r} \in \Omega_{s,n}\}.$$

Les groupes $\mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ définissent un préfaisceau $\mathcal{A}_n$ de $\widehat{\mathcal{B}}$-modules et $\mathcal{A}_n$ est un sous-préfaisceau de $\mathcal{A}_{n+1}$. Le préfaisceau $\mathcal{A}_0$ s'identifie au faisceau des coefficients $\widehat{\mathcal{B}}$.

Il est clair que $\mathcal{A}_n(\mathcal{U}) \cdot \mathcal{A}_{n'}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{A}_{n+n'}(\mathcal{U})$, si bien que le préfaisceau de modules gradués $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{A}_{n+1}(\mathcal{U}) / \mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ est un préfaisceau de $\widehat{\mathcal{B}}$-algèbres.

Cette filtration ne coïncide pas a priori avec la filtration induite par l'ordre des opérateurs différentiels. Cependant, le préfaisceau $\mathcal{A}_n$ est un sous-préfaisceau de $\mathcal{D}_n(\infty)$.

LEMME 3.1.3.1. — *Si $\mathcal{U}$ est un ouvert affine de $\mathcal{X}$, $\mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ est le sous-$\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-module de $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ engendré par $\{P_1 \cdots P_s,\ s \in \mathbf{N},$ tels que $\forall i \leqslant s,\ P_i \in l(\Delta_{r_i})$ et $\underline{r} \in \Omega_{s,n}\}$.*

La démonstration de ce fait résulte du (ii) de 3.1.2.1.

Fixons maintenant $n_0 = p^m$ et deux entiers i et j, inférieurs à p^m. L'entier p^m intervient ici car le faisceau $\mathcal{D}(\infty)$ est engendré par les opérateurs d'ordre inférieur ou égal à p^m, comme $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-algèbre. On utilise ce fait dans la proposition suivante pour voir que le gradué du préfaisceau $\mathcal{A}$ est commutatif.

Lemme 3.1.3.2. — *Si $\mathcal{U}$ est un ouvert affine de $\mathcal{X}$ muni de coordonnées locales, on a les inclusions :*

(i) $[l(\Delta_i), l(\Delta_j)] \subset \mathcal{A}_{i+j-1}(\mathcal{U})$,

(ii) $[\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\cdot l(\Delta_i), \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\cdot l(\Delta_j)] \subset \mathcal{A}_{i+j-1}(\mathcal{U})$.

Démonstration. — Commençons par (i). D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que

$$[l(\Delta_i), l(\Delta_j)] \subset \Sigma_{s\leqslant i+j-1}\Sigma_{\underline{r}\in\Omega_{s,i+j-1}}\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\cdot l(\Delta_{r_1})\cdot\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\cdot l(\Delta_{r_2}) \cdots \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\cdot l(\Delta_{r_s}).$$

Soient $(P,Q) \in \Delta_i \times \Delta_j$ et $(P',Q') \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_i(\infty)) \times \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_j(\infty))$ tels que $P = \xi^i l(P')$ et $Q = \xi^j l(Q')$. Le commutateur $[l(P'), l(Q')]$ est dans $\mathcal{D}_{i+j-1}(\infty)$. D'après 2.2.5 de [4], tout opérateur de $\mathcal{D}_n(\infty)(\mathcal{U})$ s'écrit comme somme de produits d'au plus $[n/p^m] + N$ opérateurs d'ordre $\leqslant p^m$, ($[n/p^m]$ désigne ici la partie entière de n/p^m). En particulier, $[l(P'), l(Q')]$, qui est d'ordre $\leqslant 2p^m$, se décompose :

$$[l(P'), l(Q')] = \sum_{|\underline{k}|=N+2} b_{\underline{k}} P_{k_1} \cdots P_{k_s},$$

où $b_{\underline{k}} \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$, les opérateurs P_{k_i} sont d'ordre r_i et tels que $|\underline{r}| \leqslant i + j - 1$. Chaque opérateur πP_{k_i} se trouve dans $\mathcal{B}(\mathcal{U})\cdot\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{r_i}(\infty))$. On voit ainsi que

$$\pi^{N+2}[l(P'), l(Q')] \in \sum_{|\underline{r}|\leqslant i+j-1} \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\cdot\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{r_1}(\infty)) \cdots \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\cdot\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{r_s}(\infty)),$$

et finalement que

$$[P, Q] = \xi^{i+j}[l(P'), l(Q')] \in \sum_{|\underline{r}|\leqslant i+j-1} \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\cdot l(\Delta_{r_1}) \cdots \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})\cdot l(\Delta_{r_s}),$$

d'où le (i).

Soient maintenant $a, b \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$, P et Q des opérateurs de $\mathcal{D}(\infty)$. On a alors la formule

$$[aP, bQ] = ab[P, Q] + a[P, b]Q + b[a, Q]P.$$

Le (ii) du lemme résulte donc du (i) et du (i) du lemme 3.1.2.1.

Proposition 3.1.3.3. — *Si $\mathcal{U}$ est un ouvert affine de χ muni de coordonnées locales, on a l'inclusion*

$$[\mathcal{A}_n(\mathcal{U}), \mathcal{A}_{n'}(\mathcal{U})] \subset \mathcal{A}_{n+n'-1}(\mathcal{U}).$$

Cette proposition implique que l'algèbre graduée $\bigoplus_n \mathcal{A}_{n+1}(\mathcal{U})/\mathcal{A}_n(\mathcal{U})$ est une $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-algèbre commutative. Nous noterons désormais ce préfaisceau $\mathrm{gr}_\bullet \mathcal{A}$.

Démonstration. — Il suffit pour cela de vérifier que $[aP_1 \cdots P_s, bQ_1 \cdots Q_{s'}]$, avec $a, b \in \widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$, $P_i \in l(\Delta_{r_i})$ pour $i \leqslant s$, $Q_j \in l(\Delta_{r'_j})$ pour $j \leqslant s'$, se trouve dans $\mathcal{A}_{|\underline{r}|+|\underline{r}'|-1}$. On établit cette propriété d'abord dans le cas où s est égal à 1 et s' quelconque, en raisonnant par récurrence sur s', puis pour s fixé et s' quelconque, en procédant par récurrence sur s.

Le cas où s et s' sont égaux à 1 provient du lemme précédent. Ensuite, pour tout $s' \geqslant 2$, on a la formule suivante :

$$[aP_1, bQ_1 Q_2 \cdots Q_{s'}] = bQ_1[aP_1, Q_2 \cdots Q_{s'}] + [aP_1, bQ_1]Q_2 \cdots Q_{s'}.$$

Par récurrence sur s', on en déduit le cas $s = 1$. Le passage de s à $s+1$, pour s' quelconque, se déduit d'une formule analogue.

3.2. Faisceaux d'algèbres d'opérateurs différentiels $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$.

3.2.1. Définitions.

Fixons un entier m et soit m' un entier tel que les faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X},n}^{(m)}$ soient engendrés par leurs sections globales à π près pour tout $n \leqslant p^m$. On définit alors $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$ le faisceau sur $\mathcal{X}$ associé au préfaisceau $\mathcal{A}$ correspondant à m et m' introduit en 3.1.2. De même, les faisceaux $\mathcal{E}_{\mathcal{X},n}^{(m',m)}$ sont les faisceaux associés aux préfaisceaux $\mathcal{A}_n$ introduits en 3.1.3. On introduit enfin les faisceaux $\mathcal{E}_{X_i}^{(m',m)} = \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}/\pi^i\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$,

$$\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)} = \varprojlim_i \mathcal{E}_{X_i}^{(m',m)}.$$

Dans les démonstrations nous noterons $\widehat{\mathcal{B}} = \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$, $B = \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}})$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$, $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{\mathcal{X},n}^{(m',m)}$, $\mathcal{E}_{X_i} = \mathcal{E}_{X_i}^{(m',m)}$ et $\widehat{\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$.

3.2.2. Cohérence des algèbres complétées $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m',m)}$.

Les faisceaux $\mathcal{E}_{\mathcal{X},n}^{(m',m)}$ sont des $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$-modules cohérents comme faisceaux image d'homomorphismes de $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$-modules cohérents. D'autre part, il existe un homorphisme canonique $\varinjlim_n \mathcal{E}_{\mathcal{X},n}^{(m',m)} \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$, qui est un isomorphisme au niveau des germes et est donc un isomorphisme. On déduit des applications produits $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ une structure de faisceau d'anneaux sur $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$. La filtration par les $\mathcal{E}_{\mathcal{X},n}^{(m',m)}$ est une filtration d'anneaux dont le gradué associé est le faisceau associé au préfaisceau $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{A}$. Il résulte de la proposition 3.1.3.3 que le morphisme canonique

$$\mathcal{E}_{\mathcal{X},n}^{(m',m)}\times\mathcal{E}_{\mathcal{X},n'}^{(m',m)}\to\mathcal{E}_{\mathcal{X},n+n'}^{(m',m)}/\mathcal{E}_{\mathcal{X},n+n'-1}^{(m',m)}$$

est nul au niveau des germes et donc qu'il est nul. La $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$-algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}^{(m',m)}$ est donc commutative.

PROPOSITION 3.2.2.1. — *Il existe un entier a, une algèbre graduée $\tilde{\mathbf{S}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^a)$ dont l'algèbre sous-jacente est isomorphe à $\mathbf{S}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^a)$, dont les composantes homogènes sont libres de rang fini sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, et telle qu'on ait une surjection graduée $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$-linéaire*

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m')}\underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes}\tilde{\mathbf{S}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^a)\to\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}\to 0.$$

Démonstration. — Reprenons les notations de 3.1.2. Les modules Δ_i sont des B-modules de type fini d'après la proposition 2.4.2. Il existe des entiers s, $a=p^m s$ et des générateurs $P_{i,1},\cdots,P_{i,s}$ des modules Δ_i pour tout $i\leqslant p^m$. Soient $Q_{i,j}$ la classe de $l(P_{i,j})$ dans $\mathcal{A}_i(\mathcal{X})/\mathcal{A}_{i-1}(\mathcal{X})$ et $\{T_{i,j}\}_{0\leqslant i\leqslant p^m, j\leqslant s}$ des indéterminées. On en déduit une application $\widehat{\mathcal{B}}$-linéaire

$$\begin{array}{ccccc}\widehat{\mathcal{B}}\underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes}\oplus\mathcal{O}_{\mathcal{X}}T_{i,j} & \to & \mathrm{gr}_\bullet\mathcal{A} & \to & \mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}\\ T_{i,j} & \mapsto & Q_{i,j}, & & \end{array}$$

qui induit un homomorphisme de faisceaux

$$\widehat{\mathcal{B}}\underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes}\mathbf{S}(\oplus\mathcal{O}_{\mathcal{X}}T_{i,j})\xrightarrow{\lambda}\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E},$$

et pour tout ouvert affine $\mathcal{U}$ muni de coordonnées locales, un homomorphisme d'anneaux

$$\widehat{\mathcal{B}}\otimes\mathbf{S}(\oplus\mathcal{O}_{\mathcal{X}}T_{i,j})(\mathcal{U})\ \xrightarrow{\lambda'_{\mathcal{U}}}\ \mathrm{gr}_\bullet\mathcal{A}(\mathcal{U})\ \to\ \mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}(\mathcal{U}).$$

Sur un tel ouvert, un élément de $\mathrm{gr}_n\mathcal{A}(\mathcal{U})$ s'écrit comme somme d'éléments $a\overline{P}_1\ldots\overline{P}_t$ où P_i est la classe dans $\mathrm{gr}_n\mathcal{A}(\mathcal{U})$ d'un élément P_i de $l(\Delta_{r_i})$ tels que $\sum_{i=1}^{t}r_i=n$. En décomposant chaque P_i comme combinaison linéaire à coefficients dans B des images par l des générateurs de Δ_i et en utilisant la commutativité de $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{A}(\mathcal{U})$, on voit que $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{A}(\mathcal{U})$ est dans l'image de $\lambda'_{\mathcal{U}}$. L'homomorphisme λ est donc surjectif au niveau des germes, et est donc surjectif.

Ce morphisme n'est pas gradué si l'on considère la graduation usuelle de l'algèbre symétrique. Soit $\tilde{\mathbf{S}}(\mathcal{O}^a_{\mathcal{X}})$ l'algèbre graduée dont l'algèbre sous-jacente est l'algèbre symétrique $\mathbf{S}(\mathcal{O}^a_{\mathcal{X}})$ et dont la graduation est la graduation d'algèbre définie par le fait que $T_{i,j}$ est de degré i pour tout $i \leqslant p^m$ et $j \leqslant s$. On a alors l'énoncé voulu avec cette algèbre.

PROPOSITION 3.2.2.2. — (i) *Les faisceaux* $\mathcal{E}^{(m',m)}_{\mathcal{X},n}$ *sont des* $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}}$*-modules cohérents.*

(ii) *Le faisceau* $\mathcal{E}^{(m',m)}_{\mathcal{X}}$ *est à sections noethériennes sur les ouverts affines.*

(iii) *Les faisceaux* $\mathcal{E}^{(m',m)}_{X_i}$ *sont des faisceaux d'anneaux cohérents à sections noethériennes sur les ouverts affines.*

(iv) *Le faisceau* $\widehat{\mathcal{E}}^{(m',m)}_{\mathcal{X}}$ *est un faisceau cohérent à sections noethériennes sur les ouverts affines.*

Démonstration. — Par définition, on a des suites exactes de faisceaux

$$0 \to \mathcal{E}_{n-1} \to \mathcal{E}_n \to \mathrm{gr}_n\mathcal{E} \to 0.$$

L'algèbre $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}$ est cohérente sur l'algèbre $\widehat{\mathcal{B}}\otimes\tilde{\mathbf{S}}(\mathcal{O}^a_{\mathcal{X}})$, dont les composantes homogènes sont des $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérents. En particulier, les modules $\mathrm{gr}_n\mathcal{E}$ sont des $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérents. Par récurrence à partir de $\mathcal{E}_0 \simeq \widehat{\mathcal{B}}$, on voit que les modules $\mathcal{E}_n$ sont des faisceaux de $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérents. Ceci montre (i). En particulier, les faisceaux $\mathcal{E}_n$ sont acycliques sur les ouverts affines et le gradué $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}(\mathcal{U})$ s'identifie aux sections sur $\mathcal{U}$ du faisceau gradué $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}$. L'algèbre commutative $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}(\mathcal{U})$ est un quotient de l'algèbre de polynômes à coefficients dans $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$: $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) \otimes \mathbf{S}(\mathcal{O}^a_{\mathcal{X}})$. Comme $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$ est un anneau noethérien, cette algèbre est noethérienne et donc aussi l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{E}(\mathcal{U})$. La noethérianité à gauche et à droite de l'algèbre $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ en résulte (10 II 5.3 de [6]). En outre, le faisceau $\mathcal{E}$ est acyclique sur les ouverts affines, puisque c'est le cas des faisceaux $\mathcal{E}_n$, qui forment une filtration croissante et exhaustive de $\mathcal{E}$, et que, sur le schéma formel $\mathcal{X}$ qui est un espace topologique noethérien, la cohomologie commute à la limite inductive.

Le faisceau $\mathcal{E}$ est sans p-torsion car c'est un sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}\otimes\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$. Si $\mathcal{U}$ est un ouvert affine de $\mathcal{X}$ et U_i l'ouvert obtenu par changement de base sur X_i, on a des suites exactes courtes

$$0 \to \mathcal{E}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\pi^i} \mathcal{E}(\mathcal{U}) \to \mathcal{E}_{X_i}(U_i) \to 0.$$

Il s'ensuit que les algèbres $\mathcal{E}_{X_i}(U_i)$ sont noethériennes à gauche et à droite. En outre, les faisceaux $\mathcal{E}_{X_i}$ sont des $\mathcal{O}_{X_i}$-modules quasi-cohérents, comme limite inductive des faisceaux $\mathcal{E}_n/\pi^i\mathcal{E}_n$ qui sont quasi-cohérents. Tout ceci montre qu'ils sont en fait cohérents (3.1.3 de [4]).

La cohérence des faisceaux $\widehat{\mathcal{E}}$ se déduira du fait que les hypothèses a et b de 3.3.3 de [4] sont vérifiées. Le faisceau $\mathcal{E}$ est limite inductive de $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérents $\mathcal{E}_n$ tels que $\mathcal{E}_n = \varprojlim_i \mathcal{E}_n/\pi^i\mathcal{E}_n$. En outre, nous venons de voir que l'anneau $\Gamma(\mathcal{U},\mathcal{E})$ est noethérien à droite et à gauche pour tout ouvert affine $\mathcal{U}$. Les conclusions de 3.3.3. de [4] s'appliquent donc dans notre situation et le faisceau $\widehat{\mathcal{E}}$ est cohérent à gauche et à droite. Nous en déduisons aussi des théorèmes A (3.3.9 de [4]) et B (3.3.11 de [4]). Comme corollaire, nous utiliserons dans la suite que si $\mathcal{M}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}$-module cohérent, le sous-$\mathbf{Z}$-module de torsion de $\mathcal{M}$ est lui aussi cohérent et est de torsion finie.

4. Propriétés cohomologiques des $\widehat{\mathcal{E}}^{(m',m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-modules cohérents.

Reprenons les hypothèses de 3.2.1 et commençons par étudier la situation à un niveau fini et à donner quelques propriétés.

4.1. Étude de la situation à un niveau fini.

Notons $\mathcal{C}$ le faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}}$-algèbres $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}} \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}{\otimes} \tilde{\mathbf{S}}(\mathcal{O}^a_{\mathcal{X}})$.

LEMME 4.1.1. — *Le faisceau $\mathcal{C}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres qui est cohérent et à sections noethériennes sur les ouverts affines.*

Démonstration. — Il résulte de la cohérence des faisceaux $\widehat{\mathcal{B}}$ que, si $\mathcal{V}$ est un ouvert affine inclus dans un autre ouvert affine $\mathcal{U}$, $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{V})$ est une $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$-algèbre plate. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{C}(\mathcal{U})$-module, le produit tensoriel $\mathcal{C}(\mathcal{V}) \underset{\mathcal{C}(\mathcal{U})}{\otimes} \mathcal{M}$ s'identifie à $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) \underset{\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})}{\otimes} \mathcal{M}$ et $\mathcal{C}(\mathcal{V})$ est un $\mathcal{C}(\mathcal{U})$-module plat. En outre, l'algèbre $\mathcal{C}(\mathcal{U})$ est isomorphe à l'algèbre de polynômes $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})[T_{i,j}]$, qui est noethérienne par noethérianité de $\widehat{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$. Tout ceci montre la cohérence de $\mathcal{C}$ (3.1.1 de [4]).

Soit $\mathcal{C}$ un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres graduées, $\mathcal{C}_k$ ses composantes homogènes. Si $\mathcal{M} = \oplus\mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{C}$-module gradué, le module $\mathcal{M}(r)$ est gradué par $\mathcal{M}(r) = \oplus\mathcal{M}_k(r)$. Si i est un entier relatif, $\mathcal{M}[i]$ est le module gradué défini par $(\mathcal{M}[i])_k = \mathcal{M}_{k+i}$.

LEMME 4.1.2. — *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{C}$-module gradué et cohérent, il existe des entiers relatifs $r_1, \ldots, r_N$, des entiers $s_1, \ldots, s_N$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$, des s_i-uplets $(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_{s_i}^i)$, tels que l'on ait une résolution*

$$\overset{s_N}{\underset{j=i}{\oplus}} \mathcal{C}(-r_N)[\alpha_j^N] \to \ldots\ldots \to \overset{s_1}{\underset{j=1}{\oplus}} \mathcal{C}(-r_1)[\alpha_j^1] \to \mathcal{M} \to 0.$$

Démonstration. — Rappelons d'abord qu'un $\widehat{\mathcal{B}}$-module cohérent est un quotient d'un certain $\widehat{\mathcal{B}}(-r)^a$ pour certains entiers a et r (A.6 de [10]). Les composantes homogènes de $\mathcal{C}$ sont des $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérents. Si $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-module cohérent gradué, les composantes homogènes de $\mathcal{M}$ sont donc des $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérents. Ainsi le module $\mathcal{M}$ est limite inductive de sous-modules $\widehat{\mathcal{B}}$-cohérents. Comme $\mathcal{X}$ est quasi-compact et $\mathcal{C}$ est noethérienne, on peut donc trouver une surjection : $\mathcal{C} \underset{\widehat{\mathcal{B}}}{\otimes} \mathcal{E} \to \mathcal{M} \to 0$, où $\mathcal{E}$ est un $\widehat{\mathcal{B}}$-module cohérent. En écrivant que $\mathcal{E}$ est un quotient de $\widehat{\mathcal{B}}(-r)^a$, on construit ainsi une surjection $\mathcal{C}(-r)^a \to \mathcal{M} \to 0$. On construit facilement à partir de là une surjection graduée $\overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathcal{C}(-r)[\alpha_i] \to \mathcal{M} \to 0$ (2.3.3 de [10]). Le reste de l'argument est identique à 2.3.4 et 2.3.5 de [10].

LEMME 4.1.3. — *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{C}$-module cohérent, il existe un entier $r \in \mathbf{Z}$ tel que*

$$\forall k \geqslant 1,\ \forall s \geqslant r,\ \mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{M}(s)) = 0.$$

Démonstration. — Notons d'abord que cet énoncé d'acyclicité est vrai pour les $\widehat{\mathcal{B}}$-modules cohérents. Il existe un entier r_0 tel que pour tout entier r supérieur à r_0, les groupes $\mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{B}}(r))$ soient nuls. Donnons-nous une résolution graduée de $\mathcal{M}$ comme dans le lemme précédent. En passant aux composantes homogènes, on obtient une résolution des $\mathcal{M}_k$ par les $\mathcal{C}_{k+\alpha_j^i}(-r_i)$. Soit r un entier supérieur à $\max\{r_i + r_0\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$. Le module $\mathcal{M}(r)$ est alors résolu par des $\mathcal{C}$-modules gradués dont les composantes homogènes sont des sommes directes finies de modules du type $\widehat{\mathcal{B}}(r + r_i)$, qui sont acycliques. Finalement, le module $\mathcal{M}(r)$ admet une résolution de longueur N par des $\widehat{\mathcal{B}}$-module acycliques et est donc acyclique.

La surjection $\mathcal{C} \to \mathrm{gr}_{\bullet}\mathcal{E}^{(m',m)}$ fait de $\mathrm{gr}_{\bullet}\mathcal{E}^{(m',m)}$ un $\mathcal{C}$-module cohérent gradué auquel on peut appliquer le lemme. Pour énoncer la proposition suivante, on fixe un entier $\rho \geqslant r_0$ tel que pour tout $k \geqslant 1$ et tout $r \geqslant \rho$, les groupes $\mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathrm{gr}_{\bullet}\mathcal{E}^{(m',m)}(r))$ soient nuls.

PROPOSITION 4.1.4. — (i) $\forall r \geqslant \rho$, $\forall i$, $\forall k \geqslant 1$, $\mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{E}_{X_i}^{(m',m)}(r)) = 0$.

(ii) *Si* $\mathcal{M}$ *est un* $\mathcal{E}_{X_i}^{(m',m)}$*-module cohérent, le module* $\mathcal{M}(r)$ *est acyclique pour* r *assez grand.*

Démonstration. — Commençons par (i) et considérons un entier $r \geqslant \rho$ et les suites exactes courtes

$$0 \to \mathcal{E}_n(r) \to \mathcal{E}_{n+1}(r) \to \mathrm{gr}_{n+1}\mathcal{E}(r) \to 0.$$

D'après l'appendice de P. Berthelot à [10], le module $\mathcal{E}_0(r) \simeq \widehat{\mathcal{B}}(r)$ est acyclique. D'après le lemme précédent, les modules $\mathrm{gr}_n\mathcal{E}(r)$ sont acycliques. En passant à la longue suite de cohomologie et en raisonnant par récurrence sur n, on voit que $\mathcal{E}_n(r)$ est acyclique pour tout entier n. Comme l'espace topologique $\mathcal{X}$ est noethérien, la cohomologie commute à la limite inductive et pour tout entier k,

$$\mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{E}(r)) = \varinjlim_n \mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{E}_n(r)).$$

Ceci montre finalement que $\mathcal{E}(r)$ est acyclique.

Comme $\mathcal{E}$ est sans torsion, il existe des suites exactes courtes

$$0 \to \mathcal{E}(r) \xrightarrow{\pi^i} \mathcal{E}(r) \to \gamma_{i*}\mathcal{E}_{X_i}(r) \to 0.$$

En passant à la longue suite exacte de cohomologie, on voit que les faisceaux $\mathcal{E}_{X_i}(r)$ sont acycliques.

Montrons (ii). Sur le schéma X_i, $\mathcal{M}$ est limite inductive de ses sous-$\mathcal{O}_{X_i}$-modules cohérents. D'après (iii) de 3.2.2.2, il existe un module $\mathcal{E}_{X_i}$-cohérent $\mathcal{F}$ et une surjection $\mathcal{E}_{X_i}$linéaire $\mathcal{E}_{X_i} \underset{\mathcal{O}_{X_i}}{\otimes} \mathcal{F} \to \mathcal{M}$. D'autre part, il existe des entiers a et r et une surjection $\mathcal{O}_{X_i}(-r)^a \to \mathcal{F}$. De proche en proche, on peut ainsi construire une résolution de longueur N de $\mathcal{M}$

$$\mathcal{E}_{X_i}(-r_N)^{a_N} \to \ldots \to \mathcal{E}_{X_i}(-r_1)^{a_1} \to \mathcal{M} \to 0.$$

En particulier si $r \geqslant \max\{\rho + r_i\}_{i \leqslant N}$, le module $\mathcal{M}$ admet une résolution de longueur N par des modules acycliques et est acyclique.

4.2. Passage aux complétés.

PROPOSITION 4.2.1. — (i) *Si* $\mathcal{M}$ *est un* $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$*-module cohérent, il existe des entiers* r *et* a *et une surjection* $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}}^{(m',m)}$*-linéaire* $\left(\widehat{\mathcal{E}}^{(m',m)}(-r)\right)^a \to \mathcal{M} \to 0$.

(ii) *Il existe un entier r tel que* $\forall s \geqslant r$, $\forall k \geqslant 1$, $\mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{M}(s)) = 0$.

Démonstration. — Compte tenu de la proposition précédente, la démonstration de (i) est identique à celle de 3.3 de [10], $\widehat{\mathcal{E}}$ jouant le rôle de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}$.

Pour $r \geqslant \rho$, les conditions de Mittag-Leffler sont trivialement vérifiées par les groupes $\mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{E}}(r))$ pour tout entier k. On en déduit que, pour tout k,

$$\mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{E}}(r)) = \varprojlim_i \mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{E}_{X_i}(r)).$$

En particulier, les modules $\widehat{\mathcal{E}}(r)$ sont acycliques pour tout $r \geqslant \rho$. D'après le (i), il existe une résolution de longueur N de $\mathcal{M}$

$$\widehat{\mathcal{E}}(-r_N)^{a_N} \to \ldots \to \widehat{\mathcal{E}}(-r_1)^{a_1} \to \mathcal{M} \to 0.$$

Ainsi, si $r \geqslant \max\{\rho + r_i\}_{i \leqslant N}$, le module $\mathcal{M}$ admet une résolution de longueur N par des modules acycliques et est acyclique.

Corollaire 4.2.2. — *Si $\mathcal{M}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}^{(m',m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module cohérent,*

(i) *les groupes $\mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ sont nuls pour tout $k \geqslant 1$,*

(ii) *$\mathcal{M}$ admet une résolution libre de rang fini sur $\widehat{\mathcal{E}}^{(m',m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$.*

Démonstration. — Soit r un entier tel que le module $\mathcal{M}(r)$ soit acyclique. Le noyau et le conoyau de l'application $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{Y}} \xrightarrow{y_0^r} \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{Y}}(r)$ sont à support dans le diviseur $\mathcal{Z}$ et sont donc de p-torsion finie car ce sont des $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{Y}}$-modules cohérents. En étendant les scalaires à $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{Q}}$, on trouve finalement un isomorphisme

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{y_0^r} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{Q}}(r).$$

En identifiant $\mathcal{M}(r)$ à $\mathcal{M} \underset{\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{Q}}}{\otimes} \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{Q}}(r)$, on voit que cette application induit un isomorphisme $\widehat{\mathcal{E}}$-linéaire $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}(r)$. En particulier, le module $\mathcal{M}$ est acyclique.

Montrons (ii). Il existe un $\widehat{\mathcal{E}}$-module cohérent $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N} \underset{W}{\otimes} K$. Donnons-nous une résolution de $\mathcal{N}$ comme dans la démonstration de 4.2.1. On trouve alors une résolution libre de rang fini de $\mathcal{M}$ en tensorisant cette résolution par K et en identifiant $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}(-r)$ à $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}$ via l'isomorphisme $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{Q}}(-r) \simeq \widehat{\mathcal{B}}_{\mathbf{Q}}$.

Soit $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)} = \Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m',m)})$ (noté $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}$ dans les démonstrations), et φ le foncteur qui à un $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$-module de présentation finie M associe le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{U} \mapsto \widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m',m)} \underset{\widehat{E}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}}{\otimes} M$. Le faisceau $\varphi(M)$ est un $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m',m)}$-module cohérent.

PROPOSITION 4.2.3. — (i) *L'algèbre* $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$ *est cohérente.*

(ii) *Les foncteurs* φ *et* Γ *induisent une équivalence de catégories entre les* $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$*-modules cohérents et les* $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m',m)}$*-modules cohérents.*

Démonstration. — Commençons par montrer que les fonçeurs φ et Γ induisent une équivalence de catégories entre la catégorie des $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}^{(m',m)}$-modules de présentation finie et celle des $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m',m)}$-modules cohérents.

Si $\mathcal{M}$ est un $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent, $\mathcal{M}$ admet une résolution libre de rang finie à deux termes

$$\mathcal{L}_{-1} \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{M} \to 0,$$

où $\mathcal{L}_{-i} \simeq \widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}^{a_i}$ pour un certain a_i et $i \in \{0,1\}$. Par acyclicité de Γ, on obtient une résolution de $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ en passant aux sections globales. Comme le module $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}_{-i})$ est isomorphe à un $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}^{a_i}$, ceci est une présentation de $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})$, qui est donc un $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}$-module de présentation finie. Le foncteur Γ est donc à valeurs dans la catégorie des $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}$-modules de présentation finie.

Si M et $\mathcal{M}$ sont respectivement un $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent et un $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent, il existe des isomorphismes canoniques $M \to \Gamma \circ \varphi(M)$ et $\varphi \circ \Gamma(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ qui sont trivialement des isomorphismes si M et $\mathcal{M}$ sont des modules libres de rang fini. Avec les notations précédentes, on a un diagramme dont les lignes sont exactes et dont deux colonnes de gauche sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccccccc}
\varphi \circ \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}_{-1}) & \to & \varphi \circ \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{L}_0) & \to & \varphi \circ \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}) & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{L}_{-1} & \to & \mathcal{L}_0 & \to & \mathcal{M} & \to & 0.
\end{array}$$

On en déduit que la dernière flèche est un isomorphisme.

Réciproquement, partons d'une présentation de M par des modules libres de rang fini $L_{-1} \to L_0 \to M \to 0$, où $L_{-i} \simeq \widehat{E}_{\mathbf{Q}}^{a_i}$. Toujours par exactitude de Γ, on a un diagramme dont les lignes sont exactes et dont les deux premières colonnes sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccccccc} L_{-1} & \to & L_0 & \to & M & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Gamma\circ\varphi(L_{-1}) & \to & \Gamma\circ\varphi(L_0) & \to & \Gamma\circ\varphi(M) & \to & 0. \end{array}$$

Il en résulte que la dernière flèche verticale est un isomorphisme.

La cohérence de $\widehat{E}_{\mathbf{Q}}$ se montre à partir de cette équivalence et de la cohérence de $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}$ comme le corollaire 5.2.2 de [10].

5. Démonstration du théorème principal.

Soit e l'indice de ramification de V. D'après le critère d'Eisenstein, le polynôme $X^{p^k} - \pi$ est irréductible dans $V[X]$. L'anneau $V^{(k)} = V[X]/(X^{p^k} - \pi)$ est intègre et est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, de corps des fractions $E^{(k)}$ et d'indice de ramification $p^k e$. On notera π_k la classe de X modulo $X^{p^k} - p$: c'est une uniformisante de $V^{(k)}$ et la topologie π_k-adique coïncide avec la topologie p-adique. Si $l \geqslant k$, il existe une injection canonique $i_{k,l} : V^{(k)} \to V^{(l)}$ définie par : $i_{k,l}(\pi_k) = \pi_l^{p^{l-k}}$ et qui fait de $V^{(l)}$ un $V^{(k)}$-module libre de type fini.

Notons maintenant $A = \varinjlim_k V^{(k)}$, et définissons

$$N_k = \bigoplus_{n=1}^{p^k-1} V\pi_k^n,$$

un sous V-module de $V^{(k)}$. Les N_k forment un système inductif gradué et on pose $N = \varinjlim_k N_k$. Il est clair que la somme $V + N$ est égale à A. En outre, l'intersection $V \bigcap N$ est égale à $\varinjlim_k (V \bigcap N_k)$ et est nulle. Comme V-module, A se décompose donc $A \simeq V \oplus N$. En particulier, A est un V-module fidèlement plat.

Soient $\mathcal{S} = \mathrm{Spf} V$, $\mathcal{S}^{(k)} = \mathrm{Spf} V^{(k)}$, $\Sigma = \mathrm{Spec} A$ et $S_i = \mathrm{Spec} V/p^i V$. Pour $l \geqslant k$, on dispose de morphismes d'espaces annelés :

$$\Sigma \to \mathcal{S}^{(l)} \to \mathcal{S}^{(k)} \to \mathcal{S}.$$

Introduisons en outre un schéma formel $\mathcal{X}$ lisse et projectif sur $\mathcal{S}$, muni d'un diviseur relatif et ample $\mathcal{Z}$ (nous emploierons les notations de 1.1). Définissons $\mathcal{X}^{(k)} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}^{(k)}$, f_k les premières projections : $\mathcal{X}^{(k)} \to \mathcal{X}$ et pour $l \geqslant k$, $f_{l,k} : \mathcal{X}^{(l)} \to \mathcal{X}^{(k)}$. En particulier $\mathcal{X}^{(0)}$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{X}$. Nous noterons encore : $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{S}} \Sigma$, le produit fibré étant pris dans la catégorie des espaces annelés, f la première projection : $\tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ et φ_k les deuxièmes projections : $\tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}^{(k)}$.

$$\tilde{\mathcal{X}} \xrightarrow{\varphi_k} \mathcal{X}^{(l)} \xrightarrow{f_{l,k}} \mathcal{X}^{(k)} \xrightarrow{f_k} \mathcal{X}.$$

Les schémas formels $\mathcal{X}^{(k)}$ sont lisses sur $\mathcal{S}^{(k)}$ et nous introduisons les coefficients $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$ ainsi que les faisceaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}} = \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty) = \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty) = \varinjlim_{m} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty) \underset{V}{\otimes} K$ sur $\mathcal{X}$, et, sur les schémas $\mathcal{X}^{(k)}$, les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}} = \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}/\mathcal{S}^{(k)}}$, $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$ pour m' convenable, ainsi que les faisceaux $f_k^*\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)$ et leur complété p-adique $f_k^*\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)$.

Rappelons que d'après la propriété de changement de base énoncée en 2.2.2 de [4], il existe des isomorphismes d'anneaux canoniques $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \simeq f_k^*\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, ces isomorphismes provenant d'isomorphismes entre les faisceaux d'opérateurs d'ordre inférieur ou égal à n : $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)},n} \simeq f_k^*\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X},n}$.

Remarquons d'autre part que les faisceaux $f_k^*\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}$, resp. $f^*\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)$, resp. $f^*\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ s'identifient aux faisceaux $f^{-1}(V^{(k)} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}})$, resp. f^{-1} $(A \underset{V}{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty))$, resp. $f^{-1}(A \underset{V}{\otimes} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$.

5.1. Cohérence de $A \underset{V}{\otimes} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$.

Remarque. — Il existe un isomorphisme d'anneaux canonique : $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \simeq f_k^*\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ (resp. $f_k^*\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\infty) \simeq f_k^*\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)$).

Démonstration. — Les faisceaux $V^{(k+1)} \underset{V^{(k)}}{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)$ sont p-adiquement complets car $V^{(k+1)}$ est isomorphe à une somme directe d'un nombre fini de copies de $V^{(k)}$. Il s'ensuit que les faisceaux $f_k^*\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)$ sont complets. On obtient l'isomorphisme cherché en passant aux complétés dans les isomorphismes $f_k^*\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \simeq f_k^*\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}(\infty)$.

PROPOSITION 5.1.1. — *Le faisceau* $f^*\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty) \simeq \varinjlim_{k,m} V^{(k)} \underset{V}{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ *est un faisceau d'anneaux cohérent.*

Démonstration. — Le faisceau $f_k^*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$ est le complété p-adique du faisceau d'anneaux $f_k^*\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$. Ce faisceau est filtré par l'ordre des opérateurs différentiels et le gradué associé à cette filtration s'identifie, par platitude de f_k, à $f_k^*\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$. En particulier, si $\mathcal{U}$ est un ouvert affine de $\mathcal{X}$, $f_k^*\mathrm{gr}_\bullet\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)(\mathcal{U})$ est une $f_k^*\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\mathcal{U})$ algèbre de type fini, donc noethérienne. Il en résulte que le faisceau $f_k^*\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$ vérifie les conditions a et b de 3.3.3 de [4]. Le faisceau $f_k^*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$ est donc cohérent à gauche d'après la proposition 3.3.4 de [4].

Si $\mathcal{M}$ est un $V^{(k)}\underset{V}{\otimes}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$-module à gauche, le module $V^{(k+1)}\underset{V^{(k)}}{\otimes}\mathcal{M}$ s'identifie à $(V^{(k+1)}\otimes\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty))\underset{V^{(k)}\otimes\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)}{\otimes}\mathcal{M}$. Comme $V^{(k+1)}$ est un $V^{(k)}$-module plat, le faisceau d'anneaux $V^{(k+1)}\otimes\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$ est plat à droite sur $V^{(k)}\otimes\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$. Ainsi le faisceau $\varphi_{k+1}^{-1}f_{k+1}^*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$ est plat à droite et à gauche sur $\varphi_k^{-1}f_k^*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$. Le même raisonnement donne la platitude à gauche. Comme ces faisceaux sont cohérents, on voit par passage à la limite inductive sur k, que les faisceaux $f^*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$ sont des faisceaux d'anneaux cohérents à gauche.

Si $\mathcal{M}$ est un $A\otimes\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)$-module à gauche, le produit tensoriel $(A\otimes\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}(\infty))\underset{A\otimes\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)}{\otimes}\mathcal{M}$ s'identifie à $A\underset{V}{\otimes}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}(\infty)\underset{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\infty)}{\otimes}\mathcal{M}$. Il résulte alors du théorème de platitude à gauche et à droite de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m+1)}(\infty)$ sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$ (3.5.3 de [4]), que les faisceaux d'anneaux $A\otimes\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m+1)}(\infty)$ sont plats à gauche et à droite sur $A\otimes\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$. Les faisceaux $f^*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m+1)}(\infty)$ sont donc plats à gauche et à droite sur $f^*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$. Comme ces faisceaux sont cohérents, cela montre que le faisceau $f^*\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\infty)=\varinjlim_m f^*\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$ est un faisceau d'anneaux cohérent.

5.2. Une autre filtration du faisceau $f^*\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\infty)$.

Nous construisons dans cette partie une filtration d'anneaux du faisceau $f^*\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\infty)$ à partir des faisceaux $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}}^{(m',m)}$ introduits précédemment. Comme les $\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}^{(k)},\mathbf{Q}}^{(m',m)}$-modules cohérents sont cohomologiquement triviaux sur $\mathcal{X}^{(k)}$, nous en déduirons un résultat analogue pour les $f^*\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\infty)$-modules cohérents et finalement pour les $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger(\infty)$-modules cohérents.

Nous déduirons de même de cette filtration qu'il existe une équivalence de catégories entre les $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents et leurs sections globales.

LEMME 5.2.1. — *Soient k, l, m des entiers fixés.*

(i) *Il existe un homomorphisme d'anneaux canonique et injectif $f^*_{k+l,k}\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \to \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+l)}}$.*

(ii) *Il existe un homomorphisme d'anneaux canonique et injectif $\alpha_{k,l,m} : f^*_{k+l,k}\mathcal{B}^{(m+l)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \to \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+l)}}$.*

(iii) *Il existe une application $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k+l)}}$-linéaire injective $\beta_{k,l,m} : \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+l)}} \to f^*_{k+l,k}\mathcal{B}^{(m+k)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$ et un entier c tels que la composée $\beta_{k,l,m} \circ \alpha_{k,l,m}$ soit égale à p^c fois l'identité.*

On dispose d'applications analogues en passant aux complétés.

Démonstration. — Il suffit de montrer le lemme dans le cas où $l = 1$. Plaçons-nous sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathcal{X}$ tel que $\mathcal{Z}$ soit donné sur $\mathcal{U}$ par l'équation $f = 0$. L'ouvert obtenu par changement de base sur les $\mathcal{X}^{(k)}$ sera aussi noté $\mathcal{U}$. On a alors les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
f^*_{k+1,k}\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\mathcal{U}) &= \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}[T_1] \Big/ (f^{p^{m+1}}T_1 - \pi_k),\\
f^*_{k+1,k}\mathcal{B}^{(m+1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\mathcal{U}) &= \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}[T_3] \Big/ (f^{p^{m+2}}T_3 - \pi_k),\\
\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}(\mathcal{U}) &= \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}[T_2]/(f^{p^{m+1}}T_2 - \pi_{k+1}).
\end{aligned}
$$

Montrons (i). Définissons $\gamma_{\mathcal{U}} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}[T_1] \to \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}(\mathcal{U})$ par $\gamma_{\mathcal{U}}(T_1) = \pi^{p-1}_{k+1}T_2$. Compte tenu de la relation $\pi^p_{k+1} = \pi_k$, on voit que $\gamma_{\mathcal{U}}$ passe au quotient en un homomorphisme d'anneaux $f^*_{k+1,k}\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\mathcal{U}) \to \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}(\mathcal{U})$, toujours noté $\gamma_{\mathcal{U}}$. De plus, il est facile de vérifier que ces applications $\gamma_{\mathcal{U}}$ se recollent à l'aide des homomorphismes ρ_g définis en (ii) de 2.2 pour donner un homomorphisme d'anneaux comme cherché. L'injectivité découle du fait que les deux faisceaux $f^*_{k+1,k}\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$ et $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}$ sont des sous-faisceaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}[1/f]$ d'après 4.3.3 de [4] et que l'application considérée est induite par l'identité de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}[1/f]$.

On définit ensuite $\alpha_{\mathcal{U}} : f^*_{k+1,k}\mathcal{B}^{(m+1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\mathcal{U}) \to \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}(\mathcal{U})$ par $\alpha(T_3) = T_2^p$. On vérifie facilement que ces homomorphismes se recollent pour donner un homorphisme de faisceaux $\alpha_{k,k+1,m} : f^*_{k+1,k}\mathcal{B}^{(m+1)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \to \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}$, qui est injectif pour la même raison que précédemment.

On définit ensuite une application $\beta'_{\mathcal{U}} : \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}(\mathcal{U}) \to f^*_{k+1,k}\mathcal{B}^{(m+1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\mathcal{U}) \underset{V}{\otimes} K$, en envoyant T_2 sur $\pi_{k+1}\pi_k^{-1}f^{p^{m+1}(p-1)}T_3$. Observons que $\beta'_{\mathcal{U}}(T_2^p)$ est égal à $\pi_k^{1-p}(f^{p^{m+2}}T_3)^{p-1}T_3$ et est donc égal à T_3. En particulier, $\beta'_{\mathcal{U}}(T_2^p)$ est un élément de $f^*_{k+1,k}\mathcal{B}^{(m+1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\mathcal{U})$. Soit n un entier naturel que l'on décompose $n = pq + r$ avec $r < p$. L'élément $\beta'_{\mathcal{U}}(T_2^n)$ est alors égal à $(\beta'_{\mathcal{U}}(T_2^p))^q\beta'_{\mathcal{U}}(T_2^r)$. On voit ainsi que $\pi_k^r\beta'_{\mathcal{U}}(\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}(\mathcal{U}))$ est à valeurs dans $f^*_{k+1,k}\mathcal{B}^{(m+1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\mathcal{U})$. Posons finalement $\beta_{k,k+1,m,\mathcal{U}} = p^{p-1}\beta'_{\mathcal{U}}$ qui est à valeurs dans $f^*_{k+1,k}\mathcal{B}^{(m+1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\mathcal{U})$. On voit facilement que $\beta_{k,k+1,m,\mathcal{U}}$ est injective. D'autre part, sur $\mathcal{U}$, la relation $\beta_{k,k+1,m,\mathcal{U}} \circ \alpha_{k,k+1,m} = p^c id$ est vérifiée. Cela permet de recoller les applications $\beta_{k,k+1,l,\mathcal{U}}$ en un homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(k+1)}}$-linéaire ayant les propriétés souhaitées.

Soit Ω' l'ensemble des triplets d'entiers (m', m, k) tels que (m', m) satisfont la condition 3.1.1 sur $\mathcal{X}^{(k)}$. On ordonne Ω' comme suit :

$$(m'_2, m_2, l) \succeq (m'_1, m_1, k) \text{ si et seulement si } m'_2 \geqslant m_2,\ m'_1 \geqslant m_1,\ l \geqslant k.$$

LEMME 5.2.2. — *Soient $(m'_2, m_2, l) \succeq (m'_1, m_1, k)$ des triplets d'éléments de Ω'. On dispose d'homomorphismes d'anneaux canoniques injectifs*

(i) $f^*_{l,k}\mathcal{E}^{(m'_1,m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \hookrightarrow \mathcal{E}^{(m'_2,m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}$,

(ii) $f^*_{l,k}\widehat{\mathcal{E}}^{(m'_1,m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{E}}^{(m'_2,m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}$.

Démonstration. — Notons $\mathcal{D}^{(m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\infty) = \widehat{\mathcal{B}}^{(m'_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \otimes \mathcal{D}^{(m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}$, $\mathcal{D}^{(m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}(\infty) = \widehat{\mathcal{B}}^{(m'_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}} \otimes \mathcal{D}^{(m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}$, $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{A}_l$ les sous-préfaisceaux de $\mathcal{D}^{(m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\infty)$ et de $\mathcal{D}^{(m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}(\infty)$ respectivement, construits à partir de (m'_1, m_1) sur $\mathcal{X}^{(k)}$ et de (m'_2, m_2) sur $\mathcal{X}^{(l)}$ comme en 3.1.2. D'après le lemme précédent, on dispose d'homomorphismes canoniques $f^*_{l,k}\widehat{\mathcal{B}}^{(m'_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}} \to \widehat{\mathcal{B}}^{(m'_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}$. De plus, les faisceaux $f^*_{l,k}\mathcal{D}^{(m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)},n}$ s'identifient aux faisceaux $\mathcal{D}^{(m_1)}_{\mathcal{X}^{(l)},n}$, d'où des flèches injectives $f^*_{l,k}\mathcal{D}^{(m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)},n} \hookrightarrow \mathcal{D}^{(m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)},n}$ et finalement des homomorphismes d'anneaux

$$\Gamma(\mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{D}^{(m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)},n}(\infty)) \xrightarrow{\lambda_n} \Gamma(\mathcal{X}^{(l)}, \mathcal{D}^{(m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)},n}(\infty)).$$

Soient $\xi_l = \pi_l^{N+2}$, $\xi_k = \pi_k^{N+2}$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathcal{X}^{(l)}$, $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathcal{X}^{(k)}$ contenant $\mathcal{D}^{(m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}(\infty)(\mathcal{V}') \to \mathcal{D}^{(m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}(\infty)(\mathcal{U})$. La sous-$\widehat{\mathcal{B}}^{(m'_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}(\mathcal{U})$-algèbre de $\mathcal{D}^{(m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}(\infty)(\mathcal{U})$ engendrée par les $\xi_l^n\Gamma(\mathcal{X}^{(l)}, \mathcal{D}^{(m_2)}_{\mathcal{X}^{(l)}}(\infty))$ pour $n \leqslant p^{m_2}$ contient la sous $\rho_{\mathcal{V}'}\left(\widehat{\mathcal{B}}^{(m'_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\mathcal{V}')\right)$-algèbre engendrée par les $\xi_k^n\lambda_n\left(\Gamma(\mathcal{X}^{(k)}, \mathcal{D}^{(m_1)}_{\mathcal{X}^{(k)}}(\infty))\right)$ pour $n \leqslant p^{m_1}$. On en déduit, pour tout ouvert $\mathcal{V}$ contenant $f_{l,k}(\mathcal{U})$, des flèches canoniques $\mathcal{A}_k(\mathcal{V}) \to \mathcal{A}_l(\mathcal{U})$, et des homorphismes

$f_{l,k}^{-1}\mathcal{A}_k(\mathcal{U}) \to \mathcal{A}_l(\mathcal{U})$. En passant aux faisceaux associés et en étendant les scalaires, on en déduit des homomorphismes $f_{l,k}^{*}\mathcal{E}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m_1',m_1)} \to \mathcal{E}_{\mathcal{X}^{(l)}}^{(m_2',m_2)}$.

Par platitude de $f_{l,k}$, le faisceau $f_{l,k}^{*}\mathcal{E}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m_1',m_1)}$ est un sous-faisceau de $f_{l,k}^{*}\mathcal{D}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m_1)}(\infty)$. L'injectivité de la flèche (i) se déduit donc de l'injectivité de la flèche : $f_{l,k}^{*}\mathcal{D}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m_1)}(\infty) \hookrightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X}^{(l)}}^{(m_2)}(\infty)$.

La flèche (ii) s'obtient en passant aux complétés puisque le faisceau d'anneaux $f_{l,k}^{*}\widehat{\mathcal{E}}_{\mathcal{X}^{(k)}}^{(m_1',m_1)}$ est complet.

Soient maintenant $\kappa = [\log_p(N+2)] + 1$, (où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x), $v_m = m+\kappa$ et u_m une suite croissante d'entiers naturels telle que (u_m, m, v_m) soit dans Ω' pour tout entier m. On note $\mathcal{E}^{(m)}$ le faisceau d'anneaux $\mathcal{E}_{\mathcal{X}^{(v_m)}}^{(u_m,m)}$, $\widehat{\mathcal{E}}^{(m)}$ son complété p-adique et β_m l'application $\beta_{0,v_m,u_m} : \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}^{(v_m)}}^{(u_m)} \hookrightarrow f_{v_m}^{*}\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(u_m)}$ donnée par le (iii) du lemme 5.2.1. Il existe un entier c tel que $\beta_m \circ \alpha_{0,v_m,u_m}$ soit égal à $p^c id$.

L'application β_m induit une application

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}^{(v_m)}}^{(u_m)} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}^{(v_m)}}^{(m)} \hookrightarrow f_{v_m}^{*}\left(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(u_m)} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}\right),$$

qui est injective car les faisceaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^{(v_m)}}^{(m)}$ sont plats sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{(v_m)}}$. Si on passe aux complétés p-adiques, que l'on tensorise par K, et que l'on applique φ_m^{-1}, on obtient une application ε_m'. Posons $\varepsilon_m = p^{-c}\varepsilon_m'$: ceci définit un homomorphisme injectif de faisceaux d'anneaux

$$\varphi_{v_m}^{-1}\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)} \hookrightarrow \varphi_{v_m}^{-1} f_{v_m}^{*}(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(u_m)} \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)).$$

En passant à la limite inductive, on trouve un homomorphisme de faisceaux d'anneaux injectif $\varepsilon : \varinjlim_{m} \varphi_{v_m}^{-1}\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)} \hookrightarrow f^{*}\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$.

Proposition 5.2.3. — *L'homomorphisme de faisceaux d'anneaux* ε : $\varinjlim_{m} \varphi_{v_m}^{-1}\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m)} \hookrightarrow f^{*}\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{\dagger}(\infty)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il suffit de montrer la surjectivité. Pour cela, nous construisons des applications $\delta_m : \varphi_{v_m}^{-1} f_{v_m}^{*}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty) \to \varphi_{v_{m+2}}^{-1}\widehat{\mathcal{E}}_{\mathbf{Q}}^{(m+2)}$, telles que la composée $\varepsilon_{m+2} \circ \delta_m$ soit égale à l'inclusion canonique de $\varphi_m^{-1} f_m^{*}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(\infty)$ dans $\varphi_{v_{m+2}}^{-1} f_{v_{m+2}}^{*}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m+2)}(\infty)$.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert affine de $\mathcal{X}$ muni de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_N$. Nous reprenons les notations de 1.1 pour les opérateurs différentiels de niveau m et nous notons $m' = u_{m+2}$. L'ouvert obtenu par changement de base sur les $\mathcal{X}^{(k)}$ sera toujours noté $\mathcal{U}$. Notons $\xi_{v_{m+2}} = \pi_{v_{m+2}}^{N+2}$. Par hypothèse,

$$p = \xi_{v_{m+2}}^{p^{m+2}} \pi_{v_{m+2}} \pi_{v_{m+2}}^{p^{m+2}(p^{\kappa}-N-2)-1},$$

et l'exposant $p^{m+2}(p^{\kappa} - N - 2) - 1$ est positif. D'autre part, pour tout $k_i \leqslant p^{m+2}$, l'élément $\pi_{v_{m+2}} \partial_i^{\langle k_i \rangle (m+2)}$ est dans $\widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(v_{m+2})}} \cdot l(\Gamma(\mathcal{X}^{(v_{m+2})}, \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(v_{m+2})}} \otimes \mathcal{D}^{(m+2)}_{\mathcal{X}^{v(m+2)}, k_i})$.

$$\pi_{v_{m+2}} \xi_{v_{m+2}}^{k_i} \partial_i^{\langle k_i \rangle (m+2)} \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{X}^{(v_{m+2})}} \cdot l(\Delta_{k_i}).$$

Finalement, pour tout $k_i \leqslant p^{m+2}$, on a l'inclusion

$$p \partial_i^{\langle k_i \rangle (m+2)} \in \mathcal{E}^{(m+2)}(\mathcal{U}).$$

Observons maintenant que d'après 2.2.5 de [4], tout opérateur $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle (m+2)}$ est produit d'au plus $[|\underline{k}|/p^{m+2}] + N$ opérateurs d'ordre $\leqslant p^{m+2}$. On voit finalement que pour tout $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$, on a l'inclusion

$$p^{([|\underline{k}|/p^{m+2}]+N)} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle (m+2)} \in \mathcal{E}^{m+2}(\mathcal{U}).$$

Rappelons l'égalité

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle (m)} = \frac{q_{\underline{k}}^{(m)}!}{q_{\underline{k}}^{(m+2)}!} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle (m+2)}.$$

Notons enfin

$$A_m(\underline{k}) = v_p\left(p^{([|\underline{k}|/p^{m+2}]+N)} \frac{q_{\underline{k}}^{(m+2)}!}{q_{\underline{k}}^{(m)}!}\right).$$

D'après les inégalités rappelées en 1.2, un majorant de $A(\underline{k})$ est

$$\left(\frac{|\underline{k}|}{p^{m+2}} + N\right) + \frac{|\underline{k}|}{p^{m+2}(p-1)} - \frac{|\underline{k}|}{p^m(p-1)} + N \log_p(|\underline{k}| + 1) + \frac{Np}{p-1},$$

soit encore

$$\frac{-|\underline{k}|}{p^{m+1}} + N \log_p(|\underline{k}| + 1) + C,$$

C étant une constante. La fonction $A_m(\underline{k})$ est donc majorée pour tous $\underline{k}$ par une constante c. On vient ainsi de montrer qu'il existe un entier c tel que, pour tous $\underline{k}$, l'élément $p^c \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle (m)}$ est dans $\mathcal{E}^{(m+2)}$. Rappelons de plus que le faisceau $f_{v_{m+2},m}^{-1} f_m^* \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ est un sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{B}}^{m'}_{\mathcal{X}^{(v_{m+2})}}$ d'après le lemme 5.2.1. On en déduit une application canonique : $p^c f^{-1}_{m+2,m} f^*_m(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}})(\mathcal{U}) \to \mathcal{E}^{(m+2)}(\mathcal{U})$. Si l'on recouvre $\mathcal{X}$ par un nombre fini d'ouverts affines munis de coordonnées locales, on peut en fait choisir c assez grand pour que l'on ait une application naturelle δ'_m

$$p^c f^{-1}_{v_{m+2},m} f^*_m(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}}) \to \mathcal{E}^{(m+2)}.$$

En passant aux complétés, en tensorisant par K et en appliquant $\varphi^{-1}_{v_{m+2}}$, on obtient une application δ''_m. Posons finalement $\delta_m = p^{-c}\delta''_m$. L'homomorphisme δ_m est alors un homomorphisme de faisceaux d'anneaux

$$\varphi^{-1}_m f^*_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty) \to \varphi^{-1}_{v_{m+2}} \widehat{\mathcal{E}}^{(m+2)}_{\mathbf{Q}}.$$

Sur un ouvert $\mathcal{U}$ du recouvrement considéré de $\mathcal{X}$, on voit que, par construction,

$$\varepsilon_{m+2} \circ \delta_m(\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m)}}) = \frac{q^{(m)}_{\underline{k}}!}{q^{(m+2)}_{\underline{k}}!} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle_{(m+2)}}.$$

On en conclut que la composée $\varepsilon_{m+2} \circ \delta_m$ est égale à l'inclusion canonique de $\varphi^{-1}_m f^*_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ dans $\varphi^{-1}_{v_{m+2}} f^*_{v_{m+2}} \mathcal{D}^{(m+2)}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ et que l'homomorphisme ε est surjectif.

5.3. $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-affinité des schémas projectifs.

Nous noterons $\widehat{\mathcal{F}}^{(m)}$ les faisceaux d'anneaux $\varphi^{-1}_{v_m}\widehat{\mathcal{E}}^{(m)}$, $D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty) = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ et, dans les démonstrations, $D = D^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$. Commençons par quelques lemmes classiques.

LEMME 5.3.1. — *Si $\mathcal{M}$ est un $f^*\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, il existe un $\widehat{\mathcal{F}}^{(m)}$-module cohérent $\mathcal{M}^{(m)}$ tel que l'on ait un isomorphisme*

$$\mathcal{M} \simeq f^*\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty) \underset{\widehat{\mathcal{F}}^{(m)}}{\otimes} \mathcal{M}^{(m)}.$$

LEMME 5.3.2. — *Soient C une V-algèbre, D une V-algèbre qui est un C-module à droite fidèlement plat. Si D est une algèbre cohérente à gauche, alors C est aussi cohérente à gauche et un C-module à gauche M est cohérent si et seulement si $D \underset{C}{\otimes} M$ est un D-module à gauche cohérent.*

Démonstration. — Ce lemme résulte du fait qu'un C-module à gauche M est de type fini si et seulement si $D \underset{C}{\otimes} M$ est un D-module à gauche de type fini. En effet, supposons que $D \underset{C}{\otimes} M$ soit un D-module de type fini engendré par les éléments $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$. Décomposons, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} d_{i,j} \otimes m_{i,j}, \quad \text{où} \quad d_{i,j} \in D \quad \text{et} \quad m_{i,j} \in M.$$

Considérons l'application C-linéaire à gauche λ

$$\begin{array}{ccc} C^{rn} & \to & M \\ c_{i,j} & \hookrightarrow & m_{i,j}. \end{array}$$

L'application D-linéaire $1 \otimes \lambda$ déduite par extension des scalaires est surjective, ce qui implique, par fidèle platitude de D, que λ est surjective et donc que M est de type fini.

Si M est un $D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module de présentation finie, on note $\varphi(M)$ le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)(\mathcal{U}) \underset{D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)}{\otimes} M$, qui est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}$-module cohérent. L'anneau $\Gamma(\tilde{\mathcal{X}}, A \otimes \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ s'identifie à $A \underset{V}{\otimes} D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ par platitude de A sur V. On notera ψ le foncteur analogue à φ pour les $A \otimes D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents et qui est à valeurs dans la catégorie des $f^*\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents.

THÉORÈME 5.3.3. — *Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel projectif muni d'un diviseur ample. On a alors les propriétés suivantes :*

(i) *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent,* $\mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = 0$ *pour tout entier $k > 0$,*

(ii) *le module $\mathcal{M}$ admet une résolution libre de rang fini sur $\mathcal{X}$.*

(iii) *L'anneau $D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ est cohérent et les foncteurs φ et Γ induisent une équivalence de catégories naturelle entre les $D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents et les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents. En outre ces deux foncteurs sont exacts.*

Démonstration. — Commençons par montrer le même énoncé pour les $f^*\mathcal{D}$-modules cohérents et les $A \underset{V}{\otimes} D$-modules cohérents. Si $\mathcal{M}$ est un $f^*\mathcal{D}$-module cohérent, il existe un entier m et un $\widehat{\mathcal{F}}^{(m)}_{\mathbf{Q}}$-module cohérent $\mathcal{M}^{(m)}$ tel que

$$\mathcal{M} \simeq \varinjlim_{m' \geqslant m} \widehat{\mathcal{F}}^{(m')}_{\mathbf{Q}} \underset{\widehat{\mathcal{F}}^{(m)}}{\otimes} \mathcal{M}^{(m)}.$$

Par passage à la limite inductive à partir de (i) de 4.2.2, on voit que $\mathcal{M}$ est acyclique. En partant d'une résolution à deux termes de $\mathcal{M}^{(m)}$ ((ii) de 4.2.2), en étendant les scalaires à $f^*\mathcal{D}$, on obtient une résolution à deux termes de $\mathcal{M}$. En itérant le procédé on trouve une résolution libre de rang fini de $\mathcal{M}$. Le (iii) se montre alors comme 4.2.3 et $A \underset{V}{\otimes} D$ est une algèbre cohérente. En particulier, on déduit du lemme 5.3.2 que D est une V-algèbre cohérente. Si M est un D-module de présentation finie, il existe un isomorphisme canonique

$$(A \underset{V}{\otimes} f^{-1}\mathcal{D}) \underset{A \underset{V}{\otimes} D}{\otimes} (A \underset{V}{\otimes} M) \simeq (A \underset{V}{\otimes} f^{-1}\mathcal{D}) \underset{D}{\otimes} M,$$

soit encore un isomorphisme canonique

$$\psi(A \underset{V}{\otimes} M) \simeq f^*\varphi(M).$$

En outre, il découle du théorème de changement de base pour les morphismes plats qu'il existe des isomorphismes canoniques pour tout entier k et tout $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-module $\mathcal{F}$

$$\mathrm{H}^k(\tilde{\mathcal{X}}, f^*\mathcal{F}) \simeq A \underset{V}{\otimes} \mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{F}).$$

Appliquons cette propriété au cas où $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module cohérent : $f^*\mathcal{M}$ est un $f^*\mathcal{D}$-module cohérent et d'après ce qui précède, les groupes $\mathrm{H}^k(\tilde{\mathcal{X}}, f^*\mathcal{M})$ sont nuls pour tout $k \geqslant 1$. Par fidèle platitude de A sur V, cela entraîne que les groupes $\mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ sont nuls pour tout $k \geqslant 1$.

Si M est un D-module de présentation finie, il existe un homomorphisme canonique $M \xrightarrow{\alpha} \Gamma \circ \varphi(M)$. Le module $A \underset{V}{\otimes} \Gamma \circ \varphi(M)$ s'identifie à $\Gamma(\tilde{\mathcal{X}}, f^*\varphi(M))$ et donc à $\Gamma(\tilde{\mathcal{X}}, \psi(A \otimes M))$ et l'homomorphisme $1 \otimes \alpha$: $A \underset{V}{\otimes} M \to \psi(A \otimes M)$ n'est autre que l'homomorphisme canonique correspondant à ψ. Cet homomorphisme est un isomorphisme de sorte que α est un isomorphisme.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module cohérent, le module $\Gamma(\tilde{\mathcal{X}}, f^*\mathcal{M})$ s'identifie à $A \underset{V}{\otimes} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ et est un $A \underset{V}{\otimes} D$-module cohérent. Il découle du lemme 5.3.2, que $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ est un D-module cohérent. Notons β l'homomorphisme canonique $\varphi \circ \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}) \to \mathcal{M}$. L'homomorphisme $1 \otimes \beta$ obtenu en étendant les scalaires de V à A s'identifie à l'homomorphisme canonique $\psi \circ \Gamma(\tilde{\mathcal{X}}, f^*\mathcal{M}) \to f^*\mathcal{M}$, qui est un isomorphisme. Ceci entraîne que β est un isomorphisme.

Le foncteur φ s'étend naturellement en un foncteur toujours noté φ de $D^-_{\mathrm{coh}}(D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ vers $D^-_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$. Par dévissage, on en déduit le théorème suivant.

THEOREME 5.3.4. — *Avec les hypothèses du théorème précédent, les foncteurs φ et $\mathbf{R}\Gamma$ induisent une équivalence de catégories entre $D^-_{\mathrm{coh}}(D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$ et $D^-_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty))$.*

Remarque. — On peut aussi déduire de cette équivalence de catégories certaines propriétés algébriques de l'anneau $D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$. Ainsi, en procédant comme en 5.2.5 de [10], on montre que, si $\mathcal{V}$ est un ouvert affine de $\mathcal{X}$, le module $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)(\mathcal{V})$ est un $D^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module à droite plat.

De plus, la démonstration du théorème principal s'adapte de façon évidente au cas des modules à droite et tous les énoncés précédents sont aussi vrais pour les modules à droite.

5.4. Énoncé du théorème principal dans le cas relatif.

Le fait que la base soit de dimension relative 0 sur Spf$V$ n'intervient pas dans les démonstrations. Supposons que $\mathcal{S}$ soit un V-schéma formel, que $\mathcal{X}$ soit un schéma relativement projectif, et lisse sur $\mathcal{S}$. Il existe alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \overset{\imath}{\hookrightarrow} & \mathcal{P}^N_{\mathcal{S}} \\ & \overset{f}{\searrow} & \downarrow \\ & & \mathcal{S} \end{array}.$$

Notons $y_1, \ldots, y_N$ les coordonnées projectives sur $\mathcal{P}^N_{\mathcal{S}}$ et supposons que le diviseur sur $\mathcal{X}$, à partir duquel on construit le faisceau à pôles surconvergents $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}/\mathcal{S},\mathbf{Q}}(\infty)$, soit donné par l'équation $y_0 = 0$. Notons φ le foncteur qui, à un $f_*\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}/\mathcal{S},\mathbf{Q}}(\infty)$-module de présentation finie M, associe $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}/\mathcal{S},\mathbf{Q}}(\infty) \underset{f_*\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}/\mathcal{S},\mathbf{Q}}(\infty)}{\otimes} M$. La même démonstration que précédemment fournit alors le théorème suivant.

THEOREME 5.4.1. — (i) *Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}/\mathcal{S},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent, $\mathrm{R}^k f_*\mathcal{M} = 0$ pour tout entier $k > 0$,*

(ii) *le module $\mathcal{M}$ admet une résolution libre de rang fini sur $\mathcal{X}$.*

(iii) *Le faisceau d'anneaux $f_*\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}/\mathcal{S},\mathbf{Q}}(\infty)$ est cohérent et les foncteurs φ et f induisent une équivalence de catégories naturelle entre les*

$f_*\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}/\mathcal{S},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents et les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}/\mathcal{S},\mathbf{Q}}(\infty)$-modules cohérents. En outre ces deux foncteurs sont exacts.

Remarque. — Ce résultat est bien entendu aussi valable pour les modules à droite. En particulier, on voit que le faisceau $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$, qui est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module à droite cohérent défini dans la section suivante, est acyclique pour f_*. Ce résultat intervient dans le calcul de la transformation de Fourier effectué en 4.3 de [8].

6. Question de la comparaison avec le faisceau d'opérateurs introduit par Z. Mebkhout et L. Narvaez-Macarro.

Le résultat précédent permet d'énoncer la question de la comparaison entre les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules introduits par P. Berthelot et les modules sur le faisceau d'opérateurs différentiels introduits par Z. Mebkhout et L. Narvaez-Macarro. La réponse à cette question ne découle pas immédiatement du théorème principal 5.3.3 et nous l'aborderons ultérieurement. Nous nous contenterons ici de formuler cette question.

Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel lisse sur Spf$V$, muni d'un diviseur relatif $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{U}$ l'ouvert complémentaire du diviseur. On suppose que $\mathcal{U}$ est affine et on note $\mathcal{O}(U^\dagger)$ la sous-algèbre de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ des séries qui sont surconvergentes, c'est-à-dire l'ensemble des éléments f de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ tels qu'il existe des éléments $x_1,\ldots,x_k$ de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$, des polynômes $p_j \in \pi^j[x_1,\ldots,x_k]$, et une constante c tels que

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x_1,\ldots,x_k) \quad \text{et} \quad \deg p_j \leqslant c(j+1),$$

où deg est le degré du polynome considéré. À cette algèbre faiblement convergente, on peut associer un schéma faiblement formel de Meredith noté $U^\dagger$ (cf. 2 de [14]). D'après le théorème 1.4 de [15], les schémas $U^\dagger \times \operatorname{Spec}(V/\pi^i)$ et $\mathcal{U} \times \operatorname{Spec}(V/\pi^i)$ sont isomorphes. En particulier, du fait que $\mathcal{U}$ est lisse, l'algèbre $\mathcal{O}(U^\dagger)$ est formellement lisse et son module des différentielles est projectif de type fini (4.6 de [15]).

Suivant Mebkhout et Narvaez-Macarro (4.2.1 de [13]), on note $\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger/V}$ le sous-faisceau de $\mathcal{H}om_V(O_{U^\dagger}, O_{U^\dagger})$ des endomorphismes P pour lesquels il existe une constante c telle que pour tout $i \geqslant 1$, la réduction mod π^i de

P soit un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant c(i+1)$. D'après 4.4 de [13], si $x_1, \dots x_N$ sont des coordonnées locales sur un ouvert $V^\dagger$ de $U^\dagger$,

$$\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger/V}(V^\dagger) \otimes_V \mathbf{Q} = \left\{ \sum_{\underline{l}\in\mathbf{N},\underline{k}\in\mathbf{N}} a_{\underline{l},\underline{k}}\, \underline{x}^{\underline{l}}\, \underline{\partial}_x^{[\underline{k}]} : a_{\underline{l},\underline{k}} \in K \;\; \text{et} \;\; \exists c, \eta < 1 \right.$$

$$\left. \text{tels que} \;\; |a_{\underline{l},\underline{k}}| < c\eta^{|\underline{k}|+|\underline{l}|} \right\}.$$

La question est de savoir s'il existe une équivalence de catégories naturelles entre les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules cohérents et les $\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger/V} \underset{V}{\otimes} \mathbf{Q}$-modules cohérents. Dans le cas où $\mathcal{X}$ est projectif et où le diviseur $\mathcal{Z}$ est ample, il suffit en fait de comparer les sections globales $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$ et $\Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger/V} \underset{V}{\otimes} \mathbf{Q})$.

Par exemple, dans le cas de l'espace projectif, le schéma faiblement formel associé à l'ouvert complémentaire du diviseur est l'espace affine de dimension N et les deux faisceaux considérés ont mêmes sections globales, la complétée faible de l'algèbre de Weyl de dimension N. Comme les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})$-modules cohérents (resp. les $\mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger/V} \underset{V}{\otimes} \mathbf{Q}$-modules cohérents), corespondent aux modules cohérents sur l'algèbre des sections globales $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$ (resp. $\Gamma(U^\dagger, \mathcal{D}^\dagger_{U^\dagger/V} \underset{V}{\otimes} \mathbf{Q})$), on a bien une équivalence de catégories dans ce cas.

7. Un résultat d'invariance birationnelle.

Dans toute la suite, sauf mention contraire, le schéma de base $\mathcal{S}$ est de nouveau le schéma formel Spf$V$. Nous considérons $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux schémas formels lisses sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ des diviseurs relatifs, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ les ouverts complémentaires, $Z_i \hookrightarrow X_i$, $T_i \hookrightarrow Y_i$, U_i et U'_i la réduction de la situation modulo π^i. On suppose que l'on a un morphisme $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, qui envoie $\mathcal{U}'$ dans $\mathcal{U}$ et qui induit des isomorphismes $f^{-1}(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U}'$ et $f^{-1}(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U}$.

Si $\mathcal{D}$ est un faisceau d'anneaux cohérent, la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{D}$-modules cohérents (resp. parfaits) à cohomologie bornée (resp. en degrés négatifs) sera notée $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D})$, resp. $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D})$, resp. $D^-_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D})$, resp. $D^-_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D})$.

Nous revenons aux conventions de P. Berthelot pour les coefficients $\mathcal{B}^{(m)}$, telles qu'elles sont rappelées dans l'introduction : si ξ est une équation locale de Z_i nous noterons $\mathcal{B}^{(m)}_{X_i}$ le faisceau défini localement par

$$\mathcal{B}^{(m)}_{X_i} = \mathcal{O}_{X_i}[T]/(\xi^{p^{m+1}}T - p),$$

$\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ son complété p-adique et $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathcal{X}} = \varinjlim_{m} \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$.

Nous utiliserons abondamment la proposition 4.3.12 de [4], selon laquelle un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-module cohérent est nul si et seulement si sa restriction à l'ouvert complémentaire du diviseur est nulle.

7.1. Rappels sur les images directes et inverses des $\mathcal{D}^{\dagger}(\infty)$-modules.

Dans cette sous-section, nous supposons seulement que $f(\mathcal{U}') \subset \mathcal{U}$. Nous rappelons ici des définitions et résultats de [1] et [2]. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{B}^{(m)}_{X_i}$-module (resp. un $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$-module), nous noterons

$$\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}^{(m)}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{F} \quad (\text{resp. } \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{F}).$$

Introduisons $d = \dim\mathcal{X} - \dim\mathcal{Y}$ et f_i le morphisme induit $Y_i \to X_i$. On dispose alors d'un homomorphisme canonique : $f_i^{-1}\mathcal{B}^{(m)}_{X_i} \to \mathcal{B}^{(m)}_{Y_i}$. On note

$$\mathcal{D}^{(m)}_{Y_i\to X_i}(\infty) = \mathcal{B}^{(m)}_{Y_i} \otimes_{f_i^{-1}\mathcal{B}^{(m)}_{X_i}} f_i^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(\infty) = \mathcal{B}^{(m)}_{Y_i} \otimes_{f_i^{-1}\mathcal{O}_{X_i}} f_i^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i},$$

c'est un $f_i^{-1}D^{(m)}_{X_i}(\infty)$-module à droite et un $\mathcal{D}^{(m)}_{Y_i}(\infty)$-module à gauche. Notons encore

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}(\infty) = \varprojlim_{i} \mathcal{D}^{(m)}_{Y_i\to X_i}(\infty)$$

et

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty) = \varinjlim_{m} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$$

ou encore $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}T)$, si l'on souhaite préciser le diviseur. On introduit d'autre part

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X_i\leftarrow Y_i}(\infty) = \tilde{\omega}_{Y_i} \otimes_{\mathcal{B}^{(m)}_{Y_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{Y_i\to X_i}(\infty) \otimes_{f_i^{-1}\mathcal{B}^{(m)}_{X_i}} f_i^{-1}\tilde{\omega}^{-1}_{X_i},$$

c'est un $f_i^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}(\infty)$-module à gauche et un $\mathcal{D}^{(m)}_{Y_i}(\infty)$-module à droite. Nous introduisons de plus

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y}}(\infty) = \varprojlim_i \mathcal{D}^{(m)}_{X_i\leftarrow Y_i}(\infty) = \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}(\infty) \underset{f^{-1}\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{X}}}{\otimes} f^{-1}\tilde{\omega}_{\mathcal{X}}^{-1},$$

et

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty) = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty),$$

encore noté $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$.

Si $\mathcal{M}$ appartient à $D^-_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$, on pose

$$f^!(\mathcal{M}) = \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}({}^\dagger\mathcal{T}) \underset{f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})}{\overset{\mathbf{L}}{\otimes}} f^{-1}(\mathcal{M})\,[d].$$

Si $\mathcal{N}$ appartient à $D^-_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}))$, on pose

$$f_+\mathcal{N} = \mathbf{R}f_*\left(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}) \underset{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})}{\overset{\mathbf{L}}{\otimes}} \mathcal{N}\right).$$

On définit de la même façon l'image directe à un niveau fini f_{i+}, l'image inverse à un niveau fini $f_i^!$, $f_+^{(m)}$ et $f^{(m)!}$. Toujours d'après [1] et [2], le foncteur $f^!$ (resp. $f_i^!$, $f^{(m)!}$) préserve la cohérence dans le cas où f est lisse et le foncteur f_+ (resp. f_{i+} et $f_+^{(m)}$) préserve la cohérence dans le cas où f est propre.

7.2. Un énoncé de cohérence.

Dans cette partie, on suppose seulement que f induit une immersion ouverte $f^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}'$. Nous aurons besoin de considérer les fibres génériques (au sens de M. Raynaud, cf. [16]) des schémas formels intervenant ici. Ce sont des espaces analytiques rigides $\mathcal{X}_K$ et $\mathcal{Y}_K$. On rappelle que l'on dispose d'un homomorphisme de spécialisation sp: $\mathcal{X}_K \to \mathcal{X}$. Si Z est une partie localement fermée de $\mathcal{X}$, le tube de Z dans $\mathcal{X}_K$ est par définition $]Z[= \mathrm{sp}^{-1}(Z)$, qui est un ouvert de $\mathcal{X}_K$. Nous commençons par quelques lemmes techniques.

LEMME 7.2.1. — *Soient $\mathcal{V}$ un ouvert affine de $\mathcal{Y}$ sur lequel $\mathcal{T}$ est défini par l'équation $\xi = 0$ et $h \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\mathcal{V}) \bigcap \mathcal{O}(\mathcal{V} \bigcap D(\xi))$. Alors il existe $m' \in \mathbf{N}$ tel que $ph \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{V})$.*

Démonstration. — Du fait que $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ est sans torsion et que ξ n'est pas diviseur de 0 modulo p, il existe une injection $\mathcal{O}(\mathcal{V})/p\mathcal{O}(\mathcal{V}) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathcal{V})[1/\xi]/p\mathcal{O}(\mathcal{V})[1/\xi]$. Soit maintenant $h \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\mathcal{V}) \bigcap \mathcal{O}(\mathcal{V} \bigcap D(\xi))$, alors il existe $r \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{V})$ et $h' \in \mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}} = \mathcal{O}(\mathcal{V})[1/\xi]_{\mathbf{Q}}$ tels que $h = h' + r$. En fait h' est dans $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}} \bigcap \mathcal{O}(\mathcal{V} \bigcap D(\xi))$. On en déduit l'existence d'un $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\xi^{n_0} h' = k \in \mathcal{O}(\mathcal{V})_{\mathbf{Q}} \bigcap \mathcal{O}(\mathcal{V} \bigcap D(\xi))$. Choisissons s minimal tel que $p^s k = l \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$. Si $s = 0$, cela signifie que $k \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$; si $s \geqslant 1$, $i(\bar{l}) = 0$ où $\bar{l}$ est l'image de l dans $\mathcal{O}(\mathcal{V})/p\mathcal{O}(\mathcal{V})$. Donc l s'écrit pl' avec $l' \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$ et on a la relation $p^{s-1}k = l' \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$, ce qui contredit la minimalité de s. On voit finalement que $k \in \mathcal{O}(\mathcal{V})$ et il suffit alors de choisir $m' \geqslant m$ tel que $p/\xi^{n_0} \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{V})$ pour obtenir le lemme.

LEMME 7.2.2. — *Avec les hypothèses du lemme précédent, soit $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{V})$ tel que h soit inversible sur $\mathcal{V} \cap D(\xi)$, alors il existe $m' \in \mathbf{N}$ tel que $ph^{-1} \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{V})$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{V}_K$ la fibre générique de $\mathcal{V}$. On continuera à utiliser les notations $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{T}$ pour l'intersection de ces espaces avec $\mathcal{V}$ et on notera U' et Z leur réduction modulo π, $]U'[$ et $]Z[$ leurs tubes dans $\mathcal{V}_K$. Les hypothèses signifient que $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{V}_K}(\mathcal{V}_K)$ est inversible sur $]U'[$. Donc l'ensemble analytique des zéros de h dans $\mathcal{V}_K$, $V(h)$, est inclus dans $]Z'[$. Sur $V(h)$, la norme spectrale $|\xi|_{sp}$ de ξ atteint son maximum en $x_0 \in V(h)$. Comme $x_0 \in]Z[$, il existe $\alpha < 1$ tel que $|\xi(x_0)| < \alpha < 1$. Finalement, sur le tube fermé défini par $|\xi|_{sp} \geqslant \alpha$, h est inversible, ce qui revient précisément à dire que $h^{-1} \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m)}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\mathcal{V})$ pour m assez grand. On peut alors appliquer le lemme précédent à h et cela conclut la démonstration du lemme.

PROPOSITION 7.2.3. — *Il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T})$-modules :*

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T}) \simeq \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T}).$$

Démonstration. — L'idée de la démonstration est de faire un changement de base pour le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T})$, comme pour le lemme 4.4 de [5]. Tout d'abord, $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T})$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T})$-module à gauche et le module $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}({}^{\dagger}\mathcal{T})$ possède une section canonique $1 \otimes 1$, de sorte que l'on a une flèche canonique λ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T}) & \to & \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T}) \\ P & \mapsto & P\cdot(1 \otimes 1). \end{array}$$

Voir que λ est un isomorphisme est une question locale ; on peut donc supposer que $\mathcal{X}$ est un ouvert affine muni de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_N$, sur lequel le diviseur $\mathcal{Z}$ est donné par une équation $\xi = 0$. On peut aussi supposer que $\mathcal{Y}$ est affine, muni de coordonnées locales $y_1, \ldots, y_N$. Soit j l'injection de $\mathcal{U}'$ dans $\mathcal{Y}$. D'après 4.3.10 de [4], les faisceaux $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$ et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$ se plongent respectivement dans $j_*j^*\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$ et dans $j_*j^*\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$. De plus, en restriction à $\mathcal{U}$, l'application λ est un isomorphisme. Cela montre que λ est injectif sur $\mathcal{Y}$. Pour voir que λ est surjectif, nous construisons une section de λ. Nous examinons d'abord la situation à un niveau fini. Fixons $m \in \mathbf{N}$, l'application λ provient d'une application $\lambda_m : \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{Y}}) \to \Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}})$ où $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{Y}})$ est le $\mathcal{O}_Y$-module libre de base les $\underline{\partial}_y^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$ et $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}})$ est le $\mathcal{O}_Y$-module libre de base les $\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$. Considérons les sous-$\mathcal{O}_Y$-modules libres $\mathcal{M} = \bigoplus_{|\underline{k}|\leqslant p^m} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$ et $\mathcal{N} = \bigoplus_{|\underline{k}|\leqslant p^m} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}$. Il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \hookrightarrow & j_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}'} \otimes \mathcal{M} \\ \downarrow \lambda_m & & \downarrow 1\otimes\lambda_m \\ \mathcal{N} & \hookrightarrow & j_*\mathcal{O}_{\mathcal{U}'} \otimes \mathcal{N}. \end{array}$$

La flèche à droite est la flèche induite par λ_m sur l'ouvert $\mathcal{U}'$, qui est un isomorphisme car la restriction de f à $\mathcal{U}'$ est simplement une immersion ouverte. Finalement $1\otimes\lambda_m$ est un isomorphisme. Cela signifie que $\det\lambda_m \in \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ et que $(\det\lambda_m)^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}'}$. On peut donc appliquer le lemme 7.2.2 et on en déduit que $p(\det\lambda_m)^{-1} \in \Gamma(\mathcal{Y}, \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}_{\mathcal{Y}})$ pour un certain $m' \geqslant m$. En d'autres termes, si $j \leqslant m$, $p\cdot\lambda_m^{-1}(\partial_{x_i}^{\langle p^j\rangle_{(m)}}) \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}(\mathcal{Y}) \otimes \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y})$. De plus, en restriction à $\mathcal{U}'$, λ_m est un isomorphisme d'anneaux et on a la relation

$$\lambda_m^{-1}(\partial_{x_i}^{\langle p^j\rangle_{(m)}}\partial_{x_i}^{\langle p^j\rangle_{(m)}}) = \lambda_m^{-1}(\partial_{x_i}^{\langle p^j\rangle_{(m)}})\lambda_m^{-1}(\partial_{x_i}^{\langle p^j\rangle_{(m)}}).$$

Les opérateurs $\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle(m)}$ sont produit d'au plus $[|\underline{k}|/p^m] + N$ opérateurs d'ordre $\leqslant p^m$ (où $[x]$ est la partie entière d'un réel x), de sorte que l'on trouve finalement que pour tout $\underline{k} \in \mathbf{N}^N$,

$$p^{[|\underline{k}|/p^m]+N}\lambda_m^{-1}(\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m)}}) \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}(\mathcal{Y}) \otimes \mathcal{D}^{(m)}(\mathcal{Y}).$$

Soit maintenant $m_0 \in \mathbf{N}$. Appliquons ce qui précède à $m = m_0 + 2$. Cela signifie qu'il existe $m' \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $\underline{k}$,

$$p^{([|\underline{k}|/p^{m_0+2}]+N)}\lambda_{m_0+2}^{-1}(\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle_{(m_0+2)}}) \in \widehat{\mathcal{B}}^{(m')}(\mathcal{Y}) \otimes \mathcal{D}^{(m_0+2)}(\mathcal{Y}).$$

De plus, nous avons la relation

$$\lambda^{-1}_{m_0+2}(\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle (m_0+2)}) = \frac{q_{\underline{k}}^{(m_0+2)}!}{q_{\underline{k}}^{(m_0)}!}\ \lambda^{-1}_{m_0}(\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle (m_0)}).$$

On conclut alors, comme pour la démonstration de 5.2.3, qu'il existe un entier c tel que, pour tout $\underline{k}$,

$$p^c\lambda^{-1}_{m_0}(\underline{\partial}_x^{\langle \underline{k}\rangle (m_0)}) \in \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m')} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{Y}}^{(m')}(\mathcal{Y}).$$

Posons maintenant $\mu_{m_0} = p^c\lambda^{-1}_{m_0}$ et $\rho_{m_0,m'}$ l'injection canonique de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$ dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$. Alors, μ_{m_0} induit une application entre les faisceaux : $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m_0)} \otimes f^{-1}\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m_0)} \to \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m')} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{Y}}^{(m')}$. Par passage aux complétés et après tensorisation par K, on en déduit une application $\nu_{m_0} = p^{-c}\widehat{\mu}_{m_0}\colon \widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty) \to \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{Y}}^{(m')}\widehat{\otimes}\widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}$. Par construction, on a la propriété que $\lambda_{m'}\circ\nu_{m_0} = \rho_{m_0,m'}$. Par passage à la limite sur m_0 de toutes ces applications ν_{m_0}, on trouve une application $\nu : \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T}) \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T})$, qui est une section de λ, si bien que λ est surjectif.

COROLLAIRE 7.2.4. — *Avec les hypothèses du début de la sous-section, soit $\mathcal{M} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z}))$. Alors $f^!\mathcal{M} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T}))$.*

Démonstration. — Par dévissage, on peut supposer que $\mathcal{M}$ est réduit à un seul module $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$-cohérent, toujours noté $\mathcal{M}$. L'assertion est locale sur la base, si bien que l'on peut supposer que $\mathcal{X}$ est affine et que $\mathcal{M}$ admet une résolution $(L_\bullet)$ par des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z})$-modules libres. Le complexe $f^!\mathcal{M}$ est donc calculé par le complexe : $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}}({}^{\dagger}\mathcal{T}) \otimes L_\bullet$ qui est à terme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T})$-cohérents d'après le lemme 7.2.3. On en déduit que $f^!\mathcal{M} \in D^-_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T}))$ et la proposition.

7.3. Théorème d'invariance birationnelle.

À partir de maintenant dans tout le reste de cette sous-section, on considère le cas où $f^{-1}(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U}'$ et où f induit un isomorphisme : $\mathcal{U}' \to \mathcal{U}$. Dans la suite, on identifie $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$. De l'isomorphisme donné en 7.2.3, on déduit qu'il existe un morphisme canonique de faisceaux μ : $f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z}) \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T})$, induit par l'application :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{Z}) & \to & \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^{\dagger}\mathcal{T}) \\ P & \mapsto & 1\otimes P. \end{array}$$

Il est clair sur $\mathcal{U}$ que μ est un homomorphisme d'anneaux, si bien que c'est vrai sur tout $\mathcal{Y}$. Via cet homomorphisme, tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T)$-module à droite ou à gauche peut être considéré comme un $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module à droite ou à gauche. L'isomorphisme λ est alors un isomorphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T) \times f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-bimodules puisque c'est vrai en restriction à $\mathcal{U}$.

LEMME 7.3.1. — *Il existe un isomorphisme canonique de $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)\times \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T)$-bimodules*

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T) \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}}^{-1} \simeq \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T) \underset{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}}{\otimes} f^{-1}\tilde{\omega}_{\mathcal{X}}^{-1}.$$

Démonstration. — Précisons que l'on munit $\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T) \underset{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}}{\otimes} f^{-1}\tilde{\omega}_{\mathcal{X}}^{-1}$ de la structure de $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-module à droite qui provient de la structure tordue de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T)$-module à gauche. Il existe un morphisme canonique : $\tilde{\omega}_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}^{-1} \to \mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}} \underset{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}}{\otimes} f^{-1}\tilde{\omega}_{\mathcal{X}}^{-1}$, qui est un isomorphisme sur $\mathcal{U}$ et qui est donc un isomorphisme sur tout $\mathcal{Y}$. Cet isomorphisme s'étend par linéarité pour donner un isomorphisme $\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}$-linéaire

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T) \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}}^{-1} \to \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T) \underset{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}}{\otimes} f^{-1}\tilde{\omega}_{\mathcal{X}}^{-1}.$$

Comme le produit tensoriel sur $\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}$ est pris pour la structure naturelle de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T)$-module, cette flèche est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T)$-linéaire à droite entre ces deux modules cohérents. De plus, on dispose d'injections bi-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T)$-linéaires

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T) \underset{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}}{\otimes} f^{-1}\tilde{\omega}_{\mathcal{X}}^{-1} \hookrightarrow j_*j^*(\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T) \underset{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}}{\otimes} f^{-1}\tilde{\omega}_{\mathcal{X}}^{-1})$$

et

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T) \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}}^{-1} \hookrightarrow j_*j^*(\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T) \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}}^{-1}).$$

Il suffit donc de vérifier la $f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-linéarité à gauche en restriction à $\mathcal{U}$, ce qui est clair.

PROPOSITION 7.3.2. — *Avec les hypothèses du début de la section, supposons de plus que f soit propre. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des modules respectivement $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger T)$ et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger Z)$-cohérents. Alors les faisceaux $\mathcal{H}^n f^! \mathcal{N}$*

et $\mathcal{H}^n f_+\mathcal{M}$ sont nuls pour $n \neq 0$, les faisceaux $\mathcal{H}^0 f^!\mathcal{N}$ et $\mathcal{H}^0 f_+\mathcal{M}$ sont cohérents, et il existe des isomorphismes canoniques

$$f_+\mathcal{M} \simeq f_*\mathcal{M} \quad \text{et} \quad f^!\mathcal{N} \simeq \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}) \underset{f^{-1}\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})}{\otimes} f^{-1}\mathcal{N}.$$

Démonstration. — Tout d'abord, il résulte de [1] que f_+ préserve la cohérence. D'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned} f_+\mathcal{M} &= Rf_*\left((\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}) \underset{f^{-1}\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{X}}}{\otimes} f^{-1}\tilde{\omega}_{\mathcal{X}}^{-1}) \underset{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})}{\otimes} \mathcal{M}\right) \\ &\simeq Rf_*\left((\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}) \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}}^{-1}) \underset{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})}{\otimes} \mathcal{M}\right). \end{aligned}$$

Or le passage à l'adjoint induit un isomorphisme canonique de bi-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$-modules entre $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$ et $\tilde{\omega}_{\mathcal{Y}} \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}) \underset{\mathcal{B}^\dagger_{\mathcal{Y}}}{\otimes} \tilde{\omega}_{\mathcal{Y}}^{-1}$, si bien que $f_+\mathcal{M} = Rf_*(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}) \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{M})$ qui est isomorphe à $Rf_*(\mathcal{M})$. Mais si $i \geqslant 1$, les modules $R^i f_*\mathcal{M}$ sont des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$-modules cohérents dont la restriction à $\mathcal{U}$ est nulle, si bien qu'ils sont nuls sur tout $\mathcal{Y}$.

Pour ce qui est de l'image inverse, elle est cohérente d'après le corollaire 7.2.4 et les modules $\mathcal{T}or^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}}({}^\dagger\mathcal{Z}), \mathcal{N})$ sont des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$-modules cohérents qui sont nuls sur $\mathcal{U}$ et qui sont donc nuls. La formule résulte alors du fait que l'on a un isomorphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$-modules à gauche $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}) \simeq \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$.

THEOREME 7.3.3. — *Avec les hypothèses de la proposition précédente, $f^!$ et f_+ induisent une équivalence de catégories entre $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}))$ et $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$.*

Nous utilisons ici le fait que le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})$ est de dimension cohomologique finie. Nous renvoyons à [11] pour une démonstration de ce résultat. En particulier, la catégorie $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}))$ coïncide avec la catégorie $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T}))$ (de même pour $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z}))$). On peut donc appliquer le théorème de dualité relative de A. Virrion (cf. [17]) et son corollaire qui est la formule d'adjonction 9.12 de [6], pour voir qu'il existe des homomorphismes canoniques dans $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{T})))$ et dans $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger\mathcal{Z})))$

$$\mathcal{M} \to f^! f_+\mathcal{M} \quad \text{et} \quad f_+ f^!\mathcal{N} \to \mathcal{N}.$$

Pour montrer que ce sont des isomorphismes on peut alors supposer que $\mathcal{M}$ et que $\mathcal{N}$ sont cohérents et placés en degré zéro. Il résulte alors de la proposition que les modules $f^! f_+ \mathcal{M}$ et $f_+ f^! \mathcal{N}$ sont cohérents et placés en degré zéro. D'autre part, il est évident que sur l'ouvert $\mathcal{U}$ ces morphismes sont des isomorphismes. La conclusion provient donc encore une fois de 4.3.12 de [4].

Remarques.

(i) Notons que cette équivalence de catégories coïncide bien, pour les images directes par spécialisation d'isocristaux surconvergents, avec l'équivalence de catégories décrite en 2.3.5 de [3]. En effet, notons f_K le morphisme induit par f au niveau des fibres génériques : $\mathcal{Y}_K \to \mathcal{X}_K$. Alors encore d'après 2.3.5 de [3], si E est un isocristal sur X surconvergent le long de Z, il lui correspond $f_K^* E$, sur $\mathcal{Y}_K$. Or, d'après 1.5 de [8], $\mathrm{sp}_* f_K^* E$ est isomorphe à $f^! sp_* E$. D'où la remarque.

(ii) Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{T})$-module cohérent et un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{Z})$-module cohérent, nous noterons par abus de notation $f_+\mathcal{M} = \mathcal{H}^0 f_+ \mathcal{M}$ et $f^!\mathcal{N} = \mathcal{H}^0 f^! \mathcal{N}$. Comme le module $f^! f_+ \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{T})$ s'identifie à $f^!\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{Z})$, le module $f_+\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{T})$ s'identifie à $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{Z})$. En particulier, les sections globales $\Gamma(\mathcal{Y}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{T}))$ s'identifient à $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}({}^\dagger \mathcal{Z}))$. De plus, par acyclicité de f_*, on a des isomorphismes canoniques, pour tous $k \geqslant 0$,

$$\mathrm{H}^k(\mathcal{Y}, \mathcal{M}) \simeq \mathrm{H}^k(\mathcal{X}, f_+\mathcal{M}), \quad \mathrm{H}^k(\mathcal{Y}, f^!\mathcal{N}) \simeq \mathrm{H}^k(\mathcal{X}, \mathcal{N}).$$

Le (ii) de la remarque permet d'énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 7.3.4. — *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux schémas formels vérifiant les hypothèses de la section 7, tels que $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) vérifie la conclusion du théorème 5.3.3, alors $\mathcal{Y}$ (resp. $\mathcal{X}$) vérifie à son tour la conclusion du théorème 5.3.3.*

En d'autres termes, le schéma $\mathcal{X}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}(\infty)$-affine si et seulement si $\mathcal{Y}$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y},\mathbf{Q}}(\infty)$-affine.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BERTHELOT, $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}}$-modules cohérents II. Descente par Frobenius, en cours de rédaction, 1995.

[2] P. BERTHELOT, $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbf{Q}}$-modules cohérents III. Images directes et réciproques, en cours de rédaction, 1995.

[3] P. BERTHELOT, Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, Preprint de l'IRMAR, 1996.

[4] P. BERTHELOT, $\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^{e} série, t. 29 (1996), 185–272.

[5] P. BERTHELOT, Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, Invent. Math., 128 (1997), 329–377.

[6] A. BOREL et al., Algebraic $\mathcal{D}$-modules, Perspectives in Math., Academic Press, 2, 1987.

[7] A. GROTHENDIECK and J. DIEUDONNÉ, EGA IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, 4^{e} partie, Publ. Math. IHES, 32 (1967).

[8] C. HUYGHE, Construction et étude de la Transformation de Fourier pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, 1995.

[9] C. HUYGHE, Interprétation géométrique sur l'espace projectif des $A_N(K)^{\dagger}$-modules cohérents, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, (1995), 587–590.

[10] C. HUYGHE, $\mathcal{D}^{\dagger}$-affinité de l'espace projectif, avec un appendice de P. Berthelot, Compositio Mathematica, 108, No. 3 (1997), 277–318.

[11] C. HUYGHE, Compléments sur le faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques à pôles surconvergents le long d'un diviseur, en préparation, 1998.

[12] F. LOESER, Principe de Boyarski et $\mathcal{D}$-modules , Mathematische Annalen, 306 (1996), 125–157.

[13] Z. MEBKHOUT and L. NARVAEZ-MACARRO, Sur les coefficients de de Rham - Grothendieck des variétés algébriques, Proc. Conf. p-adic Analysis (Trento 1989), Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1454, p. 267–308, 1990.

[14] D. MEREDITH, Weak formal schemes, Nagoya Math. J., 45 (1971), 1–38.

[15] P. MONSKY and G. WASHNITZER, Formal cohomology I, Annals of Math., 88 (1968), 181–217.

[16] M. RAYNAUD, Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl, ..., Bull. Soc. Math. France, Mémoire 39/40 (1974), 319–327.

[17] A. VIRRION, Théorème de dualité relative pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I (1995), 751–754.

Manuscrit reçu le 5 novembre 1996,
accepté le 7 juillet 1997.

Christine HUYGHE,
Université de Rennes 1
Institut Mathématique de Rennes
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex (France).
huyghe@univ-rennes1.fr