Annales de l'institut Fourier

Pablo Dartnell
Gérard Michon

Capacités de Choquet finies et profinies

Annales de l'institut Fourier, tome 48, n° 3 (1998), p. 729-753
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_3_729_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 3 (1998), 729–753

CAPACITÉS DE CHOQUET FINIES ET PROFINIES

par P. DARTNELL et G. MICHON

0. Introduction.

L'objet de ce travail est l'étude des capacités de Choquet sur les ensembles finis et profinis dans la perspective d'un résultat de Choquet [1] : *étant donné un espace compact E et l'espace $\mathcal{K}(E)$, dont les points sont les fermés de l'espace E, les mesures positives finies sur $\mathcal{K}(E)$ sont représentables par les capacités non négatives alternées d'ordre infini sur l'espace $\mathcal{K}(E)$*. Dans le cas fini et profini, les hypothèses de continuité des capacités sont trivialement vérifiées, si bien qu'elles ne sont pas données. Tout compte fait, il reste à présenter le système complet d'inégalités, ce qu'on fait en utilisant une forme bilinéaire symétrique fondamentale dans le cas fini, en passant à la limite projective dans le cas profini. Le parti pris de finitude exprimé plus haut nous éloigne radicalement des buts et méthodes de la théorie classique, exposés dans [2].

Ce travail comporte six paragraphes, qu'on présente en commençant par le second, par commodité.

2. *Capacités et forme bilinéaire.* — Soient I un ensemble fini, $\widetilde{I}$ l'ensemble des parties non vides de I. Un vecteur de $\mathbb{R}^{\widetilde{I}}$ est interprété comme une fonction sur l'ensemble fini $\widetilde{I}$, une forme linéaire sur ce vectoriel est une mesure finie sur $\widetilde{I}$; les mesures positives finies sur $\widetilde{I}$ définissent un cône de $(\mathbb{R}^{\widetilde{I}})^*$. Dans cette manière de voir, on montre que le théorème de représentation de Choquet donné plus haut, associant une fonction sur $\widetilde{I}$ à un élément du cône des mesures positives sur $\widetilde{I}$ résulte d'un isomorphisme entre $\mathbb{R}^{\widetilde{I}}$ et son dual donné par une forme bilinéaire

Mots-clés : Capacité de Choquet – Probabilité – Arbre – Hyperespace.
Classification math. : 31C15 – 60C05 – 05C05.

symétrique non dégénérée définie sur le vectoriel $\mathbb{R}^{\tilde{I}}$; l'isomorphisme induit entre le vectoriel et son dual échange le cône des mesures positives sur $\widetilde{I}$ et le cône des capacités de Choquet sur $\widetilde{I}$. Bien entendu, pour chaque ensemble fini I, le vectoriel $\mathbb{R}^{\tilde{I}}$ est muni d'une telle forme non dégénérée. Cette forme provient de la base $(\lambda_F)_{F\in\tilde{I}}$ (*cf.* [1], p. 156), servant à définir le système complet d'inégalité vérifié par une capacité (le cône des capacités de Choquet sur $\widetilde{I}$ est le cône $\sum\limits_{H\in\tilde{I}} \mathbb{R}_+\lambda_H$). Cette base, qu'on pourrait appeler base de Choquet, présente sur tout vectoriel de type $\mathbb{R}^{\tilde{I}}$ est bien adaptée à ce type d'espaces du fait qu'elle tient compte de la structure (presque) booléenne présente sur l'ensemble $\widetilde{I}$. On expose ensuite une propriété fondamentale de la forme bilinéaire : toute partition de I induit une décomposition orthogonale de l'espace avec un facteur euclidien.

1. *Mesures positives et convexes.* — On montre dans ce paragraphe qu'une mesure positive sur $\widetilde{I}$ est, somme toute, un convexe (d'un type particulier) de mesures positives sur I. À cette fin, on définit une application notée sup : $\mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^{\tilde{I}}$, en associant à la fonction $f\in\mathbb{R}^I$ la fonction sur $\widetilde{I}$ consistant à prendre sur une partie non vide F de I le maximum de f sur cette partie. Cette application n'est pas linéaire, mais seulement sous-additive et positivement homogène. Il en résulte que sa composition avec une forme linéaire positive (*i.e.* une mesure positive sur $\widetilde{I}$) définit une fonction sous-additive positivement homogène sur le vectoriel $\mathbb{R}^I$ qui est la fonction support d'un convexe $S\subset(\mathbb{R}^I)^*$, appelé ici un capaciteur de I. Si χ_H désigne la fonction indicatrice de $H\in\widetilde{I}$, on pose $\lambda_H=\sup(\chi_H)$: on retrouve ainsi la base introduite par Choquet. Il y a plus : une mesure positive μ sur $\widetilde{I}$ étant donnée (de capaciteur associé S), la composante de μ sur le vecteur e^*_H est la masse de la partie H tandis que la composante de μ sur le vecteur λ^*_H est la borne supérieure des mesures $\nu(H)$, lorsque ν parcourt S. Cela justifie évidemment la terminologie : la composante de μ sur λ^*_H est la capacité de H pour la mesure μ. On note que dans ce premier paragraphe, il n'est pas question de capacité.

3. *Fonctions alternées.* — Soient un ensemble $\mathcal{E}$, muni d'une loi de composition commutative et associative notée $\top$ et une fonction $f:\mathcal{E}\to\mathbb{R}$. Étant donnés $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{E}$ et $J\subset I$ non vide, on pose $x_J=\mathop{\top}\limits_{i\in J} x_i$ et l'on considère la somme

$$-\sum_{\substack{J\subset I\\ J\neq\emptyset}}(-1)^J f(x_J).$$

On dit que la fonction f est alternée si ces sommes sont positives et croissent lorsqu'on passe d'une famille à une sous-famille. Dans ce paragraphe, on fait le lien entre les fonctions alternées et les capacités. Ceci est possible car l'ensemble $\widetilde{I}$, muni de l'union, permet d'envisager de telles sommes ; dans ce cas, les fonctions alternées sont les capacités de Choquet. On termine ce paragraphe par une caractérisation simple des fonctions alternées, suivie d'exemples de telles fonctions, pris dans [1]. Enfin, les sommes précédentes sont liées à une matrice donnant, sur la base canonique, un isomorphisme transformant le cône des capacités en le cône des fonctions positives décroissantes sur $\widetilde{I}$.

4. *Image directe et réciproque.* — Considérons une application $f : I \to J$ surjective entre ensembles finis, notons $f : 2^I \to 2^J$ et $f^{-1} : 2^J \to 2^I$ les extensions aux ensembles de parties. Vu la surjectivité, on peut remplacer 2^J et 2^I respectivement par $\widetilde{J}$ et $\widetilde{I}$. Les compositions

$$\widetilde{I} \xrightarrow{f} \widetilde{J} \xrightarrow{x} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \widetilde{J} \xrightarrow{f^{-1}} \widetilde{I} \xrightarrow{y} \mathbb{R}$$

définissent des applications linéaires $\mathbb{R}^{\tilde{J}} \xrightarrow{f^*} \mathbb{R}^{\tilde{I}}$ et $\mathbb{R}^{\tilde{I}} \xrightarrow{f_*} \mathbb{R}^{\tilde{J}}$, telles que $f_* \circ f^* = 1$. L'adéquation des bases du type $(\lambda_L)_{L \in \tilde{I}}$ aux capacités apparaît dans les égalités

$$f^*\lambda_L = \lambda_{f^{-1}L} \quad \text{et} \quad f_*\lambda_H = \lambda_{fH}.$$

Enfin, si l'on munit chacun des vectoriels de la forme bilinéaire définie plus haut, les applications f^* et f_* sont adjointes. Ce comportement fonctoriel permet le passage du fini au profini, qu'on expose maintenant.

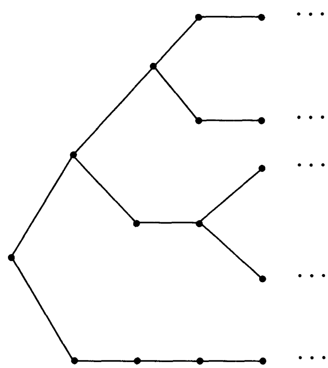
5. *Arbre, ensemble profini.* — On présente ici des rappels sur les arbres pour la commodité du lecteur. Un arbre $\mathcal{I}$ est une suite

$$I_0 \xleftarrow{f} I_1 \xleftarrow{f} I_2 \xleftarrow{f} \cdots$$

d'ensembles finis et d'applications appelées transitions (toutes notées f) astreinte à deux conditions : l'ensemble I_0 est réduit à un point, les transitions sont surjectives. On note simplement $\mathcal{I} = (I_0, I_1, \ldots)$.

Les entiers sont les niveaux de l'arbre, les éléments des ensembles I_n les nœuds de l'arbre. On convient de figurer comme suit un arbre : sous les niveaux $0, 1, \ldots$ on place les nœuds verticalement ; si les nœuds $a \in I_k$ et

$b \in I_{k-1}$ sont tels que $f(a) = b$, on marque une liaison entre a et b, faisant apparaître une arborescence :



Il s'agit d'un arbre pointé par l'unique nœud de niveau 0. Une branche infinie de l'arbre est une suite de nœuds $x = (x_0, x_1, \ldots)$ telle que $f(x_{n+1}) = x_n$ pour chaque n. L'ensemble des branches infinies, noté I_∞, est muni des projections évidentes

$$I_\infty \xrightarrow{\pi_n} I_n, \quad (x_0, x_1, \ldots) \longmapsto x_n.$$

On dit aussi que I_∞ est un ensemble profini. On peut dire que l'ensemble profini I_∞ est approximé par les ensembles finis I_n. En quelque sorte, la connaissance qu'on a de I_∞, au niveau n est donnée par I_n ou plutôt par la partition de I_∞ induite par les fibres de la projection π_n. Dans le même ordre d'idée, on donne, dans ce paragraphe, la modélisation par un arbre du processus de raffinement d'image, en appelant, dans ce cas les éléments de I_n les pixels d'ordre n. On décrit la topologie compacte, totalement discontinue présente sur tout ensemble profini et on montre que les mesures positives finies sur I_∞, ainsi que les fonctions scs se décrivent très simplement.

L'arbre $\mathcal{I}$ étant donné, on construit l'hyperarbre $\widetilde{\mathcal{I}}$

$$\widetilde{I}_0 \xleftarrow{f} \widetilde{I}_1 \xleftarrow{f} \cdots$$

où les transitions sont les extensions aux parties des transitions de l'arbre $\mathcal{I}$. Le fait important est que les chemins de l'hyperarbre $\widetilde{\mathcal{I}}$ sont les fermés non vides de I_∞. Cet ensemble, noté $\widetilde{I}_\infty$, est muni d'une topologie compacte totalement discontinue et, selon la problématique de Choquet, on se propose d'étudier les mesures finies positives sur cet hyperespace.

6. *Capacités de Choquet profinies.* — Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des ouverts fermés de l'espace I_∞. On montre que les mesures positives sur $\widetilde{I}_\infty$ sont en bijection avec les fonctions alternées sur $(\mathcal{B} - \{\emptyset\}, \cup)$. La démonstration repose sur la réduction au cas fini, en utilisant la filtration de $\mathcal{B} - \{\emptyset\}$ par les $\widetilde{I}_n$. Il reste à étendre ces fonctions aux fermés afin d'obtenir la version profinie du théorème de Choquet : il existe une bijection entre les mesures positives finies μ sur $\widetilde{I}_\infty$ et les fonction scs alternées c sur $(\widetilde{I}_\infty, \cup)$. Cette bijection est caractérisée par

$$\mu\{K \in \widetilde{I}_\infty \mid K \cap F \neq \emptyset\} = c(F).$$

On termine en définissant une forme bilinéaire sur les capacités profinies qui est une sorte d'intégrale généralisée.

On utilisera les notations suivantes. Lorsque I désigne un ensemble fini, le $\mathbb{R}$-vectoriel des applications de I dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}^I$. Un élément $x \in \mathbb{R}^I$ est noté soit comme une application $x : I \to \mathbb{R}$, soit comme une famille $(x_i)_{i \in I}$ de réels. On note $(e_i)_{i\in I}$ la base canonique : $e_i(j) = \delta_{ij}$. Le $\mathbb{R}$-vectoriel dual $\mathbb{R}^{I^*}$ peut être considéré comme le vectoriel des mesures sur I ; la base duale $(e_i^*)_{i\in I}$ est composée des mesures de Dirac. Lorsque ξ est une forme et x un vecteur, le scalaire $\xi(x)$ est noté $\langle x, \xi\rangle$.

On note $\widetilde{I}$ l'ensemble des parties non vides de l'ensemble fini I. En particulier, $\mathbb{R}^{\tilde{I}}$ est le $\mathbb{R}$-vectoriel des fonctions sur $\widetilde{I}$, la base canonique est formée des e_H, pour $H \subset I$ et non vide. Le dual, $(\mathbb{R}^{\tilde{I}})^*$ est le vectoriel des mesures sur $\widetilde{I}$.

1. Mesures positives sur $\widetilde{I}$ et convexes.

On montre ici que les mesures positives sur $\tilde{I}$ sont des convexes particuliers de $\mathbb{R}^{I^*}$. On calcule ensuite les composantes d'une mesure positive sur $\tilde{I}$ sur une base remarquablement adaptée aux convexes associés.

Partons d'un ensemble fini I. On note $\sup_H f$ la borne supérieure de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur la partie non vide H de I et

$$\sup : \mathbb{R}^I \longrightarrow \mathbb{R}^{\tilde{I}} \tag{1.1}$$

l'application définie par

$$\sup(f) = \sum_{H\in\tilde{I}} \sup_H f \; e_H.$$

Si χ_H désigne la fonction indicatrice de $H \in \tilde{I}$, on pose

$$\lambda_H = \sup(\chi_H) = \sum_{L\cap H\neq\emptyset} e_L \tag{1.2}$$

et du fait que

$$e_J = -\sum_{\substack{H\in\tilde{I}\\ H\cup J=I}} (-1)^{H\cap J}\lambda_H, \tag{1.3}$$

(1.4) *la famille* $(\lambda_H)_{H\in\tilde{I}}$ *est une base de* $\mathbb{R}^{\tilde{I}}$*, dite base de Choquet.*

Enfin, la fonction

(1.5) $\sup : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^{\tilde{I}}$ *est sous-additive et positivement homogène.*

Il ressort de cela que si $\mu : \mathbb{R}^{\tilde{I}} \to \mathbb{R}$ est une mesure positive sur $\tilde{I}$, la composée $\mu\circ\sup : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ est sous-additive et positivement homogène et que l'application $\mu \mapsto \mu\circ\sup$ est injective, additive et positivement homogène.

On sait que *via* la fonction support, on établit une bijection entre les fonctions sous-additives positivement homogènes et les convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^{I^*}$. Précisément,

(1.6) *pour toute fonction* $F : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ *sous-additive positivement homogène, il existe un convexe compact non vide unique* $S \subset \mathbb{R}^{I^*}$ *tel que*

$$F(t) = \sup_{\nu\in S}\langle t,\nu\rangle \quad \Big(\textit{et}\quad S = \bigcap_{t\in\mathbb{R}^I} \langle t,\ \rangle \le F(t)\Big).$$

On sait aussi que l'ensemble des convexes compacts non vides du vectoriel $\mathbb{R}^{I^*}$ est muni de la somme de Minkovski :

$$A + B = \big\{a + b \mid a\in A,\ b\in B\big\},$$

commutative, associative, admettant $\{0\}$ pour élément neutre. On définit une loi de composition externe en posant, pour un scalaire $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\lambda A = \big\{\lambda a \mid a\in A\big\}.$$

On distingue des éléments particuliers : les simplexes associés aux parties H non vides de I, définis par

$$\Delta_H = \Big\{\sum_{i\in H} p_i e_i^* \mid p_i \ge 0,\ \sum_{i\in H} p_i = 1\Big\}.$$

Il s'agit des simplexes des probabilités concentrées sur les parties H de I. Enfin, si la fonction support d'un convexe compact non vide S est notée F_S :

$$F_{S+T} = F_S + F_T, \quad F_{\alpha S} = \alpha F_S \quad \text{si} \quad \alpha \geq 0. \tag{1.7}$$

À la mesure e_H^* correspond la fonction sous-additive positivement homogène $\sup_H : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ correspondant elle-même au simplexe Δ_H. Puisqu'une mesure positive est une combinaison linéaire des e_H^* à coefficients positifs

$$\mu = \sum_{H \in \tilde{I}} \mu_H e_H^*,$$

le convexe correspondant à μ est $\sum_{H \in \tilde{I}} \mu_H \Delta_H$; on a prouvé :

(1.8) *la correspondance précédente établit une bijection additive et positivement homogène entre les mesures positives sur $\widetilde{I}$ et les convexes de $\mathbb{R}^{I^*}$*

$$\sum_{H \in \tilde{I}} \alpha_H \Delta_H, \quad \alpha_H \geq 0.$$

(1.9) *On appelle capaciteur un convexe de $\mathbb{R}^{I^*}$ du type $\sum_{H \in \tilde{I}} \alpha_H \Delta_H$, où les scalaires α_H sont positifs.*

Notons S le capaciteur défini par une mesure positive μ sur $\tilde{I}$. Calculons la composante de μ sur la base des λ_H^*. Pour $t \in \mathbb{R}^I$:

$$\mu \circ \sup(t) = \sup_{\nu \in S} \langle t, \nu \rangle.$$

En particulier, pour $t = \chi_H$:

$$\mu \circ \sup(\chi_H) = \langle \lambda_H, \mu \rangle = \sup_{\nu \in S} \nu(H) \tag{1.10}$$

(ici ν est une mesure positive sur I et $\nu(H)$ est la mesure de la partie H de I). Ainsi, le capaciteur donne les composantes de μ sur la base des λ_H^* de telle sorte que la terminologie suivante est justifiée :

(1.11) *Si μ est une mesure positive sur $\widetilde{I}$, la composante de μ sur λ_H^* est appelée la capacité de H.*

Supposons qu'une forme μ soit donnée par ses composantes $\langle \lambda_H, \mu \rangle$ sur la base des λ_H^*. La composante $\langle e_J, \mu \rangle$ de μ sur la base des e_J^* est, d'après (1.3) :

$$\langle e_J, \mu \rangle = - \sum_{\substack{H \in \tilde{I} \\ H \cup J = I}} (-1)^{H \cap J} \langle \lambda_H, \mu \rangle.$$

Il en résulte que

(1.12) *la forme* $\mu = \sum_{H \in \tilde{I}} \langle \lambda_H, \mu \rangle \lambda_H^*$ *est une mesure positive sur* $\tilde{I}$ *si et seulement si le système suivant d'inégalités, dit de Choquet* (*voir* [1], *p.* 156), *est vérifié :*

$$- \sum_{\substack{H \in \tilde{I} \\ H \cup J = I}} (-1)^{H \cap J} \langle \lambda_H, \mu \rangle \geq 0, \quad J \in \tilde{I}.$$

Soit la donnée suivante : un ensemble fini I, une application surjective $\rho : I \to J$ et une mesure positive τ sur J. L'ensemble des mesures positives sur I dont l'image par ρ est τ est le capaciteur

$$\sum_{j \in J} \tau_j \, \Delta_{\rho^{-1}(j)}. \tag{1.13}$$

On peut parler de l'image réciproque, notée $\rho^*(\tau)$, d'une mesure positive sur J : c'est une mesure positive sur $\tilde{I}$ qu'on peut écrire sur l'une et l'autre base :

$$\rho^*(\tau) = \sum_{j \in J} \tau_j \, e^*_{\rho^{-1}(j)} = \sum_{H \in \tilde{I}} \tau(j(H)) \, \lambda_H^*. \tag{1.14}$$

En prenant l'application identité, à la mesure positive τ sur I est associée la mesure positive sur $\tilde{I}$

$$\sum_{i \in I} \tau_i \, e^*_{\{i\}} = \sum_{H \in \tilde{I}} \tau(H) \, \lambda_H^*$$

de capaciteur $\{\tau\} = \sum_{i \in I} \tau_i \, \Delta_{\{i\}}$. On réalise ainsi une injection naturelle des mesures sur I dans les mesures sur $\tilde{I}$.

Lorsque $I = 2 = \{0, 1\}$, en identifiant $\mathbb{R}^2$ et son dual au moyen du produit scalaire, les capaciteurs sont les segments de pentes -1 du cône positif de $\mathbb{R}^2$; les capaciteurs réduits à un point proviennent des mesures positives sur I.

2. Capacités et forme bilinéaire.

On définit une forme bilinéaire non dégénérée notée $\phi : \mathbb{R}^{\tilde{I}} \to (\mathbb{R}^{\tilde{I}})^*$, en posant

$$\phi(\lambda_H) = e_H^*.$$

La forme est symétrique, car

$$\langle \lambda_J, \phi(\lambda_H) \rangle = \langle \lambda_J, e_H^* \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } J \cap H \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Il résulte des égalités

$$\langle e_J, \phi\phi^{-1}(e_H^*) \rangle = \delta_{JH} = \langle \phi^{-1}(e_H^*), \phi(e_J) \rangle = \langle \lambda_H, \phi(e_J) \rangle$$

que :

$$\phi(e_J) = \lambda_J^* = -\sum_{\substack{H \in \tilde{I} \\ H \cup J = I}} (-1)^{H \cap J} e_H^*, \quad \phi(\lambda_H) = e_H^* = \sum_{L \cap H \neq \emptyset} \lambda_L^*. \tag{2.2}$$

On introduit la notion de capacité en respectant la variance.

(2.3) *On dit que $c \in \mathbb{R}^{\tilde{I}}$ (i.e. la fonction $c : \tilde{I} \to \mathbb{R}$) est une capacité sur $\widetilde{I}$ si ϕc est une mesure positive sur $\widetilde{I}$.*

Le cône $\sum_{H \in \tilde{I}} \mathbb{R}_+ \lambda_H$ des capacités sur $\widetilde{I}$ est l'image réciproque, par $\phi : \mathbb{R}^{\tilde{I}} \to (\mathbb{R}^{\tilde{I}})^*$ du cône des mesures positives sur $\widetilde{I}$. Afin de se conformer à la terminologie introduite plus haut, on dit que $\langle c, e_H^* \rangle$ est la *capacité* de H (tandis que le réel positif $\langle c, \lambda_H^* \rangle$ est la *masse* de H). L'assertion (1.12) prend la forme suivante :

(2.4) *la fonction $c : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ est une capacité si et seulement si*

$$-\sum_{\substack{H \in \tilde{I} \\ H \cup J = I}} (-1)^{H \cap J} \langle c, e_H^* \rangle \geq 0, \quad J \in \widetilde{I}.$$

Des égalités

$$\langle c, e_H^* \rangle = \sum_{L \cap H \neq \emptyset} \langle c, \lambda_L^* \rangle = \sum_{L \cap H \neq \emptyset} \langle e_L, \phi(c) \rangle$$

résulte le théorème de Choquet dans le cas fini (on a posé $c(H) = \langle c, e_H^* \rangle$) :

(2.5) *l'application* $c : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ *est une capacité si et seulement si il existe une mesure positive* μ *sur* $\tilde{I}$ *telle que*

$$c(H) = \mu\{L \in \tilde{I} \mid L \cap H \neq \emptyset\}.$$

On note que

(2.6) *une capacité est une fonction positive croissante sur* $\widetilde{I}$.

Par exemple, soient

$$I = \{0,1\}, \quad \widetilde{I} = \{\{0\},\{1\},\{0,1\}\}.$$

Le vecteur $v = v_{\{0\}}e_{\{0\}} + v_{\{1\}}e_{\{1\}} + v_{\{0,1\}}e_{\{0,1\}}$ est une capacité si et seulement si

$$v_{\{0\}} \leq v_{\{0,1\}}, \quad v_{\{1\}} \leq v_{\{0,1\}}, \quad v_{\{0,1\}} \leq v_{\{0\}} + v_{\{1\}}.$$

Il apparaît que la fonction v est croissante et positive, mais toute fonction croissante positive n'est pas une capacité de Choquet, la dernière condition limitant la croissance. Les économistes [3], [4] utilisent la terminologie « capacité » pour les fonctions positives croissantes et considèrent l'inverse de Möbius de ces fonctions. La dualité n'est pas marquée. Cependant, il y a implicitement introduction de variables conjuguées.

À l'application surjective $\rho : I \to J$, associons l'application linéaire injective

$$\mathbb{R}^{J^*} \xrightarrow{\rho^c} \mathbb{R}^{\tilde{I}} \tag{2.7}$$

définie par $e_j^* \mapsto \lambda_{\rho^{-1}(j)}$. À une mesure τ sur J correspond le vecteur

$$\rho^c(\tau) = \sum_{j \in J} \tau_j \, \lambda_{\rho^{-1}(j)} = \sum_{H \in \tilde{I}} \tau\big(\rho(H)\big) \; e_H. \tag{2.8}$$

Cette application plonge les mesures positives sur J dans les capacités sur I de telle sorte que la mesure τ_j de j devient la masse de $\rho^{-1}(j)$ et la masse de $\rho(H)$ devient la capacité de H. La forme bilinéaire ϕ, restreinte à $\operatorname{Im} \rho^c$, est définie positive, la base $(\lambda_{\rho^{-1}(j)})_{j \in J}$ étant orthonormale. Les e_H tels que la partie H ne soit pas un élément de la partition induite par ρ forment une base de l'orthogonal. La projection d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^{\tilde{I}}$ sur $\operatorname{Im} \rho^c$ est donnée par

$$p(v) = \sum_{j \in J} \langle v, e^*_{\rho^{-1}(j)} \rangle \lambda_{\rho^{-1}(j)} = \sum_{H \in \tilde{I}} \Big(\sum_{\substack{j \in J \\ \rho^{-1}(j) \cap H \neq \emptyset}} \langle v, e^*_{\rho^{-1}(j)} \rangle \Big) e_H,$$

la projection sur l'orthogonal est

$$\sum_{H\in\tilde{I}}\Big(\langle v,e_H^*\rangle-\sum_{\substack{j\in J\\ \rho^{-1}(j)\cap H\neq\emptyset}}\langle v,e^*_{\rho^{-1}(j)}\rangle\Big)e_H.$$

Il est essentiel de remarquer que, une capacité étant donnée, toute partition (définie par une application surjective ρ) permet d'interpréter les capacités des atomes de la partition comme des mesures. Le passage des capacités aux mesures positives se fait *via* les projections sur les facteurs euclidiens associés aux partitions.

3. Fonctions alternées.

Soient un ensemble $\mathcal{E}$, muni d'une loi de composition commutative et associative notée $\top$ et une fonction $f:\mathcal{E}\to\mathbb{R}$. Étant donnés $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{E}$ et $J\subset I$ non vide, on pose

$$x_J=\top_{i\in J}x_i.$$

(3.1) *On appelle :*

- *somme de type* 1 *une somme*

$$-\sum_{\substack{J\subset I\\ J\neq\emptyset}}(-1)^J f(x_J)$$

associée à une famille $(x_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}$ *;*

- *somme de type* 2 *une somme*

$$-\sum_{\substack{J\subset I\\ i\in J}}(-1)^J f(x_J)$$

associée au couple formé d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}$ *et d'un élément* $i\in I$.

- *On dit que* f *est une fonction alternée si les sommes de type* 1 *sont positives et les sommes de type* 2 *négatives.*

Les sommes de type 2 apparaissent comme des différences de sommes du type 1 particulières. En effet, si l'on pose $I = I' + \{i\}$:

$$(3.2)\qquad -\sum_{\substack{J\subset I\\ J\neq\emptyset}}(-1)^J f(x_J) + \sum_{\substack{J\subset I'\\ J\neq\emptyset}}(-1)^J f(x_J) = -\sum_{\substack{J\subset I\\ i\in J}}(-1)^J f(x_J),$$

d'où il résulte que

(3.3) *Une fonction est alternée si et seulement si les sommes de type* 1 *sont positives et décroissantes, en ce sens que la somme associée à une famille est plus petite que la somme associée à une sous-famille.*

Montrons que :

(3.4) *Soit un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'une loi de composition $\top$ associative et commutative. Une fonction $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est une fonction alternée si et seulement si, pour toute famille finie $x : I \to \mathcal{E}$, le vecteur $\sum_{J\in\tilde{I}} f(x_J)e_J$ de $\mathbb{R}^{\tilde{I}}$ est une capacité sur $\tilde{I}$.*

Preuve. — L'image du vecteur par ϕ est

$$(3.5)\qquad \sum_{H\in\tilde{I}}\Big(\sum_{\substack{J\in\tilde{I}\\ H\cup J=I}} -(-1)^{H\cap J} f(x_J)\Big)e^*_H.$$

Examinons les composantes :

- Si $H = I$, la composante sur e^*_I est une somme de type 1 :

$$(3.6)\qquad -\sum_{J\in\tilde{I}}(-1)^J f(x_J).$$

- Si $\emptyset \neq H \neq I$, la condition $H \cup J = I$ signifie $H^c \subset J$; on pose $J = H^c + J'$. Un indice J comme il faut revient à une partie quelconque $J' \subset H$ car H^c est non vide. La composante est

$$-\sum_{J'\subset H}(-1)^{J'} f(x_{J'}\top x_{H^c}).$$

Posons

$$H' = H + \{\omega\}, \quad x_\omega = x_{H^c}.$$

On définit ainsi une famille indexée par H' telle que

$$-\sum_{J'\subset H}(-1)^{J'}f(x_{J'}\top x_{H^c})=\sum_{\substack{K\subset H'\\ \omega\in K}}(-1)^{K}f(x_K).$$

En définitive, si $\emptyset\neq H\neq I$, la composante sur e^*_H est l'opposée d'une somme de type 2. Réciproquement, une somme de type 2 apparaît comme l'opposée de la composante sur $e^*_{I-\{i\}}$. □

Les sommes de type 1, dans le cas d'une suite $(x_1,\dots,x_n)$, sont notées

(3.7) $$f(x_1,\dots,x_n)=-\sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n\}\\ J\neq\emptyset}}(-1)^J f(x_J),$$

et

(3.8) $$f(x_1,\dots,x_{n+1})-f(x_1,\dots,x_n)=-\sum_{\substack{J\subset\{1,\dots,n+1\}\\ n+1\in J}}(-1)^J f(x_J).$$

Les sommes des deux types sont invariantes par permutation de l'index I de sorte que, avec les notations précédentes :

(3.9) *La fonction f est une fonction alternée si et seulement si pour toute suite finie $(x_1,\dots,x_{n+1})$:*

$$0\le f(x_1,\dots,x_{n+1})\le f(x_1,\dots,x_n).$$

Cet énoncé se prête à la récurrence. Voici des exemples de fonctions alternées tirés de [1].

Soient un treillis $(\mathcal{T},\vee,\wedge)$ et $f:\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ telle que

$$f(a\vee b)+f(a\wedge b)=fa+fb.$$

On considère l'ensemble $\mathcal{T}$ muni de la loi $\vee$. Il vient :

$$f(x_1,\dots,x_{n+1})=f(x_1,\dots,x_n)+fx_{n+1}-f(x_1\vee x_{n+1},\cdots,x_n\vee x_{n+1}),$$

d'où

$$f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1\wedge\ldots\wedge x_n).$$

(3.10) *Si f est positive et croissante, $f:(\mathcal{T},\vee)\to\mathbb{R}$ est une fonction alternée. En particulier, une mesure positive finie est une fonction alternée sur sa σ-algèbre $\mathcal{B}$, pour la loi $\cup$, telle que $\mu(A_1,\dots,A_n)=\mu(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)$.*

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ une application et un ensemble $\mathcal{E}$ de parties non vides de E, muni de la loi de composition $\cup$. On suppose que la fonction f est majorée sur les éléments de $\mathcal{E}$. On étend f à $\mathcal{E}$ en posant :

$$f(X) = \sup_X f.$$

(3.11) *Si l'application $f : E \to \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses ci-dessus et si $f \geq 0$, l'application f étendue à $\mathcal{E}$ est une fonction alternée.*

Il suffit de montrer que

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \inf_{i=1,\ldots,n} \sup_{X_i} f. \tag{3.12}$$

Preuve. — Comme plus haut, on montre que

$$f(X_1, \cdots, X_{n+1}) = \inf_{i=1,\ldots,n} \sup_{X_i} f + \sup_{X_{n+1}} f - \inf_{i=1,\ldots,n} \Big(\sup_{X_i \cup X_{n+1}} f \Big).$$

On distingue deux cas, selon que

$$\inf_{i=1,\ldots,n} \sup_{X_i} f \leq \sup_{X_{n+1}} f$$

ou non. Dans ce cas,

$$\sup_{X_{n+1}} f - \inf_{i=1,\ldots,n} \Big(\sup_{X_i \cup X_{n+1}} f \Big)$$

est nul, ce qui donne le résultat. L'autre cas est aussi simple. □

Considérons la fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = A - B\,\mathrm{e}^{-\alpha x},$$

où $0 \leq \alpha$ et $0 \leq B \leq A$. La loi de composition sur l'ensemble de définition de la fonction est l'addition.

(3.13) *La fonction f définie ci-dessus est une fonction alternée.*

Preuve. — Avec $\phi(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$, il vient

$$f(x_1, \cdots, x_n) = A - B\phi(x_1, \cdots, x_n),$$

$$\phi(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \phi(x_1, \cdots, x_n) + \mathrm{e}^{\alpha x_{n+1}} - \mathrm{e}^{-\alpha x_{n+1}} \phi(x_1, \cdots, x_n).$$

Les conditions de signes se traduisent par

$$B\phi(x_1,\cdots,x_n) \le A \quad \text{et} \quad \phi(x_1,\cdots,x_n) \le 1.$$

Il suffit de montrer par récurrence que $\phi(x_1,\cdots,x_n) \le 1$. □

En prenant des familles finies dans ces ensembles, on construit des capacités.

Considérons $(\tilde{I}, \cup)$ et une fonction alternée $f : \tilde{I} \to \mathbb{R}$. La proposition (3.5) appliquée à la famille singleton $\delta : I \to \tilde{I}$ montre que $f \in \mathbb{R}^{\tilde{I}}$ est une capacité finie. Voyons la réciproque. Soit $x : A \to \tilde{I}$ une famille finie d'éléments de $\tilde{I}$, qu'on étend par union finie en une application $x : \widetilde{A} \to \tilde{I}$ (il y a un abus de notation). La composition par $x : \widetilde{A} \to \tilde{I}$ est une application linéaire $x^\sharp : \mathbb{R}^{\tilde{I}} \to \mathbb{R}^{\tilde{A}}$. Tout revient à montrer que cette application linéaire transforme les λ_L en capacités. Calculons :

$$x^\sharp(e_K) = \sum_{\substack{B \in \widetilde{A} \\ K = \bigcup_{\alpha \in B} x_\alpha}} e_B,$$

d'où

$$x^\sharp(\lambda_L) = \sum_{\substack{K \in \tilde{I} \\ L \cap K \neq \emptyset}} \Big(\sum_{\substack{B \in \widetilde{A} \\ K = \bigcup_{\alpha \in B} x_\alpha}} e_B \Big)$$

et finalement :

$$x^\sharp(\lambda_L) = \sum_{\substack{B \in \widetilde{A} \\ L \cap \bigcup_{\alpha \in A} x_\alpha \neq \emptyset}} e_B.$$

Soit

$$y(L) = \{\alpha \in A \mid x_\alpha \cap L \neq \emptyset\}.$$

Il s'agit d'une partie (éventuellement vide) de A telle que

(3.14) $\qquad x(B) \cap L \neq \emptyset \quad \text{si et seulement si} \quad B \cap y(L) \neq \emptyset,$

ce qui donne :

(3.15) $$x^\sharp(\lambda_L) = \sum_{\substack{B \in \widetilde{A} \\ y(L) \cap B \neq \emptyset}} e_B = \begin{cases} \lambda_{y(L)} & \text{si } \ y(L) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On prouve ainsi que

(3.16) *les capacités finies sur $\widetilde{I}$ sont les fonctions alternées sur $(\widetilde{I}, \cup)$.*

Notons $\psi : \mathbb{R}^{\tilde{I}} \to \mathbb{R}^{\tilde{I}}$ l'application linéaire donnée sur la base $(e_H)_{H\in\tilde{I}}$ par

$$\psi(e_J) = \sum_{L\in\widetilde{I},J\subset L} -(-1)^J e_L.$$

Une autre façon d'énoncer (3.3) compte tenu de (3.4) et(3.16) :

(3.17) *le vecteur $v \in \mathbb{R}^{\tilde{I}}$ est une capacité si et seulement la fonction $\psi(v) : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ est positive et décroissante.*

Les fonctions positives décroissantes forment un cône. Ce cône est engendré par la base des vecteurs $\psi(\lambda_K) = \sum_{L\in\tilde{I},L\subset K} e_L$ (il s'agit d'une base car $\psi^2 = \mathrm{Id}$).

4. Image directe et image réciproque.

On considère une application $f : I \to J$ surjective entre ensembles finis. On note

$$f : 2^I \longrightarrow 2^J, \quad f^{-1} : 2^J \longrightarrow 2^I$$

les extensions aux ensembles de parties, respectivement surjective et injective ($ff^{-1} = \mathrm{Id}$, les parties de J sont en bijection avec les parties saturées de I, *i.e.* telles que $f^{-1}fA = A$). Vu la surjectivité, on peut remplacer 2^J et 2^I respectivement par $\widetilde{J}$ et $\widetilde{I}$. Les compositions

$$(4.1) \qquad \widetilde{I} \xrightarrow{f} \widetilde{J} \xrightarrow{x} \mathbb{R}, \quad \widetilde{J} \xrightarrow{f^{-1}} \widetilde{I} \xrightarrow{y} \mathbb{R},$$

définissent des applications linéaires respectivement notées

$$(4.2) \qquad \mathbb{R}^{\widetilde{J}} \xrightarrow{f^*} \mathbb{R}^{\tilde{I}}, \quad \mathbb{R}^{\tilde{I}} \xrightarrow{f_*} \mathbb{R}^{\tilde{J}}$$

telles que

$$(4.3) \qquad \mathbb{R}^{\widetilde{J}} \xrightarrow{f^*} \mathbb{R}^{\tilde{I}} \xrightarrow{f_*} \mathbb{R}^{\tilde{J}} = \mathrm{Id}.$$

On montre facilement que

$$(4.4) \qquad f^*e_K = \sum_{\substack{H\in\tilde{I}\\ fH=K}} e_H\,, \quad f_*e_L = \begin{cases} e_{fL} & \text{si } f^{-1}fL = L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les bases du type $(\lambda_L)_{L\in\tilde I}$ sont adaptées aux capacités car :

$$f^*\lambda_L = \lambda_{f^{-1}L} \quad \text{et} \quad f_*\lambda_H = \lambda_{fH}. \tag{4.5}$$

Preuve. — On calcule

$$\begin{aligned} f^*\lambda_L &= \sum_{\substack{K\in\tilde J\\ K\cap L\neq\emptyset}} f^*e_K = \sum_{\substack{K\in\tilde J\\ K\cap L\neq\emptyset}} \Big(\sum_{\substack{H\in\tilde I\\ fH=K}} e_H\Big)\\ &= \sum_{\substack{H\in\tilde I\\ fH\cap L\neq\emptyset}} e_H = \sum_{\substack{H\in\tilde I\\ H\cap f^{-1}L\neq\emptyset}} e_H\\ &= \lambda_{f^{-1}L}. \end{aligned}$$

Pour la seconde égalité :

$$\begin{aligned} f_*\lambda_H &= \sum_{\substack{L\in\tilde I\\ L\cap H\neq\emptyset}} f_*e_L = \sum_{\substack{L\in\tilde I\\ L\cap H\neq\emptyset\\ L=f^{-1}fL}} e_{fL} = \sum_{\substack{L\in\tilde I\\ L=f^{-1}fL\\ f^{-1}fL\cap H\neq\emptyset}} e_{fL}\\ &= \sum_{\substack{L\in\tilde I\\ L=f^{-1}fL\\ fL\cap fH\neq\emptyset}} e_{fL} = \sum_{\substack{K\in\tilde J\\ K\cap fH\neq\emptyset}} e_K = \lambda_{fH}. \end{aligned}$$

Deux corollaires :

(4.6) *Les applications $f_* : \mathbb{R}^{\tilde I} \to \mathbb{R}^{\widetilde J}$ et $f^* : \mathbb{R}^{\widetilde J} \to \mathbb{R}^{\tilde I}$ sont adjointes pour les formes bilinéaires ϕ_I et ϕ_J :*

$$\big\langle f^*x, \phi_I y)\big\rangle = \big\langle x, \phi_J f_* y\big\rangle.$$

Preuve. — On calcule sur les bases $(\lambda_H)_{H\in\tilde J}$ et $(\lambda_K)_{K\in\tilde I}$:

$$\langle f^*\lambda_H, \phi_I\lambda_K\rangle = \langle \lambda_{f^{-1}H}, \phi_I\lambda_K\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}H\cap K\neq\emptyset,\\ 0 & \text{sinon};\end{cases}$$

$$\langle \lambda_H, \phi_I f_*\lambda_K\rangle = \langle \lambda_H, \phi_J\lambda_{fK}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } H\cap fK\neq\emptyset,\\ 0 & \text{sinon}.\end{cases}$$

(4.7) *Si c et c' sont des capacités sur $\widetilde I$, alors f_*c et f_*c' sont des capacités sur $\widetilde J$ et $0 \le \langle c, \phi_I c'\rangle \le \langle f_*c, \phi_J f_*c'\rangle$.*

Preuve. — Une capacité c sur $\widetilde{I}$ s'écrit $c = \sum_{H \in \tilde{I}} c_H \lambda_H$, avec des coefficients c_H positifs. Il vient

$$\langle c, \phi_I c' \rangle = \sum_{\substack{H, H' \in \tilde{I} \\ H \cap H' \neq \emptyset}} c_H c'_H.$$

D'autre part, $f_* c = \sum_{H \in \tilde{I}} c_H \lambda_{fH}$, d'où :

$$\langle f_* c, \phi_J f_* c' \rangle = \sum_{\substack{H, H' \in \tilde{I} \\ fH \cap fH' \neq \emptyset}} c_H c'_H.$$

Tout est positif et il y a plus de termes dans la seconde somme que dans la première. □

5. Arbre, ensemble profini.

(5.1) *Un arbre $\mathcal{I}$ est une suite*

$$I_0 \leftarrow I_1 \leftarrow \cdots$$

d'ensembles finis et d'applications appelées transitions (toutes notées f) astreinte à deux conditions : l'ensemble I_0 est réduit à un point, les transitions sont surjectives. On note simplement

$$\mathcal{I} = (I_0, I_1, \ldots).$$

On reprendra la terminologie et la figure d'un arbre dans l'introduction. Une branche infinie de l'arbre est une suite de nœuds $x = (x_0, x_1, \ldots)$ telle que $f(x_{n+1}) = x_n$ pour chaque n. L'ensemble des branches infinies, noté I_∞, muni des projections évidentes

$$I_\infty \xrightarrow{\pi_n} I_n, \quad (x_0, x_1, \ldots) \longmapsto x_n,$$

est *une limite projective du système projectif $\mathcal{I}$*; cela signifie que

(5.3) *pour toute suite d'applications $(c_n : X \to I_n)_{n \geq 0}$ telle que $f \circ c_{n+1} = c_n$ pour tout n, il existe une application unique $c : X \to I_\infty$ telle que $\pi_n \circ c = c_n$ pour tout n.*

On dit aussi que I_∞ est un *ensemble profini.*

Un arbre étant donné, on peut considérer chaque ensemble fini I_n comme un espace compact. L'ensemble profini I_∞ est muni d'une topologie compacte, la moins fine rendant les projections π_n continues, dont une base est donnée par la famille des $\pi_n^{-1}(a)$, où $a \in \coprod_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Cette base de topologie est formée d'ouverts fermés, de sorte que l'espace compact I_∞ est totalement discontinu.

À toute partie $A \subset I_\infty$, on associe la suite des projections $\pi_n(A) \subset I_n$ qui, par image réciproque, donne la suite des ouverts fermés $\pi_n^{-1}\pi_n(A)$. Cette suite d'ouverts fermés est décroissante et

$$\bar{A} = \bigcap_{n\geq 0} \pi_n^{-1}\pi_n(A). \tag{5.4}$$

Preuve. — Soit $x \in E_\infty$. Les $\pi_n^{-1}\pi_n(x)$ forment une base de voisinage de x. Il en ressort que $x \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout n, $\pi_n^{-1}\pi_n(x) \cap A \neq \emptyset$. Cela signifie que $\pi_n(x) \in \pi_n(A)$, autrement dit que $x \in \pi_n^{-1}\pi_n(A)$.

Un fermé F étant donné, posons $F_n = \pi_n(F)$. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $f(F_{n+1}) = F_n$ pour tout n et $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi^{-1}(F_n)$. Réciproquement, considérons une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(F_{n+1}) = F_n$ pour tout n et considérons le fermé $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi_n^{-1}(F_n)$. La suite des $\pi_n^{-1}(F_n)$ étant décroissante, si un entier k est fixé (en utilisant quelque part la compacité) :

$$\begin{aligned}\pi_k\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi_n^{-1}(F_n)\Big) &= \pi_k\Big(\bigcap_{n\geq k} \pi_n^{-1}(F_n)\Big) = \bigcap_{n\geq k} \pi_k\big(\pi_n^{-1}(F_n)\big) \\ &= \bigcap_{n\geq k} f^{n-k}(F_n) = F_k.\end{aligned}$$

En résumé,

(5.5) *l'ensemble des fermés de I_∞ est en bijection avec les suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $F_n \subset I_n$, vérifiant $f(F_{n+1}) = F_n$ pour tout n. La bijection est donnée par $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \pi_n^{-1}(F_n)$.*

Dans le même ordre d'idée, les fonctions scs (semi-continue supérieurement) sur l'ensemble profini I_∞ sont caractérisées par des données sur l'arbre. Introduisons la notation suivante : étant données une application surjective $f : A \to B$ et une fonction $\phi : A \to \mathbb{R}$, on note $\sup_f \phi$ la fonction sur B définie par

$$(\sup_f \phi)(b) = \sup\{f(a) \mid \phi(a) = b\}.$$

On a le résultat :

(5.6) *L'application qui à une fonction scs* $X : I_\infty \to [\alpha, \infty[$ *associe la suite des fonctions* $(\sup_{\pi_n} X : I_n \to [\alpha, \infty[\,)_{n\geq 0}$ *établit une bijection entre les fonctions scs sur* I_∞ *à valeurs dans* $[\alpha, \infty[$ *et les suites de fonctions* $(X_n : I_n \to [\alpha, \infty[\,)_{n\geq 0}$ *telles que* $\sup_f X_{n+1} = X_n$.

Dans cette correspondance, les fonctions $X_n \circ \pi_n$ sont décroissantes et $X = \sup\limits_{n\geq 0} X_n \circ \pi_n$.

Notons $\mathcal{B}$ l'algèbre de Boole des ouverts fermés de l'espace I_∞. Vu que les transitions sont surjectives, ainsi que les projections π_n, on a les injections (en identifiant $E \subset I_n$ et $\pi_n^{-1}(E)$) :

$$2^{I_0} \subset 2^{I_1} \subset \cdots \subset 2^{I_n} \subset \cdots \subset \mathcal{B} \subset 2^{I_\infty}. \tag{5.7}$$

Un ouvert fermé F donne une suite de $\pi_n^{-1}(F_n)$ stationnaire, d'où :

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 2^{E_n}. \tag{5.8}$$

L'algèbre de Boole des ouverts fermés $\mathcal{B}$ possède des propriétés remarquables : elle est dénombrable, toute suite décroissante de $\mathcal{B}$ d'intersection vide est stationnaire, la σ-algèbre $\mathcal{B}_\infty$ des boréliens de I_∞ est engendrée par $\mathcal{B}$.

Une mesure positive μ sur $(I_\infty, \mathcal{B}_\infty)$ revient, d'après ce qui précède, à une mesure positive sur $\mathcal{B}$. Vu la stationnarité des suites décroissantes d'intersection vide, l'additivité finie suffit et enfin, vu la filtration par les algèbres 2^{I_n}, une mesure μ sur $(I_\infty, \mathcal{B}_\infty)$ est la donnée d'une suite d'applications $(\mu_n : I_n \to [0, \infty])_{n\in\mathbb{N}}$ telle que si $a \in I_n$:

$$\mu_n(a) = \sum_{f(b)=a} \mu_{n+1}(b).$$

Plus précisément :

(5.9) *pour toute suite de mesures positives* μ_n *sur l'ensemble fini* E_n *vérifiant la condition la condition projective* $f_*\mu_{n+1} = \mu_n$ *pour tout* n*, il existe une mesure positive unique* μ *sur* $(E_\infty, \mathcal{B}_\infty)$ *telle que* $(\pi_n)_*(\mu) = \mu_n$.

Par exemple, sur I_∞, il existe une mesure naturelle λ qu'on peut appeler l'équitransition, donnée par $\lambda_0 = 1$ et si $b \in E_{n+1}$:

$$\lambda_{n+1}(b) = \frac{1}{\operatorname{card} f^{-1}f(b)} \lambda_n\big(f(b)\big).$$

Lorsque la mesure positive finie μ et la fonction scs X sont données sur l'arbre, par les suites des μ_n et des X_n, on a

$$\int X \,\mathrm{d}\mu = \inf_{n \geq 0} \int X_n \,\mathrm{d}\mu_n.$$

L'arbre $\mathcal{I}$ étant donné, on construit l'hyperarbre noté $\widetilde{\mathcal{I}}$ comme il suit :

$$\widetilde{I}_0 \xleftarrow{f} \widetilde{I}_1 \xleftarrow{f} \cdots \tag{5.10}$$

où f est ici l'extension de l'application f aux parties. D'après (5.5),

(5.11) *la limite projective $\widetilde{I}_\infty$ de l'hyperarbre $\widetilde{\mathcal{I}}$ est l'ensemble des fermés non-vides de I_∞.*

On peut introduire la topologie de $\widetilde{I}_\infty$ *via* une structure uniforme qui formalise ce qu'on peut entendre par l'expression *raffinement d'image.* À chaque niveau n la projection $\pi_n : I_\infty \to I_n$ induit une partition dont on peut appeler les éléments les pixels de niveau n ; bien entendu, on identifie $a \in I_n$ et le morceau élémentaire d'image au niveau $\pi^{-1}(a)$ de ce point de vue, *l'ensemble fini I_n est l'ensemble des pixels de niveau n.* Le passage du niveau n au niveau $n+1$ se traduit par un raffinement des pixels : le pixel $a \in I_n$ étant remplacé par l'ensemble de pixels $f^{-1}(a) \subset I_{n+1}$.

Une partie A de I_∞ n'est connue qu'au travers des projections $\pi_n(A)$, donnant des figures de pixels de chaque niveau qui se raffine lorsque n augmente. La seule information qu'on a de A est la suite $\pi_n(A)$ de ces approximations ; les fermés sont les parties bien approximées. Des parties A et B de I_∞ sont indiscernables au niveau n si leurs figures en pixels de niveau n sont les mêmes, ce qui se traduit mathématiquement par $\pi_n(A) = \pi_n(B)$.

La structure uniforme sur $\widetilde{I}_\infty$ est définie par la suite d'entourage donnée au niveau n par la relation d'équivalence : *le couple (F, G) de points de $\widetilde{I}_\infty$ est proche d'ordre n si $\pi_n(F) = \pi_n(G)$.* Étant donné un fermé non vide F, le voisinage d'ordre n de ce point de $\widetilde{I}_\infty$ est l'ensemble des fermés dont la figure en pixels de niveau n coïncide avec celle de F ; ces ouverts forment une base de voisinage du point F de l'hyperespace $\widetilde{I}_\infty$.

Certains fermés de $\widetilde{I}_\infty$ sont mis en évidence par Choquet. Un fermé non vide F de I_∞ (c'est-à-dire un point de $\widetilde{I}_\infty$) de suite $(F_n)_{n \geq 0}$, étant donné, la partie de $\widetilde{I}_\infty$

$$\lambda_F = \{K \in \widetilde{I}_\infty \mid K \cap F \neq \emptyset\} \tag{5.12}$$

est fermée et caractérisée par la suite $\lambda_{F_n} = \{A \in \widetilde{I}_n \mid A \cap F_n \neq \emptyset\}$. D'après (4.5), on sait que la suite des λ_{F_n} définit un fermé de $\widetilde{I}_\infty$; on ne fait ici qu'expliciter ce fermé.

Les fonctions scs sur $\widetilde{I}_\infty$ à valeurs dans $[\alpha, \infty[$, lorqu'elles sont croissantes, sont caractérisées par leurs restrictions à $\mathcal{B} - \{\emptyset\}$; en effet,

(5.13) *la restriction à $\mathcal{B} - \{\emptyset\}$ d'une fonction définie sur $\widetilde{I}_\infty$ à valeurs dans $[\alpha, \infty[$, établit une bijection entre les fonctions scs croissantes et les fonctions croissantes. L'extension est donnée par* $\phi(K) = \inf_{n \geq 0} \phi(\pi_n^{-1}\pi_n(K))$.

Preuve. — On peut utiliser (5.6). Une telle application ϕ est caractérisée par la suite des fonctions $\sup_{\pi_n} \phi$; vu la croissance, la valeur maximun sur $J \in \widetilde{I}_n$ est atteinte pour $\pi_n^{-1}(J)$, ce qui fait que $\sup_{\pi_n} \phi = \phi \circ \pi_n^{-1}$. La condition $\sup_f \phi_{n+1} = \phi_n$ se traduit, en utilisant le même argument, par $\phi_{n+1} \circ f^{-1} = \phi_n$. On peut aussi utiliser le résultat suivant :

(5.14) *Une fonction croissante $\phi : \widetilde{I}_\infty \to [\alpha, \infty[$ est scs si et seulement si pour toute famille de fermés non vides $(F_i)_{i \in I}$ filtrante à gauche,* $\phi(\bigcap_{i \in I} F_i) = \inf_{i \in I} \phi(F_i)$.

6. Capacité de Choquet profinie.

Une mesure positive finie μ sur $\widetilde{I}_\infty$ est la donnée d'une suite de formes linéaires positives $\mu_n : \mathbb{R}^{\widetilde{I}_n} \to \mathbb{R}$ telle que μ_n soit la composée :

$$\mathbb{R}^{\widetilde{I}_n} \xrightarrow{f^*} \mathbb{R}^{\widetilde{I}_{n+1}} \xrightarrow{\mu_{n+1}} \mathbb{R}.$$

Pour chaque forme positive μ_n, il existe une capacité c_n unique sur $\widetilde{I}_n$ telle que $\mu_n = \langle\ , \phi_n c_n\rangle$. En traduisant la condition $\mu_{n+1} \circ f^* = \mu_n$ en termes d'adjoints, on obtient $f_*(c_{n+1}) = c_n$, d'où :

(6.1) *il existe une bijection entre les mesures positives finies sur $\widetilde{I}_\infty$ et les suites de capacités $(c_n)_{n \geq 0}$ telles que $c_{n+1} \circ f^{-1} = c_n$.*

Considérons maintenant le système inductif suivant d'applications injectives (il s'agit du système donné en (5.7), à l'ensemble vide près) :

$$\widetilde{I}_0 \xrightarrow{f^{-1}} \widetilde{I}_1 \xrightarrow{f^{-1}} \widetilde{I}_2 \xrightarrow{f^{-1}} \cdots,$$

de limite inductive l'ensemble $\mathcal{B} - \{\emptyset\}$ des ouverts fermés non-vides de l'espace I_∞. Une application $u : \mathcal{B} - \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ est la donnée d'une suite d'applications $u_n : \tilde{I}_n \to \mathbb{R}$ telle que $u_{n+1} \circ f^{-1} = u_n$. On prouve ainsi que

(6.2) *les mesures positives sur $\tilde{I}_\infty$ sont en bijection avec les fonctions $c : \mathcal{B} - \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ telles que les restrictions aux $\tilde{I}_n$ sont des capacités.*

(6.3) *Les mesures positives sur $\tilde{I}_\infty$ sont en bijection avec les fonctions alternées sur $\mathcal{B} - \{\emptyset\}$.*

Preuve. — Une famille finie $x : J \to \mathcal{B} - \{\emptyset\}$ se factorise par un certain $\tilde{I}_n \subset \mathcal{B} - \{\emptyset\}$, ce qui signifie que $c \circ x = c_n \circ x$, avec $x : \tilde{J} \to \tilde{I}_n$. On sait que $c_n \circ x$ est une capacité finie. Ceci prouve que c est une fonction alternée. Réciproquement, si c est une fonction alternée, on considère la famille particulière des atomes de partition $\pi_n^{-1} : I_n \to \mathcal{B} - \{\emptyset\}$ qui s'étend en l'inclusion $\tilde{I}_n \subset \mathcal{B} - \{\emptyset\}$ et l'on sait que la restriction de c est une capacité finie.

Considérons une mesure positive finie μ sur $\widetilde{I}_\infty$, d'images μ_n sur les $\widetilde{I}_n$; Notons c_n les capacités associées aux mesures μ_n et enfin $c : \mathcal{B} - \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ la fonction alternée associée.

Un fermé non vide F de I_∞ (de suite associée $(F_n)_{n\geq 0}$) étant donné, le fermé de $\widetilde{I}_\infty$ (*cf.* (5.12))

$$\lambda_F = \{K \in \widetilde{I}_\infty \mid K \cap F \neq \emptyset\},$$

caractérisé par la suite $\lambda_{F_n} = \{A \in \widetilde{I}_n \mid A \cap F_n \neq \emptyset\}$ a pour mesure

$$\mu(\lambda_F) = \inf_{n\geq 0} \mu_n(\lambda_{F_n}) = \inf_{n\geq 0} c_n(F_n) = \inf_{n\geq 0} c(\pi_n^{-1} F_n)$$

d'après le théorème de Choquet (2.5) dans le cas fini.

D'autre part, une fonction alternée $c : \mathcal{B} - \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$, croissante d'après (2.6), s'étend en une fonction $c : \widetilde{I}_\infty \to \mathbb{R}$ alternée scs sur $(\widetilde{I}_\infty, \cup)$ d'après (5.13). Suivant Choquet,

(6.4) *les fonctions scs et alternées sur $(\widetilde{I}_\infty, \cup)$ sont appelées les capacités sur $\widetilde{I}_\infty$.*

Bien entendu, on peut remplacer scs par la condition donnée en (5.14). Ce sont elles qu'on qualifie ici de profinies. On obtient finalement le théorème de représentation des capacités profinies de Choquet :

(6.5) THÉORÈME. — *Il existe une bijection entre les mesures positives finies μ sur $\widetilde{I}_\infty$ et les fonctions scs alternées c sur $(\widetilde{I}_\infty, \cup)$. Cette bijection est caractérisée par*

$$\mu\{K \in \widetilde{I}_\infty \mid K \cap F \neq \emptyset\} = c(F).$$

Soient une mesure positive finie μ sur $\widetilde{I}_\infty$ de capacité associée c et une fonction scs $X : \widetilde{I}_\infty \to [\alpha, \infty[$ donnée par la suite des fonctions X_n (voir (5.6)). Les fonctions X_n, c_n sont des élements du vectoriel $\mathbb{R}^{I_n}$; on pose $\langle X_n, \phi c_n\rangle = (X_n \mid c_n)$. D'après (5.6) :

$$\int X \,\mathrm{d}\mu = \inf_{n\geq 0} \int X_n \,\mathrm{d}\mu_n = \inf_{n\geq 0} (X_n \mid c_n).$$

Le calcul de l'intégrale se fait au moyen des formes bilinéaires qu'on a introduites à chaque niveau de l'arbre. Lorsque la fonction X est une capacité profinie c', $\sup_{\pi_n} c' = c' \circ \pi_n^{-1} = c'_n$, ce qui donne :

$$\int c' \,\mathrm{d}\mu = \inf_{n\geq 0} (c'_n \mid c_n). \tag{6.6}$$

On savait, depuis (4.7), que la suite des $(c'_n \mid c_n)$ est décroissante, mais on a ici une interprétation *intégrale* de la limite de cette suite.

En résumé, étant donné un arbre $\mathcal{I}$, on peut envisager le cône des capacités de Choquet sur $\widetilde{I}_\infty$, isomorphe au cône des mesures positives finies sur l'espace compact totalement discontinu $\widetilde{I}_\infty$; ce cône est équipé de la forme bilinéaire définie en (6.6).

Exemples. — Une mesure positive finie ν sur I_∞ est — en particulier — une fonction $\nu : \widetilde{I}_\infty \to \mathbb{R}$ scs alternée d'après (3.10). Un couple de mesures positives finies (ν, τ) sur I_∞ étant donné, on peut envisager le scalaire

$$(\nu \mid \tau) = \inf_{n\geq 0} \sum_{a\in I_n} \nu(a)\tau(a).$$

Par exemple, si δ_x est la mesure de Dirac en $x \in I_\infty$:

$$(\nu \mid \delta_x) = \inf_{n\geq 0} \nu_n(x_n) = \inf_{n\geq 0} \nu(\pi_n^{-1} x_n) = \nu(\{x\}).$$

Une autre classe d'exemples provient des fonctions scs $X : I_\infty \to [0, \infty[$. Utilisons les notations données (5.6). La suite de fonctions

$$\big(X_n : I_n \to [0, \infty[\,\big)_{n\geq 0}$$

donne une suite de fonctions $(\sup X_n : \widetilde{I}_n \to [0,\infty[)_{n\geq 0}$ et les conditions $\sup_f X_{n+1} = X_n$ font que la fonction $\sup X : \widetilde{I}_\infty \to [0,\infty[$ est une capacité de Choquet sur I_∞. On a

$$\big(\sup X \mid \sup Y\big) = \inf_{n\geq 0} \sum_{H\cup J=I_n} -(-1)^{H\cap J} \sup_H X \sup_H Y.$$

Enfin, si X est une fonction scs positive sur I_∞, si ν est une mesure positive finie sur I_∞, il vient

$$\big(\sup X \mid \nu\big) = \int X \,\mathrm{d}\nu.$$

La forme bilinéaire qu'on introduit sur le cône des capacités de Choquet sur $\widetilde{I}_\infty$ généralise l'intégration sur I_∞.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. CHOQUET, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 5 (1955), 131–295.

[2] C. DELLACHERIE, Capacités et processus stochastiques, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[3] G. SHAFER, A Mathematical Theorie of Evidence, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.

[4] A. CHATEAUNEUF, Modèles mathématiques de décision dans l'incertain, Habilitation, Université de Paris 1, Panthéon Sorbonne, 1993.

Manuscrit reçu le 12 mai 1997,
accepté le 12 février 1998.

P. DARTNELL,
Universidad de Chile
Departamento de Matematicas
Santiago (Chili).
dartnell@dim.uchile.cl

G. MICHON,
Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie
B.P. 400
21011 Dijon Cedex (France).
michon@u–bourgogne.fr