

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LAURENT MANIVEL

Applications de Gauss et pléthysme

Annales de l'institut Fourier, tome 47, n° 3 (1997), p. 715-773

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_3_715_0

© Annales de l'institut Fourier, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

APPLICATIONS DE GAUSS ET PLÉTHYSME

par Laurent MANIVEL

1. INTRODUCTION

La théorie de Borel et Weil [2] autorise une approche géométrique de problèmes qui, de prime abord, appartiennent au strict royaume de la théorie des représentations des groupe de Lie, voire des groupes finis. Cette approche *a priori* hétérodoxe nous a permis de découvrir certaines facettes méconnues, pourtant remarquables, d'un problème baptisé par Littlewood du nom mystérieux, sinon peut-être aux oreilles de quelques agrégés de lettres classiques, de *pléthysme*. Il s'agit en l'occurrence de comprendre la composition des foncteurs de Schur, qui décrivent les représentations irréductibles des groupes linéaires complexes, ou, selon une dualité fameuse [13], des groupes de permutations. Ces compositions donnent naissance, même dans les cas les plus simples, à des familles pléthoriques de composantes irréductibles, qui se laissent difficilement apprivoiser.

Certaines régularités de ces familles de composantes furent cependant mises en évidence par les travaux pionniers de Foulkes [10], lequel remarqua que les multiplicités des puissances symétriques composées semblaient croître avec les exposants considérés. Beaucoup plus récemment, S. Weintraub montra que ces multiplicités se stabilisaient, c'est-à-dire qu'elles devenaient constantes lorsque les exposants augmentaient suffisamment [23], [7].

Nous avons proposé dans [18] une interprétation géométrique très simple de ces phénomènes, qui nous a permis de donner des expressions des *multiplicités asymptotiques* découvertes par Weintraub. Nous en déduisons

Mots-clés : Pléthysme – Foncteurs de Schur – Représentations des groupes symétriques – Variétés de drapeaux – Application de Gauss.

Classification math. : 05E10 – 14M15 – 20C30 – 20G05.

des conditions nécessaires à ce qu'une puissance de Schur apparaisse par exemple dans une composée de puissances symétriques, ainsi qu'une extension asymptotique, de $Sl_2(\mathbb{C})$ à $Sl_r(\mathbb{C})$, de la fameuse loi de réciprocité d'Hermité [11]. Ces résultats ont été depuis étendus à l'ensemble des groupes réductifs complexes connexes par Michel Brion [5].

Nous remarquons à la fin de [18] que l'étude des plongements de Segre des espaces projectifs, ou des plongements de Plücker des grassmanniennes, permettait d'obtenir de manière extrêmement économique les multiplicités asymptotiques de certains pléthysmes. C'est cette remarque que cet article voudrait prolonger, en considérant d'autres plongements équivariants de variétés homogènes. Ces plongements, qui sont des généralisations naturelles des plongements de Veronese ou de Segre, seront donnés par des drapeaux de sous-espaces de puissances de Schur, ou de produits tensoriels, stables sous l'action d'un sous-groupe parabolique du groupe linéaire. Bien que l'ensemble de ces sous-modules paraisse difficile à expliciter, il est possible d'en produire suffisamment pour construire de grandes familles de plongements équivariants ; les plus maniables seront du type

$$X = \mathcal{F}(V) \hookrightarrow Y = \mathcal{F}(S_\lambda V),$$

$$X = \mathcal{F}(V_1) \times \mathcal{F}(V_2) \hookrightarrow Y = \mathcal{F}(V_1 \otimes V_2).$$

L'étude de ces plongements nous donnera accès aux propriétés du pléthysme essentiellement sous les aspects suivants.

Composantes principales. — Si \mathcal{L}_μ est un fibré en droites sur Y , associé à une partition μ , l'espace de ses sections globales s'identifie à un pléthysme $S_\mu(S_\lambda V)$ ou $S_\mu(V_1 \otimes V_2)$. Les sections de sa restriction à X donnent alors une composante irréductible de ce pléthysme, que l'on dira principale. Dans le cas d'une puissance symétrique $S^k(S_\lambda V)$, on dispose de $S_{k\lambda}V$ comme unique composante privilégiée, et elle est de multiplicité un : les composantes principales jouent un rôle analogue dans un cadre plus général. On obtient par exemple ainsi (Théorème 3.1) :

THÉORÈME. — *Soit μ une partition de longueur ℓ . Pour chaque tableau de Young T standard de taille ℓ , on définit des partitions $a_T^1(\mu)$ et $a_T^2(\mu)$ par*

$$a_T^1(\mu)_i = \sum_{j \in L_i} \mu_j, \quad a_T^2(\mu)_i = \sum_{j \in C_i} \mu_j,$$

où L_i et C_i sont la ligne et la colonne d'indice i du tableau T . Alors $S_{a_T^1(\mu)}V_1 \otimes S_{a_T^2(\mu)}V_2$ admet une multiplicité non nulle dans $S_\mu(V_1 \otimes V_2)$.

Il est également possible de donner un critère simple assurant que cette multiplicité est égale à un (Proposition 3.3). On dispose d'un énoncé analogue pour un nombre arbitraire d'espaces vectoriels. Un cas particulier de cet énoncé fournit une généralisation de la formule de Cauchy, qui explicite la décomposition d'une puissance symétrique ou extérieure du produit tensoriel de deux espaces (Proposition 3.1).

Confinement et stabilité. — Restreindre les sections de \mathcal{L}_μ de Y à X ne permet évidemment pas d'accéder à celles qui s'y annulent. Ces dernières définissent cependant un jet sur X , qui est une section du produit tensoriel de la restriction de \mathcal{L}_μ par une puissance symétrique du fibré conormal à X dans Y . Ceci montre que ce fibré conormal contrôle, en un sens, l'ensemble des composantes du pléthysme considéré. On parlera de phénomène de *confinement* lorsque ceci permet d'inclure les poids de ces composantes dans un cône convexe propre. Lorsque ce cône ne contient pas de droite, on assistera à des phénomènes de *stabilisation* des multiplicités, comme dans le cas des puissances symétriques composées : auquel cas la composante principale correspondante est d'ailleurs automatiquement de multiplicité un. Ce n'est cependant pas, loin de là, un phénomène systématique. On s'efforcera, autant que possible, de traduire ces restrictions en termes purement combinatoires. Donnons comme exemple le résultat suivant, où l'on note, si π est une partition d'un entier p , $[\pi]$ la représentation irréductible du groupe symétrique \mathcal{S}_p qu'elle définit (Théorème 3.2, que précise la proposition 3.5) :

THÉORÈME. — *Si la représentation $[\rho]$ admet une multiplicité non nulle dans le produit tensoriel $[\alpha_1] \otimes \cdots \otimes [\alpha_m]$, alors pour tout m -uplet d'entiers naturels r_1, \dots, r_m ,*

$$|\rho|_{>r_1 \cdots r_m} \leq |\alpha_1|_{>r_1} + \cdots + |\alpha_m|_{>r_m}.$$

Cet énoncé, précédemment connu seulement pour $m = 2$ et $r_1 = r_2 = 1$, n'est qu'un échantillon de familles d'inégalités du même type qu'il est possible d'obtenir, à l'aide de nos méthodes, de façon plus ou moins mécanique pour toutes les puissances de Schur composées (Théorème 4.2) — on pourra également se reporter à [20] pour les carrés symétriques ou extérieurs.

Expliciter de telles inégalités revient à étudier l'ensemble $\mathcal{C}_{\mu, \ell, d}$, par exemple, des poids rationnels ν tels que pour un entier $k > 0$ au moins, $S_{k\nu} V$ ait une multiplicité non nulle dans $S_{k\mu}(S^\ell V)$, où V est un espace vectoriel complexe de dimension d fixée. C'est un polyèdre convexe dans la chambre

de Weyl dominante, dont les composantes principales qui donnent lieu à des phénomènes de stabilisation constituent des sommets (section 2.4). Je conjecture que l'on obtient ainsi tous les sommets de ce polyèdre qui sont à l'intérieur de la chambre de Weyl dominante, et que si l'on suppose μ régulier, alors l'union des images de $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ par le groupe de Weyl (ici le groupe symétrique), est précisément l'enveloppe convexe des images par ce même groupe de cette famille de sommets (section 4.2.2). Notons que cette description de $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ n'est pas nécessairement correcte lorsque l'on ne suppose pas μ régulier : on discutera des exceptions possibles, et l'on en donnera quelques exemples.

Signalons au passage que le polyèdre $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ est l'intersection avec la chambre de Weyl dominante, d'une projection linéaire de l'image de l'application moment des géomètres symplectiques — comme l'a remarqué Mumford. Peut-être les méthodes symplectiques permettraient-elles de préciser dans quelle situation l'union des images de $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ par le groupe de Weyl est convexe. On verra que cette propriété implique directement la véracité de la conjecture précédente.

Dernière remarque : on s'est attaché à traiter relativement en détail un certain nombre d'exemples, et à présenter des dessins, dont on espère qu'ils sauront éclairer le lecteur. Il est d'ailleurs à signaler que, si la théorie des représentations des groupes linéaires ou symétriques fait un usage immodéré de tableaux, qui sont des objets bidimensionnels, nous verrons apparaître très naturellement leurs analogues multidimensionnels, de même que des multipartitions. Ce qui limite évidemment la portée des illustrations.

Notations. — On notera V un espace vectoriel complexe de dimension d , implicitement supposée, sauf mention du contraire, arbitrairement grande. Si λ est une partition, c'est-à-dire une suite décroissante finie d'entiers naturels, on notera $S_\lambda V$ la puissance de Schur correspondante, qui est un $\mathrm{Gl}(V)$ -module irréductible. Ceci s'étend d'ailleurs au cas où λ est une suite décroissante d'entiers relatifs, si l'on s'autorise à tensoriser par des puissances négatives du déterminant. La longueur $\ell(\lambda)$ de la partition λ sera le nombre de parts non nulles qu'elle possède, sa hauteur $h(\lambda)$ sera la plus grande de ses parts, et sa taille $|\lambda|$, la somme de toutes ses parts. Son diagramme de Ferrers s'obtient en superposant des lignes dont les longueurs sont données par ses parts : les longueurs des colonnes de ce diagramme définissent alors la partition conjuguée de λ , que l'on note λ^* : elle est de même taille que λ , tandis que sa longueur est la hauteur de λ , et réciproquement.

Si B est un sous-groupe de Borel du groupe linéaire $G = \text{Gl}(V)$, et T un tore maximal de B , on notera $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d$ ses caractères diagonaux. Les $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ forment alors un système de racines simples, et B est engendré par les racines négatives. À conjugaison près, un sous-groupe parabolique de G est engendré par B et un ensemble de racines simples $\{\alpha_i, i \in I_P\}$. La variété projective $X = G/P$ est alors la variété des drapeaux de V formés de sous-espaces emboîtés dont les dimensions sont les éléments i_1, \dots, i_m de I_P : on notera aussi $X = \mathcal{F}_{i_1, \dots, i_m}(V)$. Enfin, un poids ρ sera dit P -dominant si $\langle \rho, \alpha_i \rangle \geq 0$ pour $i \notin I_P$. En cas d'égalité pour tout $i \notin I_P$, le poids ρ définit un caractère de P .

Mes remerciements vont à Michel Brion, Pierre-Louis Montagard, Peter Littelmann, Alain Lascoux et Christophe Carré pour les discussions que j'ai pu avoir avec eux, et ces deux derniers pour m'avoir de surcroît rendu possible l'utilisation du logiciel SYMMETRICA.

2. LA MÉTHODE

2.1. Un premier exemple.

En guise d'introduction aux idées de cet article et de motivation des constructions qui y seront introduites, on voudrait considérer brièvement les plongements homogènes des grassmanniennes par leurs fibrés en droites très amples, et examiner ce qu'il peuvent apporter à la compréhension du pléthysme. Les résultats de cette section, s'ils étendent légèrement ceux de [18], ne sont pour l'essentiel que des cas particuliers de ceux de [5]. La méthode utilisée est toutefois différente, et semble-t-il plus propice aux extensions qui nous intéresseront.

Soit donc V un espace vectoriel complexe de dimension d , soit P un sous-groupe parabolique maximal de $G = \text{Gl}(V)$, et $X = G/P$ la grassmannienne correspondante. Notons r le rang du fibré quotient sur X , dont le déterminant $\mathcal{O}_X(1)$ est un générateur très ample du groupe de Picard de X . Au fibré en droites $\mathcal{O}_X(\ell)$, avec $\ell > 0$, est associé un plongement équivariant

$$\varphi_\ell : X = G/P \hookrightarrow Y = \mathbb{P}(S_{\ell(1^r)}V^*),$$

où (1^r) est la partition ayant r parts égales à 1. Considérons les puissances $\mathcal{O}_Y(k)$ du diviseur hyperplan sur Y : leurs espaces de sections

globales peuvent être filtrés selon l'ordre d'annulation sur X , et à une section s'annulant à l'ordre m sur X est associé son jet dans les directions normales, qui est une section de la restriction à X de $\mathcal{O}_Y(k)$, tensorisée par la puissance symétrique d'exposant m du fibré conormal. D'où une injection de G -modules, en vertu du lemme de Schur,

$$\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(k)) = S^k(S_{\ell(1^r)}V) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(k\ell) \otimes S^*N^*).$$

Soit T_Y le fibré tautologique sur Y , qui n'est autre que le « twist » du fibré tangent par le diviseur hyperplan : sa restriction à X s'identifie au noyau de la projection $S_{\ell(1^r)}V \rightarrow \mathcal{O}_X(\ell)$, ce dont il est facile de déduire que le fibré conormal à X dans Y admet une filtration dont le gradué associé s'écrit

$$\text{gr } N^* = \bigoplus_{\substack{|\nu| \geq 2 \\ h(\nu) \leq \ell}} S_\nu Q^* \otimes S_\nu T,$$

où Q et T sont respectivement les fibrés quotient et tautologique sur X , de rangs r et $(d-r)$. L'existence de l'injection précédente, et l'observation du fait que l'amplitude du diviseur hyperplan sur Y assure que lorsque k augmente, son image contient toute partie finie du membre de droite, permettent d'obtenir le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. — *La multiplicité de $S_{k\ell(1^r) - \hat{\pi}, \rho}V$ dans le pléthysme $S^k(S_{\ell(1^r)}V)$ est une fonction croissante de k , égale, si cet entier est suffisamment grand, à la multiplicité de $S_\pi Q^* \otimes S_\rho T$ dans $S^\bullet(\text{gr } N^*)$. En particulier, si ℓ aussi est suffisamment grand, c'est également la multiplicité, nécessairement finie, de $S_\pi Q \otimes S_\rho T$ dans*

$$\bigotimes_{|\nu| \geq 2} \bigoplus_{\mu} S_\mu(S_\nu Q) \otimes S_\mu(S_\nu T).$$

Pour la croissance des multiplicités, on se reportera à la section 2.3. On a noté ici $\hat{\pi} = (\pi_r, \dots, \pi_1)$, si $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_r)$.

Ce genre d'expression des *multiplicités asymptotiques* des pléthysmes a moins d'intérêt en lui-même (interviennent en l'occurrence tous les pléthysmes non triviaux possibles!) que par les conséquences qu'il est possible d'en tirer, comme on a tenté de le montrer dans [18]. On obtient par exemple ce que nous avons appelé des *lois de réciprocité asymptotique*, en l'occurrence :

COROLLAIRE 2.2. — Soient π et ρ des partitions dont la longueur et la hauteur sont inférieures ou égales à r . Si les entiers k et ℓ sont suffisamment grands, les puissances de Schur

$$S_{k\ell(1^r)-\hat{\pi},\rho}V, \quad S_{k\ell(1^r)-\hat{\rho},\pi}V, \quad S_{k\ell(1^r)-\hat{\pi}^*,\rho^*}V, \quad S_{k\ell(1^r)-\hat{\rho}^*,\pi^*}V,$$

ont même multiplicité dans le pléthysme $S^k(S_{\ell(1^r)}V)$, et cette multiplicité est aussi la même que dans $S^{\ell}(S_{k(1^r)}V)$.

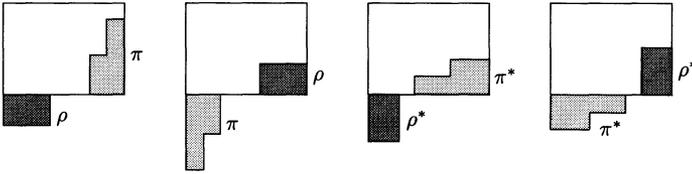


Figure 1. Réciprocité asymptotique

On aurait pu tout aussi bien affronter les puissances symétriques composées par le biais des plongements de Veronese des espaces projectifs [18]. Et, plus généralement, l'ensemble des plongements équivariants, par des fibrés en droites très amples, des variétés de drapeaux. Ceci ne permet cependant que d'appréhender les propriétés des multiplicités d'un pléthysme $S_{\rho}(S_{\lambda}V)$, lorsque l'on fait croître la plus grande part de ρ : ces propriétés ont été examinées dans [5].

2.2. Plongements et filtrations.

Pour aller au-delà, nous utiliserons des plongements de variétés de drapeaux $X = G/P$, définis par des drapeaux de P -modules. Alors que les fibrés en droites ne permettent que d'obtenir des plongements dans des espaces projectifs, nous aurons ainsi à notre disposition des plongements dans des variétés de drapeaux, le cas le plus commode étant celui des drapeaux complets.

Exposons le principe de la méthode, dont nous avons déjà donné un exemple, et le type d'information que l'on peut espérer en tirer. Considérons un plongement G -équivariant

$$\varphi : X = G/P \hookrightarrow Y = \mathcal{F}(W),$$

où $\mathcal{F}(W)$ désigne la variété des drapeaux complets d'un certain G -module W : par exemple, si $G = \text{Gl}(V)$, une puissance symétrique, ou une puissance de Schur quelconque de V .

2.2.1. Composantes principales.

Considérons un fibré en droites \mathcal{L}_μ^Y sur la variété Y , μ étant une partition. Ce fibré est engendré par ses sections globales, dont l'espace est d'après le théorème de Borel-Weil, la puissance de Schur $S_\mu W$. Exactement comme on l'a remarqué pour les plongements équivariants des grassmanniennes, il s'ensuit que le morphisme de restriction

$$S_\mu W = \Gamma(Y, \mathcal{L}_\mu^Y) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}_{\mu|X}^Y)$$

est surjectif. Si $r_\varphi(\mu)$ est le poids de la restriction de \mathcal{L}_μ^Y à X , on conclut à l'existence, dans le G -module $S_\mu W$, d'un G -module simple de poids $r_\varphi(\mu)$.

DÉFINITION 2.3. — *Ce sous-module de poids $r_\varphi(\mu)$ sera appelé composante principale de $S_\mu W$ associée au plongement φ .*

2.2.2. Filtration par l'ordre d'annulation.

De plus, on dispose de la filtration des sections globales de \mathcal{L}_μ^Y selon leur ordre d'annulation sur X . Associer à une section qui s'annule sur X à l'ordre m , son m -jet dans les directions normales à X dans Y permet de définir des *applications de Gauss*

$$\Gamma(Y, \mathcal{I}_X^m \otimes \mathcal{L}_\mu^Y) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{L}_\mu^Y \otimes \mathcal{I}_X^m / \mathcal{I}_X^{m+1}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{L}_{\mu|X}^Y \otimes S^m N^*),$$

où N désigne le fibré normal à X dans Y . Le plongement φ étant équivariant, c'est un fibré vectoriel homogène sur X , en général non irréductible. Ce type d'applications, appelées parfois *applications de Wahl*, a été introduit dans [21] dans l'idée d'obtenir certaines informations relatives aux produits tensoriels de G -modules irréductibles : le plongement considéré était en l'occurrence celui d'une variété de drapeau généralisée comme diagonale du produit de deux de ses copies. Cette idée a été reprise dans [18], où elle est appliquée aux puissances symétriques composées. On remarquait dans cet article que les plongements diagonaux ne lui permettaient sans doute pas de donner toute sa mesure.

On obtient donc, à l'aide du lemme de Schur, une injection

$$S_\mu W = \Gamma(Y, \mathcal{L}_\mu^Y) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}_{r_\varphi(\mu)}^X \otimes S^\bullet N^*).$$

Supposons de plus le fibré \mathcal{L}_μ^Y ample et procédons de même pour ses puissances tensorielles. Les injections

$$S_{k\mu} W = \Gamma(Y, \mathcal{L}_{k\mu}^Y) \hookrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}_{kr_\varphi(\mu)}^X \otimes S^\bullet N^*)$$

se lisent alors comme un développement asymptotique de $S_{k\mu}W$, lorsque k tend vers l'infini. Cela, au sens où l'application précédente est en fait surjective, si k augmente suffisamment, sur les puissances symétriques d'exposant borné du fibré conormal : c'est une conséquence immédiate des théorèmes d'annulation asymptotique de Serre. On peut d'ailleurs préciser cette affirmation, au moins qualitativement, de la façon suivante :

PROPOSITION 2.4. — *Il existe des poids α et β tels que l'application*

$$\Gamma(Y, \mathcal{L}_{k\mu}^Y) = S_{k\mu}(S_\lambda V) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}_{kr_\varphi(\mu)}^X \otimes S^{\leq m} N^*)$$

soit surjective dès que $(k\mu - m\alpha - \beta)$ est dominant.

Démonstration. — Il s'agit en effet d'obtenir des conditions suffisantes pour que

$$H^1(Y, \mathcal{L}_{k\mu}^Y \otimes \mathcal{I}_X^{m+1}) = 0.$$

Soient Z l'éclatée de Y le long de X , π sa projection sur Y et E le diviseur exceptionnel. Le groupe de cohomologie précédent est alors isomorphe à

$$H^1(Z, \pi^* \mathcal{L}_{k\mu}^Y \otimes \mathcal{O}_Z(-(m+1)E)).$$

Le fibré canonique de Z s'écrit

$$K_Z = \pi^* K_Y \otimes \mathcal{O}_Z(pE) = \pi^*(\mathcal{L}_\gamma^Y)^{-1} \otimes \mathcal{O}(pE)$$

pour un poids dominant γ et un entier p égal à la codimension de X dans Y , moins un. Mais on peut choisir un poids α tel que $\pi^* \mathcal{L}_\alpha^Y \otimes \mathcal{O}_Z(-E)$ soit globalement engendré, et réécrire le groupe de cohomologie précédent sous la forme

$$H^1\left(Z, K_Z \otimes \pi^* \mathcal{L}_{k\mu+\gamma-(m+1)\alpha}^Y \otimes (\pi^* \mathcal{L}_\alpha^Y \otimes \mathcal{O}_Z(-E))^{\otimes m+1}\right).$$

Lorsque $k\mu + \gamma - (m+1)\alpha$ est dominant, $\pi^* \mathcal{L}_{k\mu+\gamma-(m+1)\alpha}^Y$ est nef et big en tant qu'image réciproque d'un fibré ample, et ce groupe est trivial en vertu du théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg [1].

On obtiendrait un énoncé qualitativement identique, mais effectif, à l'aide des résultats généraux de [1]. Cependant, les résultats, quoique partiels, de [22], laissent à penser que dans la situation présente, on peut espérer des théorèmes de restriction beaucoup plus précis. Wahl montre

par exemple que si $X \hookrightarrow Y$ est un plongement de Veronese d'un espace projectif, on a

$$H^1(Y, \mathcal{I}_X^2(k)) = 0$$

dès que $k \geq 3$ (mais pas pour $k = 2$). Autrement dit, le morphisme

$$\Gamma(Y, \mathcal{I}_X(k)) \longrightarrow \Gamma(X, N^* \otimes \mathcal{O}_Y(k)|_X)$$

est surjectif. En raisonnant comme dans [21], th. 6.5, on en déduit la surjectivité de

$$\Gamma(Y, \mathcal{I}_X^m(k)) \longrightarrow \Gamma(X, S^m N^* \otimes \mathcal{O}_Y(k)|_X)$$

pour tout $k \geq 3m$. Les quelques exemples que nous avons pu considérer laissent supposer qu'il pourrait en être de même en général.

2.3. Stabilisation et confinement.

Dans le cas des grassmanniennes, nous avons pu mettre en évidence des phénomènes de convergence de certaines multiplicités vers ce que nous avons appelé des *multiplicités asymptotiques*, dont on obtenait des expressions certes compliquées, mais porteuses d'informations non triviales. Ce phénomène n'est cependant pas systématique, et dépend de la composante principale considérée. On devra distinguer trois cas, selon la structure du fibré normal à X dans Y , qui correspondent à des comportements asymptotiques des multiplicités qualitativement différents.

Le phénomène de stabilisation des multiplicités. — Le cas le plus intéressant est celui où les plus hauts poids des composantes isotypiques des puissances symétriques du fibré conormal, vu comme module sur un facteur de Levi L de P , engendrent sur \mathbb{R}^{+*} un cône convexe strict, c'est-à-dire inclus dans un demi-espace ouvert — on appellera ce cône le *cône conormal*.

DÉFINITION 2.5. — *Un plongement pour lequel le fibré conormal admette cette propriété sera dit stabilisant, de même que la composante principale correspondante.*

C'est précisément dans ce cas que l'on assiste à la convergence de multiplicités vers des multiplicités asymptotiques, comme dans le cas des grassmanniennes. Supposons par exemple que $G = \mathrm{Gl}(V)$, et que W est une puissance de Schur $S_\lambda V$. Si le fibré \mathcal{L}_μ^X est ample, on obtiendra un énoncé du type suivant :

La multiplicité de $S_{kr_\varphi(\mu)+\nu}V$ dans $S_{k\mu}(S_\lambda V)$ est une fonction croissante de k , égale si cet entier est suffisamment grand à la multiplicité, nécessairement finie, du poids ν dans l'algèbre symétrique $S^\bullet(\text{gr } N^*)$.

En effet, cette multiplicité est la même que dans une somme tronquée $S^{\leq n}(\text{gr } N^*)$, pour tout entier n suffisamment grand, alors qu'une puissance de \mathcal{L}_μ^Y d'exposant k suffisamment grand devant n induit une application de Gauss

$$\Gamma(Y, \mathcal{L}_{k\mu}^Y \otimes \mathcal{I}_X^m) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}_{kr_\varphi(\mu)}^X \otimes S^m N^*)$$

surjective pour tout $m \leq n$ — et cet espace de sections ne change pas, pour k suffisamment grand devant n , si l'on remplace N^* par le gradué $\text{gr } N^*$: c'est une conséquence immédiate du fait que ce gradué n'a pas de cohomologie en degré strictement positif, du fait de l'amplitude de \mathcal{L}_μ^Y et des théorèmes d'annulation asymptotique de Serre. Notons également que ce phénomène de stabilisation persiste lorsque le fibré \mathcal{L}_μ^Y n'est pas supposé ample, la multiplicité asymptotique étant seulement majorée par la multiplicité dans l'algèbre symétrique du gradué du fibré conormal. Ceci implique en particulier, il est important de le remarquer, que la multiplicité de la composante principale associée à φ est égale à 1.

Le fait que la multiplicité considérée soit fonction croissante de k est une conséquence immédiate de l'existence d'une section P -invariante s de \mathcal{L}_μ^Y non identiquement nulle sur X , l'application induite

$$\Gamma(Y, \mathcal{L}_{k\mu}^Y \otimes \mathcal{I}_X^m) \xrightarrow{\otimes s} \Gamma(Y, \mathcal{L}_{(k+1)\mu}^Y \otimes \mathcal{I}_X^m)$$

étant évidemment injective. Dans le cas le plus simple des puissances symétriques composées, cette propriété était une conjecture de Foulkes [10], démontrée indépendamment dans [5] et [18].

Le phénomène de confinement. — Plus généralement que pour le cas précédent, supposons que les plus hauts poids de l'algèbre symétrique du conormal soient inclus, cette fois, dans un demi-espace fermé. Si le cône conormal, engendré par ces poids contient une droite, alors la multiplicité de $S_{kr_\varphi(\mu)+\nu}V$ dans $S_{k\mu}(S_\lambda V)$ est encore une fonction croissante de k , mais tend vers l'infini avec k si elle n'est pas identiquement nulle.

Cependant, pour que la multiplicité de $S_{kr_\varphi(\mu)+\nu}V$ ne soit pas nulle, il est nécessaire que le poids ν vérifie $\ell_\varphi(\nu) \geq 0$, pour toute forme linéaire ℓ_φ positive sur le cône conormal.

On obtient ainsi des contraintes linéaires sur les composantes d'un pléthysme, ce sur quoi nous allons revenir dans la section suivante.

Points intérieurs. — S'il n'y a ni confinement ni stabilité, c'est-à-dire, si le cône conormal est l'espace des poids tout entier, la multiplicité de $S_{kr_\varphi(\mu)+\nu}V$ dans $S_{k\mu}(S_\lambda V)$ tend vers l'infini avec k si elle n'est pas identiquement nulle. Cependant, ces deux cas ne se distinguent que par des conditions de nature arithmétique, au sens où si k est suffisamment grand, la multiplicité précédente est non nulle si et seulement si le poids ν appartient au réseau engendré par les plus hauts poids de $S \cdot N^*$. Sauf cas exceptionnel, ce réseau est d'ailleurs le réseau des poids tout entier.

2.4. Le polyèdre asymptotique.

Afin de prendre en compte l'ensemble des contraintes linéaires sur les pléthysmes, dont le phénomène de confinement associé aux plongements stabilisants sera un exemple essentiel, on introduira la définition suivante.

DÉFINITION 2.6. — Soit $\mathcal{C}_{\mu,\lambda,d}$ l'adhérence de l'ensemble des poids rationnels ν tels qu'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $k\nu$ soit entier, et la multiplicité de $S_{k\nu}V$ dans $S_{k\mu}(S_\lambda V)$ soit non nulle, V étant de dimension d fixée.

On appellera cet ensemble le *polyèdre asymptotique*, puisque :

PROPOSITION 2.7. — L'ensemble $\mathcal{C}_{\mu,\lambda,d}$ est un polyèdre convexe, dont chaque composante principale stabilisante est un sommet. De plus, la structure locale en chacun de ces sommets est donnée par le cône conormal.

Démonstration. — Le fait que $\mathcal{C}_{\mu,\lambda,d}$ soit un polyèdre convexe est démontré dans [4], cor. 2.2. D'après ce qui précède, ce polyèdre contient toutes les composantes principales, en particulier celles qui sont stabilisantes. Soit $r_\varphi(\mu)$ l'une d'elles, et C_φ le cône conormal correspondant. Le fait que l'application de Gauss

$$S_{k\mu}(S_\lambda V) = \Gamma(Y, \mathcal{L}_{k\mu}^Y) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}_{kr_\varphi(\mu)}^X \otimes S^\bullet N^*)$$

soit injective implique l'inclusion $\mathcal{C}_{\mu,\lambda,d} \subset r_\varphi(\mu) + C_\varphi$. Mais comme l'application

$$\Gamma(Y, \mathcal{I}_X^m \otimes \mathcal{L}_{k\mu}^Y) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}_{kr_\varphi(\mu)}^X \otimes S^m N^*)$$

est nécessairement surjective si l'entier k est suffisamment grand devant m ,

et comme le cône C_φ est engendré par une famille finie de vecteurs, $C_{\mu,\lambda,d}$ et $r_\varphi(\mu) + C_\varphi$ coïncident au voisinage de $r_\varphi(\mu)$. C'est en ce sens précis que le cône conormal détermine la structure de $C_{\mu,\lambda,d}$ au voisinage de chacune des composantes principales.

Les composantes principales pour lesquelles on observe un phénomène de confinement, mais qui ne sont pas stabilisantes, sont situées sur le bord de $C_{\mu,\lambda,d}$ sans en être des sommets. De plus, les inéquations qui décrivent les cônes conormaux correspondants donnent des équations de certaines faces de ce polyèdre. Les autres composantes principales en sont des points intérieurs.

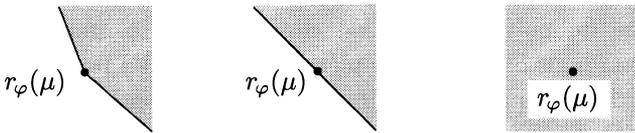


Figure 2. Structure locale de $C_{\mu,\lambda,d}$: stabilisation, confinement, points intérieurs

Avant d'aller plus avant, supposons que $S_\lambda V$ soit une puissance symétrique d'exposant ℓ et notons $C_{\mu,\ell,d}$ le polyèdre asymptotique correspondant.

A priori, on peut espérer décrire $C_{\mu,\ell,d}$ de deux manières, qui chacune ont leurs avantages. La première consiste à en décrire les faces de dimension maximale, au moins par les équations des hyperplans qui les supportent. Notre approche permet de déduire ces équations de la connaissance du cône conormal correspondant à chaque composante principale située sur le bord de $C_{\mu,\ell,d}$: cela requiert un calcul qui devient rapidement fastidieux, mais permet d'explicitier certaines des inégalités auxquelles doivent obéir les composantes d'un pléthysme (Théorème 3.2, Proposition 3.5 et Théorème 4.2).

La seconde façon de décrire $C_{\mu,\ell,d}$ serait d'en expliciter les sommets, et les arêtes qui les joignent deux à deux. On dispose d'ores et déjà des sommets correspondant à des composantes principales stabilisantes, et l'on verra comment déterminer les arêtes qui les relient. Notre espoir est qu'en général, tous les autres sommets se trouvent au bord de la chambre de Weyl dominante — nous avons pu constater qu'il en était bien ainsi sur de nombreux exemples (voir la section 4.2.2 pour des conjectures précises).

Plus encore, on verra que très souvent, si d'une composante principale est issue une arête de $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ qui ne soit pas dirigée vers une autre composante principale, alors elle est dirigée vers un mur de la chambre de Weyl dominante, perpendiculairement à celui-ci. C'est en particulier le cas dès que μ est régulier.

Ceci suggère très fortement que $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ puisse être décrit comme l'intersection, avec la chambre de Weyl dominante, de l'enveloppe convexe des composantes principales et de leurs images par le groupe de Weyl — ici le groupe symétrique.

On pourrait en déduire toutes les conditions linéaires qui contraignent les composantes d'un pléthysme. Notons au passage que la description précédente du polyèdre $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$, si elle est correcte, implique l'existence d'invariants pour $\mathrm{Sl}(V)$ dans le pléthysme $S_{k\mu}(S_\lambda V)$ pour k suffisamment grand — existence que l'on établira au passage. Cependant, cette description souffre d'un certain nombre d'exceptions, dont on tentera de discuter la nature.

Remarque. — Dans le cas du produit tensoriel, le problème analogue de déterminer l'ensemble des triplets λ, μ, ν pour lesquels il existe un entier $k > 0$ tels que $S_{k\lambda} V$ admette une multiplicité non nulle dans $S_{k\mu} V \otimes S_{k\nu} V$, a été résolu par A.A. Klyachko par des méthodes ressortant de la géométrie torique [15]. La description de cet ensemble paraît difficile à déduire de la règle de Littlewood-Richardson — et l'on ne sait pas l'étendre aux autres groupes réductifs, du moins à ma connaissance.

En résumé, dans chacune des situations que nous allons examiner, nous suivrons peu ou prou la démarche suivante. Dans un premier temps, nous devons construire des plongements équivariants d'espaces homogènes G/P dans des variétés de drapeaux, complets ou incomplets, d'un certain G -module. Ces extensions des très classiques plongements de Segre ou de Veronese, seront décrites par des données combinatoires, essentiellement des tableaux et leurs généralisations multidimensionnelles, dont nous déduirons les composantes principales correspondantes. Dans un second temps, il nous faudra déterminer lesquelles des composantes principales sont stabilisantes, et décrire les cônes conormaux correspondants — ce qui nous permettra d'obtenir différentes familles d'inégalités contraignant les pléthysmes. Enfin, selon les cas, nous tenterons de préciser la description du polyèdre asymptotique.

Nous nous restreindrons essentiellement à l'étude de trois cas. Tout

d'abord, celle des puissances de Schur d'un produit tensoriel d'espaces vectoriels complexes. Ce cas est d'autant plus intéressant que par dualité de Schur, les multiplicités d'une telle puissance sont celles qui apparaissent dans un produit de Kronecker de représentations complexes irréductibles du groupe symétrique (ces représentations irréductibles sont appelés *modules de Specht*, et l'on ne connaît pas de méthode vraiment satisfaisante pour décomposer leurs produits tensoriels [14]). Nous passerons ensuite aux puissances de Schur d'une puissance symétrique ou extérieure, dont l'étude asymptotique ne requiert que des variantes des outils combinatoires introduits pour le cas précédent. Enfin, nous discuterons différentes extensions possibles aux puissances de Schur composées, et de là, aux puissances de Schur de G -modules irréductibles, pour un groupe réductif complexe G autre qu'un produit de groupes linéaires.

3. PUISSANCES DE SCHUR D'UN PRODUIT TENSORIEL

S'il ne ressort pas à proprement parler de ce que l'on entend traditionnellement par pléthysme, le cas des puissances de Schur d'un produit tensoriel sera particulièrement commode à développer. Il servira de prototype au cas des puissances de Schur de puissances symétriques ou extérieures, objet de la section suivante. Enfin, il aura via la dualité de Schur, des conséquences intéressantes quant au produit tensoriel des représentations des groupes symétrique.

3.1. Plongements de Segre généralisés.

3.1.1. Composantes principales.

Tableaux multidimensionnels. — Soient V_1, \dots, V_m des espaces vectoriels complexes de dimensions respectives d_1, \dots, d_m , et supposons-les munis de drapeaux complets de sous-espaces

$$0 = V_{i,0} \subset \dots \subset V_{i,j} \subset \dots \subset V_{i,d_i} = V_i,$$

dont les stabilisateurs sont des sous-groupes de Borel B_1, \dots, B_m de leurs groupes d'automorphismes. Si $B = B_1 \times \dots \times B_m$, nous devons tout d'abord construire des drapeaux de sous B -modules de $V = V_1 \otimes \dots \otimes V_m$.

Soit \mathcal{P} le parallélépipède $\prod_i \{1, \dots, d_i\} \subset \mathbb{N}^{*m}$. Les sous B -modules de V sont alors en correspondance avec les *multipartitions* inscrites dans \mathcal{P} , c'est-à-dire avec les parties de \mathcal{P} stables par diminution d'une quelconque

des composantes de ses vecteurs. À une telle multipartition Δ est ainsi associé le B -module

$$\mathcal{M}_\Delta = \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in \Delta} V_{1, j_1} \otimes \cdots \otimes V_{m, j_m}.$$

Cette correspondance entre B -modules et multipartitions respecte évidemment les relations d'inclusion, et la dimension de \mathcal{M}_Δ est égale au cardinal de la multipartition Δ . Les sous B -modules de codimension un de \mathcal{M}_Δ sont donc associés aux multipartitions obtenues en enlevant l'un de ses *coins* (j_1, \dots, j_m) à Δ , si l'on entend par là un élément de Δ qui ne se déduit pas d'un autre de ces éléments par diminution d'une de ses composantes. Le quotient correspondant est la droite $M_{1, j_1} \otimes \cdots \otimes M_{m, j_m}$, où $M_{i, j} = V_{i, j} / V_{i, j-1}$.

Remarque. — Notons que le fait d'avoir affaire à un drapeau complet de V ne joue ici aucun rôle, et le même procédé permet de construire des drapeaux partiels de $S^\ell V$ à partir de drapeaux partiels de V . On utilisera par la suite cette remarque à plusieurs reprises (dans la section 3.2 par exemple).

Il nous sera plus commode de passer aux multipartitions obtenues par passage au complémentaire dans le parallélépipède \mathcal{P} et renversement des composantes. Un drapeau complet de sous B -modules de V se code alors en numérotant le parallélépipède \mathcal{P} par les entiers successifs, de façon croissante dans toutes les directions positives. Si $m = 2$, cela revient à se donner un *tableau standard* [19] de forme rectangle — on parlera donc en dimension supérieure de *multitableau standard*. De manière imagée, ceci revient à se donner une manière de *construire* \mathcal{P} en ajoutant de proche en proche des cases dans des *creux* des multipartitions obtenues. Les B -modules correspondants se lisent directement sur les complémentaires de ces multipartitions, et leurs quotients successifs se déduisent directement des cases que l'on ajoute successivement.

Choisissons donc une telle numérotation \mathcal{C} du parallélépipède \mathcal{P} : elle permet d'associer à des drapeaux complets des espaces V_1, \dots, V_m , un drapeau complet de leur produit tensoriel. D'où un morphisme

$$\varphi_{\mathcal{C}} : X = \mathcal{F}(V_1) \times \cdots \times \mathcal{F}(V_m) \longrightarrow Y = \mathcal{F}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m),$$

dont on vérifie aisément que c'est un plongement.

Remarque. — Une manière simple et rapide de vérifier qu'un morphisme G -équivariant $\varphi : X \rightarrow Y$, où X est G -homogène, est un plongement consiste à se donner, comme on va le faire, un fibré en droites \mathcal{L} ample sur Y , et à vérifier que son image réciproque $\varphi^*\mathcal{L}$ est ample sur X . Cela implique que φ est à fibres finies. Étant lisse, il est étale sur son image, qui est une G -variété homogène. Elle est donc simplement connexe, et cela assure que φ est un plongement.

Composantes principales pour $m = 2$. — Pour commencer, limitons-nous à deux espaces vectoriels complexes V_1 et V_2 de dimensions d_1 et d_2 : \mathcal{C} est alors une numérotation du rectangle de côtés d_1 et d_2 , croissante de haut en bas et de gauche à droite, et définit un plongement

$$\varphi_{\mathcal{C}} : X = \mathcal{F}(V_1) \times \mathcal{F}(V_2) \hookrightarrow Y = \mathcal{F}(V_1 \otimes V_2).$$

Si l'entier i figure dans \mathcal{C} sur la case (p_i, q_i) , le quotient correspondant des fibrés du drapeau associé est $f_1^* \mathcal{L}_{\varepsilon_{p_i}} \otimes f_2^* \mathcal{L}_{\varepsilon_{q_i}}$, où f_1 et f_2 désignent les projections de X sur $\mathcal{F}(V_1)$ et $\mathcal{F}(V_2)$. Pour chaque partition β de longueur $\ell(\beta) \leq d_1 d_2$, la surjectivité du morphisme de restriction

$$S_{\beta}(V_1 \otimes V_2) = \Gamma(Y, \mathcal{L}_{\beta}^Y) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}_{\beta|X}^Y)$$

donne une *composante principale* de la puissance de Schur $S_{\beta}(V_1 \otimes V_2)$: la restriction $\mathcal{L}_{\beta|X}^Y = f_1^* \mathcal{L}_{a_{\mathcal{C}}^1}(\beta) \otimes f_2^* \mathcal{L}_{a_{\mathcal{C}}^2}(\beta)$, avec

$$a_{\mathcal{C}}^1(\beta) = \sum_{i=1}^{d_1 d_2} \beta_i \varepsilon_{p_i}, \quad a_{\mathcal{C}}^2(\beta) = \sum_{i=1}^{d_1 d_2} \beta_i \varepsilon_{q_i},$$

et $S_{a_{\mathcal{C}}^1(\beta)} V_1 \otimes S_{a_{\mathcal{C}}^2(\beta)} V_2$ admet donc une multiplicité non nulle dans $S_{\beta}(V_1 \otimes V_2)$. Notons que les entiers d_1 et d_2 ne jouent ici qu'un rôle secondaire : la composante principale que nous venons d'obtenir ne dépend en fait que de la partie de \mathcal{C} numérotée des entiers allant de 1 à $\ell(\beta)$, partie qui définit un *tableau de Young standard* [19]. Ceci permet de reformuler le résultat précédent de la façon suivante :

THÉORÈME 3.1. — *Soit β une partition de longueur ℓ . Pour chaque tableau de Young T standard de taille ℓ , on définit des partitions $a_T^1(\beta)$ et $a_T^2(\beta)$ par*

$$a_T^1(\beta)_i = \sum_{j \in L_i} \beta_j, \quad a_T^2(\beta)_i = \sum_{j \in C_i} \beta_j,$$

où L_i et C_i sont la ligne et la colonne d'indice i de T . Alors $S_{a_T^1(\beta)} V_1 \otimes S_{a_T^2(\beta)} V_2$ admet une multiplicité non nulle dans $S_{\beta}(V_1 \otimes V_2)$.

Exemple.

1	2	5
3	4	
6		

$$a_T^1(\beta) = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_5, \beta_3 + \beta_4, \beta_6),$$

$$a_T^2(\beta) = (\beta_1 + \beta_3 + \beta_6, \beta_2 + \beta_4, \beta_5).$$

Figure 3. Composantes principales de $S_\beta(V_1 \otimes V_2)$

Pour une puissance de Schur $S_\beta(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m)$, on dispose d'un énoncé analogue, les habituels tableaux de Young planaires étant remplacés par des tableaux multidimensionnels, autrement dit, par des parties finies T de $(\mathbb{N}^*)^m$, stables par diminution des composantes de leurs éléments, de cardinal $\ell(\beta)$, et numérotées par les entiers successifs de façon croissante dans chacune des directions de coordonnées. Si $j = (j_1, \dots, j_m)$ est un multi-indice, notons $T(j)$ l'entier dont est numéroté la case correspondante. Les composantes principales de la puissance de Schur $S_\beta(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m)$ sont alors les produits tensoriels $S_{a_T^1(\beta)} V_1 \otimes \cdots \otimes S_{a_T^m(\beta)} V_m$, avec

$$a_T^\ell(\beta)_p = \sum_{j_i=p} \beta_{T(j)}.$$

Une généralisation de la formule de Cauchy. — Un cas particulièrement simple est celui des puissances extérieures d'un produit tensoriel, disons $\wedge^k(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m)$. En effet, les composantes principales correspondantes ne dépendent plus de la façon dont sont numérotés les multitableaux de Young standard de taille k , mais seulement de leur support, autrement dit de la multipartition qu'ils définissent comme partie de $(\mathbb{N}^*)^m$. On obtient :

PROPOSITION 3.1. — Si Δ est une multipartition de dimension m et de taille k , notons δ sa fonction caractéristique, et associons-lui les m partitions $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ définies par

$$\lambda_p^i = \sum_{j_i=p} \delta(j_1, \dots, j_m).$$

Alors $\wedge^k(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m)$ contient $S_{\lambda^1} V_1 \otimes \cdots \otimes S_{\lambda^m} V_m$.

On associe donc à la multipartition Δ les partitions définies par les tailles de ses sections orthogonales à chacun des axes de coordonnées. En dimension 2, on a affaire à des partitions usuelles, qu'on lit horizontalement et verticalement, ce qui donne d'une part la partition elle-même, et d'autre part sa partition conjuguée. On retrouve ainsi les composantes de la

classique *formule de Cauchy*

$$\wedge^k(V_1 \otimes V_2) = \bigoplus_{|\lambda|=k} S_\lambda V_1 \otimes S_{\lambda^*} V_2.$$

On montrera d'ailleurs dans la section suivante que notre approche permet de vérifier que ces composantes sont bien de multiplicité un. On donnera un critère suffisant pour que cela soit vérifié en dimension supérieure.

Notons également que le résultat précédent, de même que la formule de Cauchy usuelle, peut s'énoncer pour les puissances symétriques d'un produit tensoriel, puisque le produit tensoriel $S_{\lambda^1} V_1 \otimes \dots \otimes S_{\lambda^m} V_m$ admet la même multiplicité dans $\wedge^k(V_1 \otimes \dots \otimes V_m)$ que le produit $S_{\lambda^1} V_1 \otimes \dots \otimes S_{\lambda^{m-1}} V_{m-1} \otimes S_{\lambda^m} V_m$ dans $S^k(V_1 \otimes \dots \otimes V_m)$, comme l'on peut s'en assurer en comparant des formules de Cauchy pour les puissances extérieures (ci-dessus) et symétriques :

$$S^k(V_1 \otimes V_2) = \bigoplus_{|\lambda|=k} S_\lambda V_1 \otimes S_\lambda V_2.$$

Donnons par exemple un énoncé relatif aux puissances symétriques d'un produit tensoriel de trois espaces vectoriels. Rappelons pour cela qu'une partition plane est une partition ordinaire numérotée de façon décroissante, au sens large, de gauche à droite et de bas en haut, par des entiers strictement positifs. Les partitions planes sont en correspondance avec les multipartitions tridimensionnelles, l'entier numérotant une case d'une partition plane donnant le nombre de cases situées au-dessus d'elle dans la multipartition correspondante.

COROLLAIRE 3.2. — À une partition plane P de taille p , associons la partition $e(P)$ obtenue en ordonnant les entiers dont elle est numérotée, et les partitions $h(P)$ et $v(P)$ obtenues en sommant ces entiers respectivement sur les lignes et les colonnes. Alors $S_{e(P)} A \otimes S_{h(P)} B \otimes S_{v(P)} C$ admet une multiplicité non nulle dans $S^p(A \otimes B \otimes C)$.

Exemple.

$P =$	6	4	2	
	4	4		$e(P) = (6, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 1),$
	3	1		$h(P) = (12, 8, 4, 1),$
	1			$v(P) = (14, 9, 2).$

Figure 4. Composantes principales de $S^p(A \otimes B \otimes C)$

3.1.2. Stabilisation et confinement.

Un critère de stabilisation. — Revenons au plongement du produit X des variétés de drapeaux complets des espaces V_1, \dots, V_m , dans la variété Y des drapeaux complets de leur produit tensoriel, défini par une numérotation \mathcal{C} du parallélépipède \mathcal{P} . On assistera à des phénomènes de stabilité, qui assureront en particulier que la composante principale associée est de multiplicité un, si les poids du fibré conormal de X dans Y engendrent un cône convexe strict. Ce sera en particulier le cas dès qu'il en sera de même de la restriction à X du tangent de Y .

Rappelons que pour une variété $\mathcal{F}(W)$ de drapeaux complets

$$0 = W_0 \subset \dots \subset W_j \subset \dots \subset W_d = W,$$

la série de composition du fibré cotangent est la somme des fibrés en droites $L_i^* \otimes L_j$ pour $i < j$, avec $L_i = W_i/W_{i-1}$.

En conséquence, X étant plongée dans Y *via* la construction \mathcal{C} , les poids du fibré $\Omega_{Y|X}^1$ sont donnés par les différences entre m -uplets de coordonnées des cases successives de \mathcal{C} . Pour être précis, si la case numérotée de l'entier k a pour coordonnées (j_1^k, \dots, j_m^k) , ces poids sont les

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_{j_i^k}^i - \sum_{i=1}^m \varepsilon_{j_i^{k-1}}^i, \quad k < \ell.$$

Le cône cotangent engendré par ces poids est donc en fait engendré par les différences entre coordonnées des cases successives de \mathcal{C} .

Le cône cotangent contient le cône conormal, et lui est égal dès que V_1, \dots, V_m sont tous de dimension deux au moins, ce que l'on peut supposer sans dommage. En effet, les poids du fibré conormal, avec leurs multiplicités, se déduisent de ceux de la restriction du fibré cotangent de Y , en supprimant ceux qui proviennent du fibré cotangent de X , c'est-à-dire les poids $\varepsilon_q^i - \varepsilon_p^i$ pour $p < q$ et $1 \leq i \leq m$, qui sont tous de multiplicité 1. Or, ce poids s'obtient parmi les précédents chaque fois que l'on passe d'une case $(j_1, \dots, j_{i-1}, p, j_{i+1}, \dots, j_m)$ à $(j_1, \dots, j_{i-1}, q, j_{i+1}, \dots, j_m)$, ce que l'on fait évidemment plusieurs fois si tous les espaces considérés sont de dimension au moins 2. Les poids ayant des multiplicités strictement positives dans le fibré conormal et dans le fibré cotangent sont donc les mêmes, et les cônes engendrés coïncident donc bien.

Un phénomène de confinement correspond à l'existence d'une forme linéaire qui garde un signe constant sur les poids du fibré conormal, donc

prend des valeurs sur les poids $\sum_{i=1}^m \varepsilon_{j_i^k}^i$ qui sont fonction croissante de k . Les constructions stabilisantes correspondent de même au cas où cette fonction est strictement croissante.

Les *composantes principales stabilisantes* s'obtiennent donc en associant aux hyperplans de coordonnées $\{x_i = p\}$ des pondérations ω_p^i , fonctions strictement croissantes de p , puis en numérotant le parallélépipède \mathcal{P} dans l'ordre des valeurs croissantes des sommes $\omega_{p_1}^1 + \dots + \omega_{p_m}^m$, auxquelles on impose d'être distinctes deux à deux.

Exemple. — Pour $m = 2$ et $d_1 = d_2 = 3$, on obtient pas moins de 42 composantes principales. Donnons un exemple de construction d'une composante principale stabilisante à partir d'une pondération des lignes et colonnes. Notons que l'on peut toujours pondérer la première ligne et la première colonne par zéro : elles font alors apparaître les pondérations de l'ensemble des lignes et colonnes respectivement : ici, $\omega^1 = (0, 1, 6)$ et $\omega^2 = (0, 2, 4)$.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 8 \\ \hline 4 & 5 & 10 \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 8 \\ \hline 5 & 6 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Les différences successives $-\alpha_1^1, \alpha_1^1 - \alpha_1^2, \alpha_1^1 - \alpha_2^2, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_2^1, \alpha_2^1, \alpha_2^2$ engendrent le cône conormal : c'est donc le cône simplicial

$$C = \langle -\alpha_1^1, \alpha_1^1 - \alpha_1^2, \alpha_1^1 - \alpha_2^2, \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_2^1 \rangle.$$

On vérifie par ailleurs que deux composantes principales seulement ne sont pas stabilisantes, à savoir celles qui correspondent aux tableaux suivants :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & 8 \\ \hline 4 & 7 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Pour les puissances extérieures, on obtient le critère de simple multiplicité suivant, qui complète la proposition 3.1.

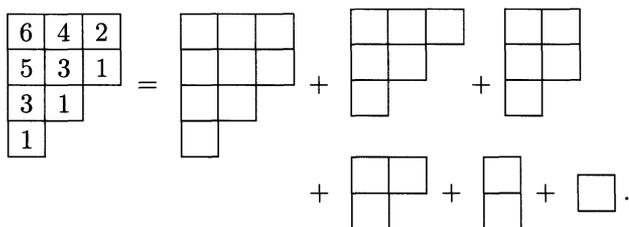
PROPOSITION 3.3. — *Soit Δ une multipartition de taille k et de dimension m . Supposons qu'il existe des entiers ω_p^i , fonction croissante au sens large de p , et un entier d tel que la somme $\omega_{p_1}^1 + \dots + \omega_{p_m}^m$*

soit strictement inférieure à d sur Δ , et strictement supérieure à d sur son complémentaire. Alors la composante principale de $\wedge^k(V_1 \otimes \dots \otimes V_m)$ associée est de multiplicité unité.

Remarque. — En dimension 2, si λ est une partition au sens usuel, il suffit de poser $\omega_p^1 = \lambda_p - p$ et $\omega_q^2 = \lambda_q^* - q + 1$. Chaque case est alors affublée de la longueur d'équerre correspondante [19], qui prend des valeurs strictement positives sur λ , et strictement négatives sur son complémentaire.

Cette remarque permet d'ailleurs de construire facilement des partitions planes, par exemple, vérifiant les conditions de la proposition précédente. Si λ est une partition, notons $e_m(\lambda)$ la partition dont les cases sont celles de λ dont les longueurs d'équerres sont strictement plus grandes que m : par exemple, $\lambda = e_0(\lambda)$. Alors la partition plane obtenue en superposant des partitions $e_{m_1}(\lambda), \dots, e_{m_\ell}(\lambda)$, pour $m_\ell \geq \dots \geq m_1 \geq 0$, vérifie le critère précédent. En effet, si l'on pose $\omega_p^3 = m_p + \frac{1}{2}$, on répond au critère de la proposition précédente.

Exemple. — La partition $\lambda = (4, 4, 3, 1)$, pondérée par ses longueurs d'équerres, se décompose en $\sum_m e_m(\lambda)$ de la façon suivante :



La partition plane

$$e_1(\lambda) + 2e_3(\lambda) + e_4(\lambda) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

obéit donc au critère de simple multiplicité, ce dont on déduit que $\wedge^{14}(A \otimes B \otimes C)$ contient la composante $S_{8,5,1}A \otimes S_{9,4,1}B \otimes S_{6,3,3,2}C$ avec multiplicité unité.

Multiplicités asymptotiques. — Soit à nouveau \mathcal{C} une construction stabilisante; soient $S_{\mathcal{C}}$ l'ensemble des poids τ du fibré conormal correspondant, comptés avec leurs multiplicités n_{τ} , et $a_{\mathcal{C}}(\beta) = (a_1(\beta), \dots, a_m(\beta))$

la composante principale correspondante de $S_\beta(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m)$. D'après la discussion de la section 2.3, pour chaque poids $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, la multiplicité du produit $S_{ka_1(\beta)+\nu_1} V_1 \otimes \cdots \otimes S_{ka_m(\beta)+\nu_m} V_m$ dans la puissance de Schur $S_{k\beta}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m)$, est une fonction croissante de k , qui se stabilise lorsque cet entier est suffisamment grand sur une multiplicité asymptotique $m_C(\nu)$, déterminée si l'on veut par le développement formel

$$\sum_{\nu} m_C(\nu) e^{\nu} = \prod_{\tau \in S_C} (1 - e^{\tau})^{-n_{\tau}},$$

qui ne fait que retraduire les conclusions de la section 2.3. Autrement dit, pour rejoindre les formules classiques de multiplicités en termes de fonctions de partition,

$$m_C(\nu) = p(S_C; \nu)$$

est le nombre de façons d'écrire le poids ν comme somme d'éléments de S_C (où l'on compte autant d'exemplaires distincts de chaque poids que l'impose sa multiplicité).

On peut d'ailleurs, comme dans [21], raffiner le développement formel ci-dessus en introduisant des q -multiplicités $m_{C,i}(\nu)$, définies par l'expression

$$\sum_{\nu, i} m_{C,i}(\nu) q^i e^{\nu} = \prod_{\tau \in S_C} (1 - qe^{\tau})^{-n_{\tau}}.$$

Alors $m_C(\nu) = \sum_i m_{C,i}(\nu)$, et ces q -multiplicités sont porteuses de l'information géométrique donnée par l'ordre d'annulation i sur X , pour le plongement dans Y associé à C , des sections des différentes composantes de poids ν .

3.2. Application au groupe symétrique.

Dualité de Schur. — La dualité de Schur [13] permet de transcrire en termes de représentations de groupes symétriques certains résultats relatifs aux représentations de groupes linéaires. Cette transcription est rendue possible par la formule suivante, qui donne les composantes irréductibles, si V est un espace vectoriel complexe, du $\text{Gl}(V) \times S_p$ -module $V^{\otimes p}$:

$$V^{\otimes p} = \bigoplus_{|\pi|=p} S_{\pi} V \otimes [\pi],$$

où $[\pi]$ est la représentation irréductible complexe du groupe symétrique S_p associée à la partition π de l'entier p (voir [14]). Si l'on fait le produit des identités correspondant à différents espaces vectoriels, on obtient aussitôt le lemme suivant :

LEMME 3.4. — *La multiplicité de $S_{\alpha_1}V_1 \otimes \cdots \otimes S_{\alpha_m}V_m$ dans $S_\beta(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m)$ est égale à celle de $[\beta]$ dans $[\alpha_1] \otimes \cdots \otimes [\alpha_m]$.*

Ceci va nous permettre de traduire les renseignements que notre approche géométrique de la décomposition d’une puissance de Schur $S_\beta(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m)$, nous permet d’obtenir, en termes de produits de Kronecker de représentations du groupe symétrique. La décomposition de ces produits est très mal comprise, et les propriétés des modules irréductibles susceptibles d’apparaître dans un produit donné sont rares. Dvir a récemment obtenu certaines inégalités [9] qui raffinent légèrement les plus simples parmi les familles d’inégalités que notre approche rend accessibles.

Plongements de produits de grassmanniennes. — Considérons à nouveau des espaces vectoriels complexes V_1, \dots, V_m , de dimensions respectives d_1, \dots, d_m , et notons $G_{r_1}(V_1), \dots, G_{r_m}(V_m)$ les grassmanniennes de leurs sous-espaces de codimensions respectives r_1, \dots, r_m . Soient T_i et Q_i les fibrés tautologique et quotient sur $G_{r_i}(V_i)$.

Soit $(I^i)_{i \geq 1}$ l’ensemble des m -uplets à valeurs dans $\{0, 1\}$, ordonné de façon telle que chacun d’entre eux précède ceux dont toutes les composantes sont inférieures ou égales aux siennes. On pose alors

$$\mathcal{M}_i = \sum_{I \neq I^1, \dots, I^{i-1}} \left(\bigotimes_{I_j=1} V_j \right) \otimes \left(\bigotimes_{I_j=0} T_j \right).$$

Ceci définit un drapeau de sous-fibrés du fibré trivial de fibre $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ sur la variété $X = G_{r_1}(V_1) \times \cdots \times G_{r_m}(V_m)$, dont les quotients successifs sont

$$\mathcal{M}_i / \mathcal{M}_{i+1} = \left(\bigotimes_{I_j^i=1} Q_j \right) \otimes \left(\bigotimes_{I_j^i=0} T_j \right).$$

À un tel drapeau est une fois de plus associé un plongement du produit X de grassmanniennes, dans une variété de drapeaux Y de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$, constitués de sous-espaces dont les codimensions dépendent de l’ordre choisi : ce sont les sommes $n_1 + \cdots + n_i$, si n_j désigne le rang de $\mathcal{M}_j / \mathcal{M}_{j+1}$.

Soit alors β une partition, de longueur $\ell(\beta) \leq d_1 \cdots d_m$, et considérons le fibré vectoriel homogène associé \mathcal{E}_β^Y . Sa restriction à X est complètement réductible, égale, si l’on écrit $\beta = (\beta^1, \beta^2, \dots)$ avec β^i de longueur n_i , à

$$\mathcal{E}_{\beta|X}^Y = \bigotimes_{i \geq 1} S_{\beta^i}(\mathcal{M}_i / \mathcal{M}_{i+1}).$$

On dispose par ailleurs d'une inclusion de $\Gamma(Y, \mathcal{E}_\beta^Y)$ dans

$$\Gamma(X, \mathcal{E}_{\beta|X}^Y \otimes S^*N^*).$$

De plus, le fibré conormal à X dans Y est un sous-fibré de la restriction à X du cotangent de Y , dont le quotient gradué est

$$\text{gr } \Omega_{Y|X}^1 = \bigoplus_{i < j} (\mathcal{M}_i / \mathcal{M}_{i+1})^* \otimes \mathcal{M}_j / \mathcal{M}_{j+1}.$$

Supposons à présent que les m -uplets à valeurs dans $\{0, 1\}$ soient ordonnés de façon telle que la somme de leurs composantes décroisse. La somme des degrés des fibrés T_1, \dots, T_m dans les quotients $\mathcal{M}_i / \mathcal{M}_{i+1}$ augmente alors avec i : elle est donc positive ou nulle dans chacune des composantes irréductibles du fibré conormal. Chacune des composantes de $\mathcal{E}_{\beta|X}^Y \otimes S^*(\text{gr } N^*)$ a donc une somme des degrés sur T_1, \dots, T_m supérieure ou égale à la somme s correspondante pour $\mathcal{E}_{\beta|X}^Y$. Cette même somme des degrés étant strictement positive pour $\mathcal{M}_i / \mathcal{M}_{i+1}$ dès que $i \geq 2$, et nulle pour $i = 1$, il vient

$$s \geq \sum_{i \geq 2} |\beta^i|.$$

Comme β^1 est de longueur $n_1 = r_1 \cdots r_m$, cela signifie que pour toute composante irréductible $S_{\alpha_1} V_1 \otimes \cdots \otimes S_{\alpha_m} V_m$ de $S_\beta(V_1 \otimes \cdots \otimes V_m)$, l'inégalité

$$|\alpha_1|_{>r_1} + \cdots + |\alpha_m|_{>r_m} \geq |\beta|_{>r_1 \cdots r_m}$$

est vérifiée. D'où, *via* la dualité de Schur, le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. — *Si la représentation $[\beta]$ admet une multiplicité non nulle dans le produit tensoriel $[\alpha_1] \otimes \cdots \otimes [\alpha_m]$, alors pour tout m -uplet d'entiers naturels r_1, \dots, r_m , on a*

$$|\alpha_1|_{>r_1} + \cdots + |\alpha_m|_{>r_m} \geq |\beta|_{>r_1 \cdots r_m}.$$

Le théorème 2.9.22 de [14], et le corollaire 3.4.2 de [5] correspondent au cas $m = 2$ et $r_1 = r_2 = 1$ (voir aussi le théorème 1.6 de [9] pour une estimation plus précise — et optimale — dans ce cas particulier).

On peut d'ailleurs préciser un peu l'inégalité ci-dessus. Revenons pour cela à la façon dont nous l'avons obtenue : on a attribué des poids nuls aux

quotients Q_j , et $a_j \geq 0$ aux tautologiques T_j (un en l'occurrence). Les poids correspondants des quotients $\mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i+1}$ sont alors des sommes partielles

$$a_I = \sum_{I_j=0} a_j.$$

Associons à chacun de ces m -uplets I à valeurs dans $\{0, 1\}$ les dimensions

$$\delta_I = \prod_{I_j=1} r_j \prod_{I_k=0} (d_k - r_k), \quad D_I^+ = \sum_{J \leq I} \delta_J, \quad D_I^- = \sum_{J < I} \delta_J + 1.$$

En procédant comme ci-dessus, on obtient alors l'inégalité

$$\sum_j a_j |\alpha_j|_{>r_j} \geq \sum_I a_I |\beta|_{D_I^-, D_I^+},$$

où $|\beta|_{a,b}$ désigne la somme des composantes de β d'indices compris entre a et b . Notons que par linéarité, quitte à permuter les indices $1, \dots, m$, toutes ces inégalités se déduisent de celles que l'on obtient pour des pondérations du type $a_j = 1$ si $j \leq p$, $a_j = 0$ sinon. On peut même poser $p = m$, ce qui donne en dernière analyse les inégalités suivantes :

PROPOSITION 3.5. — *Si la représentation $[\beta]$ admet une multiplicité non nulle dans le produit tensoriel $[\alpha_1] \otimes \dots \otimes [\alpha_m]$, alors pour tout m -uplet d'entiers naturels r_1, \dots, r_m , et tout m -uplet d'entiers $d_1 \geq \ell(\alpha_1), \dots, d_m \geq \ell(\alpha_m)$, on a*

$$\begin{aligned} &|\alpha_1|_{>r_1} + \dots + |\alpha_m|_{>r_m} \\ &\geq |\beta|_{>r_1 \dots r_m} + |\beta|_{>d_1 r_2 \dots r_m + \dots + r_1 \dots r_{m-1} d_m} \\ &\quad + \dots + |\beta|_{>r_1 d_2 \dots d_m + \dots + d_1 \dots d_{m-1} r_m}. \end{aligned}$$

Notons que cette inégalité est optimale, au sens où il existe, au voisinage de la composante principale considérée, de vastes familles de poids pour lesquelles elle est une égalité. En effet, l'égalité correspond au degré zéro sur le fibré conormal, donc aux composantes principales, qui sont ici nombreuses puisque l'on est parti d'un fibré vectoriel homogène irréductible sur Y , dont la restriction à X se scinde en une multitude de composantes. On dispose donc également d'une expression simplifiée de la multiplicité lorsque l'inégalité précédente est une égalité : elle est donnée par la multiplicité de $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^X$ dans $\text{gr } \mathcal{E}_\beta^Y$.

Signalons que l'on pourra trouver dans [20] (cor. 5.2 et 5.4) des inégalités analogues pour le cas des puissances de Schur d'un carré symétrique ou extérieur (voir aussi le théorème 4.2).

4. PUISSANCES DE SCHUR DE PUISSANCES SYMÉTRIQUE

4.1. Plongements de Veronese généralisés.

4.1.1. Multipartitions symétriques.

Une variante des constructions qui ont fait l'objet des sections précédentes permet d'aborder les puissances de Schur d'une puissance symétrique ou extérieure.

Soit en effet un espace vectoriel complexe V , de dimension d , muni d'un drapeau complet $V = V_d \supset V_{d-1} \supset \dots \supset V_0 = 0$. Notons B le sous-groupe de Borel de $\text{Gl}(V)$ qui stabilise ce drapeau. De même qu'un sous- B -module d'un produit tensoriel était associé à une multipartition inscrite dans un parallélépipède convenable, les sous- B -modules de la puissance symétrique sont en correspondance avec les *multipartitions symétriques* Δ , inscrites dans le parallélépipède de dimension ℓ dont tous les côtés sont de longueur v :

$$\mathcal{M}_\Delta = \sum_{(j_1, \dots, j_\ell) \in \Delta} V_{j_1} \cdots V_{j_\ell}.$$

Cette description permet de coder commodément les drapeaux complets de sous- B -modules, puisque l'on passe d'une multipartition symétrique Δ à celles qui définissent des sous-modules de codimension 1, en la privant d'un coin et de ses symétriques : soit encore, si l'on passe aux complémentaires, en ajoutant une case dans un creux, et ses symétriques. Un drapeau complet s'obtient donc au moyen d'une *construction symétrique* du parallélépipède.

Exemple. — La figure 5 (page suivante) illustre les constructions symétriques du cube tridimensionnel.

On peut bien entendu raisonner de même pour les puissances extérieures $\wedge^\ell V$: leurs sous- B -modules sont encore codés par des multipartitions symétriques, où l'on fait abstraction des multi-indices contenant des indices répétés.

Le choix étant fait d'une construction symétrique \mathcal{C} , lui est associé un plongement $\text{Gl}(V)$ -équivariant

$$\varphi_{\mathcal{C}} : X = \mathcal{F}(V) \longrightarrow Y = \mathcal{F}(S^\ell V).$$

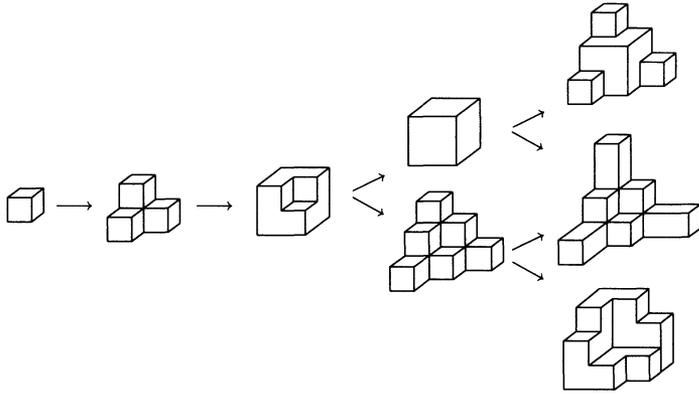


Figure 5. Constructions symétriques du cube tridimensionnel

Les quotients successifs du drapeau image forment une suite de fibrés en droites sur X , suite que l'on notera

$$\mathcal{L}_{a_{\mathcal{C}}^1}^X, \mathcal{L}_{a_{\mathcal{C}}^2}^X, \dots, \mathcal{L}_{a_{\mathcal{C}}^i}^X, \dots$$

où $a_{\mathcal{C}}^i$ est le v -uplet de coordonnées du cube que l'on ajoute pour passer de la i -ème multipartition de la construction \mathcal{C} , à la suivante. Toute partition μ définit alors un fibré en droites \mathcal{L}_{μ} sur Y engendré par ses sections globales, dont la restriction à X est

$$\mathcal{L}_{\mu|X}^Y = \mathcal{L}_{r_{\mathcal{C}}(\mu)}^X, \quad \text{avec} \quad r_{\mathcal{C}}(\mu) = \sum_i \mu_i a_{\mathcal{C}}^i.$$

L'application de restriction à X des sections de $\mathcal{L}_{\mu|X}^Y$, ne pouvant être nulle, est surjective. D'où les composantes principales :

PROPOSITION 4.1. — *Pour toute construction symétrique \mathcal{C} du cube à ℓ dimensions, la puissance de Schur $S_{r_{\mathcal{C}}(\mu)}V$ est une composante de multiplicité non nulle du pléthysme $S_{\mu}(S^{\ell}V)$.*

4.1.2. Puissances extérieures de puissances symétriques.

Le cas des puissances extérieures de puissances symétriques est à la fois l'un des plus riches en composantes principales, et permet, comme dans la section précédente, de simplifier l'approche ci-dessus. En effet, si \mathcal{C} est une construction du cube ℓ -dimensionnel, alors

$$r_{\mathcal{C}}((1^k)) = \sum_{i=1}^k a_{\mathcal{C}}^i$$

ne dépend que du k -ième terme de cette construction.

PROPOSITION 4.2. — *Les composantes principales de $\wedge^k(S^\ell V)$ sont en correspondance avec les sous- B -modules de $S^\ell V$ de codimension k , autrement dit avec les multipartitions symétriques de dimension ℓ , dont l'intersection avec le secteur dominant est de cardinal k .*

On entend ici par *secteur dominant* l'ensemble des multi-indices (i_1, \dots, i_ℓ) pour lesquels $i_1 \leq \dots \leq i_\ell$. Le poids de la composante principale associée s'obtient simplement en sommant les poids $\varepsilon_{i_1} + \dots + \varepsilon_{i_\ell}$. Notons qu'une composante principale de $\wedge^k(S^\ell V)$ en détermine une de $\wedge^k(S^{\ell+1}V)$: si celle-là est déterminée par une multipartition formée des cases d'indices (i_1, \dots, i_ℓ) , celle-ci le sera par la multipartition constituée par les $(1, i_1, \dots, i_\ell)$. Donc :

PROPOSITION 4.3. — *Si $S_\pi V$ est une composante principale de $\wedge^k(S^\ell V)$, alors $S_{\pi+k} V$ est une composante principale de $\wedge^k(S^{\ell+1}V)$. De même, $S_{\pi+\ell-1,1} V$ est une composante principale de $\wedge^{k+1}(S^\ell V)$.*

La seconde assertion se déduit de la remarque que si la composante principale $S_\pi V$ correspond à une multipartition symétrique Δ , alors la case $(1, \dots, 1, \ell(\pi) + 1)$ est nécessairement un creux de Δ . La partition $(\pi + \ell - 1, 1)$ est ici obtenue en ajoutant $(\ell - 1)$ à la plus grande part de π , et en lui adjoignant une part égale à 1 après sa dernière part non nulle.

Exemple 1. — Les sous- B -modules de $S^2 V$ sont déterminés par des partitions symétriques. Rappelons que la notation de Frobenius code une partition plane en deux suites d'entiers, formées respectivement des nombres de cases de son diagramme de Young situées à droite et au-dessous des cases diagonales [19]. Dans le cas de partitions symétriques, ces deux suites se réduisent à une seule, disons $K = (k_1 > k_2 > \dots)$. Un calcul élémentaire permet alors de vérifier que le poids π^K de la composante principale associée est donné par la formule

$$\pi_i^K = k_i + \#\{j \leq i, k_j > i - j\}.$$

La partition correspondante se forme à partir de la partition symétrique de départ en décalant d'une unité vers la gauche sa partie située en dessous de la diagonale (figure 6 ci-dessous). On reconnaît dans les partitions ainsi formées les composantes irréductibles, toutes de multiplicité un, du pléthysme $\wedge^k(S^2 V)$ (voir [19]).

On peut procéder de même pour $\wedge^k(\wedge^2 V)$, en considérant également les partitions symétriques, mais en faisant abstraction de la diagonale. Une

variante de la notation de Frobenius code de tels objets par des suites strictement décroissantes $K = (k_1 > k_2 > \dots)$, où k_i désigne ici le nombre de cases de la i -ème ligne, situées à droite strictement de la diagonale. Le poids π^K de la composante principale associée est donné par

$$\pi_i^K = k_i + \#\{j \leq i, k_j \geq i - j\}.$$

La partition correspondante se forme à partir de la partition symétrique de départ en décalant cette fois d'une unité vers la gauche sa partie située strictement à droite de la diagonale.

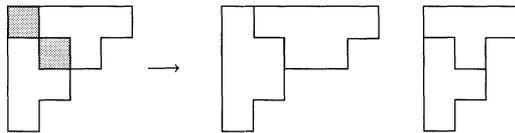


Figure 6. Puissances extérieures d'un carré symétrique ou extérieur

Là encore, on retrouve les descriptions classiques des composantes des puissances extérieures d'un carré extérieur. En conclusion, *les pléthysmes $\wedge^k(S^2V)$ et $\wedge^k(\wedge^2V)$ sont sommes de leurs composantes principales.*

Exemple 2. — Considérons les puissances extérieures d'un cube symétrique. En s'inspirant de la notation de Frobenius des partitions usuelles, on peut coder les partitions planes symétriques par des tableaux d'entiers $K = (k_{i,j})_{i \leq j}$, vérifiant les conditions de monotonie $k_{i,j} > k_{i,j+1}$ et $k_{i,j} \geq k_{i+1,j}$. La codimension du sous B -module correspondant de S^3V est la somme des entiers figurant dans le tableau K , et le poids π^K de la composante principale associée de $\wedge^k(S^3V)$ est donné par :

$$\pi_i^K = \sum_j (k_{i,j} + k_{j,i}) + \#\{p \leq q \leq i, k_{p,q} > i - q\}.$$

Pour $\wedge^6(S^3V)$, on obtient ainsi les six composantes principales suivantes, données par le tableau K , la partition plane correspondante, et la partition usuelle π^K associée (voir figure 7).

4.1.3. Puissances de Schur d'un carré symétrique.

Détaillons la construction des composantes principales de $S_\pi(S^2V)$, où π est une partition de longueur ℓ . Une construction symétrique du carré

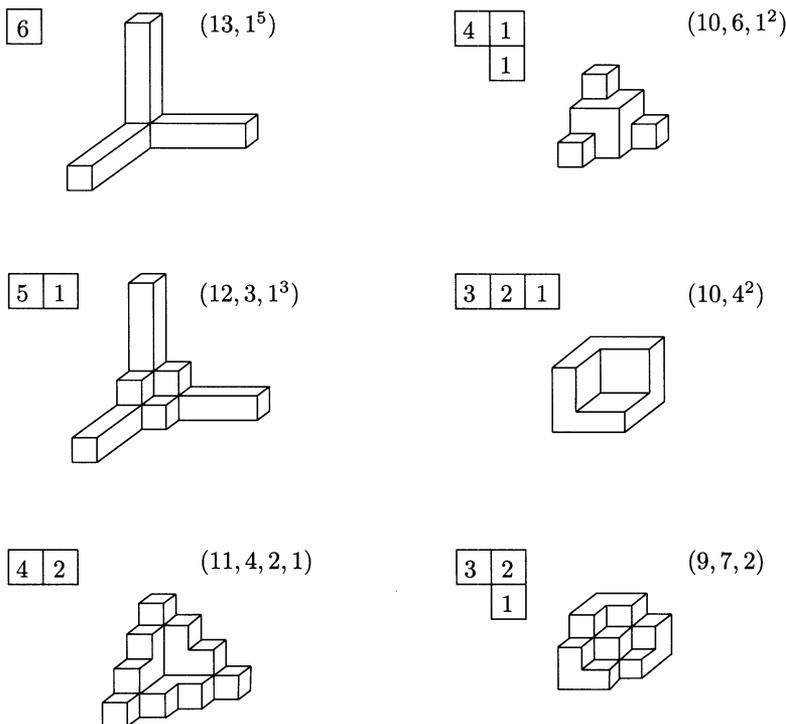


Figure 7. Composantes principales de $\wedge^6(S^3V)$.

de côté d peut être définie en numérotant sa moitié située au-dessus de sa diagonale principale, celle-ci comprise, dans leur ordre d'apparition : en particulier, de façon croissante sur chaque ligne et chaque colonne.

On obtiendra le poids de la composante principale correspondante de la façon suivante : définissons deux suites d'entiers $a_h(\pi)$ et $a_v(\pi)$ par

$$a_h(\pi)_i = \sum_{j \in L_i} \pi_j, \quad a_v(\pi)_i = \sum_{j \in C_i} \pi_j,$$

où L_i et C_i sont la ligne et la colonne d'indice i . Alors $a_h(\pi) + a_v(\pi)$ est une partition, et définit une composante principale de $S_\pi(S^2V)$. Notons que la définition de $a_h(\pi)$ et $a_v(\pi)$ ne fait intervenir que les ℓ premières cases pour la numérotation considérée du demi carré. De plus, on peut procéder exactement de même pour $S_\pi(\wedge^2V)$, en faisant abstraction de la diagonale. On obtient ainsi :

THÉORÈME 4.1. — Soit π une partition de longueur ℓ . Pour tout tableau T de ℓ cases, numérotant une région située au-dessus de la diagonale principale, de façon que pour toute case de T , les cases situées à sa gauche ou au-dessus d'elle soient numérotées d'entiers plus petits, définissons $a_h(\pi)$ et $a_v(\pi)$ comme ci-dessus, et posons

$$a_T^+(\pi) = a_h(\pi) + a_v(\pi), \quad a_T^-(\pi) = a_h(\pi) + (0, a_v(\pi)).$$

Alors $S_{a_T^+(\pi)}V$ et $S_{a_T^-(\pi)}V$ admettent une multiplicité non nulle dans $S_\pi(S^2V)$ et dans $S_\pi(\wedge^2V)$ respectivement.

Exemple.

1	2	3	4
	3	6	
		7	

$$a_h(\pi) = (\pi_1 + \pi_2 + \pi_4 + \pi_5, \pi_3 + \pi_6, \pi_7)$$

$$a_v(\pi) = (\pi_1, \pi_2 + \pi_3, \pi_4 + \pi_6 + \pi_7, \pi_5)$$

Figure 8. Composantes principales de $S_\pi(S^2V)$ et $S_\pi(\wedge^2V)$.

Les multiplicités de $S_{a_T^+(\pi)}V$ dans $S_\pi(S^2V)$, et de $S_{a_T^-(\pi)}V$ dans $S_\pi(\wedge^2V)$, sont égales à un si l'on peut associer aux lignes L_i de T des entiers n_i , de telle façon que les sommes $n_i + n_j$ et $n_i + n_{j+1}$ respectivement, augmentent strictement avec le numéro des cases (i, j) de T , et soient strictement inférieures aux valeurs que prend cette somme sur le complémentaire du tableau T — critère analogue à celui que donne la proposition 3.3.

Par exemple, quand T est une bande horizontale, on en déduit que $S_{|\pi|+\pi}V$ est une composante de multiplicité un de $S_\pi(S^2V)$, et $S_{|\pi|,\pi}V$ de $S_\pi(\wedge^2V)$. Plus généralement d'ailleurs, $S_{k|\pi|+\pi}V$ est une composante de multiplicité un de $S_\pi(S^{k+1}V)$, et $S_{|\pi|(1^k),\pi}V$ de $S_\pi(\wedge^{k+1}V)$. On retrouve ainsi les composantes principales de ces pléthysmes que l'on obtient par des plongements diagonaux analogues à ceux de Wahl, plongements dont l'étude est l'objet de [18] (th. 2.4.1). On ne dispose cependant que d'un seul de ces plongements diagonaux pour chaque partition π : cette approche est donc nettement plus pauvre que celle que nous proposons dans cet article.

4.2. Stabilisation et confinement.

4.2.1. Constructions stabilisantes.

De même que pour un produit tensoriel, les constructions confinantes sont décrites de la façon suivante : on choisit une suite croissante de réels

$\omega = (\omega_1 \leq \dots \leq \omega_d)$, on numérote la case $p = (p_1, \dots, p_d)$ du secteur dominant du parallélépipède par l'entier $\omega(p) = \omega_1 p_1 + \dots + \omega_d p_d$, et l'on parcourt ensuite ce secteur dominant de façon compatible avec l'ordre croissant des valeurs de ces entiers. On obtient les constructions stabilisantes en imposant que ω soit strictement croissant, et que les entiers $\omega(p)$ soient deux à deux distincts.

Soit Δ le cône de \mathbb{R}^d des d -uplets strictement croissants (qui s'identifie ici à la chambre de Weyl dominante), et associons à tout couple (e, f) de d -uplets d'entiers naturels de somme ℓ l'hyperplan H_{e-f} orthogonal à leur différence. Les constructions stabilisantes sont alors en correspondance avec les *chambres* définies comme composantes connexes de

$$\Delta \setminus \bigcup_{e,f} H_{e-f} = \bigcup_{\mathcal{C} \text{ stabilisante}} \Theta_{\mathcal{C}}.$$

Comme on l'a expliqué en détail, confinement et stabilité vont de pair, et dépendent toutes deux de la propriété des poids de $S^\bullet(\text{gr } N^*)$ d'être ou non contenus dans un demi-espace : avec la légère différence que l'existence d'une combinaison linéaire nulle à coefficients positifs de ces poids est compatible avec le confinement, mais pas avec la stabilité. En l'occurrence, l'alternative est la suivante, qui complète la proposition 4.1.

PROPOSITION 4.4. — *Soit \mathcal{C} une construction symétrique du cube ℓ -dimensionnel. Alors la multiplicité de $S_{r_{\mathcal{C}}(\mu)+\nu} V$ dans $S_\mu(S^\ell V)$ est fonction croissante de la partition μ .*

Si \mathcal{C} est stabilisante, cette multiplicité est bornée indépendamment de μ et converge, lorsque μ tend vers l'infini, vers la multiplicité de \mathcal{L}_ν^X dans $S^\bullet(\text{gr } N^)$. Dans le cas contraire, elle est identiquement nulle ou tend vers l'infini avec μ .*

L'ordre considéré sur les partitions est l'ordre partiel défini par $\mu \geq \nu$ si $\mu_i \geq \nu_i$ pour tout i , et μ tend vers l'infini si c'est simultanément le cas de toutes les différences $\mu_i - \mu_{i+1}$.

Ici encore, comme en 3.1.2, on peut donner des séries formelles pour les multiplicités asymptotiques : si \mathcal{C} est une construction stabilisante, la multiplicité de $S_{r_{\mathcal{C}}(\mu)+\nu} V$ dans $S_\mu(S^\ell V)$ se stabilise pour μ suffisamment grande sur une multiplicité asymptotique $m_{\mathcal{C}}(\nu)$, et l'on a l'identité

$$\sum_{\nu} m_{\mathcal{C}}(\nu) e^\nu = \prod_{\tau \in S_{\mathcal{C}}} (1 - e^\tau)^{-n_\tau},$$

où S_C désigne l'ensemble des poids τ du fibré conormal, comptés avec leurs multiplicités n_τ .

4.2.2. Le polyèdre asymptotique.

Rappelons que l'on a désigné par $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ l'adhérence de l'ensemble des poids rationnels ν tels que pour un entier $k > 0$ au moins, $k\nu$ ait une multiplicité non nulle dans $S_{k\mu}(S^\ell V)$, V étant de dimension d . On a vu (proposition 2.7) que c'était un polyèdre convexe, et que si μ est régulier, chaque composante principale stabilisante $r_C(\mu)$ en définit un sommet. De plus, la structure locale de $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ en ce sommet est donnée par le cône conormal du plongement correspondant. Notons que comme dans le cas des puissances de Schur de produits tensoriels, le cône conormal coïncide avec le cône cotangent.

Si μ n'est pas régulier, il se peut *a priori* que les restrictions données par le fibré conormal ne suffisent pas à décrire la structure locale du polyèdre. Elles restent cependant nécessaires, ce qui assure que les composantes principales définissent malgré tout des sommets. En fait, dans le cas non régulier, certaines constructions stabilisantes distinctes peuvent donner la même composante principale, et la structure locale du polyèdre $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ est alors donnée par l'intersection des cônes conormaux correspondants : c'est ce que l'on peut vérifier en se restreignant à des plongements dans des variétés de drapeaux partiels, sur lesquelles la partition μ définit un fibré en droites ample.

Pour une construction stabilisante donnée, le cône conormal est facile à déterminer : il est engendré par les différences des poids associés aux cases successives de la construction. Il est cependant plus simple, pour décrire le polyèdre asymptotique, de considérer simultanément l'ensemble des composantes stabilisantes. En effet considérons une telle composante $r_C(\mu)$, définie par une construction \mathcal{C} . On a noté

$$\mathcal{L}_{a_1^i}^X, \mathcal{L}_{a_2^i}^X, \dots, \mathcal{L}_{a_i^i}^X, \dots$$

les quotients successifs du drapeau image du plongement φ_C , a_C^i étant le d -uplet de coordonnées du cube numéro i de la construction \mathcal{C} . Le cône des poids du conormal est alors engendré par les différences successives $a_C^i - a_C^{i+1}$.

Convenons que deux constructions stabilisantes \mathcal{C} et \mathcal{C}' soient dites *contiguës* si elles correspondent à des chambres Θ_C et $\Theta_{C'}$ de Δ dont les adhérences ont pour intersection une partie d'un hyperplan H_{e-f} d'intérieur non vide — autrement dit, ont un mur en commun. Parmi les poids du

conormal, les éléments extrémaux sont précisément ceux qui vont être permutés quand on passera de la construction \mathcal{C} à une construction \mathcal{C}' contiguë. Si ce passage se fait à travers un hyperplan H_{e-f} , on permute certains termes de la suite $a_{\mathcal{C}}^i$, dont les différences sont proportionnelles à $(e-f)$. Si cette différence, ou l'un de ses multiples, était la somme d'autres différences consécutives de la même suite, le cône des poids du fibré conormal pour la construction \mathcal{C}' contiendrait donc l'origine, et cette construction ne pourrait être stabilisante. Ceci implique précisément que $(e-f)$ doit être la direction de l'une des arêtes du cône conormal.

Remarquons également que la différence entre les composantes principales associées à \mathcal{C} et \mathcal{C}' est proportionnelle à $(e-f)$. En conséquence, chacun des segments reliant les poids des composantes principales associées à deux constructions stabilisantes contiguës est une arête du polyèdre $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$, et toutes les arêtes issues de ces sommets s'obtiennent de cette façon.

Il est remarquable que seule la position des sommets dépende de μ , et pas les directions des arêtes du polyèdre qui en sont issues. En résumé,

PROPOSITION 4.5. — *Les composantes principales de $S_{\mu}(S^{\ell}V)$ associées aux constructions stabilisantes définissent des sommets du polyèdre convexe $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$, et le segment joignant deux sommets associés à des constructions stabilisantes contiguës est une arête de ce polyèdre.*

Les configurations stabilisantes déterminent donc complètement une certaine partie convexe du polyèdre $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$. Reste à savoir s'il existe d'autres arêtes et comment les obtenir, ou si les constructions stabilisantes suffisent à décrire ce polyèdre.

Notons qu'une exception importante à la description donnée ci-dessus des arêtes du polyèdre asymptotique, concerne les constructions \mathcal{C} correspondant à des composantes connexes $\Theta_{\mathcal{C}}$ dont un mur est aussi un mur de la chambre de Weyl dominante Δ . Si un tel mur est l'orthogonal d'une racine simple α_i , alors celle-ci doit faire partie d'un système de générateurs minimal du cône conormal correspondant à \mathcal{C} . En effet, elle fait bien partie de ce cône, puisqu'elle correspond au passage d'une case de la construction à la case suivante dans la i -ème direction, et le même raisonnement que ci-dessus montre qu'elle en est nécessairement un élément extrémal. Notons que l'arête correspondante du polyèdre n'est plus dirigée vers une autre composante principale, comme c'était le cas précédemment, mais vers l'image de la composante principale considérée par symétrie à travers le mur orthogonal à α_i . Deux cas peuvent donc *a priori* se produire :

- Soit l'arête considérée aboutit à un sommet du polyèdre asymptotique qui se trouve à l'intérieur de la chambre de Weyl. Un tel sommet, s'il existe, ne peut être une composante principale, et notre approche ne permet pas de le déterminer. Dans cette situation, la réunion des translatés du polyèdre asymptotique par le groupe de Weyl *n'est pas convexe*.

- Soit cette même arête se poursuit jusqu'au bord de la chambre de Weyl dominante, le point où elle l'atteint étant un nouveau sommet du polyèdre asymptotique. Ce sommet n'est pas une composante principale, mais notre approche permet malgré tout de le déterminer sans difficulté.

Dans les exemples que j'ai pu considérer, le premier cas n'apparaît pas. Je conjecture qu'il en est toujours ainsi :

CONJECTURE 1. — *Si le poids μ est régulier, le polyèdre asymptotique $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ est l'enveloppe convexe des images des composantes principales stabilisantes par le groupe de Weyl.*

Si cette conjecture est vraie, elle permet de décrire complètement l'ensemble des conditions linéaires qui contraignent les composantes irréductibles d'une puissance de Schur de puissance symétrique, et l'on n'aura besoin pour cela que de déterminer les composantes principales — sans avoir à se préoccuper des cônes conormaux associés, ce qui simplifie considérablement la tâche.

Signalons que le polyèdre asymptotique est très étroitement lié à l'application moment des géomètres symplectiques. Dans le contexte qui nous intéresse, on plonge la variété $Y = \mathcal{F}(S^\ell V)$ dans un espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de façon $\mathrm{Gl}(V)$ -équivariante, au moyen d'un fibré en droites très ample \mathcal{L}_μ^Y , λ étant un poids régulier : $W = S_\mu(S^\ell V)^*$ est donc le dual de l'espace des sections globales de ce fibré en droites.

Soit K un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Gl}(V)$, tel que $T_K = T \cap K$ en soit un tore maximal : on fixe alors un produit hermitien K -invariant sur W , et l'on définit l'application moment $m : Y \rightarrow k^*$, à valeurs dans le dual de l'algèbre de Lie de K , par la formule

$$m(y)(a) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\langle Y, aY \rangle}{\langle Y, Y \rangle},$$

où $a \in k$ et $Y \in W - \{0\}$ est un relevé de $y \in Y \subset \mathbb{P}(W)$. Alors, c'est une observation essentiellement due à Mumford, le polyèdre $\mathcal{C}_{\mu,\ell,d}$ n'est autre que l'intersection de $m(Y)$ avec la chambre de Weyl dominante dans $t^* \subset k^*$ (voir par exemple [5]). Le groupe de Weyl, ici le groupe symétrique \mathcal{S}_d , agit naturellement sur t^* .

CONJECTURE 1 bis. — *Si le poids μ est régulier, le saturé*

$$C_{\mu, \ell, d}^{\text{sat}} = \bigcup_{w \in \mathcal{S}_d} w(C_{\mu, \ell, d})$$

est encore convexe.

On trouvera dans [25] quelques résultats en rapport avec cette conjecture. De plus, la discussion ci-dessus montre qu'elle implique la conjecture qui la précède — dans la mesure du moins où l'on sait qu'il existe asymptotiquement, des invariants pour $\text{Sl}(V)$: problème que nous allons maintenant considérer.

4.2.3. Existence d'invariants.

L'existence d'invariants pour $\text{Sl}(V)$ dans certaines puissances symétriques de $S^\ell V$ est par exemple une conséquence de l'existence du *discriminant*, polynôme sur l'espace des polynômes homogènes de degré ℓ , qui s'annule exactement sur ceux d'entre eux qui définissent des hypersurfaces singulières de $\mathbb{P}(V)$. Quitte à dualiser, on obtient ainsi l'*hypersurface discriminante* de $\mathbb{P}(S^\ell V)$, qui est irréductible et $\text{Gl}(V)$ -invariante.

On peut déduire l'existence d'invariants similaires de la construction suivante. Rappelons tout d'abord la définition de la *forme de Chow* d'une sous-variété irréductible $X \subset \mathbb{P}(W)$ de dimension h , éventuellement singulière. Soit $Z(X)$ l'ensemble des sous-espaces L de codimension $h + 1$ de W tels que $\mathbb{P}(L)$ rencontre X : c'est une hypersurface irréductible de la grassmannienne $G_{h+1}(W)$, dont une équation s'identifie à un élément d'une certaine puissance de Schur $S_{N(1^{h+1})}W$ (voir [12], chap. 3, prop. 2.2). Si de plus $W = S^\ell V$ et X est invariante sous l'action de $\text{Gl}(V)$, $Z(X)$ est évidemment aussi $\text{Gl}(V)$ -invariante, et son équation est donc invariante sous l'action de $\text{Sl}(V)$.

De plus, on peut également, pour tout entier $k < h$, définir $Z_k(X)$ comme l'ensemble des sous-espaces L de codimension $k + 1$ de $S^\ell V$ tels qu'il existe un point $x \in \mathbb{P}(L) \cap X$ pour lequel $\dim(\mathbb{P}(L) \cap T_x X) \geq h - k$ (cela du moins si X est lisse : dans le cas contraire, on se restreint dans la définition précédente aux points lisses de X , et l'on passe ensuite à l'adhérence de Zariski dans la grassmannienne). On obtient ainsi à nouveau une hypersurface irréductible de la grassmannienne des sous-espaces de codimension $h + 1$ de $S^\ell V$, dont une équation donne un élément d'une puissance de Schur $S_{M(1^{k+1})}(S^\ell V)$, invariant par $\text{Sl}(V)$ (voir [12], chap. 3, prop. 2.11). En appliquant cette construction à l'hypersurface discriminante

de $\mathbb{P}(S^\ell V)$, on obtient de tels invariants pour chaque entier k . Il suffit alors d'en former des produits adéquats pour obtenir le résultat suivant :

PROPOSITION 4.6. — *Pour tout poids λ , il existe un entier $k > 0$ tel que $S_{k\lambda}(S^\ell V)$ contienne un invariant non trivial pour $\mathrm{Sl}(V)$.*

Remarque. — Si l'on remplace la puissance symétrique $S^\ell V$ par une puissance de Schur quelconque dans l'énoncé précédent, l'existence d'invariants n'est pas évidente. Par exemple, la décomposition explicite

$$S^k(\wedge^2 V) = \bigoplus_{|\lambda|=k} S_{(2\lambda)} \cdot V,$$

montre que les puissances symétriques d'un carré extérieur contiennent des invariants si et seulement si la dimension de l'espace est paire. On peut donc *a priori* s'attendre à des comportements asymptotiques différents pour les puissances de Schur des puissances symétriques et extérieures (voir l'exemple 4 ci-dessous).

4.2.4. Exemples.

Concluons cette section par une série d'exemples, chargés d'illustrer différents aspects des discussions précédentes.

Exemple 1. — Considérons les puissances de Schur de $S^2\mathbb{C}^3$, qui est de dimension 6. On dispose de deux constructions symétriques du carré de côté 3, données par les tableaux suivants :

1	2	4
	3	5
		6

1	2	4
	4	5
		6

Figure 9. Constructions stabilisantes pour $S^2\mathbb{C}^3$.

Elles sont toutes les deux stabilisantes, les cônes convexes engendrés par les poids des fibrés normaux correspondants étant dirigés respectivement par $(\alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$ et $(\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_1)$. Si μ est une partition de longueur 6, les sommets correspondants de ces deux cônes sont

$$r_+(\mu) = (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \mu_2 + 2\mu_4 + \mu_5, \mu_3 + \mu_5 + 2\mu_6),$$

$$r_-(\mu) = (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_4, \mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4, \mu_4 + \mu_5 + 2\mu_6).$$

Posons donc :

$$r_0(\mu) = (2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5, \mu_4 + \mu_5 + 2\mu_6).$$

Si $S_{r_0(\mu)+\nu}\mathbb{C}^3$ est une composante irréductible de $S_\mu(S^2\mathbb{C}^3)$, alors on peut écrire $\nu = \nu^1\alpha_1 + \nu^2\alpha_2$, avec $\nu^1, \nu^2 \geq 0$ et $\nu^1 + \nu^2 \geq \mu_3 - \mu_4$. Si les conjectures précédentes sont vérifiées, on obtient pour μ régulier un polygone dont l'allure est la suivante :

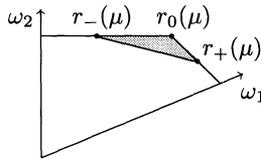


Figure 10. Le polygone $\mathcal{C}_{\mu,2,3}$.

Prenons par exemple $\mu = (1^4)$. Les diagrammes ci-dessous donnent les plus hauts poids des composantes irréductibles de $S_{k\mu}(S^2\mathbb{C}^3)$ (indépendamment du fait que certaines d'entre elles sont de multiplicité plus grande que un), pour k compris entre 1 et 4, chaque diagramme étant donné à l'échelle $1/k$. On constate ici que les deux constructions stabilisantes déterminent complètement, comme on l'espère, $\mathcal{C}_{\mu,2,3}$: c'est bien un triangle, dont les sommets sont obtenus dès $k = 2$, deux d'entre eux étant donnés par les composantes principales, le troisième par l'existence d'un invariant pour $Sl_3(\mathbb{C})$.

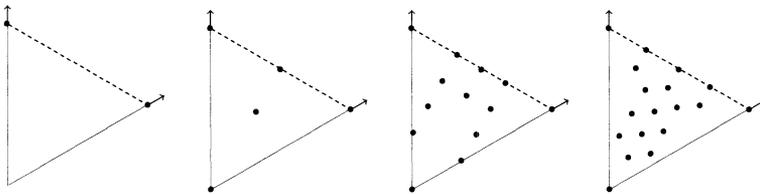


Figure 11. Composantes de $S_{k(1^4)}(S^2\mathbb{C}^3)$ pour $1 \leq k \leq 4$.

Cependant, lorsque μ n'est pas régulier, il arrive que la description ci-dessus du polyèdre asymptotique ne tienne plus. Supposons par exemple μ de longueur 2. Les deux composantes principales que l'on a mis en évidence dégénèrent ici en une seule, à savoir $(2\mu_1, \mu_1 + \mu_2)$. De plus, les cônes conormaux et cotangents ne coïncident plus : le cône cotangent est engendré par $-\alpha_1$ et $-\alpha_2$, et le cône conormal par $-\alpha_2$ et $-\alpha_2 - 2\alpha_1$: cette dernière

direction correspond à un côté du polygone asymptotique qui n'est pas orthogonal au mur de la chambre dominante vers lequel il est dirigé. Si par exemple $\mu = (2, 1)$, on vérifie par le calcul que l'unique composante principale et le cône conormal correspondant fournissent une description complète de ce polygone, dans la mesure où les intersections du bord de ce cône avec celui de la chambre dominante sont bien des sommets de ce polygone — précisément,

$$S_{6,6}\mathbb{C}^3, \quad S_{4,4,4}\mathbb{C}^3 \in S_{4,2}(S^2\mathbb{C}^3), \quad S_{14,2,2}\mathbb{C}^3 \in S_{6,3}(S^2\mathbb{C}^3).$$

On obtient ainsi la figure suivante :

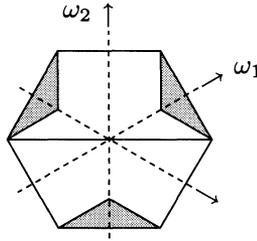


Figure 12. Le saturé du polygone $\mathcal{C}_{(2,1),2,3}$.

En particulier, ce saturé n'est pas convexe. Explicitons au passage la série des multiplicités asymptotiques relatives à l'unique composante principale :

$$\sum_{\nu} m_{\mathcal{C}}(\nu) e^{\nu} = (1 - e^{\alpha_1})^{-1}(1 - e^{2\alpha_1})^{-1}(1 - e^{\alpha_1 + \alpha_2})^{-1} \\ \times (1 - e^{2\alpha_1 + 2\alpha_2})^{-1}(1 - e^{2\alpha_1 + \alpha_2})^{-1}(1 - e^{\alpha_1 + 2\alpha_2})^{-1}.$$

Le même phénomène de non-convexité se reproduit pour tout poids de la forme $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ si $\mu_1 > \mu_2$. Notons cependant qu'il n'apparaît pour $\mu = (2, 1)$ aucun autre sommet que ceux que déterminent les composantes principales stabilisantes, du moins si l'on excepte ceux qui sont situés sur la frontière de la chambre de Weyl dominante. Je conjecture qu'il en est toujours ainsi, en tout cas pour les puissances de Schur d'une puissance symétrique.

CONJECTURE 2. — *Les composantes principales stabilisantes déterminent tous les sommets du polyèdre asymptotique qui sont situés à l'intérieur de la chambre de Weyl dominante.*

Si cette conjecture était vraie, le polyèdre asymptotique serait entièrement déterminé par les composantes principales stabilisantes et les cônes conormaux correspondants. Ses arêtes seraient alors de deux sortes : d'une part, celles qui relieraient des sommets contigus ; d'autre part, celles qui seraient issues de sommets voisins d'un mur de la chambre dominante, et se dirigeraient vers ce mur selon une direction déterminée par le cône conormal. En particulier, la donnée des composantes principales et de leurs cônes conormaux déterminerait complètement le polyèdre asymptotique.

Exemple 2. — Toujours en dimension 3, il est facile de déterminer les constructions stabilisantes de $S^\ell \mathbb{C}^3$ pour $\ell \geq 3$. En effet, elles correspondent aux composantes connexes du domaine des triplets $a < b < c$ privé des hyperplans d'équations

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c$$

avec $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma' = \ell$, tous ces coefficients étant des entiers positifs ou nuls. Ces composantes étant invariantes par homothétie et par translation dans la direction de $(1, 1, 1)$, on peut pour les déterminer supposer que $a = 0$ et $c = 1$, les traces des hyperplans frontières étant alors données par des équations $\mu b = \nu$, avec $0 \leq \nu \leq \mu \leq \ell$.

Le polygone $C_{\mu, \ell, 3}$ admet donc les caractéristiques suivantes. Notons $0 = f_0 < \dots < f_{a(\ell)} = 1$ les nombres rationnels de la forme $f_i = p_i/q_i$, avec $0 \leq p_i \leq q_i \leq \ell$: ces nombres rationnels constituent la *suite de Farey d'ordre ℓ* , qui fait ici une apparition assez inattendue ! Le polygone $C_{\mu, \ell, 3}$ admet alors $a(\ell)$ sommets dont les positions dépendent de μ , mais les directions des arêtes qui en sont issues n'en dépendent pas : l'arête reliant $r_{i-1}(\mu)$ à $r_i(\mu)$ est dirigée par $f_i \varepsilon_1 + (1 - f_i) \varepsilon_2$. Notons que le nombre de sommets ainsi obtenus est donné par la formule

$$a(\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} \varphi(i),$$

où φ désigne l'indicatrice d'Euler. D'après les conjectures précédentes, il ne devrait pas en exister d'autres, sinon un de plus sur chaque demi-droite ouverte délimitant la chambre dominante — et un dernier à son sommet, signalant l'existence d'invariants pour $\text{Sl}(3, \mathbb{C})$.

Exemple 3. — En dimension 4, on peut obtenir, comme ci-dessus, les constructions stabilisantes comme composantes connexes du triangle

$0 < b < c < 1$ privé de certains segments de droites donnés par des équations du type

$$\alpha + \beta b + \gamma c = \alpha' + \beta' b + \gamma' c,$$

où (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont des triplets d'entiers naturels de somme au plus ℓ .

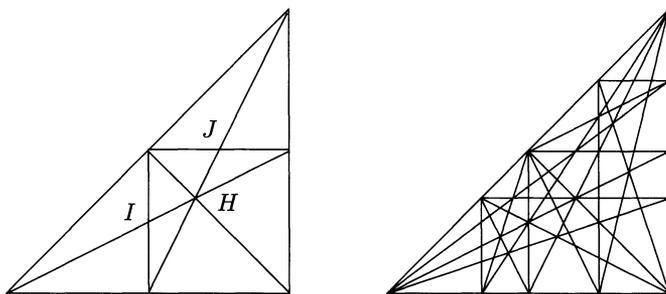


Figure 13. Constructions stabilisantes pour S^2C^4 et S^3C^4 .

Pour $\ell = 2$, on obtient ainsi 10 composantes principales stabilisantes, correspondant à des chambres de forme triangulaire d'où 10 sommets de $C_{\mu,2,4}$, de chacun desquels sont issues trois arêtes dont les directions ne dépendent pas de μ . On peut en déduire l'allure du polyèdre asymptotique, par exemple de la façon suivante : les six chambres triangulaires dont un sommet est le point H de la figure ci-dessus, sont les sommets d'une face hexagonale de $C_{\mu,2,4}$ — cet hexagone n'est bien sûr pas régulier en général, mais deux de ses côtés sont parallèles s'ils sont opposés. De même, les sommets I et J s'interprètent comme deux autres faces de $C_{\mu,2,4}$, qui sont elles des parallélogrammes. Et il faut encore adjoindre à ces trois faces celles qui vont s'accoler au bord de la chambre dominante, qui sont au nombre de six : ce qui donne au total 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces. On obtient un polytope dont l'allure est la suivante :

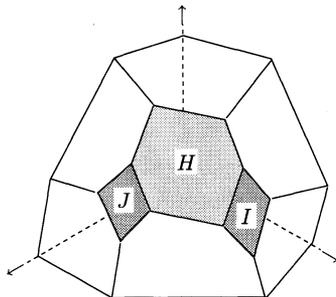


Figure 14. Le polyèdre $C_{\mu,2,4}$.

Pour $\ell = 3$, on obtient pas moins de 68 configurations stabilisantes, correspondant à des sommets de $C_{\mu,3,4}$, dont 56 sont de valence trois, et 12 de valence 4. On lit sur la partie droite de la figure 13 l'existence de 24 faces quadrangulaires, 8 hexagonales, 2 octogonales et une décagonale. On doit également prendre en compte celles dont un des côtés se trouve sur un mur de la chambre de Weyl dominante, qui sont au nombre de douze, et trois encore dans chacun de ces murs : soit 50 faces au total, pour 84 sommets et 132 arêtes (on notera que $84 - 132 + 50 = 2!$).

Je ne peux résister (voir figure 15) à la tentation d'explicitier l'allure de $C_{\mu,3,4}$.

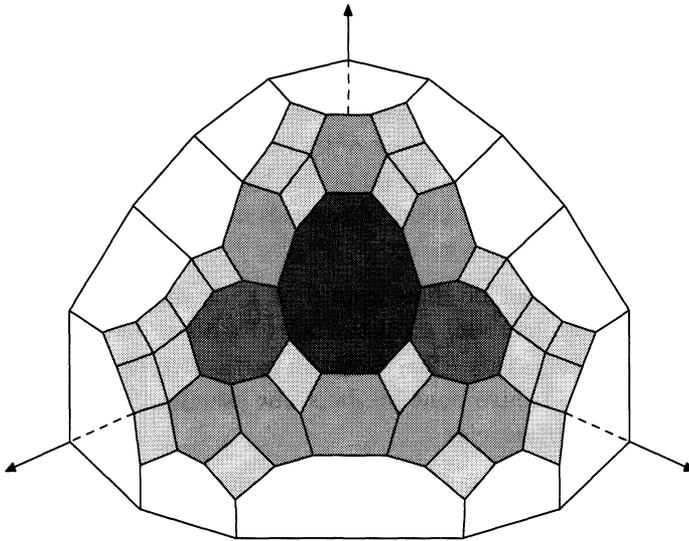


Figure 15. Le polyèdre $C_{\mu,3,4}$.

Exemple 4. — Pour illustrer le fait que les puissances de Schur des puissances extérieures peuvent avoir un comportement asymptotique sensiblement différent de celles des puissances symétriques, considérons les puissances de Schur $S_{\lambda}(\wedge^2 C^4)$, où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ est de longueur 2, avec $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Deux tableaux définissent des constructions stabilisantes :

	1	2	4
		3	5
			6

	1	2	3
		4	5
			6

16. Constructions stabilisantes pour $\wedge^2\mathbb{C}^4$.

Ils définissent des plongements, pour V de dimension 4,

$$\begin{array}{ccc}
 X = \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi, \varphi'} & \mathcal{F}(\wedge^2 V) = Z \\
 \parallel & & \pi \downarrow \\
 X = \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F}_{1,2}(\wedge^2 V) = Y \leftarrow \mathcal{L}_\lambda^Y.
 \end{array}$$

Le fibré en droites \mathcal{L}_λ^Y est alors ample sur Y , variété des sous-espaces emboîtés de codimension 1 et 2 de $\wedge^2 V$. La restriction $\mathcal{L}_{\lambda|X}^Y = \mathcal{L}_{r(\lambda)}^X$ avec $r(\lambda) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)$, de sorte que ψ est bien un plongement, obtenu en composant les plongements φ ou φ' associés aux deux tableaux ci-dessus, avec la projection naturelle π .

Notons que X est de dimension 6 et Y de dimension 9. Les cônes cotangent et conormaux sont ici distincts, et les poids du fibré normal sont $\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$: en particulier, ils sont linéairement dépendants. On se trouve donc ici dans une situation dégénérée, au sens où $\mathcal{C}_{\lambda,1^2,4}$ est *d'intérieur vide*.

On en déduit d'une part que si $S_\mu V$ est une composante de $S_\lambda(\wedge^2 V)$, alors μ est de la forme $(\lambda_1 + \lambda_2 - s - t, \lambda_1 - s + t, \lambda_2 + s - t, s + t)$ pour des entiers naturels s et t . De plus, la multiplicité $m_\lambda(s, t)$ de cette puissance de Schur est une fonction croissante de λ , bornée indépendamment de cette partition, et converge si $\lambda_1 - \lambda_2$ et λ_2 tendent simultanément vers l'infini, vers une multiplicité asymptotique $m_\infty(s, t)$ déterminée par l'identité

$$\sum_{s,t \geq 0} m_\infty(s, t) x^s y^t = (1-x)^{-1} (1-xy)^{-1} (1-xy^2)^{-1}.$$

4.3. Puissances de Schur composées.

L'objet principal de cette section est d'établir un analogue du théorème 3.2 pour la composition des foncteurs de Schur. Encore une fois, il s'agit de construire des plongements adéquats.

4.3.1. *Construction de plongements.*

Considérons la variété $X = \mathcal{Q}_{r_1, \dots, r_m}(V)$ des drapeaux quotients

$$V = Q_0 \longrightarrow Q_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow Q_{m-1} \longrightarrow Q_m = 0,$$

où Q_i est de dimension r_i . Ce choix des drapeaux quotients nous sera momentanément plus commode : on se ramène bien entendu au cas usuel en passant au drapeau des noyaux $V_i = \text{Ker}(V \rightarrow Q_{m-i})$; ou encore au drapeau dual de V^* .

Si λ est une partition, soit $s_\lambda(r)$ la dimension de $S_\lambda \mathbb{C}^r$. Au drapeau précédent est alors associé le drapeau des puissances de Schur

$$S_\lambda V = S_\lambda Q_0 \longrightarrow S_\lambda Q_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow S_\lambda Q_{m-1} \longrightarrow S_\lambda Q_m = 0,$$

qui est un élément de $Y = \mathcal{Q}_{s_\lambda(r_1), \dots, s_\lambda(r_m)}(S_\lambda V)$. On suppose que $\ell(\lambda) \leq r_m$, afin qu'aucune de ces puissances de Schur ne s'annule, exceptée la dernière.

Remarque. — Rappelons qu'il existe une structure canonique de λ -anneau sur \mathbb{Z} (voir [16]). À chaque partition λ est donc associée une application $s_\lambda : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui sur \mathbb{N} coïncide avec la définition précédente. L'entier $s_\lambda(r)$ peut être obtenu grâce à la formule des dimensions de Weyl :

$$s_\lambda(r) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\lambda_i - \lambda_j - i + j}{j - i}.$$

Il est parfois plus commode de calculer cette dimension à partir du diagramme de Ferrers D_λ de la partition λ (voir [19]). Notons en effet $h_{i,j}$ la longueur de l'équerre de ce diagramme issue de la case (i, j) . Alors, selon la formule de Frame,

$$s_\lambda(r) = \prod_{(i,j) \in D_\lambda} \frac{r - i + j}{h_{i,j}}.$$

Cette formule explicite l'action sur \mathbb{Z} des foncteurs de Schur.

La construction qui précède permet de considérer X comme plongée dans Y , de manière équivariante pour l'action du groupe linéaire de V . On notera pour les différencier $G_X = \text{Gl}(V)$ et $G_Y = \text{Gl}(S_\lambda V)$ les groupes linéaires agissant transitivement sur X et Y , P_X et P_Y les sous-groupes paraboliques correspondants, etc.

Soit ρ un poids P_Y -dominant, et \mathcal{E}_ρ^Y le fibré vectoriel associé sur Y . Soit par ailleurs μ un caractère dominant de P_Y : si $\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i(1^{s_\lambda(r_i)})$,

$$\mathcal{L}_{\mu|X}^Y \simeq \mathcal{L}_{a_\lambda(\mu)}^X, \quad \text{avec} \quad a_\lambda(\mu) = \sum_{i=1}^m \mu_i n_{r_i, \lambda}(1^{r_i}),$$

pour certains entiers $n_{r_i, \lambda}$. Notons \mathcal{P}_λ l'ensemble des partitions μ dont les sauts, autrement dit les entiers i tels que $\mu_i > \mu_{i+1}$, soient de la forme $s_\lambda(r)$, et munissons cet ensemble de l'ordre suivant : $\mu \geq \nu$ si $\mu_j \geq \nu_j$ pour tout j . Si la dimension de V est suffisamment grande, il existe une variété de drapeaux Y de $S_\lambda V$ telle que μ et ν définissent des caractères de P_Y , et la relation $\mu \geq \nu$ équivaut à l'existence d'une section non triviale de $\mathcal{L}_{\mu-\nu}^Y$, soit encore à ce que ce fibré en droites soit globalement engendré. Une section de $\mathcal{L}_{\mu-\nu}^Y$, P_X -semi-invariante et non identiquement nulle sur X permet de définir une injection des jets de sections de \mathcal{L}_ν^Y s'annulant à un ordre donné sur X , dans les jets correspondants pour \mathcal{L}_μ^Y . D'où le résultat suivant :

PROPOSITION 4.7. — *Les poids π et ρ étant fixés, la multiplicité de $S_{\pi+a_\lambda(\mu)}V$ dans le pléthysme $S_{\rho+\mu}(S_\lambda V)$ est une fonction croissante de la partition $\mu \in \mathcal{P}_\lambda$.*

4.3.2. *Multiplicités asymptotiques.*

Filtrons l'espace des sections globales de $\mathcal{E}_\rho^Y \otimes \mathcal{L}_\mu^Y$, de façon compatible avec l'action de $G_X \subset G_Y$, selon leur ordre d'annulation sur X . Une fois de plus, l'existence de cette filtration montre que l'évolution des multiplicités des composantes du pléthysme $S_{\rho+\mu}(S_\lambda V)$ est gouvernée asymptotiquement, autrement dit quand les différences entre composantes de μ tendent vers l'infini, par le fibré conormal et ses puissances symétriques.

Le fibré conormal est un sous-fibré de la restriction à X du cotangent de Y , dont le quotient correspondant est le fibré cotangent de X . Rappelons encore une fois que le fibré cotangent d'une variété de drapeaux d'un espace vectoriel complexe n'est pas irréductible, excepté dans le cas des grassmanniennes. En l'occurrence, le fibré cotangent de X s'identifie au sous-fibré du fibré trivial des endomorphismes de V , constitué de ceux qui envoient chacun des noyaux V_i dans V_{i+1} . Il admet donc une série de composition dont on notera la somme des composantes

$$\text{gr } \Omega_X^1 = \bigoplus_{i < j} (Q_{m-i}^* / Q_{m-i+1}^*) \otimes (Q_{m-j}^* / Q_{m-j+1}^*)^* = \bigoplus_{i < j} M_i^* \otimes M_j,$$

où $M_i = Q_{m-i+1}/Q_{m-i+2}$. De même pour le fibré cotangent de Y , dont les poids de la restriction à X contiennent ceux du fibré conormal. On en déduira le résultat suivant :

LEMME 4.8. — *Le fibré conormal admet une filtration dont les quotients sont des fibrés homogènes irréductibles de la forme*

$$\mathcal{E}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}^X = S_{\alpha_1} M_1 \otimes \dots \otimes S_{\alpha_m} M_m,$$

où $\alpha_m \geq 0$, et plus généralement $\alpha_i \geq 0$ lorsque $\alpha_{i+1} = \dots = \alpha_m = 0$. De plus, la somme des composantes des poids $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ est nulle, mais elles ne peuvent s'annuler toutes simultanément.

Démonstration. — Le fibré conormal étant un sous-fibré de $\Omega_{Y|X}^1$, il suffit de vérifier que ce dernier fibré a la propriété annoncée. Or, d'après la description donnée ci-dessus, $\Omega_{Y|X}^1$ admet une filtration homogène dont les quotients sont les fibrés

$$(S_\lambda Q_{m-i}^*/S_\lambda Q_{m-i+1}^*) \otimes (S_\lambda Q_{m-j}^*/S_\lambda Q_{m-j+1}^*)^*, \quad i < j.$$

Or $\text{gr } Q_{m-i} = M_1 \oplus \dots \oplus M_{i+1}$, ce qui implique que

$$\text{gr}(S_\lambda Q_{m-i}^*/S_\lambda Q_{m-i+1}^*) = \bigoplus_{\lambda \supset \mu_2 \supset \dots \supset \mu_i \neq 0} S_{\lambda/\mu_2} M_1^* \otimes \dots \otimes S_{\mu_i} M_i^*.$$

Les composantes de $\text{gr } \Omega_{Y|X}^1$ sont donc de la forme

$$S_{\beta_1} M_1^* \otimes \dots \otimes S_{\beta_i} M_i^* \otimes S_{\gamma_1} M_1 \otimes \dots \otimes S_{\gamma_j} M_j, \quad i < j,$$

où les β_1, \dots, γ_j sont des partitions telles que $|\beta_1| + \dots + |\beta_i| = |\gamma_1| + \dots + |\gamma_j| = |\lambda|$, β_i et γ_j étant de plus non nulles. La dernière assertion du lemme s'ensuit. De plus, si $S_{\alpha_1} M_1 \otimes \dots \otimes S_{\alpha_m} M_m$ est une composante de ce produit tensoriel, alors on a $\alpha_{j+1} = \dots = \alpha_m = 0$, et $\alpha_j = \gamma_j$ est une partition. D'où la première assertion. \square

Il s'ensuit qu'un poids donné n'a qu'une multiplicité finie dans l'algèbre symétrique du fibré conormal, tensorisée par n'importe quel fibré homogène complètement réductible. En effet, lorsque l'on tensorise un fibré $\mathcal{E}_\sigma^X = \mathcal{E}_{\sigma_1, \dots, \sigma_m}^X$ par une composante de $\text{gr } N^*$, les sommes $|\sigma_{j+1}| + \dots + |\sigma_m|$, où $1 \leq j < m$, ne peuvent diminuer, et l'une au moins d'entre-elles augmente strictement. Autrement dit, on assiste ici à un phénomène de stabilisation des multiplicités, qui se traduit par le résultat suivant.

PROPOSITION 4.9. — Lorsque le caractère μ de P_Y tend vers l'infini, la multiplicité de la puissance de Schur $S_{\pi+a_\lambda(\mu)}V$ dans $S_{\rho+\mu}(S_\lambda V)$ croît vers une multiplicité asymptotique finie, égale à la multiplicité de \mathcal{E}_π^X dans $\text{gr } \mathcal{E}_{\rho|X}^Y \otimes S^*(\text{gr } N^*)$.

Ici encore, stabilisation impliquant confinement, ceci va nous permettre d'obtenir certaines conditions pour qu'une puissance de Schur apparaisse dans un pléthysme donné. Si l'on écrit $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ où ρ_i est une suite décroissante de longueur $s_\lambda(r_{m-i}) - s_\lambda(r_{m-i+1})$, alors

$$\mathcal{E}_{\rho|X}^Y = \bigotimes_{i=1}^m S_{\rho_i}(S_\lambda Q_{m-i}^*/S_\lambda Q_{m-i+1}^*)^*,$$

d'où le gradué associé

$$\text{gr } \mathcal{E}_{\rho|X}^Y = \bigotimes_{i=1}^m S_{\rho_i} \left(\bigoplus_{\lambda \supset \mu_2 \supset \dots \supset \mu_i \neq 0} S_{\lambda/\mu_2} M_1 \otimes \dots \otimes S_{\mu_i} M_i \right).$$

En particulier, cette somme fait apparaître pour $i = m$ une puissance de Schur d'exposant non nul du fibré M_m , de sorte que toute composante $\mathcal{E}_\beta^X = \mathcal{E}_{\beta_1, \dots, \beta_m}^X$ de $\text{gr } \mathcal{E}_{\rho|X}^Y$ vérifie $|\beta_m| \geq |\rho_m|$, c'est-à-dire $|\beta|_{>r_1} \geq |\rho|_{>s_\lambda(r_1)}$. Enfin, le lemme précédent assure que lorsque l'on tensorise \mathcal{E}_β^X par une composante de $S^*(\text{gr } N^*)$, $|\beta_m|$ ne peut qu'augmenter. D'où les conditions suivantes, qui traduisent les relations existant entre les structures de λ -anneau naturellement définies sur \mathbb{Z} et sur l'anneau de Grothendieck des représentations de $\text{Gl}(V)$:

THÉORÈME 4.2. — Si la multiplicité de $S_\pi V$ dans $S_\rho(S_\lambda V)$ n'est pas nulle, alors

$$|\pi|_{>r} \geq |\rho|_{>s_\lambda(r)} \quad \forall r > 0.$$

Notons que si $|\rho|_{>s_\lambda(r)} > 0$, la condition $|\pi|_{>r} > 0$ pour toute composante $S_\pi V$ de $S_\rho(S_\lambda V)$ se déduit simplement du fait que $S_\rho(S_\lambda \mathbb{C}^r) = 0$. De plus, la démonstration précédente montre qu'il existe quantité de triplets π, ρ, λ pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité. En effet, $\text{gr } \mathcal{E}_{\rho|X}^Y$ admet des composantes dans lesquelles M_m apparaît avec un poids de taille égale à celle de ρ_m , de sorte que l'inégalité ci-dessus est une égalité pour certaines composantes principales. Par ailleurs, le fibré conormal admet des composantes où M_m n'apparaît pas : les poids obtenus à partir d'une des composantes principales précédentes, par développement asymptotique dans les directions normales correspondantes, vérifient donc encore l'égalité requise.

5. PLONGEMENTS PAR LES ESPACES DE POIDS

Nous allons maintenant montrer comment les méthodes précédentes s'étendent à l'étude de pléthysmes plus généraux que ceux que nous avons considérés jusqu'ici, c'est-à-dire de la forme $S_\rho V_\mu$, où V_μ désigne une représentation régulière irréductible de plus haut poids μ d'un groupe de Lie complexe G connexe et réductif. Comme précédemment, le problème essentiel sera, pour un sous-groupe de Borel donné B de G , de construire des drapeaux de sous B -modules de V_μ . Rappelons que nous avons convenu que B était engendré par les racines négatives.

5.1. Construction de plongements.

5.1.1. Ordres sur les poids.

Soit donc $V_\mu = \bigoplus_{\nu} V_{\mu,\nu}$ la décomposition en espaces de poids. Dans le réseau des poids, relierons ν à $\nu - \alpha$, α étant une racine simple, si l'action de $\mathcal{G}_{-\alpha}$ sur $V_{\mu,\nu}$ est non triviale. En complétant transitivement, on obtient un ordre partiel sur l'ensemble des poids de V_μ , qu'il est commode de visualiser par un diagramme dit *de Hasse*.

Exemple. — Pour $G = \text{Gl}(3, \mathbb{C})$ et la représentation $S_{4,2}\mathbb{C}^3$, on obtient le diagramme suivant, où les poids de multiplicités 2 et 3 sont respectivement désignés par des \bullet et un \odot .

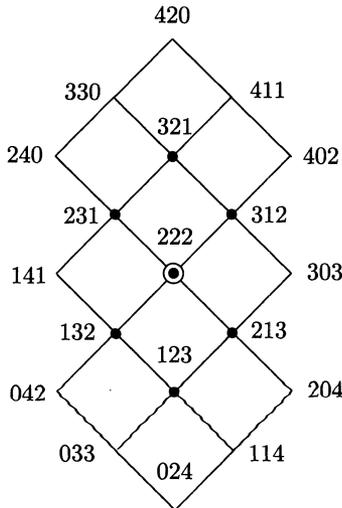


Figure 17. Diagramme de Hasse de $S_{4,2}\mathbb{C}^3$.

Remarquons que dans la section 3.1.1, le parallélépipède \mathcal{P} s'identifiait précisément à l'ensemble des poids, l'ordre partiel précédent étant défini par les déplacements dans les directions positives. En particulier, numéroter ce parallélépipède de façon compatible revenait à définir un ordre total sur les poids qui raffine cet ordre partiel.

On peut faire de même en général : chaque ordre total \mathcal{O} sur les poids de V_μ qui raffine l'ordre partiel que l'on vient de définir, permet de construire un drapeau de sous B -modules. Si les poids sont dans l'ordre décroissant $\nu(1), \nu(2), \dots$, avec des multiplicités $n(1), n(2), \dots$, les B -modules de ce drapeau seront les sommes directes

$$V_{\mu,i} = \bigoplus_{j \geq i} V_{\mu,\nu(j)}.$$

L'existence de poids de multiplicité plus grande que 1, comme pour les puissances de Schur, fait le plus souvent disparaître le phénomène de stabilisation. On peut cependant décrire encore le comportement asymptotique des multiplicités.

5.1.2. Multiplicités asymptotiques.

Soit donc \mathcal{O} un ordre total sur les poids de V_μ qui raffine l'ordre partiel défini ci-dessus, et

$$\varphi_{\mathcal{O}} : X = G/P_\mu \hookrightarrow Y = \mathcal{F}_*(V_\mu)$$

le plongement associé dans une variété de drapeaux convenable — c'est-à-dire, en l'occurrence, dont les dimensions des quotients successifs sont $n(1), n(2), \dots$. Pour toute partition λ , on peut définir un fibré homogène \mathcal{E}_λ^Y sur Y , dont l'espace des sections globales est le pléthysme $S_\lambda V_\mu$. Supposons que ce fibré vectoriel soit ample, ce qui signifie que $\lambda_{n(1)+\dots+n(i)} > \lambda_{n(1)+\dots+n(i)+1}$ pour tout i : il est alors l'image directe, par projection depuis une autre variété Z de drapeaux de V_μ , d'un fibré en droites ample. On dispose ainsi d'un diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z = \mathcal{F}_*(V_\mu) & \longleftarrow & \mathcal{L}_\lambda^Z \\ & & \downarrow u \\ X = G/P_\mu & \hookrightarrow & Y = \mathcal{F}_*(V_\mu) \longleftarrow \mathcal{E}_\lambda^Y. \end{array}$$

La fibre de u , dont on notera n_λ la dimension, est ici un produit de variétés de drapeaux ordinaires. Par ailleurs, la restriction de \mathcal{E}_λ^Y à X est un fibré G -homogène défini par un P_μ -module réduit à une seule composante isotypique. En effet, si l'on note $\lambda(i)$ la partition formée des parts de λ d'indices compris entre $n(1) + \dots + n(i-1) + 1$ et $n(1) + \dots + n(i)$, on a

$$\mathcal{E}_{\lambda|X}^Y = \bigotimes_i S_{\lambda(i)} V_{\mu, \nu(i)} = \left(\bigotimes_i S_{\lambda(i)} \mathbb{C}^{n(i)} \right) \otimes \mathcal{L}_{r_{\mathcal{O}}(\lambda)}^X,$$

avec $r_{\mathcal{O}}(\lambda) = \sum_j |\lambda(j)| \nu(j)$. Ici encore, on dispose d'une filtration de l'espace des sections globales de \mathcal{E}_λ^Y par leur ordre d'annulation sur X , et d'applications de Gauss

$$H^0(Y, \mathcal{E}_{k\lambda}^Y \otimes \mathcal{I}_X^m) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{E}_{k\lambda|X}^Y \otimes S^m N^*).$$

Un tel morphisme est surjectif si

$$H^1(Y, \mathcal{E}_{k\lambda}^Y \otimes \mathcal{I}_X^{m+1}) = H^1(Z, \mathcal{L}_{k\lambda}^Z \otimes \pi^* \mathcal{I}_X^{m+1}) = 0,$$

ce qu'assure l'amplitude de \mathcal{L}_λ^Z dès que k est suffisamment grand. Disons que \mathcal{O} est *stabilisant* si les poids du fibré conormal sont inclus dans un demi-espace ouvert — autrement dit, s'il existe une forme linéaire qui prend des valeurs strictement croissantes sur les poids de V_μ , pris dans l'ordre fixé par \mathcal{O} . Compte tenu de l'isomorphisme

$$H^0(X, \mathcal{E}_{k\lambda|X}^Y \otimes S^m N^*) = H^0(X, \mathcal{L}_{kr_{\mathcal{O}}(\lambda)}^X \otimes S^m N^*)^{\oplus P_{\mathcal{O}, \lambda}(k)},$$

où l'on a noté $P_{\mathcal{O}, \lambda}(k) = \prod_i \dim_{\mathbb{C}} S_{k\lambda(i)} \mathbb{C}^{n(i)}$, on obtient alors l'énoncé suivant :

THÉORÈME 5.1. — *Si l'ordre total \mathcal{O} est stabilisant, alors pour tout poids ν , la multiplicité de $V_{kr_{\mathcal{O}}(\lambda)+\nu}$ dans $S_{k\lambda} V_\mu$, est une fonction croissante de k , majorée, et égale si cet entier est suffisamment grand, au produit du polynôme $P_{\mathcal{O}, \lambda}(k)$, et de la multiplicité $m_{\mathcal{O}, \lambda}(\nu)$ du P_μ -module de plus haut poids ν dans l'algèbre symétrique $S^\bullet(\text{gr } N^*)$ du fibré conormal.*

Remarque. — Plus généralement, d'ailleurs, on montre en raisonnant exactement de la même façon que la multiplicité de $V_{r_{\mathcal{O}}(\lambda)+\nu}$ dans $S_\lambda V_\mu$ est une fonction croissante de λ , pour l'ordre défini en convenant que $\lambda \geq \mu$ si la différence $(\lambda - \mu)$ est une partition.

Cette multiplicité $m_{\mathcal{O},\lambda}(\nu)$ est finie sous l'hypothèse où \mathcal{O} est stabilisant. Par ailleurs, le polynôme $P_{\mathcal{O},\lambda}$ peut être explicité à l'aide de la formule des dimensions de Weyl, ou de la formule de Frame (section 4.3). Son degré est égal à n_λ , soit encore au nombre de couples d'entiers $i < j$ tels qu'il existe un entier k pour lequel

$$n(1) + \cdots + n(k) < i < j \leq n(1) + \cdots + n(k+1),$$

ce que l'on notera $i <_{\mathcal{O}} j$, et tels que de plus $\lambda_i > \lambda_j$. Cet entier ne dépend donc que des sauts de λ . En particulier, si λ est régulier, on obtient le degré maximal

$$n_{\max} = \sum_{\nu} \binom{\dim V_{\mu,\nu}}{2}.$$

Le terme dominant de $P_{\mathcal{O},\lambda}$ est donné par

$$P_{\mathcal{O},\lambda}(k) = \left(\prod_{\substack{i <_{\mathcal{O}} j \\ \lambda_i > \lambda_j}} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{j - i} \right) k^{n_\lambda} + o(k^{n_\lambda}).$$

On constate donc que le phénomène de stabilisation des multiplicités des composantes d'un pléthysme, est étroitement lié au fait que l'on considère des représentations sans multiplicité, comme nous l'avons fait dans les sections 2 à 4. Si l'on ne fait pas cette hypothèse, ce phénomène ne peut apparaître que si les sauts de la partition λ ci-dessus sont judicieusement placés — c'est-à-dire précisément aux lieux fixés par les multiplicités des poids de V_μ , considérés dans l'ordre choisi (où du moins si les sauts de λ sont parmi ces valeurs là). Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, plus exactement si λ compte d'autres sauts que ceux-là, alors les multiplicités correspondantes augmentent indéfiniment lorsqu'elles ne sont pas identiquement nulles.

En général, on peut se demander si le comportement polynomial des multiplicités précédentes est seulement asymptotique. Varient-elles, avant « stabilisation », de façon polynomiale par morceau ?

5.2. Réciprocité asymptotique.

On n'a pas besoin, en général, de considérer tous les espaces de poids pour obtenir un plongement. Le cas « minimal » est celui où l'on se restreint aux espaces de poids μ et $\mu - \alpha_1, \dots, \mu - \alpha_l$, qui sont de multiplicité un dès que μ est régulier, ce que nous allons supposer. On en déduit un plongement

$$\varphi : X = G/B \hookrightarrow Y = \mathcal{F}_{1,\dots,\ell+1}(V_\mu)$$

dans la variété de drapeaux de sous-espaces de codimension $1, 2, \dots, \ell + 1$ de V_μ . Si $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_\ell)$ est une partition,

$$\mathcal{L}_{\lambda|X}^Y = \mathcal{L}_{r(\lambda, \mu)}^X,$$

avec $r(\lambda, \mu) = |\lambda|\mu - \sum_i \lambda_i \alpha_i$. Ce plongement est stabilisant : en effet, le cône conormal correspondant est engendré par les poids de la forme $\alpha_i, \alpha_j - \alpha_k$ avec $j > k$, et $\theta, \theta - \alpha_i$ si $\mu - \theta$ décrit l'ensemble des poids de V_μ autres que λ et les $\lambda - \alpha_j$. Ces poids θ étant sommes de racines positives, on vérifie sans mal que ce cône est inclus dans un demi-espace ouvert.

En conséquence, la multiplicité de $V_{r(\lambda, \mu) + \nu}$ dans $S_\lambda V_\mu$ converge, pour tout poids ν , vers une multiplicité asymptotique quand la partition λ tend vers l'infini (au sens où tous ses sauts deviennent suffisamment grands). Pour obtenir une expression raisonnablement simple de ces multiplicités asymptotiques, il est commode de faire tendre aussi μ vers l'infini, au sens où les coefficients de son expression $\mu = \sum_i \mu^i \omega_i$ en termes de poids fondamentaux deviennent suffisamment grands. En effet, pour chaque poids θ qui est somme de racines positives, la multiplicité de $(\mu - \theta)$ dans V_μ converge alors, d'après la formule de Kostant [11], vers le nombre $p(\theta)$ de façon d'écrire θ comme somme de racines positives. Or pour chaque poids ν , les poids θ susceptibles d'intervenir dans une écriture de ν comme combinaison linéaire de poids du fibré conormal, forment un ensemble fini. On en déduit le résultat suivant :

THÉORÈME 5.2. — *Soit $\mu = \sum_{i=1}^\ell \mu^i \omega_i$ un poids dominant, et λ une partition de longueur égale au rang ℓ de G plus un. On suppose les entiers μ^i suffisamment grands, de même que les différences $\lambda_j - \lambda_{j+1}$. Alors la multiplicité $m_\infty(\nu)$ de $V_{r(\lambda, \mu) + \nu}$ dans $S_\lambda V_\mu$ ne dépend plus que de ν . De plus, ces multiplicités asymptotiques sont déterminées par l'identité formelle*

$$\sum_\nu m_\infty(\nu) e^{-\nu} = \prod_{i < j} (1 - e^{\alpha_i - \alpha_j})^{-1} \prod_{|\theta| > 1} \Pi(\theta)^{-p(\theta)},$$

où θ décrit l'ensemble des poids $\theta = \theta_1 \alpha_1 + \dots + \theta_\ell \alpha_\ell$ pour lesquels $\theta_1, \dots, \theta_\ell \geq 0$ et $|\theta| = \theta_1 + \dots + \theta_\ell > 1$, et où l'on a posé

$$\Pi(\theta) = (1 - e^\theta)(1 - e^{\theta - \alpha_1}) \dots (1 - e^{\theta - \alpha_\ell}).$$

Remarque. — La multiplicité de $V_{r(\lambda,\mu)+\nu}$ dans $S_\lambda V_\mu$ est fonction croissante à la fois de λ , d'après les arguments de la section précédente, et de μ d'après le théorème 2.1 de [4]. Elle est donc toujours majorée par la multiplicité asymptotique $m_\infty(\nu)$. Notons par ailleurs que l'on obtient un énoncé différent pour chaque ordre choisi sur les racines simples.

Exemple. — En dimension 3, notons α et β les racines simples. Il vient

$$\sum_{\nu} m_\infty(\nu) e^{-\nu} = \prod_{j \geq 1} (1 - e^{j\beta - \alpha})^{-1} \prod_{k \geq 2} (1 - e^{k\alpha - \beta})^{-1} \prod_{\sigma} (1 - e^\sigma)^{-s(\sigma)},$$

où $\sigma = u\alpha + v\beta$ décrit l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs non tous nuls de α et β , avec

$$s(\alpha) = s(\beta) = 3 \quad \text{et} \quad s(\sigma) = 3 \min(u, v) + 4 - \delta_{u,v} \quad \text{sinon.}$$

Les premiers termes de cette série formelle donnent

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} m_\infty(\nu) e^{-\nu} &= 1 + e^{\beta - \alpha} + e^{2\beta - 2\alpha} + 3e^\alpha + 6e^\beta + 6e^{2\beta - \alpha} + 12e^{2\alpha} \\ &\quad + 28e^{\alpha + \beta} + 41e^{2\beta} + 2e^{-\beta + 3\alpha} + 7e^{-2\beta + 4\alpha} + \dots, \end{aligned}$$

où l'on s'est restreint aux termes dont la somme des coefficients et le coefficient de β sont au plus égaux à 2.

Dans le cas où $G = \text{Gl}(V)$, V étant de dimension d , λ et μ sont des partitions de longueur d . Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{d-1}$ une permutation, $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}$ les racines simples dans l'ordre usuel et

$$r_\sigma(\lambda, \mu) = |\lambda| |\mu| - \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_{i+1} \alpha_{\sigma(i)}.$$

On déduit du théorème précédent une propriété de réciprocité asymptotique :

COROLLAIRE 5.1. — *Pour tout poids ν et toute permutation σ , si les différences $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ et $\mu_i - \mu_{i+1}$, pour $1 \leq i \leq d$, sont suffisamment grandes, alors la multiplicité de $S_{r_\sigma(\lambda,\mu)+\nu} V$ dans $S_\lambda(S_\mu V)$ est égale à la multiplicité de $S_{r_\sigma(\mu,\lambda)+\nu} V$ dans $S_\mu(S_\lambda V)$.*

On pourra comparer ce résultat au corollaire 2.2, ou à la généralisation de la loi de réciprocité d'Hermite que nous avons obtenue dans [18] (th. 4.3.1). Il serait intéressant d'en obtenir une version effective, par exemple à l'aide des techniques développées dans [4] et [20].

5.3. Plongements par les suites de tableaux.

Dans le cas des puissances de Schur à nouveau, il est possible de raffiner les constructions précédentes en utilisant les bases explicites données par les tableaux de Young semistandard, qui permettent d'appréhender un peu plus précisément l'action d'un sous-groupe de Borel.

Bases des puissances de Schur. — Soit μ une partition, de longueur $\ell(\mu) = \ell$ et hauteur $h(\mu) = h$. Rappelons qu'une puissance de Schur $S_\mu V$ peut se définir comme un espace de tenseurs, possédant certaines propriétés de symétrie et d'antisymétrie. Fixons en effet un tableau standard T_0 de référence, de forme μ , par exemple le tableau numéroté de gauche à droite et de bas en haut. Alors $S_\mu V$ est l'image de l'application composée

$$S^{\mu_1} V \otimes \dots \otimes S^{\mu_\ell} V \longrightarrow V^{\otimes \mu_1} \otimes \dots \otimes V^{\otimes \mu_\ell} = V^{\otimes |\mu|} \longrightarrow \wedge^{\mu_1^*} V \otimes \dots \otimes \wedge^{\mu_h^*} V,$$

où l'antisymétrisation porte sur les indices figurant dans une même colonne de T_0 .

Si B est un sous-groupe de Borel de $Gl(V)$, fixons une base adaptée e_1, \dots, e_d de V , c'est-à-dire telle que pour tout i , $B \cdot e_i = \langle e_i, \dots, e_d \rangle$. À cette base est canoniquement associée une base de $S^{\mu_1} V \otimes \dots \otimes S^{\mu_\ell} V$, dont les éléments sont naturellement codés par les tableaux de forme μ , numérotés d'entiers compris entre un et d , croissants au sens large sur les lignes, mais sans conditions de compatibilité sur les colonnes. De plus, parmi ces vecteurs, ceux qui correspondent à des tableaux semistandard relèvent une base de la puissance de Schur $S_\mu V$.

Sous-B-modules. — On va maintenant s'intéresser aux sous- B -modules de $S_\mu V$ qui admettent une base extraite de la base précédente, donc de la forme

$$\mathcal{M}_\Gamma = \bigoplus_{T \in \Gamma} \mathbb{C} f_T,$$

où Γ est un ensemble de tableaux semistandard T de forme μ , et f_T l'image dans $S_\mu V$ du vecteur e_T de $S^{\mu_1} V \otimes \dots \otimes S^{\mu_\ell} V$ associé au tableau semistandard T . Il s'agit donc de comprendre l'action de B sur les vecteurs f_T , la projection π étant B -équivariante.

Notons pour cela u_m l'endomorphisme qui envoie e_m sur e_{m+1} et annule les autres vecteurs de notre base de V . On construit alors un graphe

orienté $G(\mu)$ sur l'ensemble des tableaux semistandard de forme μ , en reliant T à S s'il existe un entier m pour lequel $u_m(f_T)$ ait un coefficient non nul sur f_S . Cette décomposition s'obtient par les algorithmes dits de *straightening* (à moins que l'on ne préfère le français « redressement », un peu trop judiciaire peut-être), pour lesquels on renvoie à [8].

Le graphe orienté $G(\mu)$ sera évidemment compatible avec le graphe de Hasse de $S_\mu V$.

Exemple. — La puissance de Schur $S_{21}\mathbb{C}^3$ est de dimension 8, avec 111 pour unique poids de multiplicité plus grande que 1, en l'occurrence 2. Son diagramme de Hasse et le graphe de ses tableaux semistandard sont les suivants :

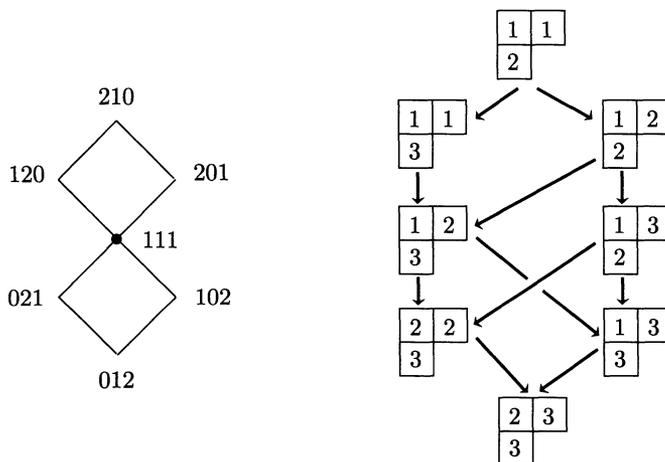


Figure 18. Poids et tableaux pour $S_{21}\mathbb{C}^3$.

On obtient ainsi dix chaînes croissantes maximales distinctes de tableaux semistandard — et par conséquent, comme on va le voir, autant de composantes distinctes de $S_\mu(S_{21}\mathbb{C}^3)$ pour un poids régulier μ .

DÉFINITION 5.2. — On dira qu'une suite de tableaux de Young T_1, \dots, T_k est bien ordonnée si pour tout i , T_i est un élément maximal du sous-graphe Γ_i de $G(\mu)$ formé des tableaux autres que T_1, \dots, T_{i-1} . Alors, \mathcal{M}_{Γ_i} est un sous- B -module de $S_\mu V$.

Plongements associés. — Soit donc un ordre total \mathcal{O} sur l'ensemble des tableaux de Young semistandard de forme μ , numérotés d'entiers au plus égaux à d , ordre qui raffine l'ordre partiel induit par l'action de B . On

en déduit un drapeau complet de sous- B -modules de $S_\mu V$, canoniquement attachés à B puisque indépendants de la base choisie. On en déduit immédiatement un plongement

$$\varphi_{\mathcal{O}} : X = \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(S_\mu V) = Y.$$

Bien entendu, à moins que $S_\mu V$ soit sans multiplicité, le plongement $\varphi_{\mathcal{O}}$ n'est jamais stabilisant. Mais il nous permet d'obtenir davantage de composantes principales, et nous nous contenterons de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 5.3. — Soit λ une partition de longueur ℓ . Alors pour toute suite bien ordonnée T_1, \dots, T_ℓ de tableaux de Young de forme μ , la puissance de Schur $S_\nu V$, où $\nu = \sum_i \lambda_i c(T_i)$, est de multiplicité non nulle dans le pléthysme $S_\lambda(S_\mu V)$.

On a noté ici $c(T)$ le contenu du tableau T , c'est-à-dire le d -uplet formé des nombres d'occurrences dans T des entiers successifs.

Remarque. — Concluons par quelques remarques générales sur la méthode dont nous avons dans cet article fait un usage immodéré pour étudier différents types de pléthysmes. On aura constaté qu'un ingrédient essentiel en est la construction de sous- B -modules, et plus généralement de drapeaux de sous- B -modules, dans des G -modules irréductibles. Si une description complète de ces drapeaux ne pose pas de difficulté dans le cas sans multiplicité, il serait intéressant d'en avoir des constructions plus systématiques en général. Peut-être les bases cristallines des G -modules se prêteraient-elles avantageusement à une telle étude.

Par ailleurs, le problème de la décomposition d'un pléthysme n'est qu'un cas particulier des problèmes de branchement : étant donné un H -module irréductible W , et G un sous-groupe réductif de H , comment se décompose la restriction de W à G ? Dans le cas du pléthysme, on prendra par exemple $H = \text{Gl}(S^\ell V)$, W sera une puissance de Schur de cette puissance symétrique, et $G = \text{Gl}(V)$. Mais notre méthode s'étend à des problèmes de branchement plus généraux : que l'on songe par exemple au cas le plus simple du plongement naturel d'une grassmannienne orthogonale ou symplectique, dans une grassmannienne ordinaire. Peut-être les applications de Gauss pourraient-elles avoir des applications intéressantes dans ce cadre plus général.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BERTRAM, L. EIN, R. LAZARSEFELD, Vanishing theorems, a theorem of Severi, and the equations defining projective varieties, *J. Am. Math. Soc.*, 4 (1991), 587–602.
- [2] A. BOREL, A. WEIL, Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts, in *Séminaire Bourbaki*, exposé n° 100 par J.-P. Serre, 1954.
- [3] R. BOTT, Homogeneous vector bundles, *Annals of Math.*, 66 (1957), 203–248.
- [4] M. BRION, Sur l'image de l'application moment, in *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreuil et Marie-Paule Malliavin 1986*, *Lecture Notes in Math.*, 1296, Springer-Verlag 1987.
- [5] M. BRION, Stable properties of plethysm : on two conjectures of Foulkes, *Manuscripta Math.*, 80 (1993), 347–371.
- [6] C. CARRÉ, Plethysm of elementary functions, *Bayreuther Math. Schriften*, 31 (1990), 1–18.
- [7] C. CARRÉ, J.-Y. THIBON, Plethysm and vertex operators, *Advances in Appl. Math.*, 13 (1992), 390–403.
- [8] J. DÉSARMÉNIEN, J. KUNG, G.C. ROTA, Invariant theory, Young bitableaux and combinatorics, *Advances in Math.*, 27 (1978), 63–92.
- [9] J. DVIR, On the Kronecker product of \mathcal{S}_n characters, *J. of Algebra*, 154 (1993), 125–140.
- [10] H.O. FOULKES, Concomitants of the quintic and the sextic up to degree four in the coefficients if the ground form, *J. London Math. Soc.*, 25 (1950), 205–209.
- [11] W. FULTON, J. HARRIS, Representation theory, a first course, *Graduate texts in Mathematics*, Springer Verlag, 1991.
- [12] I.M. GELFAND, M.M. KAPRANOV, A.V. ZELEVINSKY, Discriminants, Resultants and Multidimensional determinants, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [13] R. HOWE, $(\mathrm{Gl}_n, \mathrm{Gl}_m)$ -duality and symmetric plethysm, *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, 97 (1987), 85–109.
- [14] G. JAMES, A. KERBER, The representation theory of the symmetric group, in *Encyclopedia of Math. and its Applications*, 16, Addison Wesley, Reading, 1981.
- [15] A.A. KLYACHKO, Stable vector bundles and hermitian operators, preprint.
- [16] D. KNUTSON, λ -rings and the representation theory of the symmetric group, *Lecture Notes in Math.*, 308 (1973).
- [17] D.E. LITTLEWOOD, The theory of group characters and matrix representations of groups, second edition, Oxford University Press, 1950.
- [18] L. MANIVEL, Gaussian maps and plethysm, à paraître in *Actes du Congrès Europroj*, Catania, Sicile, 1993.
- [19] I.G. MACDONALD, Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [20] P.-L. MONTAGARD, Une nouvelle propriété de stabilité du pléthysme et quelques conséquences, Thèse de l'Université Joseph Fourier, octobre 1995.
- [21] J. WAHL, Gaussian maps and tensor products of irreducible representations, *Manuscripta Math.*, 73 (1991), 229–259.

- [22] J. WAHL, On the cohomology of the square of an ideal sheaf, preprint.
- [23] S. WEINTRAUB, Some observations on plethysm, *J. of Algebra*, 129 (1990), 103–114.
- [24] H. WEYL, *The classical groups*, Princeton University Press, 1946.
- [25] N.J. WILDBERGER, The moment map of a Lie group representation, *Trans. Am. Math. Soc.*, 330 (1992), 257–268.

Manuscrit reçu le 6 novembre 1996,
accepté le 23 janvier 1997.

Laurent MANIVEL,
Institut Fourier
UMR 5582 du CNRS
Université Grenoble 1
BP 74
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex (France).
Laurent.Manivel@ujf-grenoble.fr