ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES LAURENT
BERNARD MALGRANGE

Cycles proches, spécialisation et $\mathcal{D}$-modules

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 5 (1995), p. 1353-1405
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_5_1353_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 5 (1995), 1353–1405

CYCLES PROCHES, SPÉCIALISATION ET $\mathcal{D}$-MODULES

par Y. LAURENT et B. MALGRANGE

1. Introduction.

Cet article se propose de reprendre systématiquement la théorie des cycles proches pour les $\mathcal{D}$-modules holonomes. Rappelons d'abord que, dans le cas régulier, cette théorie est la contre-partie dans la "correspondance de Riemann-Hilbert" de la théorie de Grothendieck-Deligne-Verdier des cycles proches et de la spécialisation pour les faisceaux constructibles [SGA], [Ve1]; voir à ce propos [Be], [Ka1], et pour un cas particulier [Ma1].

Cette théorie garde un sens pour les modules holonomes quelconques, et même pour les modules "spécialisables", en un sens qui sera rappelé plus bas; des exposés systématiques de cette question se trouvent dans [Sa1] et [Me1]; voir aussi [Sai1]. Pour les cycles évanescents, une analyse voisine, utilisant les opérateurs microdifférentiels et la "seconde microlocalisation" se trouve dans [KK1], [La1], [La2], [La3]; ce point de vue ne sera abordé ici qu'incidemment.

Les cycles proches, et, plus généralement, la "spécialisation" des $\mathcal{D}$-modules s'obtiennent en passant au gradué associé à une certaine filtration, connue sous le nom de "V-filtration". L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne s'applique pas aux complexes ayant de la cohomologie en plusieurs degrés; pourtant le passage aux complexes est indispensable si l'on veut obtenir des énoncés satisfaisants de commutation aux opérations usuelles (dualité, image inverse, image directe).

Mots-clés : $\mathcal{D}$-modules – Cycles évanescents – Spécialisation.
Classification math. : 35A27.

Notre but initial était de combler cette lacune; en fait le résultat principal (théorème 8.5) va plus loin : soit Y une sous-variété lisse d'une variété analytique complexe X; alors la spécialisation est une *équivalence* entre "complexes $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ spécialisables" et "complexes monodromiques sur $T_Y X$" (voir les définitions plus loin). À noter que, même dans le cas où la cohomologie est concentrée en un seul degré, le résultat est significativement plus fort que le résultat habituel.

Pour établir ce résultat, on commence par traiter le cas où X est un fibré vectoriel sur Y; on a alors une flèche évidente de complétion formelle (pour la V-filtration) le long de Y, dont on montre qu'elle est une équivalence; la flèche de spécialisation est alors simplement l'inverse de la précédente.

Dans le cas général, la définition de la flèche de spécialisation est plus délicate; elle utilise le résultat précédent et l'idée, due à Verdier, de se ramener aux cycles proches par déformation au cône normal : quant à la définition des cycles proches, elle repose sur une étude de l'opération "image inverse" dans les $\mathcal{D}$-modules qui évite la bidualité et permet d'étendre cette opération aux cas non cohérents (voir au §2). Une fois la flèche définie, le fait qu'elle donne une équivalence se voit localement : on est alors ramené à utiliser encore une fois le cas des fibrés vectoriels.

C. Sabbah [Sa2] a obtenu indépendamment une méthode de spécialisation qui s'étend aux complexes; elle est fondée sur un procédé assez différent du nôtre (Sabbah utilise une complétion formelle par rapport à la monodromie, et non pas, comme nous, une complétion formelle de long de Y). Par ailleurs, il n'obtient pas les équivalences dont il est question ci-dessus.

Nous nous placerons dans le contexte des variétés analytiques complexes lisses; une théorie analogue, et même un peu plus simple, peut être faite pour les variétés algébriques lisses sur $\mathbb{C}$; nous laissons le lecteur s'en assurer. Les définitions que nous prenons sont les définitions habituelles; voir par exemple les ouvrages de référence [Bo] et [Me1]; toutefois comme certaines notations diffèrent légèrement d'un ouvrage à l'autre, nous allons les rappeler brièvement.

1.1. — Soit X une variété analytique complexe (lisse) de dimension m; on note $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, et Ω_X^p le faisceau des p-formes holomorphes; on pose aussi $\omega_X = \Omega_X^m$. On note encore $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathcal{O}_X$.

Si M est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche (resp. à droite) l'ensemble $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} M$ (resp. $M \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$) est muni canoniquement d'une structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite (resp. à gauche) : on le note M^v (resp. ${}^vM$). Soit $D(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée dont les objets sont les complexes de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche. On écrira $D^+(\mathcal{D}_X)$ resp. $D^-(\mathcal{D}_X)$, resp. $D^b(\mathcal{D}_X)$ pour la sous-catégorie pleine des complexes à cohomologie bornée à gauche, resp. à droite, resp. à gauche et à droite (il revient au même de se limiter aux complexes bornés à gauche, resp. à droite, resp. à gauche et à droite).

On note encore $D_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}_X$ formée des complexes à cohomologie *cohérente*, et on définit de même $D^+_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ *etc.* Il nous arrivera aussi quelquefois de considérer les sous-catégories pleines $D_{q-\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$, $D^+_{q-\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ *etc.* de $D(\mathcal{D}_X)$ formées des complexes à cohomologie *quasi-cohérente*, c'est-à-dire localement limite inductive filtrante de faisceaux $\mathcal{D}_X$-cohérents.

Si l'on travaille avec les modules à droite au lieu des modules à gauche, on écrira $D(\mathcal{D}_X)^v$, $D^+(\mathcal{D}_X)^v$, $D_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)^v$, *etc.*

1.2. Dualité. — Pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b(\mathcal{D}_X)$, $M' = R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{D}_X)[m]$ est naturellement un objet de $D^+(\mathcal{D}_X)^v$, bien défini à isomorphisme unique près; on pose alors $DM = {}^vM' \in \mathrm{ob}\, D^+(\mathcal{D}_X)$; si M est à cohomologie cohérente, on a $M' \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$.

1.3. Image directe. — Soit Y une autre variété analytique complexe, de dimension n, et soit $f : Y \to X$ un morphisme. Les modules de transfert $\mathcal{D}_{Y\to X}$ et $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ sont définis de la manière usuelle (voir les références citées). Alors, pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b(\mathcal{D}_Y)$, on pose $f_+M = Rf_*(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes}} M)$, où Rf_* désigne l'image directe dérivée faisceautique usuelle; ceci a un sens, et définit un objet de $D^b(\mathcal{D}_X)$ à cause des propriétés d'amplitude finie de $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes}}$ et de Rf_*. Rappelons le résultat suivant :

THÉORÈME 1.3.1. — *Supposons f propre, et supposons qu'on ait $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Y)$; supposons de plus que les $\underline{H}^i M$ soient munies d'une bonne filtration, globalement sur Y (ou au moins, "localement sur X", i.e. sur une famille d'ouverts $f^{-1}(U_i)$, les U_i formant un recouvrement ouvert de X). Alors, on a $f_+M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$.*

Notons encore le résultat suivant : soit Z une troisième variété analytique complexe, et soit g un morphisme $Z \to Y$; alors, si g *est propre*, on a $(fg)_+ = f_+g_+$ (ceci se voit à partir du fait qu'on a, sous la même hypothèse $R(fg)_* = Rf_*Rg_*$). En particulier, en décomposant f en $Y \xrightarrow{i} Y \times X \xrightarrow{p} X$ où i est l'injection (id, f) et p la projection, on a $f_+ = p_+i_+$. En décrivant "explicitement" p_+ et i_+, on obtient alors une description plus explicite de f_+ ; nous renvoyons pour cela à la littérature.

Encore une notation pour terminer : pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b(\mathcal{D}_Y)$, on posera quelquefois $f_! M = Rf_!(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes}} M)$, $Rf_!$ désignant le foncteur dérivé de l'image directe faisceautique à support propre (on fera toutefois attention à la confusion possible entre l'image directe faisceautique et l'image directe au sens des $\mathcal{D}$-modules). On a ici, sans hypothèse de propreté $(fg)_! = f_!g_!$. Dans le cas où f est propre, on a évidemment $f_!M = f_+M$.

1.4. Image inverse. — Soit encore $f : Y \to X$ un morphisme avec $\dim X = m$, $\dim Y = n$. Pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b(\mathcal{D}_X)$, on pose $f^! M = \mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\underset{f^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes}} f^{-1}M[n-m]$ (f^{-1} désigne, ici et dans la suite, l'image inverse faisceautique) ; c'est un objet de $D^b(\mathcal{D}_Y)$ défini à isomorphisme unique près. On a les propriétés suivantes :

1.4.1. — Si M est à cohomologie quasi-cohérente, $f^!M$ est à cohomologie quasi-cohérente; mais la même assertion avec "quasi-cohérent" remplacé par "cohérent" est *fausse* en général. Pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$, on posera néanmoins $f^+M = Df^!DM$. Une étude plus détaillée de cette opération, et une extension de la définition aux M à cohomologie non nécessairement cohérente seront vues en 2.5–2.7.

1.4.2. — Soit $g : Z \to Y$ un autre morphisme; on a un isomorphisme fonctoriel $(fg)^! = g^!f^!$; en particulier, en factorisant f par le graphe, on est ramené aux deux cas d'une immersion fermée et d'une projection.

Le cas d'une projection se traite facilement : supposons qu'on ait $Y = X \times T$, $\dim T = d = n - m$, et soit p la projection canonique $Y \to X$; on vérifie facilement qu'on a $p^!M = M \boxtimes \mathcal{O}_T[d]$, $\boxtimes$ le produit tensoriel total; si M est à cohomologie cohérente, on en déduit aussitôt que $p^!M$ est à cohomologie cohérente et qu'on a $p^+M = M \boxtimes \mathcal{O}_T[-d]$; d'où un isomorphisme $p^!M = p^+M[2d]$.

Remarque. — Supposons plus généralement que $f : Y \to X$ soit une submersion; comme c'est localement un produit, le résultat précédent montre que $f^!$ envoie $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ dans $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Y)$.

On a encore ici un isomorphisme $f^!M = f^+M[2d]$; esquissons la démonstration. Soit $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$; on a un isomorphisme

$$f^!DM = \mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\underset{f^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes}} f^{-1}DM[d] \xrightarrow{\sim} R\underline{\mathrm{Hom}}_{f^{-1}\mathcal{D}_X}(M^v, \mathcal{D}_{Y\to X})[d-m].$$

(Cette flèche se définit facilement pour tout complexe de $D^b(\mathcal{D}_X)$; pour voir qu'elle est un isomorphisme si M est à cohomologie cohérente, se ramener à $M=$ un module, puis à $M = \mathcal{D}_X$.)

Le même type de raisonnement donne un isomorphisme

$$\begin{aligned} f^+M^v = Df^!DM^v &= R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(R\,\mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{D}_X}(M^v, \mathcal{D}_{Y\to X}), \mathcal{D}_Y) \\ &\xleftarrow{\sim} f^{-1}M^v \overset{L}{\underset{f^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes}} R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\to X}, \mathcal{D}_Y). \end{aligned}$$

Pour terminer, on utilise un argument de passage gauche $\leftrightarrow$ droite et le fait qu'on a $R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\to X}, \mathcal{D}_Y) = \mathcal{D}_{X\leftarrow Y}[-d]$.

Dans le cas d'un produit, on vérifie facilement que la flèche ainsi obtenue coïncide, au signe près, avec celle définie plus haut (nous laissons les questions de signe au lecteur intéressé).

1.4.3. — Supposons maintenant que Y soit une sous-variété fermée de X, et notons i l'injection canonique $Y \to X$. On a le résultat suivant :

THÉORÈME 1.4.4 (Kashiwara). — *Le foncteur $i_!$ est une équivalence de $D^b_{q-\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Y)$ avec la sous-catégorie de $D^b_{q-\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ formée des complexes dont la cohomologie est à support dans Y. Un quasi-inverse est $i^!$. Même chose avec "quasi-cohérent" remplacé par "cohérent"; de plus, dans ce dernier cas on a $i^! = i^+$.*

1.5. Dualité relative. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme; on définit un *morphisme-trace* $f_!f^!\mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_X$. (Nous renvoyons à la littérature pour la définition générale [Me1], [Sai2], [Sc]); pour $N \in \mathrm{ob}\, D^b(\mathcal{D}_X)$ on en déduit le morphisme de dualité

1.5.1. — $f_!f^!N \simeq f_!f^!\mathcal{D}_X \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} N \longrightarrow N$. (L'égalité se déduit de la formule de projection.) Notons aussi que le morphisme de dualité est compatible avec la composition $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$.

Prenons maintenant $M \in \operatorname{ob} D^b(\mathcal{D}_Y)$; on définit un morphisme

1.5.2. — $Rf_* R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(M, f^! N) \to R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(f_! M, N)$ comme le composé du morphisme naturel

$$Rf_* R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(M, f^! N) \to R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(f_! M, f_! f^! N)$$

et de 1.5.1. Rappelons le théorème de dualité

THÉORÈME 1.5.3. — *Supposons que f soit propre, et que M satisfasse les hypothèses de* 1.3.1. *Alors* 1.5.2 *est un isomorphisme.*

Sous les mêmes hypothèses, en prenant les sections globales, on en déduit un isomorphisme.

1.5.4. — $R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(M, f^! N) \xrightarrow{\sim} R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(f_! M, N)$.

Pour les démonstrations, voir les références citées. Dans certaines d'entre elles, le théorème n'est énoncé que pour $M = \mathcal{D}_X$ (auquel cas il peut s'énoncer $f_! DM = Df_! M$). Pour passer de là au cas général, il suffit de tensoriser avec une résolution plate de N.

1.6. Localisation. — Soit Y un sous-ensemble analytique fermé (non nécessairement lisse) de X, et soit $\mathcal{I}_Y$ l'idéal de définition de Y dans $\mathcal{O}_X$. Si M est un $\mathcal{D}_X$-module, on note $\Gamma_{[Y]}M$ le sous-module des sections annulées par une puissance de $\mathcal{I}_Y$; c'est naturellement un $\mathcal{D}_X$-module. Le foncteur $\Gamma_{[Y]}$ est exact à gauche, et on désignera par $R\Gamma_{[Y]}$ le foncteur dérivé. On posera aussi $\Gamma_{[X-Y]}M = M/\Gamma_{[Y]}M$ et on désignera par $R\Gamma_{[X-Y]}$ le foncteur dérivé à droite (calculé à partir d'une résolution injective) ; faire attention que $\Gamma_{[X-Y]}$ n'étant pas exact à gauche, la flèche $\Gamma_{[X-Y]}M \to R^0\Gamma_{[X-Y]}M$ n'est pas bijective en général. On écrira aussi souvent $M[*Y]$ pour $R\Gamma_{[X-Y]}M$; dans le cas où Y est une hypersurface, le foncteur $M \mapsto M[*Y]$ est exact, et coïncide avec la localisation $M \mapsto \mathcal{O}_X[f^{-1}] \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} M$, f une équation locale de Y.

Supposons maintenant que Y soit une sous-variété lisse de X, et soit comme en 1.4.3, $i : Y \to X$ l'injection. On a le résultat (facile) suivant :

1.6.1. — Pour $M \in \operatorname{ob} D^b(\mathcal{D}_X)$, on a $i^! M[*Y] = 0$.

En utilisant le triangle distingué $R\Gamma_{[Y]}M \to M \to M[*Y] \xrightarrow{+1}$, on en déduit un isomorphisme $i^! R\Gamma_{[Y]}M \xrightarrow{\sim} i^! M$. Ceci, joint à 1.4.4, montre le résultat suivant :

1.6.2.

i) Pour $M \in \operatorname{ob} D^b_{q\,\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$, on a un isomorphisme $R\Gamma_{[Y]}M \xrightarrow{\sim} i_!i^!M$.

ii) Pour $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$, $i^!M$ est à cohomologie $\mathcal{D}_Y$-cohérente si et seulement si $R\Gamma_{[Y]}M$, ou $M[*Y]$, est à cohomologie $\mathcal{D}_X$-cohérente (en général, ces derniers complexes sont seulement à cohomologie quasi-cohérente).

Dans les hypothèses de i), on vérifie que la flèche canonique $R\Gamma_{[Y]}M \to M$ coïncide avec le morphisme de dualité $i_!i^!M \to M$ défini en 1.4.

2. Fibrés vectoriels et $\mathcal{D}$-modules.

Soit X une variété analytique complexe de dimension n, et soit E un fibré vectoriel complexe de rang d sur Y ; on note $\overline{E}$ le complété projectif de E et on pose $S = \overline{E} - E$ (S est donc isomorphe à $P(E)$, le projectif des droites de E). On note p la projection de $\overline{E}$, ou E, ou S, sur Y et on note i l'injection "section nulle" $Y \to E$ (ou $Y \to \overline{E}$) ; on identifiera Y à son image $i(Y)$.

Soit $\mathcal{O}\langle E\rangle$ le faisceau *sur* Y des fonctions holomorphes sur E, à coefficients polynomiaux dans la fibre; soit de même $\mathcal{D}\langle E\rangle$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans $\mathcal{O}\langle E\rangle$. C'est un faisceau d'anneaux à fibres nœthériennes, et cohérent à droite et à gauche; ceci se voit par le même procédé que pour $\mathcal{D}_Y$, en filtrant par l'ordre des opérateurs différentiels et en étudiant le gradué associé; voir par exemple [Ma4]. On peut donc parler de faisceaux de $\mathcal{D}\langle E\rangle$-modules, par exemple à gauche, cohérents (= localement de présentation finie), ou quasi-cohérent (localement limites inductives filtrantes de faisceaux cohérents).

Pour éviter la lourde manipulation des variétés algébriques relatives sur une base analytique, nous nous ramènerons, quand il y aura lieu, au cas analytique par le théorème de projection de Grauert-Remmert [GR]. On a évidemment $\mathcal{D}\langle E\rangle = p_*\mathcal{D}_{\overline{E}}[*S]$. Soit alors M un $\mathcal{D}\langle E\rangle$-module, et posons $M^{\mathrm{an}} = \mathcal{D}_{\overline{E}}[*S] \underset{p^{-1}\mathcal{D}\langle E\rangle}{\otimes} p^{-1}M$. Posons aussi la définition suivante :

DÉFINITION 2.1. — *Un $\mathcal{D}_{\overline{E}}[*S]$-module est dit "algébrisable" s'il est quasi-cohérent et si localement sur Y (pour la projection p), il est limite inductive filtrante de faisceaux $\mathcal{O}_{\overline{E}}$-cohérents.*

PROPOSITION 2.2. — *Le foncteur $M \mapsto M^{\mathrm{an}}$ est exact. C'est une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{D}\langle E\rangle$-modules quasi-cohérents (resp. cohérents) et la catégorie des $\mathcal{D}_{\overline{E}}[*S]$-modules algébrisables (resp. cohérents et algébrisables).*

Esquissons la démonstration; une démonstration plus détaillée se trouve dans [Ab]. Tout d'abord, l'exactitude est immédiate; d'autre part, si M est quasi-cohérent sur $\mathcal{D}\langle E\rangle$, il est clair que M^{an} est algébrisable. Réciproquement, soit N un $\mathcal{D}_{\overline{E}}[*S]$-module algébrisable, et posons $\widetilde{N} = p_*N$; $\widetilde{N}$ est un $\mathcal{D}\langle E\rangle$-module, et il résulte du théorème de Grauert-Remmert que $\widetilde{N}$ est quasi-cohérent, que la flèche naturelle $\widetilde{N}^{\mathrm{an}} \to N$ est un isomorphisme, et qu'on a $R^ip_*N = 0$, $i \geq 1$. Le résultat se déduit aisément de là.

Remarque 2.3. — Avec les mêmes notations, le raisonnement précédent montre que le foncteur $N \mapsto p_*N = Rp_*N$ est un inverse de $M \mapsto M^{\mathrm{an}}$; on en déduit que la proposition précédente s'étend aux complexes; plus précisément avec des notations évidentes, on a le résultat suivant : le foncteur $M \mapsto M^{\mathrm{an}}$ est une équivalence de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$ avec le sous-complexe de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_{\overline{E}}[*S])$ formé des complexes à cohomologie algébrisable; même chose avec "$q-\mathrm{coh}$" au lieu de "coh".

2.4. — Pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, on définit $DM, M[*Y]$, et $R\Gamma_{[Y]}M$ en adaptant de manière évidente les définitions du §1; le premier complexe appartient à $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, les deux derniers à $D^b_{q-\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$. Pour définir $i^!M$ et i^+M, on pose $i^!M = i^!M^{\mathrm{an}}$ et naturellement $i^+M = Di^!DM$. On vérifie facilement qu'on a aussi $i^!M = \mathcal{D}_{Y\to E} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}\langle E\rangle}{\otimes}} M[-d]$ (la structure de $\mathcal{D}\langle E\rangle$-module à droite de $\mathcal{D}_{Y\to E}$ est bien sûr celle qu'on obtient par restriction des scalaires de $i^{-1}\mathcal{D}_E$ à $\mathcal{D}\langle E\rangle$).

Pour définir p_+M, on peut soit poser $p_+M = p_+M^{\mathrm{an}}$ (M^{an} est considéré comme un complexe de $\mathcal{D}_{\overline{E}}$-module), soit procéder de la manière suivante : on note $\mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{E\to Y}$ l'équivalent "algébrique relatif" de $\mathcal{D}_{E\to Y}$; c'est un faisceau sur Y de $(\mathcal{D}\langle E\rangle, \mathcal{D}_Y)$-bimodules, égal à l'image directe faisceautique $p_*(\mathcal{D}_{\overline{E}}[*S] \underset{\mathcal{D}_{\overline{E}}}{\otimes} \mathcal{D}_{\overline{E}\to Y})$; on définit de même $\mathcal{D}^{\mathrm{alg}}_{Y\to E}$; alors, pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, on pose $p_+M = \mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{Y\leftarrow E} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}\langle E\rangle}{\otimes}} M$. L'équivalence des deux définitions de p_+M se fait comme en 2.2 et 2.3, en utilisant le théorème d'annulation de Grauert-Remmert; nous laissons les détails au lecteur.

2.5. — Soient maintenant $\widehat{\mathcal{O}}_{E|Y}$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{E\to Y}$ les complétés formels de $\mathcal{O}\langle E\rangle$ et $\mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{E\to Y}$ (ou de $\mathcal{O}_E$ et $\mathcal{D}_{E\to Y}$, cela revient au même) le long de Y ; par définition, on a $\widehat{\mathcal{O}}_{E|Y} = \varprojlim \mathcal{O}\langle E\rangle/\mathcal{I}^k$, $\widehat{\mathcal{D}}_{E\to Y} = \varprojlim[\mathcal{O}\langle E\rangle/\mathcal{I}^k \underset{\mathcal{O}\langle E\rangle}{\otimes} \mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{E\to Y}]$, $\mathcal{I}$ l'idéal de définition de Y dans E (attention : $\widehat{\mathcal{D}}_{E\to Y}$ n'est pas égal à $\widehat{\mathcal{O}}_{E|Y} \underset{\mathcal{O}\langle E\rangle}{\otimes} \mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{E\to Y}$) ; on définit de même $\widehat{\mathcal{D}}_{Y\leftarrow E}$. Pour $M \in \operatorname{ob} D^b(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, on pose $\hat{p}_+M = \widehat{\mathcal{D}}_{Y\leftarrow E} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}\langle E\rangle}{\otimes}} M$.

Sous l'hypothèse $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, on définit une flèche $\hat{p}_+M \to i^+M$ de la manière suivante : soit $N = DM$; l'isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} DN$ donne

$$\hat{p}_+M = \hat{p}_+DN = \widehat{\mathcal{D}}_{Y\leftarrow E} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}\langle E\rangle}{\otimes}} DN = {}^vR\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}\langle E\rangle}(N, \widehat{\mathcal{D}}_{E\to Y})[-n-d]$$

(ce sont des isomorphismes de complexes de $\mathcal{D}_Y$-modules) ; comme on a évidemment $i^!\mathcal{D}_{E\to Y} \xrightarrow{\sim} i^!\widehat{\mathcal{D}}_{E\to Y}$, on en déduit une flèche

$$\hat{p}_+M \to {}^vR\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(i^!N, i^!\mathcal{D}_{E\to Y})[-n-d].$$

Mais on a $\mathcal{D}_{E\to Y} = p^!\mathcal{D}_Y[d]$; d'où $i^!\mathcal{D}_{E\to Y} = i^!p^!\mathcal{D}_Y[d] = \mathcal{D}_Y[d]$; on vérifie que cet isomorphisme est un isomorphisme de $\mathcal{D}_Y$-bimodules ; d'où finalement la flèche cherchée

$$\hat{p}_+M \longrightarrow {}^vR\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(i^!N, \mathcal{D}_Y)[-n] = Di^!N = i^+M.$$

THÉORÈME 2.6. — *Sous l'hypothèse précédente: $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, cette flèche est un isomorphisme.*

Avec les notations précédentes, il revient au même de démontrer que la flèche $R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}\langle E\rangle}(N, \widehat{\mathcal{D}}_{E\to Y})[-d] \to R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(i^!N, \mathcal{D}_Y)$ est un isomorphisme.

On se ramène au cas où N est un module ; comme le théorème est local sur Y, en prenant une résolution locale de N, on se ramène finalement au cas où $N = \mathcal{D}\langle E\rangle$. La flèche à regarder est alors la suivante :

$$\widehat{\mathcal{D}}_{E\to Y} \longrightarrow R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\to E}, \mathcal{D}_Y) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\to E}, \mathcal{D}_Y).$$

On vérifie que cette flèche coïncide avec l'isomorphisme défini ainsi : soit $\mathcal{O}^k_E$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_E$ formé des fonctions polynomiales de degré $\leq k$ par rapport aux variables de la fibre ; on a $\mathcal{D}_{Y\to E} = \mathcal{O}_E \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{D}_Y = \varinjlim \mathcal{O}^k_E \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{D}_Y$; d'où un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\to E}, \mathcal{D}_Y) = \varprojlim \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{O}^k_E \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{D}_Y, \mathcal{D}_Y) = \widehat{\mathcal{D}}_{E\to Y}$$

ceci établit le résultat cherché.

2.7. — Le théorème précédent, joint à 1.4.2, permet une description de l'opération f^+ de la manière suivante : tout d'abord, soit $i : Y \to X$ une immersion fermée et supposons qu'il existe une rétraction $p : X \to Y$ avec $p \circ i = \mathrm{id}_Y$. Définissons $\widehat{\mathcal{D}}_{Y \leftarrow X}$ comme ci-dessus par complétion formelle de $\mathcal{D}_{Y \leftarrow X}$; pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$, on a comme ci-dessus un isomorphisme fonctoriel $\hat{p}_+ M \xrightarrow{\sim} i^+ M$, avec par définition $\hat{p}_+ M = \widehat{\mathcal{D}}_{Y \leftarrow X} \underset{i^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} i^{-1} M$. Dans le cas d'un morphisme quelconque : $f : Y \to X$, on le factorise alors par le graphe $Y \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{q} X$; pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$, on a alors $f^+ M = i^+ q^+ M$; q^+ se décrit comme en 1.4.2; et pour la description de i^+, on est dans la situation précédente, avec $p =$ la projection sur le graphe.

Maintenant, pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b(\mathcal{D}_X)$, M n'étant pas forcément à cohomologie cohérente, nous *définirons $f^+ M$ par les formules précédentes.* Il revient au même de faire ceci : notons $\mathcal{D}_X^g$ le faisceau $\mathcal{D}_X$, considéré comme $\mathcal{D}_X$-module à gauche; alors $f^+ \mathcal{D}_X^g$ est muni naturellement d'une structure de $f^{-1}\mathcal{D}_X$-module à droite [on l'obtient à partir des formules ci-dessus, ou bien par fonctorialité à partir de l'action à droite de $\mathcal{D}_X$ qui donne une flèche $\mathcal{D}_X \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^g, \mathcal{D}_X^g)$] ; *on pose alors* $f^+ M = f^+ \mathcal{D}_X^g \overset{L}{\underset{f^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes}} f^{-1} M$.

Dans le cas où f est une immersion fermée, notée i, ce qui précède donne aussi une description *locale* de $i^+ \mathcal{D}_X^g$: en effet, on a alors une situation de produit, en particulier une rétraction $p : X \to Y$, et l'on a $i^+ \mathcal{D}_X^g \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{Y \leftarrow X}$ (le second membre étant à définir à partir de cette rétraction).

Dans le cas d'une immersion fermée quelconque, il n'existe pas en général de telle rétraction; néanmoins, nous écrirons encore quelquefois abusivement $i^+ \mathcal{D}_X^g = \widehat{\mathcal{D}}_{Y \leftarrow X}$; ceci pour rappeler cette description locale qu'on peut considérer comme le substitut dans le cas général d'une rétraction, ou du "morphisme d'effondrement".

3. Complexes monodromiques.

Comme au numéro précédent, E est un fibré vectoriel de rang d sur Y, avec $\dim Y = n$; nous gardons les mêmes notations.

Soit θ le champ de vecteurs d'Euler de E ; en coordonnées locales, on a $\theta = \Sigma t_i \partial_{t_i}$, les t_i étant des coordonnées de la fibre. On pose la définition suivante :

DÉFINITION 3.1.

i) *Un $\mathcal{D}\langle E\rangle$-module cohérent M est dit monodromique si l'action de θ est localement finie dans M, c'est-à-dire si, pour tout $a \in X$ et tout $m \in M_a$, il existe $b \in \mathbb{C}[s]$ tel qu'on ait $b(\theta)m = 0$.*

ii) *Un complexe $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$ est dit monodromique si ses faisceaux de cohomologie le sont.*

On note $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$ la sous-catégorie pleine de la précédente formée des complexes monodromiques.

Exemple 3.2. — Soit M un complexe de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$ dont la cohomologie est à support dans Y; un tel complexe est monodromique. Il suffit d'établir le résultat lorsque M est un module. La question étant locale, on peut supposer $E = Y \times \mathbb{C}^d$; soient $t = (t_1, \ldots, t_d)$ les coordonnées de $\mathbb{C}^d$, et soit $a \in Y$; pour $m \in M_a$, il existe k tel qu'on ait $t^\alpha m = 0$ pour $|\alpha| \geq k$. Pour $|\beta| = k - 1$, on a

$$t^\beta(\theta + d + k - 1)m = (\theta + d)t^\beta m = \Sigma \frac{\partial}{\partial t_i} t_i t^\beta m = 0$$

par récurrence sur k, on en déduit qu'on a $(\theta + d) \cdots (\theta + d + k - 1)m = 0$; d'où le résultat.

Remarquons accessoirement que l'analogue de 1.4.4 est vrai ici : on a une équivalence de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Y)$ avec la sous-catégorie de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$ formée des complexes dont la cohomologie est à support dans Y, et cette équivalence est donnée par les flèches $i_!$ et $i^!$ analogues à celles définies au §1. Ceci se voit immédiatement à partir de 2.3; une manière plus élémentaire de faire consisterait à reprendre les raisonnements qui conduisent à 1.4.4; nous laissons la question au lecteur.

3.3. — La propriété suivante est immédiate : soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}\langle E\rangle$-modules cohérents; alors "M monodromique" équivaut à "M' et M'' monodromiques".

On en déduit ceci : si l'on a un triangle distingué dans $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, et si deux termes sont monodromiques, le troisième l'est aussi.

Une autre conséquence est la suivante : appelons *élémentaire* un $\mathcal{D}\langle E\rangle$-module de la forme $\mathcal{D}\langle E\rangle/\mathcal{D}\langle E\rangle b(\theta)$, $b \in \mathbb{C}[s]$. Alors tout $\mathcal{D}\langle E\rangle$-module monodromique admet localement (sur Y) des résolutions de longueur arbitrairement grande par des sommes directes finies de modules élémentaires.

PROPOSITION 3.4. — *Soit* $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$; *alors* DM *est monodromique.*

On se ramène au cas d'un module; alors le résultat qui précède nous ramène au cas d'un module élémentaire. Dans ce dernier cas, le résultat est immédiat.

Le résultat suivant jouera un rôle essentiel dans la suite.

PROPOSITION 3.5. — *Soit* $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$. *Alors* $M[*Y]$ *et* $R\Gamma_{[Y]}M$ *sont monodromiques; sous la même hypothèse,* $i^! M$ *et* i^+M *sont à cohomologie cohérente.*

Il suffit d'établir que $i^!M$ est à cohomologie cohérente; en effet ce résultat, joint à 3.4, montre que i^+M est à cohomologie cohérente. D'autre part 1.6.2 montre alors que $R\Gamma_{[Y]}M$ est à cohomologie cohérente; par 3.2, il est donc monodromique. Enfin, le résultat pour $M[*Y]$ s'en déduit en utilisant le triangle distingué $R\Gamma_{[Y]} \to M \to M[*Y] \xrightarrow{+1}$.

Pour démontrer que $i^!M$ est cohérent, on se ramène d'abord au cas où M est un module; le résultat étant local sur X, on se ramène au cas où M est élémentaire; par récurrence, il suffit de traiter le cas $M = \mathcal{D}\langle E\rangle/\mathcal{D}\langle E\rangle(\theta - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. On peut aussi supposer $E = Y \times \mathbb{C}^d$; alors, Y ne joue qu'un rôle de paramètre; on peut donc se ramener au cas où $Y = p^t$ (ensuite, il suffira de prendre le "produit tensoriel total" $\boxtimes \mathcal{D}_Y$). Finalement, il reste à examiner le noyau et le conoyau de l'application $(*)\mathcal{D}\langle\mathbb{C}^d\rangle/\mathcal{I} \xrightarrow{\cdot(\theta-\lambda)} \mathcal{D}\langle\mathbb{C}^d\rangle/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ l'idéal à droite engendré par les coordonnées $(t_1, \ldots, t_d)$ de $\mathbb{C}^d$. Un élément de $\mathcal{D}\langle\mathbb{C}^d\rangle/\mathcal{I} = \mathcal{D}_{p^t \leftarrow \mathbb{C}^d}$ est de la forme $e = \delta(\Sigma a_\alpha \partial^\alpha)$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, avec $\delta t_i = 0$, donc $\delta\theta = 0$. On a donc

$$e(\theta - \lambda) = \delta\Sigma a_\alpha(\theta - \lambda)\partial^\alpha + \delta\Sigma|\alpha|a_\alpha\partial^\alpha = \delta\Sigma(|\alpha| - \lambda)a_\alpha\partial^\alpha.$$

On en déduit immédiatement que $(*)$ est bijectif si $\lambda \notin \mathbb{N}$. Pour $\lambda \in \mathbb{N}$, le noyau de $(*)$ est engendré par les monômes $\delta\partial^\alpha$, $|\alpha| = \lambda$, et le conoyau a la même dimension. Donc ces deux espaces sont de dimension finie. D'où le résultat.

Remarque 3.6. — Un raisonnement analogue à celui qui précède permet de démontrer le résultat suivant : pour $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, M^{an} est à cohomologie cohérente sur $\mathcal{D}_{\overline{E}}$, et pas seulement sur $\mathcal{D}_{\overline{E}}[*S]$: pour le voir, on se ramène comme plus haut au cas où $Y = p^t$, $M = \mathcal{D}\langle E\rangle/\mathcal{D}\langle E\rangle(\theta - \lambda)$. Alors $M^{\mathrm{an}} = \mathcal{D}_{\overline{E}}[*S]/\mathcal{D}_{\overline{E}}[*S](\theta - \lambda)$, et le résultat se vérifie par un calcul direct en coordonnées locales à l'infini.

Le résultat suivant est une propriété de "régularité relative" par rapport à la fibration $E \to X$.

PROPOSITION 3.7. — *Soit* $M \in \operatorname{ob} D^b_{\text{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$. *Alors le morphisme naturel* $p_+M \to \hat{p}_+M$ *est un isomorphisme.*

Compte tenu de l'isomorphisme 2.6 $\hat{p}_+M = i^+M$, ceci donne un isomorphisme $p_+M = i^+M$.

La démonstration se fait comme la précédente, en se ramenant au cas où $M = \mathcal{D}\langle E\rangle/\mathcal{D}\langle E\rangle(\theta - \lambda)$; ce dernier cas se traite alors par un calcul analogue au précédent, qui peut être laissé au lecteur.

Remarque 3.8. — Voici un certain nombre d'autres résultats de "régularité relative", que nous indiquons brièvement. Dans les énoncés qui suivent, on suppose qu'on a $M \in \operatorname{ob} D^b_{\text{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$.

i) La flèche naturelle $p_+M = p_+M^{\text{an}} \to p_+(M^{\text{an}}|E)$ est un isomorphisme (comparaison de la cohomologie "à croissance modérée" et "à croissance quelconque").

ii) Soit j l'injection $E \to \overline{E}$, et posons $(j_{[!]}M)^{\text{an}} = D(DM)^{\text{an}}$ ("prolongement par zéro modéré" $(DM)^{\text{an}}$ est considéré ici comme $\mathcal{D}_{\overline{E}}$-module). Les flèches évidentes ci-dessous sont des isomorphismes

$$p_+R\Gamma_{[Y]}M^{\text{an}} \longrightarrow p_+R\Gamma_Y M^{\text{an}} \longrightarrow p_!(M^{\text{an}}|E) \longrightarrow p_+(j_{[!]}M)^{\text{an}}.$$

Les démonstrations sont analogues à celles de 3.5 et 3.7, et nous les omettrons.

4. La V-filtration.

Soit X une variété analytique complexe de dimension m; sur $\mathcal{D}_X$, on dispose de la filtration par le degré (par rapport aux dérivations) des opérateurs différentiels; dans la suite, cette filtration sera notée $\{F_k\mathcal{D}_X\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Soit Y une sous-variété lisse de X, de codimension d; on note i l'injection $Y \to X$ et on pose $n = m - d$. Soit $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal de définition de Y; sur $i^{-1}\mathcal{D}_X$, on définit une filtration croissante en posant, pour $k \in \mathbb{Z}$

$$V_k\mathcal{D}_X = \{a \in \mathcal{D}_X | a\mathcal{I}_Y^j \subset \mathcal{I}_Y^{j-k} \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$$

[on omet les i^{-1}, et on convient qu'on a $\mathcal{I}_Y^j = \mathcal{O}_X$ pour $j \leq 0$]. Si l'on fixe localement un système de coordonnées de X : $(y,t) = (y_1, \ldots, y_n; t_1, \ldots, t_d)$

dans lesquelles Y est défini par $\{t = 0\}$, les opérateurs y_i et ∂_{y_i} sont de degré zéro pour cette filtration, tandis que les t_j sont de degré -1 et les ∂_{t_j} de degré $+1$.

Soit $E = T_Y X$ le fibré normal à Y dans X, et soit p la projection $E \to Y$; $\mathcal{O}\langle E\rangle$ et $\mathcal{D}\langle E\rangle$ ont la même signification qu'au paragraphe précédent. L'anneau $\mathrm{gr}^V \mathcal{D}_X = \oplus V_k\mathcal{D}_X/V_{k-1}\mathcal{D}_X$ opère canoniquement dans $\oplus \mathcal{I}_Y^j/\mathcal{I}_Y^{j+1} = \mathcal{O}\langle E\rangle$; cette action donne une identification $\mathrm{gr}^V \mathcal{D}_X = \mathcal{D}\langle E\rangle$.

Soit M un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent. Une V-filtration de M (plus exactement de $i^{-1}M$) est une filtration croissante $\{V_kM\}_{k\in\mathbb{Z}}$ telle qu'on ait $(V_k\mathcal{D}_X)V_\ell M \subset V_{k+\ell}M$, et $M = \cup_k V_kM$. Cette filtration est dite "bonne" si localement, il existe des sections $u_1, \ldots, u_N$ et des entiers $k_1, \ldots, k_N$ tels qu'on ait $V_kM = \Sigma V_{k-k_i}\mathcal{D}_X u_i$. Rappelons que la "propriété d'Artin-Rees" est vraie ici, c'est-à-dire qu'on a le résultat suivant :

PROPOSITION 4.1. — *Soit $\{V_kM\}$ une bonne filtration d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent M, et soit $N \subset M$ un sous $\mathcal{D}_X$-module cohérent. Alors la filtration $V_kN = N \cap V_kM$ est bonne.*

Pour la démonstration, voir [Sa1] ou [Me1] (cette démonstration utilise l'anneau de Rees $\oplus(V_k\mathcal{D}_X)\sigma^k \subset \mathcal{D}_X[\sigma, \sigma^{-1}]$; on commence par montrer qu'il est à fibres nœthériennes et cohérent en considérant le gradué associé pour la "filtration F", et on conclut par les arguments usuels dans ce genre de questions; *cf. loc. cit.*).

Soit maintenant $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y} = \varprojlim_{k\ll 0} \mathcal{D}_X/V_k\mathcal{D}_X$ le complété formel de $i^{-1}\mathcal{D}_X$ pour la V-filtration. Le reste du paragraphe va être consacré à établir les propriétés de base de ce faisceau d'anneaux; on a d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. — *$\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ est à fibres nœthériennes à droite et à gauche.*

On va démontrer un résultat plus précis : soit $c \in Y$ et soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y,c}$, muni de la V-filtration induite par celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y,c}$; munissons $\mathrm{gr}^V \mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}$ de la F-filtration induite par celle de $\mathrm{gr}^V \widehat{\mathcal{D}}_{X|Y,c} = \mathrm{gr}^V \mathcal{D}_{X,c} = \mathcal{D}\langle E\rangle_c$, et soit $\overline{\overline{\mathcal{I}}}= \mathrm{gr}^F \mathrm{gr}^V \mathcal{I}$ le gradué associé; c'est un idéal de $\mathrm{gr}^F \mathcal{D}\langle E\rangle_c$; ce dernier anneau, en coordonnées locales est égal à $\mathcal{O}_{Y,c}[t, \eta, \tau]$, $t = (t_1, \ldots, t_d)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\tau(\tau_1, \ldots, \tau_d)$, avec $\eta_i = \mathrm{gr}^F \partial_{y_i}$, $\tau_i = \mathrm{gr}^F \partial_{t_i}$. C'est un anneau nœthérien. Soient alors $\overline{\overline{a}}_1, \ldots, \overline{\overline{a}}_N$ des générateurs de $\overline{\overline{\mathcal{I}}}$; relevons-les en des éléments $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_N$ de $\overline{\mathcal{I}}$, puis en des éléments $a_1, \ldots, a_N$ de $\mathcal{I}$. On a le résultat suivant :

LEMME 4.3. — *Les éléments $a_1, \ldots, a_N$ engendrent $\mathcal{I}$.*

Il est immédiat de vérifier que les $\overline{a}_i$ engendrent $\overline{\mathcal{I}}$ (raisonnement classique; la filtration F est à valeurs dans $\mathbb{N}$); le point délicat est de remonter de $\overline{\mathcal{I}}$ à $\mathcal{I}$: on opère degré par degré mais il faut démontrer que les fonctions obtenues convergent *dans un voisinage fixe de c* : en effet, $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y,c}$ n'est pas complet pour la V-filtration; on a seulement par définition de la limite projective des faisceaux :

$$\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y,c} = \varinjlim_{K} \varprojlim_{k \ll 0} \Gamma(K, \mathcal{D}_X)/\Gamma(K, V_k\mathcal{D}_X);$$

ici, K parcourt un système fondamental de voisinages de c dans Y.

On s'en sort en utilisant *le théorème des voisinages privilégiés*. Plaçons-nous dans un système de coordonnées locales comme ci-dessus, avec $c = (0,0)$. Soit $\mathcal{J}$ un idéal de $\mathrm{gr}^F \mathrm{gr}^V \widehat{\mathcal{D}}_{X|Y,c} = \mathcal{O}_{Y,0}[t,\eta,\tau]$, et soient $b_1, \ldots, b_N$ des générateurs de cet idéal. Un polycylindre $K = \{|y_i| \leq \rho_i; t_j = 0\}$ $(\rho_j > 0)$ est dit privilégié pour $\mathcal{J}$ si les b_j sont définis sur K et si l'on a en outre la propriété suivante : soit $b \in \Gamma(K, \mathcal{O}_Y[t,\eta,\tau])$ et supposons qu'on ait $b_0 \in \mathcal{J}$; alors b est combinaison linéaire de $b_1, \ldots, b_N$ à coefficients dans $\Gamma(K, \mathcal{O}_Y[t,\eta,\tau])$. (En principe, il faudrait dire que K est privilégié pour $(b_1, \ldots, b_N)$; en fait la définition est clairement indépendante de la base choisie pourvu que le polycylindre soit assez petit). La même définition s'étend sans changement aux sous-modules de $\mathcal{O}_{Y,0}[t,\eta,\tau]^p$. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 4.4. — *Tout sous-module de $\mathcal{O}_{Y,0}[t,\eta,\tau]^p$ possède un système fondamental de voisinages privilégiés.*

Ce théorème est démontré par Cartan dans [Ca] pour $\mathcal{O}_{Y,0}$. L'extension aux anneaux de polynômes sur $\mathcal{O}_{Y,0}$ se fait par récurrence sur le nombre de variables, en raisonnant comme dans le théorème classique de Hilbert "A nœthérien entraîne $A[t]$ nœthérien" ; nous laissons les détails au lecteur. Nous le laissons aussi vérifier que ce théorème entraîne le lemme 4.3 et, *a fortiori*, la proposition 4.2.

Les autres propriétés de $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ que nous aurons à utiliser sont données dans le théorème suivant :

THÉORÈME 4.5.

1) *$\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ est cohérent (à droite et à gauche).*

2) *Soit M un $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$-module cohérent (= localement de présentation finie). Définissons les bonnes filtrations de M comme en 4.1. Soit alors $\{V_k M\}$ une bonne filtration et soit N un sous-module cohérent de M. La filtration $\{N \cap V_k M\}$ est bonne.*

3) *$\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ est plat sur $i^{-1}\mathcal{D}_X$ (à droite et à gauche).*

Soit $c \in Y$; plaçons-nous dans un système de coordonnées (y,t) au voisinage de $c = (0,0)$, comme ci-dessus. Soit K un polycylindre compact de Y : $|y_i| \leq \rho_i, t_j = 0$, avec $\rho_i > 0$, et posons $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge = \varprojlim_{k \ll 0} \Gamma(K,\mathcal{D}_X)/\Gamma(K,V_k\mathcal{D}_X)$.

On a les propriétés suivantes :

i) $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge$ est nœthérien à droite et à gauche. Pour cela, on raisonne comme ci-dessus; la V-filtration étant définie de façon évidente sur $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge$, on considère un idéal (à gauche par exemple) $\mathcal{I}$, qu'on munit de la filtration induite; soit $\overline{\mathcal{I}} = \mathrm{gr}^V \mathcal{I}$ le gradué associé, qui est un idéal de $\Gamma(K,\mathcal{D}\langle E\rangle)$; munissant ce dernier anneau de la F-filtration, on obtient un idéal $\overline{\overline{\mathcal{I}}} = \mathrm{gr}^F \overline{\mathcal{I}}$ de $\Gamma(K,\mathcal{O}_Y[t,\eta,\tau])$ (notations de la proposition 4.2). Ce dernier anneau est nœthérien par le théorème de Frisch; soient alors $\overline{\overline{a}}_1,\ldots,\overline{\overline{a}}_N$ des générateurs de $\overline{\overline{\mathcal{I}}}$; relevons-les en des éléments $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_N$ de $\overline{\mathcal{I}}$, puis en des éléments $a_1,\ldots,a_N$ de $\mathcal{I}$. On vérifie par des raisonnements classiques que $\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_N$ engendrent $\overline{\mathcal{I}}$ (parce que la F-filtration est positive), puis que $a_1,\ldots,a_N$ engendrent $\mathcal{I}$ (parce que $\Gamma/K,\mathcal{D}_X)^\wedge$ est V-complet). D'où le résultat.

ii) Soit M un module (par exemple à gauche) fini sur $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge$, et soit $\{V_k M\}$ une bonne V-filtration de M, (cette notion est définie comme ci-dessus). Soit N un sous $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge$-module de M; alors la filtration $\{V_k N\} := \{V_k M \cap N\}$ est bonne.

Ceci se voit en reprenant le raisonnement classique de Cartier et Serre [Se] : en effet, dire que $\{V_k M\}$ est bon équivaut à dire que $\mathrm{gr}^V M$ est fini sur $\mathrm{gr}^V \Gamma(K,\mathcal{D}_X)$; mais cet anneau est nœthérien (raisonner comme en i); alors $\mathrm{gr}^V N$, qui est un sous-module de $\mathrm{gr}^V M$, est aussi fini; donc $\{V_k N\}$ est bon.

iii) Soit M un $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)$-module à gauche de type fini et soit $\{V_k M\}$

une bonne filtration de M; alors la flèche naturelle $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge \underset{\Gamma(K,\mathcal{D}_X)}{\otimes} M \to \widehat{M}$ (le complété de M) est un isomorphisme.

On remarque d'abord que la proposition 4.1 est vraie pour $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)$ (ceci se voit de la même manière que 4.1, et intervient même au cours de la démonstration; *cf.* [Me1] ou [Sa1]. On raisonne alors comme [Se] : la définition des bonnes filtrations et la propriété précédente permettent de donner une présentation de M de la forme $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^q \to \Gamma(K,\mathcal{D}_X)^p \to M \to 0$ qui soit compatible aux filtrations (on met sur les deux premiers termes les filtrations évidentes, éventuellement décalées sur chaque composante). On utilise ensuite l'exactitude de la complétion.

iv) $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge$ est plat (à droite et à gauche) sur $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)$. Soit $\mathcal{I}$ un idéal à gauche de $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)$; on applique ce qui précède à $M = \mathcal{I}$, la filtration = la filtration induite et on trouve qu'on a $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge \underset{\Gamma(K,\mathcal{D}_X)}{\otimes} \mathcal{I} = \widehat{\mathcal{I}}$; l'exactitude de la complétion montre que la flèche $\widehat{\mathcal{I}} \to \Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge$ est injective, ce qui est le résultat cherché.

La démonstration du théorème 4.5 se fait maintenant par faisceautisation des résultats précédents. Tout d'abord, on a $\mathcal{D}_{X,c} = \varinjlim_{c\in k^0} \Gamma(K,\mathcal{D}_X)$ et $\mathcal{D}_{X|Y,c} = \varinjlim_{c\in k^0} \Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge$. L'assertion 3) relative à la platitude résulte alors immédiatement de iv).

Pour démontrer l'assertion 1), il suffit d'établir ceci : soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge$, et soient $a_1,\dots,a_N$ des générateurs de cet idéal; alors pour tout polycylindre fermé $L \subset K$, les relations entre $a_1,\dots,a_N$ à coefficients dans $\Gamma(L,\mathcal{D}_X)^\wedge$ sont engendrées par les relations à cœfficients dans $\Gamma(K,\mathcal{D}_X)^\wedge$.

On vérifie que l'assertion ne dépend pas du choix des générateurs de $\mathcal{I}$ (en prendre une famille et y ajouter ou retrancher des éléments); par suite, on peut supposer que $a_1,\dots,a_N$ proviennent de générateurs $\overline{\overline{a}}_1,\dots,\overline{\overline{a}}_N$ de $\mathrm{gr}^F \mathrm{gr}^V \mathcal{I}$ (*cf.* i). Alors, le résultat s'obtient par deux relèvements successifs à partir du résultat analogue bien connu pour $\mathcal{O}_Y[t,\eta,\tau]$.

Enfin l'assertion 2) s'établit par le même genre de raisonnements. Nous laissons les détails au lecteur.

Remarque 4.6. — Soit M un module fini sur $\mathcal{D}_{X,c}$ et soit $\{V_kM\}$ une bonne filtration de M. Alors cette filtration n'est pas nécessairement séparée; contre-exemple : $X = \mathbb{C}$, $Y = \{0\}$, $M = \mathcal{D}_{X,0}/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ l'idéal à gauche engendré par $1 + t^2\partial_t$. On a, pour la filtration quotient, $M = \cap V_kM$, et

$\widehat{M} = 0$. Le même exemple montre que $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ n'est pas fidèlement plat sur $i^{-1}\mathcal{D}_X$.

Par contre, soit M un module de type fini sur $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y,c}$ et soit $\{V_k M\}$ une bonne filtration. On a $\bigcap_k V_k M = \{0\}$. En effet soit $N = \bigcap_k V_k M$; de la propriété d'Artin-Rees, on déduit qu'on a $N = (V_{-1}\widehat{\mathcal{D}})N$; comme N est fini, et comme les éléments de $1 + V_{-1}\widehat{\mathcal{D}}$ sont inversibles, le raisonnement usuel ("lemme de Nakayama") montre qu'on a $N = 0$, ce qui est le résultat cherché.

5. Complexes spécialisables.

5.1. — Soient encore X une variété analytique complexe de dimension m, et $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ une sous-variété lisse de codimension d et de dimension $n = m - d$. Les définitions et les premières propriétés qui suivent sont bien connues; voir par exemple [Ka1], [Ma1], [Me1], [Sa1].

DÉFINITION 5.1.1. — *Un $\mathcal{D}_X$-module cohérent est dit "spécialisable le long de Y" (ou sur Y) si, localement, il existe une bonne V-filtration $\{V_k M\}$ dont le gradué associé soit monodromique.*

Lorsque M est spécialisable, on vérifie facilement que $\mathrm{gr}^V M$ est monodromique pour toute bonne V-filtration; cependant les gradués correspondant à deux filtrations distinctes ne sont pas nécessairement isomorphes.

Fixons maintenant une fois pour toutes un relèvement τ de l'application canonique $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$, et soit C l'image de τ; par exemple, on peut prendre $C = \{-1 < \mathrm{Re}\, s \leq 0\}$, mais ce n'est pas indispensable. La proposition qui suit est due à Kashiwara; voir [Ka1] ou [Me1]. Elle est l'extension d'un résultat classique de la théorie des équations différentielles à singularités régulières.

PROPOSITION 5.1.2. — *Si M est spécialisable le long de Y, $i^{-1}M$ admet une et une seule bonne V-filtration possédant la propriété suivante : les valeurs propres de $\theta|\,\mathrm{gr}_k^V M$ appartiennent à $C - k$ (θ est ici le champ d'Euler de $E = T_Y X$).*

Dans la suite, cette filtration sera appelée "canonique". Le gradué $\mathrm{gr}^V M$ correspondant, considéré comme $\mathcal{D}\langle E\rangle$-module ($E = T_Y X$) avec oubli des degrés sera noté $\mathrm{sp}\, M$.

Il est facile de vérifier que, du fait qu'on oublie les degrés, $\mathrm{sp}\, M$ est indépendant de τ.

PROPOSITION 5.1.3. — *Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents. Alors M est spécialisable sur Y si et seulement si M' et M'' le sont. Dans ce cas, la filtration canonique de M' (resp. M'') est induite par (resp. quotient de) celle de M, et la suite $0 \to \mathrm{sp}\, M' \to \mathrm{sp}\, M \to \mathrm{sp}\, M'' \to 0$ est exacte.*

Le seul point non trivial est le fait que la filtration induite par $V.M$ sur M' est bonne (il est clair que c'est alors la filtration canonique); mais cela résulte de 4.1.

5.1.4. — On définit de même un $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$-module spécialisable (on sous-entendra ici "le long de Y"). Les propriétés 5.1.2 et 5.1.3 sont encore vraies et se démontrent de la même manière, en utilisant cette fois-ci 4.5.2.

Soit enfin $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$; on dit que M est spécialisable si ses groupes de cohomologie le sont, et on note $D^b_{\mathrm{sp}}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ formée des complexes spécialisables. Même chose avec $\mathcal{D}_X$ remplacé par $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$.

L'objectif de cet article est d'étendre aux complexes spécialisables le foncteur $M \mapsto \mathrm{sp}\, M$, foncteur qui n'est pour l'instant défini que pour les modules, et de montrer qu'on obtient ainsi une *équivalence* $D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}) \xrightarrow{\sim} D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, avec $E = T_Y X$. La démonstration sera faite en plusieurs étapes et ne sera achevée qu'au paragraphe 8.

5.2. Exemples.

5.2.1. — Soit M un germe en $0 \in \mathbb{C}$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$-module holonome. Alors M est spécialisable en 0; en effet, M est quotient d'une somme directe de modules de la forme $\mathcal{D}/\mathcal{D}p$ (on écrit ici $\mathcal{D}$ pour $\mathcal{D}_{\mathbb{C},0}$); donc il suffit d'examiner le cas où $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}p$. Dans ce cas, le résultat se voit facilement en prenant pour V la filtration quotient de celle de $\mathcal{D}$.

Examinons la signification de $\mathrm{sp}\, M$. Supposons d'abord M à singularité régulière en 0; dans ce cas, en identifiant $T_{\{0\}}\mathbb{C}$ à $\mathbb{C}$ de la manière évidente, on a un isomorphisme $M \simeq \mathrm{sp}\, M \underset{\mathbb{C}[t]}{\otimes} \mathbb{C}\{t\}$ [ceci est classique si $M \xrightarrow{\sim} M[t^{-1}]$; le cas général s'en déduit facilement et nous laissons les détails au lecteur. Remarquons toutefois que cet isomorphisme n'est pas "canonique" en ce sens qu'il n'est pas invariant par changement de coordonnée sur le germe $(\mathbb{C}, 0)$].

Dans le cas général, soient $\widetilde{M}$ le complété $M \underset{\mathbb{C}\{t\}}{\otimes} \mathbb{C}[[t]]$, et $\widehat{M}$ le complété de M pour la V-filtration; on a des flèches $M \to \widetilde{M} \to \widehat{M}$; la première est injective; la seconde n'est pas injective en général, *cf.* 4.6, mais on peut facilement voir qu'elle est surjective (se ramener à $M = \mathcal{D}/\mathcal{D}p$). De plus, avec des notations évidentes, ces flèches donnent des isomorphismes $\operatorname{sp} M \xrightarrow{\sim} \operatorname{sp} \widetilde{M} \xrightarrow{\sim} \operatorname{sp} \widehat{M}$. Décomposons alors $\widetilde{M}$ en $\widetilde{M}' + \widetilde{M}''$, $\widetilde{M}'$ régulier et $\widetilde{M}''$ purement irrégulier (voir par exemple [Ma3]); soient $\widehat{M}'$ et $\widehat{M}''$ les complétés de $\widetilde{M}'$ et $\widetilde{M}''$ pour la V-filtration. On a comme plus haut $\widetilde{M}' = \widehat{M}' = \operatorname{sp} \widetilde{M}' \underset{\mathbb{C}[t]}{\otimes} \mathbb{C}[[t]]$; d'autre part, on a $\widehat{M}'' = 0$, comme en 4.6 : en effet $\widetilde{M}''$ est de la forme $\widetilde{\mathcal{D}}/\widetilde{\mathcal{D}}p$ avec $p \in 1 + V_{-1}\widetilde{\mathcal{D}}$. Finalement, on trouve qu'on a $\widetilde{M}' = \widehat{M} = \operatorname{sp} M \underset{\mathbb{C}[t]}{\otimes} \mathbb{C}[[t]]$: la donnée de $\widehat{M}$ et celle de $\operatorname{sp} M$ sont donc équivalentes, et elles équivalent à la donnée de la partie régulière de $\widetilde{M}$. Le résultat essentiel de l'article est précisément une généralisation de la première de ces deux assertions.

5.2.2. — Plus généralement, si X est de dimension quelconque, un $\mathcal{D}_X$-module holonome M est toujours spécialisable le long de Y. Ce résultat est dû à Kashiwara [Ka2] pour l'essentiel (voir aussi [Sa1], [Me1], [La3]).

5.2.3. — Soit M un $\mathcal{D}_X$-module cohérent; supposons que Y soit non caractéristique pour M, c'est-à-dire qu'on ait $T_Y^*X \cap \operatorname{car} M \subset Y$; alors M est spécialisable le long de Y.

Prenons des coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_n, t_1, \ldots, t_d)$ en $a \in Y$, avec Y défini par $t = 0$, et soit $m \in M_a$; on déduit facilement ceci de l'hypothèse : pour $i = 1, \ldots, d$, il existe un opérateur différentiel p_i vérifiant $p_i m = 0$, qui soit de la forme suivante :

$$p_i = \partial_{t_i}^{k_i} + \sum_{k<k_i} a_k(y, t, \partial y)\partial_{t_i}^k + q_i,$$

avec a_k de degré $\leq k_i - k$, q_i de degré $\leq k_i - 1$. Alors $\mathcal{D}_a m$ est un quotient de $N = \mathcal{D}_a/\Sigma\mathcal{D}_a p_i$; le gradué associé de N pour la filtration quotient est $\operatorname{gr}\mathcal{D}_a/\Sigma(\operatorname{gr}\mathcal{D}_a)\overline{p}_i$, avec $\overline{p}_i = \partial_{t_i}^{k_i}$, et le résultat suit facilement.

5.2.4. — Soit M un $\mathcal{D}_X$-module cohérent à support Y; alors M est spécialisable le long de Y. Prenons en effet une bonne V-filtration $\{V_k M\}$, ce qu'on peut faire au moins localement; alors $\mathrm{gr}^V M$ est à support sur Y, donc monodromique d'après 3.2.

Le même raisonnement s'applique sans changement aux $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$-modules cohérents M à support sur Y (c'est-à-dire tels que tous leurs éléments soient annulés par une puissance $\mathcal{I}^k$ de l'idéal de définition $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ de Y). En fait cette généralisation est illusoire et il est facile de voir que les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents et les $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$-modules cohérents à support dans Y sont les mêmes, et plus généralement qu'on a les résultats suivants :

i) Le foncteur "restriction des scalaires" de $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ à $\mathcal{D}_X$ est une équivalence de la sous-catégorie de $D^b_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$ formée des complexes dont la cohomologie est à support dans Y, avec la sous-catégorie analogue de $i^{-1}D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$. Un inverse est $M \mapsto \widehat{\mathcal{D}}_{X|Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} M$; de plus la flèche naturelle $M \to \widehat{\mathcal{D}}_{X|Y} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} M$ est un quasi-isomorphisme.

ii) Soit $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Y)$ et $N \in \mathrm{ob}\, D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$. Alors on a l'isomorphisme de dualité

$$R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(M, i^! N) \xrightarrow{\sim} R\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}}(i_! M, N).$$

[Les flèches $i^!$ et $i_!$ sont définies ici de la même manière qu'en 1.3 et 1.4. La flèche de dualité se définit comme en 1.5].

Les démonstrations sont faciles, et nous nous contenterons de les esquisser. Pour i), en utilisant la platitude de $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ sur $\mathcal{D}_X$, on se ramène à montrer ceci : soit M un $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$-module cohérent à support Y; alors M est cohérent en tant que $\mathcal{D}_X$-module; inversement, soit N un $\mathcal{D}_X$-module cohérent à support Y; alors on a $N \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}_{X|Y} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} N$.

Pour cela, on remarque que, pour $k > 0$, on a $V_{-k}\mathcal{D}_X = (V_0\mathcal{D}_X)\mathcal{I}^k$, et de même avec $\mathcal{D}_X$ remplacé par $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$; il résulte de là qu'un $\mathcal{D}_X$-module (ou un $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$-module) cohérent à support Y provient localement d'un $\mathcal{D}_X/V_{-k}\mathcal{D}_X$-module de présentation finie, avec k assez grand. Les deux assertions en résultent aisément.

Pour ii) on raisonne comme dans le théorème de dualité 1.5.3. En fait, il s'agit seulement de la partie "immersion" de ce théorème, qui est la partie facile (par exemple, on se ramène à $M = \mathcal{D}_Y$, $N = \widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$, auquel cas le résultat est immédiat). Remarquons enfin que le théorème de Kashiwara 1.4.4 est encore vrai avec $\mathcal{D}_X$ remplacé par $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$: cela résulte immédiatement de i).

5.3. Modules élémentaires. — L'idée de résoudre les modules spécialisables par des modules "élémentaires" est due à Kashiwara [Ka1]; nous la reprenons ici sous une forme voisine de celle de [Sa1]. Plaçons-nous en $a \in Y$, et prenons des coordonnées locales $(y; t) = (y_1, \dots, y_n; t_1, \dots, t_d)$ nulles en a. On suppose Y défini par $t = 0$, et on pose $\Theta = \Sigma t_i \partial_{t_i}$. Soit M un $\mathcal{D}_{X,a}$-module spécialisable sur Y, et soit $V.M$ sa filtration canonique. Il existe $k \leq 0$ tel qu'on ait, pour $\ell < k$, $V_\ell M = (V_{\ell-k}\mathcal{D})V_k M$ (on écrit $\mathcal{D}$ pour $\mathcal{D}_{X,a}$); prenons alors des générateurs $u_1, \dots, u_p$ de $V_k M$ sur $V_0\mathcal{D}$; par définition de la filtration canonique, il existe $b \in \mathbb{C}[s]$, dont les racines appartiennent à $C - k$, tel qu'on ait $b(\Theta)u_i \in V_{k-1}M$; par suite, il existe des opérateurs $a_{ij} \in V_{-1}\mathcal{D}$ tels qu'on ait

5.3.1. — $b(\Theta)u_j = \Sigma a_{ij} u_i$.

Soit alors N' le conoyau de l'application $A : \mathcal{D}^p \to \mathcal{D}^p$, où A est la multiplication à droite par la matrice $(b(\Theta)\delta_{ij} - a_{ij})$, et soit M' l'image de l'application $N' \to M$ qui envoie les générateurs de N' sur les u_i; M' est le sous-module de M engendré par les u_i, donc il contient $V_k M$. Le quotient $M'' = M/M'$ vérifie $V_k M'' = 0$, donc M'' est *à support dans* Y (en effet, pour tout $m \in M''$ et tout i, il existe une puissance t_i^p telle qu'on ait $t_i^p m \in V_k M''$, donc $t_i^p m = 0$).

Enfin, on relève facilement l'extension $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ en une extension

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

avec N'' à support sur Y, et $N'' \to M$" surjectif (N se fabrique comme N', en complétant $u_1, \dots, u_p$ en un système de générateurs de M). Si donc on appelle *élémentaire* un module fabriqué comme N' à partir de relations 5.3.1, et *semi-élémentaire* une extension d'un module cohérent à support Y par un module élémentaire, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 5.3.2. — *Au voisinage d'un point de Y, tout $\mathcal{D}_X$-module spécialisable est quotient d'un module semi-élémentaire.*

Un module élémentaire est évidemment spécialisable; donc un module semi-élémentaire l'est aussi d'après 5.2.4 et 5.1.3. Il en résulte que localement, un module spécialisable admet une résolution de longueur arbitrairement grande par des modules semi-élémentaires.

COROLLAIRE 5.3.3. — *Soit $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\mathcal{D}_X)$; alors DM est spécialisable le long de Y.*

En utilisant le fait que le foncteur D est d'amplitude finie, on se ramène au cas où M est un module, puis un module semi-élémentaire, puis finalement un module élémentaire. Mais alors le résultat est immédiat.

Les résultats précédents s'étendent immédiatement à $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ (pour montrer que le dual D est d'amplitude finie, il suffit de montrer que tout $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y,a}$-module de type fini admet une résolution libre de longueur finie; ceci se fait en se ramenant aux gradués associés considérés au §4). Par contre, le résultat qui suit est propre aux $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$-modules élémentaires; il jouera un rôle clef dans le programme indiqué en 5.1.4.

Plaçons-nous en $a \in Y$, avec des coordonnées (y,t) comme ci-dessus, et soit N le conoyau de l'application $A : \widehat{\mathcal{D}}^p \to \widehat{\mathcal{D}}^p$ $(\widehat{\mathcal{D}} = \widehat{\mathcal{D}}_{X|Y,a})$, avec $A = b(\Theta)\delta_{ij} - a_{ij}$, $a_{ij} \in V_{-1}\widehat{\mathcal{D}}$, les racines de b appartenant à $C - k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

THÉORÈME 5.3.4. — *N est isomorphe au conoyau de $A_0 : \widehat{\mathcal{D}}^p \to \widehat{\mathcal{D}}^p$, avec $A_0 = (b(\Theta)\delta_{ij})$.*

Par le procédé usuel de réduction aux opérateurs d'ordre un, on se ramène à démontrer le résultat suivant : soit $B_0 = (b_{ij}), 1 \leq i,j \leq q$, une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$; on suppose que les valeurs propres de B_0 ne diffèrent pas d'un entier $\neq 0$ (par exemple, qu'elles appartiennent à $C - k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$); soit $B' = (b'_{ij}), b'_{ij} \in V_{-1}\widehat{\mathcal{D}}$ et soit $B = \Theta \operatorname{id} + B_0 + B'$; alors le conoyau de B est isomorphe à celui de $\Theta \operatorname{id} + B_0$.

La démonstration est une extension d'un raisonnement bien connu pour les équations différentielles ordinaires. On écrit $B' = \sum\limits_{k \geq 1} B_\ell$, B_ℓ homogène de degré k pour Θ, *i.e.* vérifiant $[\Theta, B_\ell] = kB_\ell$ (en particulier, on a $B_k \in V_{-k}\widehat{\mathcal{D}}$); on cherche $S = \mathcal{I} + \sum\limits_{k \geq 1} S_\ell$, S_ℓ homogène de degré k tel qu'on ait $(\Theta \operatorname{id} + B_0)S = SB$. Supposons trouvés $S_1, \ldots, S_{k-1}$; on doit résoudre l'équation

$$\ell S_\ell + [B_0, S_\ell] = S_{\ell-1}B_1 + \cdots + S_1 B_{\ell-1}.$$

Les valeurs propres de $\operatorname{ad} B_0$ sont les $\lambda_i - \lambda_j$, les λ_i étant les valeurs propres de B_0. L'hypothèse faite sur ces valeurs propres entraîne alors que cette équation a une solution et une seule; d'où le théorème.

5.4. — Pour $M \in \operatorname{ob} D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$ on définit $i^! M$ et $i^+ M$ de la manière suivante :

i) On pose $i^! M = \mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} M[-d]$ (on omet les i^{-1}); en fait, l'injection $\mathcal{D}_X \to \widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ donne un isomorphisme $\mathcal{D}_{Y\to X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{Y\to X} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$; donc $\mathcal{D}_{Y\to X}$ est naturellement un $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$-module à droite, et l'on a $i^! M = \mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\underset{\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}}{\otimes}} M[-d]$.

ii) En dualisant sur $\mathcal{D}_Y$ l'action de $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ sur $\mathcal{D}_{Y\to X}$, on obtient une action à droite de $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ sur $i^+\mathcal{D}_X := \widehat{\mathcal{D}}_{Y\leftarrow X}$ [*cf.* 2.7 pour ces notations]; cette action se lit ainsi en coordonnées locales : si $p : X \to Y$ est la projection $(y,t) \to y$, alors $\widehat{\mathcal{D}}_{Y\leftarrow X}$ est le complété au sens de 2.5, 2.7 de $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$; on vérifie que c'est aussi bien le complété de $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ pour la V-filtration canonique définie par l'action à droite de $\mathcal{D}_X$ ($\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ est visiblement spécialisable!).

Pour $M \in \operatorname{ob} D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$, on pose alors $i^+ M = \widehat{\mathcal{D}}_{Y\leftarrow X} \overset{L}{\underset{\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}}{\otimes}} M$; si M est à cohomologie cohérente, on a encore $i^+ M = Di^! DM$ comme en 2.6 (le dual DM doit, bien sûr, être pris ici sur $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$).

PROPOSITION 5.4.1. — *Soit $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\mathcal{D}_X)$, ou $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$. Alors $i^! M$ et $i^+ M$ sont à cohomologie cohérente.*

Par dualité, il suffit d'établir le résultat pour $i^! M$; on se ramène au cas d'un module, puis, en prenant une résolution semi-élémentaire, aux deux cas suivants :

i) M est à support dans Y; alors, on utilise 5.2.4.

ii) M est élémentaire. Si M est un $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$-module, on applique 5.3.4 et 3.5. Si M est un $\mathcal{D}_X$-module, on le remplace par son V-complété, ce qui ne change pas $i^! M$. Pour $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\mathcal{D}_X)$ on en déduit, en raisonnant comme en 3.5 que $M[*Y]$ et $R\Gamma_{[Y]}M$ sont spécialisables. Ce résultat s'étend au cas où $\mathcal{D}_X$ est remplacé par $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$, modulo l'extension à ce cas des sorites de 1.6; nous laissons ce point au lecteur.

6. Une équivalence.

Comme au §2, soit $p : E \to Y$ un fibré vectoriel complexe de rang d, avec $\dim Y = n$; on note $i : Y \to E$ l'injection "section nulle". Pour simplifier les notations, lorsque $M \in \operatorname{ob} D^b(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, on note $\widehat{M}$ le complexe $\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y} \underset{\mathcal{D}\langle E\rangle}{\otimes} M \in \operatorname{ob} D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y})$.

On vérifie immédiatement ceci : pour M, $\mathcal{D}\langle E\rangle$-module monodromique, on a un isomorphisme fonctoriel $M \xrightarrow{\sim} \operatorname{sp} \widehat{M}$. Le résultat qui suit est donc un cas particulier du programme indiqué à la fin de 5.1.

THÉORÈME 6.1.

i) *Le foncteur* $M \mapsto \widehat{M}$ *est une équivalence* $D^b_{\text{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle) \xrightarrow{\sim} D^b_{\text{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y})$.

ii) *Pour* M *et* $N \in \operatorname{ob} D^b_{\text{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, *la flèche "naturelle"*

$$R\underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{D}\langle E\rangle}(M, N) \to R\underline{\operatorname{Hom}}_{\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y}}(\widehat{M}, \widehat{N})$$

est un isomorphisme.

La seconde assertion est formellement conséquence de la première; en effet on a $\operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(\widehat{M}, \widehat{N})$; d'où en remplaçant N par $N[k] : \operatorname{Ext}^k(M, N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^k(\widehat{M}, \widehat{N})$; en localisant ce résultat sur les ouverts $U \subset Y$, on trouve qu'on a $\underline{\operatorname{Ext}}^k(M, N) \xrightarrow{\sim} \underline{\operatorname{Ext}}^k(\widehat{M}, \widehat{N})$ et le résultat suit aussitôt. Mais en fait, nous allons raisonner en sens inverse.

Démonstration de ii). — Par dévissage, on se ramène au cas où M et N sont des modules, puis des modules élémentaires; finalement, il suffit de traiter le cas où $M = \mathcal{D}\langle E\rangle / \mathcal{D}\langle E\rangle(\theta - \lambda)$, $N = \mathcal{D}\langle E\rangle / \mathcal{D}\langle E\rangle(\theta - \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$; alors $\widehat{M}$ et $\widehat{N}$ s'écrivent de façon analogue, avec $\mathcal{D}\langle E\rangle$ remplacé par $\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y}$.

Plaçons-nous en $a \in Y$; soit e le générateur canonique de N_a, et soient (y, t) des coordonnées locales en a comme au §3.

Tout élément de N_a s'écrit d'une manière et d'une seule comme une somme finie $\Sigma b_{\alpha,\beta} t^\alpha \partial_t^\beta e$ (somme finie) avec $b_{\alpha,\beta} \in \mathcal{D}_{Y,a}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$, $\alpha_1 = 0$ ou $\beta_1 = 0$ (cette dernière condition provient de ce qu'on a $\theta e = \Sigma t_i \partial_{t_i} e = \mu e$).

On doit regarder le complexe $N_a \xrightarrow{\theta - \lambda} N_a$; or on a

$$(\theta - \lambda) t^\alpha \partial_t^\beta e = (|\alpha| - |\beta|) t^\alpha \partial_t^\beta e + t^\alpha \partial_t^\beta (\theta - \lambda) e = (|\alpha| - |\beta| + \mu - \lambda) t^\alpha \partial_t^\beta e.$$

On en déduit immédiatement que ce complexe est acyclique si $\lambda - \mu \notin \mathbb{Z}$, et que, pour $\lambda - \mu \in \mathbb{Z}$, le noyau et le conoyau s'identifient aux éléments homogènes par rapport à θ de degré $\mu - \lambda$ (= de V-graduation $\lambda - \mu$).

De même, un élément de $\widehat{N}_a$ s'écrit $\sum_{k\geq k_0}(\sum_{|\alpha|-|\beta|=k} b_{\alpha,\beta}t^\alpha\partial_t^\beta e)$, les sommes entre parenthèses étant finies, et les $b_{\alpha,\beta}\in\mathcal{D}_{Y,0}$ convergeant dans un voisinage fixe de a. Le fait que le complexe $\widehat{N}_a \xrightarrow{\theta-\lambda} \widehat{N}_a$ est quasi-isomorphe au précédent est alors immédiat. Ceci démontre ii).

Démonstration de i). — Tout d'abord, il résulte de ii) qu'on a

$$R\operatorname{Hom}(M,N) \xrightarrow{\sim} R\operatorname{Hom}(\widehat{M},\widehat{N})$$

en particulier, le foncteur $M\mapsto\widehat{M}$ est pleinement fidèle. Reste à démontrer qu'il est essentiellement surjectif.

Pour établir ce résultat, observons ceci : supposons donné un triangle

$$\widetilde{M} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \widetilde{N} \xrightarrow{\tilde{\beta}} \widetilde{P} \xrightarrow{\tilde{\gamma}} \widetilde{M}[1] \longrightarrow \dots$$

et supposons qu'on ait trouvé N et P tels qu'on ait $\widehat{N}\simeq\widetilde{N}$, $\widetilde{P}\simeq\widehat{P}$; soit alors $\beta : N\to P$ la flèche correspondant à $\widetilde{\beta}$; prenons pour M un cône $N\xrightarrow{\beta}P$; des propriétés des cônes, il résulte qu'on a $\widehat{M}\simeq\widetilde{M}$.

Soit alors $\widetilde{M}\in\operatorname{ob}D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y})$; on veut trouver M tel qu'on ait $\widehat{M}\simeq\widetilde{M}$; l'observation précédente nous permet, par dévissage, de nous ramener au cas où $\widetilde{M}$ est concentré en un seul degré. Alors, il suffit de faire la construction localement; en prenant une résolution semi-élémentaire, nous sommes ramenés à un module semi-élémentaire, et finalement aux deux cas suivants : $\widetilde{M}$ est à support dans Y; $\widetilde{M}$ est élémentaire. Le premier cas se traite par 5.2.4 et le second par 5.3.4; d'où le théorème.

Remarque 6.2. — Soit M un $\mathcal{D}\langle E\rangle$ module monodromique; pour $\alpha\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ disons que M est "pur de type α" si toutes les valeurs propres de θ sont dans la classe de α mod $\mathbb{Z}$. Il est immédiat que tout M se décompose en une somme directe (finie sur toute composante connexe de Y) de modules monodromiques purs de types deux à deux distincts.

Soit maintenant $M\in\operatorname{ob}D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$; on dira qu'il est pur de type α si ses groupes de cohomologie le sont.

Montrons que tout complexe monodromique se décompose de même en complexes purs; pour cela, on voit d'abord que, si M et N sont purs de types différents, on a $R\underline{\operatorname{Hom}}(M,N)=0$, et par conséquent $\operatorname{Hom}(M,N)=0$ (la démonstration se fait comme ci-dessus par réduction aux modules élémentaires).

Ce résultat entraîne d'abord l'unicité de la décomposition. Pour établir son existence, on raisonne comme plus haut : soit $M'\to M\to$

$M'' \xrightarrow{+1}$ un triangle distingué, et supposons que M' et M'' se décomposent; alors, par le résultat précédent la flèche $M'' \to M'[1]$ se décompose; en prenant les cônes correspondant, on obtient une décomposition de M; par récurrence, on est donc ramené au cas où M est concentré en un seul degré; d'où le résultat.

Observons encore ceci pour terminer : si M est pur de type $\alpha \neq 0$, on a $R\Gamma_{[Y]}M = 0$ et donc $M \xrightarrow{\sim} M[*Y]$ (par dévissage, on se ramène au cas des modules élémentaires, auquel cas le résultat a été prouvé dans la démonstration de 3.5).

7. Cycles proches.

Nous allons examiner d'un peu plus près le cas particulier où $E = Y \times \mathbb{C}$ est trivial de rang un. Ce qui suit peut se voir comme une variante "avec paramètres dans $\mathcal{D}_Y$" de la résolution du problème de Riemann-Hilbert à une variable, et aussi comme une variante pour $\mathcal{D}$-modules de la théorie des "cycles évanescents" de [SGA].

Soit $\mathcal{N}$ l'espace vectoriel des "fonctions de classe de Nilsson" sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire les combinaisons linéaires finies d'expressions $t^\lambda(\log t)^p$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$. Cet espace est muni de façon évidente d'une structure de $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$-module, et d'une action de la monodromie T [cette dernière est définie par $Tt^\lambda(\log t)^p = e^{2\pi i\lambda}t^\lambda(\log t + 2\pi i)^p$]. Pour $M \in \operatorname{ob} D^b(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, on considère le complexe $\mathcal{N} \underset{\mathbb{C}[t,t^{-1}]}{\otimes} M$, qu'on notera en abrégé $\mathcal{N} \otimes M$; c'est de façon évidente un complexe de $D^b(\mathcal{D}\langle E\rangle)$.

Posons $\Psi(M) = p_+(\mathcal{N} \otimes M)[-1]$; l'action de T sur $\mathcal{N}$ induit une action degré par degré de T sur $\Psi(M)$; dans la suite, nous considérerons ce complexe comme objet de la catégorie $D^b(\mathcal{D}_Y[T])$; à noter *qu'il ne suffirait pas* pour ce qui suit de le considérer comme objet de $D^b(\mathcal{D}_Y)$, muni dans cette catégorie d'une action de T. Pour caractériser les complexes que l'on obtient ainsi, posons la définition suivante :

DÉFINITION 7.1.

i) *Un $\mathcal{D}_Y[T]$-module est dit monodromique s'il est cohérent en tant que $\mathcal{D}_Y$-module et si l'action de T est localement finie au sens de 3.1 et inversible.*

ii) *Un complexe de $D^b(\mathcal{D}_Y[T])$ est dit monodromique si ses groupes de cohomologie le sont.*

On note $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}_Y[T])$ la sous-catégorie pleine de la précédente formée des complexes monodromiques. On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 7.2. — *Le foncteur $M \mapsto \Psi(M)$ est une équivalence de la catégorie*

$$\{M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle) | M \xrightarrow{\sim} M[t^{-1}]\}$$

avec $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}_Y[T])$.

Remarquons au passage qu'on a évidemment $\Psi(M) = \Psi(M[t^{-1}])$; d'autre part, d'après 3.5, si M est monodromique, $M[t^{-1}]$ l'est aussi.

La démonstration est analogue à 3.5 et 6.1, et nous en donnerons seulement les grandes lignes :

i) Tout d'abord, on montre que, si M est monodromique, $\Psi(M)$ l'est aussi; par dévissage, on se ramène au cas où $M = \mathcal{D}\langle E\rangle/\mathcal{D}\langle E\rangle(\theta-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (si l'on se restreint aux M tels qu'on ait $M \xrightarrow{\sim} M[t^{-1}]$, on peut supposer qu'on a $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{N}$). On doit regarder le complexe $\mathcal{N} \otimes M \xrightarrow{\partial_t} \mathcal{N} \otimes M$ (placé en degrés 0 et un); on vérifie que cette application est surjective, que le noyau est isomorphe à $\mathcal{D}_Y$ et que l'action de T est égale à $e^{-2\pi i\lambda}$.

ii) On montre ensuite que, pour M et N dans la catégorie concernée, on a un isomorphisme $\mathrm{Ext}^i(M, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i(\Psi(M), \Psi(N))$. Ici encore, il suffit de traiter le cas $M = \mathcal{D}\langle E\rangle/\mathcal{D}\langle E\rangle(\theta - \lambda)$, $N = \mathcal{D}\langle E\rangle/\mathcal{D}\langle E\rangle(\theta - \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C} - \mathbb{N}$; la question est laissée au lecteur.

iii) Ce qui précède montre que le foncteur Ψ est pleinement fidèle. La surjectivité se démontre alors comme en 6.1.

Remarque 7.3. — En fait, si M est un $\mathcal{D}\langle E\rangle$-module monodromique (= un complexe concentré en degré zéro) munissons-le de la V-graduation canonique définie comme au numéro 5, à partir d'un relèvement τ de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ (il revient au même de considérer $\mathrm{gr}^V \widehat{M}$); *supposons ici qu'on ait* $0 \in \mathrm{Im}\,\tau$. On trouve alors que $\Psi(M)$ est concentré en degré zéro, et qu'on a $\Psi(M) = (\mathrm{gr}^V_0 M, \exp(-2\pi i\theta))$, $\theta = t\partial_t$; *cf.* [Ka1], [Ma1], [Sa1].

La démonstration peut ici se faire localement sur Y; en résolvant M par des modules élémentaires, on se ramène au cas où $M = \mathcal{D}\langle E\rangle/\mathcal{D}\langle E\rangle(\theta-\lambda)^p$; ce cas, où l'on est pratiquement à une variable, peut être laissé au lecteur.

À partir du résultat précédent, on montre facilement ceci : sur $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, le foncteur Ψ est *exact*, *i.e.* , on a $\Psi(\underline{H}^k M) = \underline{H}^k\Psi(M)$ (raisonner par récurrence sur la longueur de M).

Voici encore quelques propriétés du foncteur Ψ qui seront utiles par la suite.

Pour $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, soit M^{an} l'analytisé comme au §2; soit d'autre part j l'injection canonique $Y \simeq Y \times \{1\} \to E$. Désignons d'autre part par $\Psi(M)^\natural$ le complexe de $D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Y)$ obtenu à partir de $\Psi(M)$ par oubli de la monodromie.

PROPOSITION 7.4. — *On a un isomorphisme* $j^+M^{\mathrm{an}}[-1]\simeq\Psi(M)^\natural$.

Ceci se voit ainsi : posons $E^* = Y\times\mathbb{C}^*$ et $\widetilde{E} = Y\times\widetilde{\mathbb{C}}$, $\widetilde{\mathbb{C}}$ le revêtement universel de $\mathbb{C}^*$ de point base 1 (= la surface de Riemann de $\log t$, avec la convention $\log 1 = 0$). Considérant $\mathcal{N}\otimes M$ de façon évidente comme un faisceau sur $\widetilde{E}$ on a une flèche $\mathcal{N}\otimes M \to \pi^{-1}M^{\mathrm{an}}$, π la projection $\widetilde{E} \to E$; d'où une flèche $p_+(\mathcal{N}\otimes M) \to \hat{p}'_+M^{\mathrm{an}}$, $\hat{p}'$ la projection $E \to Y$ formalisée le long de $Y \times \{1\}$ comme en 2.5; d'après 2.6, on a $\hat{p}'_+M^{\mathrm{an}} = j^+M^{\mathrm{an}}$, d'où la flèche cherchée $\Psi(M)^\natural \to j^+M^{\mathrm{an}}[-1]$. On vérifie que c'est un isomorphisme par les mêmes dévissages qu'en 6.1 et 7.2.

Dans le même ordre d'idées, posons $\widetilde{\mathcal{D}}\langle E\rangle = \mathcal{N}\otimes\mathcal{D}\langle E\rangle$, et considérons cet objet comme faisceau d'opérateurs différentiels sur $\widetilde{E}$. Un $\widetilde{\mathcal{D}}\langle E\rangle$-module $\widetilde{M}$ sera dit monodromique s'il est localement sur Y de la forme $\mathcal{N}\otimes M$, avec M monodromique sur $\mathcal{D}\langle E\rangle$; on note $D^b_{\mathrm{mon}}(\widetilde{\mathcal{D}}\langle E\rangle)$ la sous-catégorie pleine de $D^b(\widetilde{\mathcal{D}}\langle E\rangle)$ formée des complexes à cohomologie monodromique. Notant $\tilde{p}$ la projection $\widetilde{E} \to Y$, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 7.5. — *Le foncteur* $\widetilde{\Psi}:\widetilde{M}\mapsto\tilde{p}_+\widetilde{M}[-1]$ *est une équivalence* $D^b_{\mathrm{mon}}(\widetilde{\mathcal{D}}\langle E\rangle) \to D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_Y)$.

Cette proposition se démontre par le même dévissage que 7.2.

COROLLAIRE 7.6. — *Sur* $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, *on a un isomorphisme fonctoriel* $\Psi(DM)^\natural = D\Psi(M)^\natural$.

Soit $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, et posons $\widetilde{M} = \mathcal{N}\otimes M$, $P = \mathcal{D}_{E\to Y}$, $\widetilde{P} = \mathcal{N}\otimes P$. On écrit qu'on a

$$\begin{aligned}\Psi(DM)^v &= R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}\langle E\rangle}(M,\widetilde{P})[n] = R\underline{\mathrm{Hom}}_{\widetilde{\mathcal{D}}\langle E\rangle}(\widetilde{M},\widetilde{P})[n]\\ &= R\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}_Y}(\widetilde{\Psi}(\widetilde{M}),\widetilde{\Psi}(\widetilde{P}))[n].\end{aligned}$$

On remarque qu'on a $\widetilde{\Psi}(\widetilde{M}) = \Psi(M)^\natural$, $\widetilde{\Psi}(\widetilde{P}) = \Psi(P)^\natural = \mathcal{D}_Y$, et on vérifie que les isomorphismes sont bien compatibles avec les structures de $\mathcal{D}_Y$-module à droite.

Remarque 7.7. — Il est un peu plus délicat de calculer $\Psi(DM)$; on doit prendre $\Psi(M)$ dans la sous-catégorie de $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}_Y[T])$ formée des complexes sur lesquels T est inversible en chaque degré [cette catégorie est équivalente à la précédente : prendre un complexe et le remplacer par le localisé en T^{-1}, qui lui est quasi-isomorphe]. Il faut alors prendre sur $D\Psi(M)$ l'action contragrédiente de T; nous n'entrerons pas dans les détails, car ceci ne nous servira pas.

7.8. — Soit maintenant X une variété analytique complexe de dimension $m = n+1$ et soit $Y \xrightarrow{i} X$ une hypersurface fermée lisse définie par $f = 0$, avec $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ et $df(a) \neq 0$ en tout point $a \in Y$. On étend les résultats précédents à cette situation de la manière suivante : posons $\widehat{\mathcal{N}} = \mathcal{N} \underset{\mathbb{C}[t]}{\otimes} \mathbb{C}[[t]]$. Pour $M \in \operatorname{ob} D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$, on pose $\Psi(M) = i^+(\widehat{\mathcal{N}} \otimes M)[-1]$; ici i^+ est l'image inverse définie en 5.4; on écrit $\widehat{\mathcal{N}}$ pour $f^{-1}\widehat{\mathcal{N}}$, et enfin le produit tensoriel est pris sur $f^{-1}\mathbb{C}[[t]][t^{-1}]$. Ce complexe est considéré comme ci-dessus comme objet de $D^b(\mathcal{D}_Y[T])$.

Supposons à partir de maintenant qu'on ait $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$; dans le cas où $X = Y \times \mathbb{C}$, il existe par 6.1 un $P \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle X\rangle)$ tel qu'on ait $M = \widehat{P}$; on déduit alors de 3.7 et 5.4 que le complexe $\Psi(M)$ est isomorphe au complexe précédemment défini $\Psi(P)$. [3.7 et 5.4 ne s'appliquent pas directement à $\mathcal{N} \otimes P$ qui n'est pas monodromique; mais il est limite inductive de complexes monodromiques et cela suffit].

Dans le cas général, une telle décomposition existe localement au voisinage de Y; on en déduit que $\Psi(M)$ est à cohomologie cohérente et est donc un objet de $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}_Y[T])$; on a alors les résultats suivants :

7.8.1. — *Le foncteur $M \mapsto \Psi(M)$ est une équivalence de la catégorie*

$$\{M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}) | M \simeq M[f^{-1}]\}$$

avec $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}_Y[T])$.

7.8.2. — *Pour $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$, on a un isomorphisme fonctoriel $D\Psi(M)^\natural = \Psi(DM)^\natural$,* (ou $^\natural$ signifie encore “oubli de la monodromie”).

Le premier résultat se démontre par des dévissages analogues à ceux de 6.1 et 7.2. Le second se voit comme 7.6, en utilisant une variante de 7.5 que nous laissons au lecteur.

Pour l'extension de 7.3, voir à la fin de 7.9.

Remarque 7.9 : *cycles évanescents.*

(Cette remarque ne sera pas utilisée dans la suite.)

Pour $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$, la proposition 7.8.1 ne décrit que $M[t^{-1}]$ (la même remarque vaut pour le théorème 7.2 et la catégorie $D^b_{\mathrm{mon}}\mathcal{D}\langle E\rangle$, auxquels les résultats qui suivent s'appliquent *mutatis mutandis*) ; pour décrire M lui-même, on est amené à faire la construction suivante, inspirée à la fois de [SGA] et [SKK]. Posons $\widehat{\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{N}}/\mathbb{C}[[t]]$; on note u ("can") le passage au quotient $\widehat{\mathcal{N}} \to \widehat{\mathcal{E}}$ et v ("var") l'unique application $\widehat{\mathcal{E}} \to \widehat{\mathcal{N}}$ telle que $T - \mathrm{id} = v \circ u$. Posons alors $\Phi(M) = p_+(\widehat{\mathcal{E}} \otimes M)[-1]$; on a deux applications $\Psi(M) \xrightarrow{u} \Phi(M) \xrightarrow{v} \Psi(M)$, et on considère le quadruplet $(\Psi(M), \Phi(M), u, v)$ comme objet de la catégorie $D^b_{\mathrm{coh}}(\leftrightarrows, \mathcal{D}_Y)$ définie ainsi : ses objets sont les paires (Ψ, Φ) de complexes bornés de $\mathcal{D}_Y$-modules, à cohomologie cohérente, munis de deux flèches $\Psi \xrightarrow{u} \Phi \xrightarrow{v} \Psi$ vérifiant la condition suivante : $\mathrm{id} + vu : \Psi \to \Psi$ est un isomorphisme sur la cohomologie (ou "degré par degré", cela donne une catégorie équivalente). On peut voir alors que la construction précédente donne une équivalence

$$D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}) \xrightarrow{\sim} D^b_{\mathrm{coh}}(\leftrightarrows, \mathcal{D}_Y).$$

Une description équivalente peut s'obtenir avec le quadruplet $(p_+M[-1], \Psi(M), \varepsilon, T)$, où ε est l'application $p_+M[-1] \to \Psi(M)$ définie par l'injection $\mathbb{C}[[t]] \to \widehat{\mathcal{N}}$; nous laissons le lecteur expliciter le résultat en s'inspirant de la situation voisine étudiée dans [BMV2], th. 1.1.

Il est d'usage d'appeler $\Psi(M)$ "cycles proches" et $\Phi(M)$ "cycles évanescents". Signalons sans démonstration le résultat suivant : de même que $\Psi(M)$ ne dépend que de $M[f^{-1}]$, $\Phi(M)$ ne dépend que du *microlocalisé* de M le long de $T^*_Y X$, au sens de [SKK], et même de son microlocalisé formel ; voir à ce propos [La1] et [La2].

Enfin, les foncteurs Ψ et Φ sont exacts. Lorsque M est un module, on a les formules qui suivent, et qui généralisent 7.3 ; ici encore, on doit supposer qu'on a $0 \in \operatorname{Im} \tau$, τ le relèvement $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ choisi.

7.9.1.

$$\Psi(M) = \mathrm{gr}^V_0 M \ ; \quad \Phi(M) = \mathrm{gr}^V_1 M$$

$$u = \partial_t ; v = \varphi(\theta) t \ ; \quad T = \exp(-2\pi i \theta)$$

avec $\theta = t\partial_t$ (t est la coordonnée sur $T_Y X$ définie par son isomorphisme canonique avec $Y \times \mathbb{C}$), et $\varphi(\zeta) = \dfrac{e^{-2\pi i \zeta} - 1}{\zeta}$.

Pour la démonstration, nous renvoyons à la littérature citée dans l'introduction. Le lecteur pourra aussi redémontrer ces résultats par le même type de calculs que 7.3.

8. Spécialisation.

Ici, nous revenons à la situation considérée aux §4 et 5 : X est une variété analytique complexe de dimension m, et Y une sous-variété lisse de dimension $n = m - d$; on note i l'injection $Y \to X$.

Rappelons rapidement comment on définit la *déformation au cône normal* de X le long de Y (pour les détails, nous renvoyons à [Ve2]) : on éclate $Y \times \{0\}$ dans $X \times \mathbb{C}$, et dans l'éclaté, on ôte l'adhérence de $(X - Y) \times \{0\}$; on obtient ainsi un espace $\widetilde{X}$ muni de deux projections $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X, \widetilde{X} \xrightarrow{q} \mathbb{C}$; on a des isomorphismes canoniques $q^{-1}\mathbb{C}^* \simeq X \times \mathbb{C}^*$, $q^{-1}(0) \simeq T_Y X$ (espace que nous noterons E dans la suite); on pose encore $r = (p, q)$.

Si X est un fibré vectoriel sur Y, on a un isomorphisme canonique $\widetilde{X} \simeq X \times \mathbb{C}$, l'application $r : \widetilde{X} \to X \times \mathbb{C}$ étant simplement $(\tilde{x}, s) \mapsto (s\tilde{x}, s)$, $s\cdot$ la multiplication par s dans la fibre.

De même, dans un système de coordonnées locales (y, t) sur X, avec $Y = \{t = 0\}$, au voisinage de $q^{-1}(a) \cap Y$, $\widetilde{X}$ se décrit par les coordonnées (y, t, s), avec r donné par $r(y, t, s) = (y, st, s)$.

La construction qui suit est copiée sur celle que fait Verdier [Ve1] pour les faisceaux constructibles. Soit d'abord $M \in D^b(\mathcal{D}_X)$; on définit $\widehat{\mathrm{Sp}}M \in \operatorname{ob} D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y})$ de la manière suivante : on prend $p^+M \in \operatorname{ob} D^b(\mathcal{D}_{\widetilde{X}})$ [*cf.* 2.7]; par tensorisation avec $\widehat{\mathcal{D}}_{\widetilde{X}|E}$, on obtient un complexe $\hat{p}^+M \in \operatorname{ob} D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\widetilde{X}|E})$ auquel on peut appliquer la construction 7.8, avec $f = q$; on obtient alors un complexe $\Psi(\hat{p}^+M)^\natural \in \operatorname{ob} D^b(\mathcal{D}_E)$ ($\natural$= oubli de la monodromie); on pose alors

$$\widehat{\mathrm{Sp}}M = \widehat{\mathcal{D}}_{E|Y} \underset{\mathcal{D}_E}{\otimes} \Psi(\hat{p}^+M)^\natural[1] \tag{8.1}$$

(on omet les j^{-1}, j l'injection $Y \to E$).

Montrons que cette construction s'étend à $D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$. Comme $\Psi(\hat{p}^+M)$ ne dépend que de $\hat{p}^+M[s^{-1}]$, et comme, d'autre part, on a $\hat{p}^+M[s^{-1}] = \hat{p}^+\mathcal{D}_X[s^{-1}] \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} M$, il suffit de vérifier que l'action naturelle à droite de $\mathcal{D}_X$ sur $\hat{p}^+\mathcal{D}_X[s^{-1}]|E$ se prolonge en une action de $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$.

On a $p^+\mathcal{D}_X = r^+\bar{p}^+\mathcal{D}_X$, $\bar{p}$ la projection $X\times\mathbb{C}\to X$; d'une part, on a $\bar{p}^+\mathcal{D}_X = \bar{p}^!\mathcal{D}_X[-2] = \mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}\to X}[-1]$, par 1.4.2. D'autre part, après localisation par s^{-1}, on a $r^+ = r^!$. En effet, soit $\widetilde{\mathbb{1}}$ l'élément unité canonique de $\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X\times\mathbb{C}}$; on vérifie immédiatement que l'application $a\mapsto a\widetilde{\mathbb{1}}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$ modules à gauche : $\mathcal{D}^g_{\widetilde{X}}[s^{-1}]\to\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X\times\mathbb{C}}[s^{-1}]$ (la localisation en s^{-1} dans le dernier membre se fait indifféremment à gauche ou à droite). On en déduit que $r^+\mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}}[s^{-1}] = (D\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X\times\mathbb{C}})[s^{-1}][-m-1]$ (le dual est pris sur $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$) est isomorphe à $\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X\times\mathbb{C}}[s^{-1}]$ en tant que $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$-module; on vérifie que les structures à droite de $r^{-1}\mathcal{D}_{X\times\mathbb{C}}$-module coïncident aussi et l'égalité $r^+[s^{-1}] = r^![s^{-1}]$ s'ensuit. Finalement, on a

$$p^+\mathcal{D}_X[s^{-1}] = p^!\mathcal{D}_X[s^{-1}][-2] = \mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X}[s^{-1}][-1]. \tag{8.2}$$

Notons maintenant $\mathbb{1}$ l'élément canonique de $\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X}$; on a

$$\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X}[s^{-1}] = \mathcal{D}_{\widetilde{X}}[s^{-1}]\mathbb{1}$$

[et, en coordonnées l'idéal Ann $\mathbb{1}$ est engendré par $s\partial_s - \Sigma t_i\partial_{t_i}$]. Munissons alors $\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X}[s^{-1}]|E$ de la V-filtration quotient de celle définie par E sur $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}[s^{-1}]$, filtration que nous noterons $\{V'_k\}$; on vérifie immédiatement en coordonnées qu'on a

$$V'_k\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X}[s^{-1}](V_\ell\mathcal{D}_X)\subset V'_{k+\ell}\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X}[s^{-1}]. \tag{8.3}$$

On déduit immédiatement de là que $\widehat{\mathcal{D}}_{\widetilde{X}|E}\underset{\mathcal{D}_{\widetilde{X}}}{\otimes}\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X}[s^{-1}]$ est muni canoniquement d'une action à droite de $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ qui étend celle de $\mathcal{D}_X$; l'assertion cherchée résulte alors de là et de (8.2).

Pour $M\in\operatorname{ob}D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{Y|X})$, on définit alors $\widehat{\mathrm{Sp}}M$ comme ci-dessus, par (8.1). À noter qu'en fait, on a un objet plus précis, à savoir $\Psi(\hat{p}^+M)^\natural\in\operatorname{ob}D^b(\mathcal{D}_E)$; voir remarque 8.8.

Par comparaison avec la longueur de la construction précédente, la démonstration des propriétés fondamentales du foncteur $\widehat{\mathrm{Sp}}$ va être à peu près immédiate.

THÉORÈME 8.4. — *Le foncteur $\widehat{\mathrm{Sp}}$ est une équivalence*

$$D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})\xrightarrow{\sim}D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y}).$$

Soit $M\in\operatorname{ob}D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$; en appliquant à $\widehat{\mathrm{Sp}}M$ le résultat précédent et le théorème 6.1 on trouve un complexe $\mathrm{Sp}\,M\in\operatorname{ob}D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$, dépendant fonctoriellement de M.

THÉORÈME 8.5.

1) *Le foncteur* $M \mapsto \mathrm{Sp}\, M$ *est une équivalence* $D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}) \xrightarrow{\sim} D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$.

2) *Ce foncteur est exact; si* M *est un module, on a* $\mathrm{Sp}\, M = \mathrm{sp}\, M$ *(le gradué associé à la* V*-filtration canonique).*

3) *Le foncteur* Sp *commute à la dualité.*

Démonstration de 8.4 *et* 8.5.

i) Examinons d'abord le cas où X est un fibré vectoriel sur Y, fibré que nous noterons F pour éviter des confusions; dans ce cas, on a $\widetilde{F} \simeq F \times \mathbb{C}$, avec $p(x,s) = sx$ (voir ci-dessus); on a aussi $T_Y F = F$. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 8.6. — *Pour* $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$, *on a un isomorphisme fonctoriel* $M \simeq \widehat{\mathrm{Sp}M}$.

D'après 6.1, M est de la forme $\widehat{P}$, avec $P \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle F\rangle)$. On peut alors construire $\widehat{\mathrm{Sp}M}$ de la manière suivante : on prend l'image inverse "algébrique dans la fibre" $p^+P \in \mathrm{ob}\, D^b(\mathcal{D}\langle\widetilde{F}\rangle)$ (qui se définit comme p^+M ci-dessus, mais en travaillant avec $\mathcal{D}\langle F\rangle$ et $\mathcal{D}\langle\widetilde{F}\rangle$ au lieu de $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$); on définit ensuite $\Psi(p^+P) \in \mathrm{ob}\, D^b(\mathcal{D}\langle F\rangle)$, comme au début du §7. Il est immédiat qu'on a $\widehat{\mathrm{Sp}M} = \widehat{\mathcal{D}}_{F|Y} \underset{\mathcal{D}\langle F\rangle}{\otimes} \Psi(p^+P)^\natural$; d'autre part, on a le résultat suivant :

LEMME 8.7. — $p^+P[s^{-1}]$ *est monodromique pour la fibration* $\widetilde{F} = F \times \mathbb{C} \to F$.

Il suffit de vérifier ce résultat pour $P = \mathcal{D}\langle F\rangle/\mathcal{D}\langle F\rangle(\theta - \lambda)$, θ le vecteur d'Euler de F; or, les mêmes calculs qu'en (8.2) montrent qu'on a $p^+P[s^{-1}] = p^!P[s^{-1}][-2]$; d'autre part on a $p^!P[s^{-1}] = \mathcal{D}\langle\widetilde{F}\rangle[s^{-1}]/\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par $s\partial_s - \theta$ et $\theta - \lambda$; d'où immédiatement le lemme.

Soit maintenant k l'injection $x \mapsto (x,1)$ de F dans $\widetilde{F} = F \times \mathbb{C}$; d'après le lemme précédent et 7.4 on a un isomorphisme $\Psi(p^+P)^\natural[1] \simeq k^+p^+P$ (en fait, 7.4 a été démontré dans la catégorie des $\mathcal{D}_F$-modules; ici, on travaille avec $\mathcal{D}\langle F\rangle$, mais la démonstration est la même).

Alors, de $pk = \mathrm{id}$, on déduit qu'on a $\Psi(p^+P)^\natural = P$; d'où 8.6.

ii) Revenons maintenant au cas général; soient donc M et $N \in$

ob $D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$; localement, on est dans la situation de fibré précédente : on en déduit que $\widehat{\mathrm{Sp}}$ est exact, que $\widehat{\mathrm{Sp}}M$ et $\widehat{\mathrm{Sp}}N$ sont spécialisables, et que la flèche naturelle $R\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}}(M,N) \to R\underline{\mathrm{Hom}}_{\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y}}(\widehat{\mathrm{Sp}}M, \widehat{\mathrm{Sp}}N)$ est un isomorphisme; en prenant les sections globales, on en déduit l'égalité des Hom, donc le fait que $\widehat{\mathrm{Sp}}$ est pleinement fidèle.

Le fait que ce foncteur soit essentiellement surjectif se voit alors ainsi : par récurrence sur la longueur des complexes on se ramène comme en 6.1 au cas d'un module : dans ce cas, le résultat est immédiat localement par 8.6, et les recollements se font en utilisant la pleine fidélité. Ceci démontre 8.4.

iii) La première assertion de 8.5 découle immédiatement de ce qui précède et de 6.1.

La deuxième assertion est claire lorsque X est un fibré vectoriel F sur Y. On écrit en effet $M = \widehat{P}$ avec $P \in \mathrm{ob}(D^b_{\mathrm{mon}}D\langle F\rangle)$ et on a :

$$\widehat{\mathrm{Sp}}M = M = \widehat{P} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{sp}}P = \widehat{\mathrm{sp}}M.$$

Dans le cas général, on choisit des coordonnées locales et on définit ainsi un isomorphisme local $\mathrm{Sp}\, M \xrightarrow[\sim]{\theta} \mathrm{sp}\, M$. Il reste à montrer que celui-ci ne dépend pas des coordonnées choisies.

Si on considère deux cartes locales avec des isomorphismes θ_1 et θ_2 et un changement de carte φ on doit montrer que les isomorphismes $\overline{\varphi}^*\theta_1 : \overline{\varphi}^*\,\mathrm{Sp}\, M \to \overline{\varphi}^*\,\mathrm{sp}\, M$ et $\theta_2 : \mathrm{Sp}\,\varphi^* M \to \mathrm{sp}\,\varphi^* M$ coïncident lorsque l'on identifie $\mathrm{Sp}\,\varphi^* M \simeq \overline{\varphi}^*\,\mathrm{Sp}\, M$ et $\mathrm{sp}\,\varphi^* M \simeq \overline{\varphi}^*\,\mathrm{sp}\, M$. ($\overline{\varphi}$ désigne le changement de carte de $T_Y X$ associé à φ).

En fait, tous les morphismes étant fonctoriels, on se ramène par dévissage comme en 6.1 à un module élémentaire. Dans ce cas le calcul peut être laissé au lecteur.

Pour démontrer la dernière assertion, il suffit de voir que $\widehat{\mathrm{Sp}}$ commute à la dualité. Or, pour $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$, on a $\hat{p}^+ DM[s^{-1}] = D\hat{p}^! M[s^{-1}] = D\hat{p}^+ M[s^{-1}][-2]$ (la dernière égalité, à cause de (8.2)). On conclut alors par 7.8.2.

Remarque 8.8. — Notons π la projection $E \to Y$. Étant donné un $\mathcal{D}_E$ module cohérent M, disons qu'il est *monodromique* si tout point $y \in Y$ a un voisinage ouvert U tel que, sur $\pi^{-1}(U)$, M soit de la forme $N^{\mathrm{an}} = \mathcal{D}_E \underset{\mathcal{D}\langle E\rangle}{\otimes} N$, avec N monodromique. Un complexe borné de $\mathcal{D}_E$-modules est dit monodromique s'il est à cohomologie monodromique;

on note $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}_E)$ la catégorie dérivée fabriquée avec ces complexes. À partir des raisonnements et des résultats du §6, on voit facilement que les foncteurs $N \mapsto N^{\mathrm{an}}$ et $M \mapsto \widehat{M}$ sont des équivalences respectivement $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle) \xrightarrow{\sim} D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}_E)$ et $D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}_E) \to D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y})$.

Reprenons maintenant la situation du début du paragraphe, et soit $M \in D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$; on a la formule suivante, plus précise que (8.1) :

$$(\mathrm{Sp}\, M)^{\mathrm{an}} = \Psi(\hat{p}^+ M)^{\natural}[1].$$

En effet, les formalisés des deux membres sont égaux; tout revient donc à démontrer que le second membre est monodromique; or, la question est locale sur Y, donc on peut supposer que X est un fibré sur Y, et on raisonne comme en 8.6.

Cette remarque sera utilisée au §9. Notons aussi qu'on aurait probablement pu obtenir directement $\mathrm{Sp}\, M$ et pas seulement $(\mathrm{Sp}\, M)^{\mathrm{an}}$ en reprenant les constructions à partir de l'éclaté $\widetilde{X}$ de $Y \times \{0\}$ dans $X \times \mathbb{C}$ (sans ôter l'adhérence de $(X - Y) \times \{0\}$). Nous laissons la question au lecteur.

9. Images directes et inverses.

Dans ce paragraphe, nous donnons un certain nombre de propriétés fonctorielles des opérations "cycles proches" et "spécialisation". Ces propriétés sont inspirées des résultats analogues démontrés dans [SGA] et [Ve1]. Pour ne pas allonger démesurément cet article, nous avons seulement esquissé une partie des démonstrations.

9.1. Complexes monodromiques. — Soient Y et Y' deux variétés analytiques complexes, et soient $E \xrightarrow{p} Y$ et $E' \xrightarrow{p} Y'$ deux fibrés vectoriels holomorphes. Soient encore f un morphisme $Y' \to Y$ et F un morphisme $E' \to E$ au-dessus de f. On a les résultats suivants :

PROPOSITION 9.1.1. — *Soit $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E'\rangle)$; supposons f propre sur* $\mathrm{Supp}\, M$ *et F injectif fibre par fibre. On suppose aussi que les $\underline{H}^i M$ admettent globalement (ou au moins localement sur Y) une bonne filtration. Alors on a $F_+ M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$.*

PROPOSITION 9.1.2. — *Supposons que f soit une submersion, et qu'on ait $E' = E_{\times_Y} Y'$; soit $N \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E\rangle)$; alors on a $F^! N \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E'\rangle)$ et de même pour $F^+ N$.*

Bien entendu, dans les énoncés précédents, les opérations $F_+, F^!, F^+$ doivent être entendues au sens "algébriques relatifs", c'est-à-dire que ce sont les opérations fabriquées à partir de $\mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{E'\to E}$ et $\mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{E\leftarrow E'}$ (avec par exemple $\mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{E'\to E} = \mathcal{O}\langle E'\rangle \underset{F^{-1}\mathcal{O}\langle E\rangle}{\otimes} F^{-1}\mathcal{D}\langle E\rangle$, *etc.*).

Démonstration de 9.1.1. — Il suffit de montrer le résultat lorsque M est un module; montrons d'abord la cohérence des $\underline{H}^i F_+ M$. Pour cela, on va copier la démonstration de 1.3.1; il est un peu plus simple de supposer que M est un module à droite. Soit $y \in Y$; par hypothèse, sur un voisinage de $f^{-1}(y)$, il existe $G \subset M$, $\mathcal{O}\langle E'\rangle$-cohérent qui engendre M sur $\mathcal{D}\langle E'\rangle$; on peut supposer que G est gradué pour la V-graduation canonique de M donc qu'il est homogène pour la V-graduation de $\mathcal{O}\langle E\rangle$ (prendre localement des générateurs de G, et les remplacer par leurs composantes homogènes; le module obtenu ne dépend pas des générateurs choisis). Quitte à restreindre le voisinage considéré de $f^{-1}(y)$, on étend la surjection $G \underset{\mathcal{O}\langle E'\rangle}{\otimes} \mathcal{D}\langle E'\rangle \to M$ en une résolution de longueur arbitrairement grande par des $G_i \otimes \mathcal{D}\langle E'\rangle$, G_i $\mathcal{O}\langle E'\rangle$ cohérents, homogènes, et à supports f-propres. Tout revient donc à démontrer que $F_+(G_i \otimes \mathcal{D}\langle E'\rangle)$ est à cohomologie cohérente.

Pour cela, on peut remarquer qu'on a $F_+(G_i \otimes \mathcal{D}\langle E'\rangle) = RF_* G_i \underset{\mathcal{O}\langle E\rangle}{\otimes} \mathcal{D}\langle E\rangle$ et utiliser le fait, dû à Bănică [Ba], que RF_*G_i est à cohomologie $\mathcal{O}\langle E\rangle$-cohérente. Mais on peut aussi remarquer que G_i est engendré par un nombre *fini* de ses composantes $G_{i,p}(|p| \leq p_0)$; désignant par H une de ces composantes, on est alors ramené au cas où l'on a $M = H \underset{\mathcal{O}_{Y'}}{\otimes} \mathcal{D}\langle E'\rangle$, H cohérent sur $\mathcal{O}_{Y'}$ et à support f-propre; on a alors $F_+M = RF_*(H \underset{\mathcal{O}_{Y'}}{\otimes} \mathcal{O}\langle E'\rangle) \underset{\mathcal{O}\langle E\rangle}{\otimes} \mathcal{D}\langle E\rangle$; tout revient donc à montrer que $RF_*(H \underset{\mathcal{O}_{Y'}}{\otimes} \mathcal{O}\langle E'\rangle)$ est à cohomologie $\mathcal{O}\langle E\rangle$-cohérente. Si l'on a $E' = Y' \underset{Y}{\times} E$, on a $\mathcal{O}\langle E'\rangle = \mathcal{O}_{Y'} \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\mathcal{O}\langle E\rangle$; d'où par la formule de projection $RF_*(H \underset{\mathcal{O}_{Y'}}{\otimes} \mathcal{O}\langle E'\rangle) = Rf_*H \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{O}\langle E\rangle$ et le résultat découle du théorème de Grauert; dans le cas général, on pose $E'' = Y' \underset{Y}{\times} E$ et l'on décompose $E' \to E$ en l'injection $E' \to E''$ et l'application $E'' \to E$; pour la première application, le résultat est immédiat; et, pour la seconde, on applique le raisonnement précédent; le résultat cherché se déduit de là.

Maintenant, le fait que les $\underline{H}^i F_+ M$ soient monodromiques résulte facilement du fait suivant, dont la vérification est laissée au lecteur : si θ (resp. θ') est le vecteur d'Euler de E resp. E', et si $a \in \mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{X'\to X}$ est homogène de degré k (au sens évident à partir de la graduation de $\mathcal{O}\langle E'\rangle$ et de $\mathcal{D}\langle E\rangle$), on a $\theta' a = a\theta + ka$.

Démonstration de 9.1.2. — Localement, on est dans une situation de produit : $Y' = Y \times Z$, $E = Y \times \mathbb{C}^d$, $E' = Y' \times \mathbb{C}^d$. Le résultat relatif à $F^! N$ est alors immédiat. Le cas de $F^+ N$ s'en déduit par dualité.

9.2. Images directes. — La situation considérée ici est la suivante : soient X et X' deux variétés analytiques complexes de dimensions respectivement m et m', et soit $F : X' \to X$ un morphisme. Soit encore $Y \subset X$ une sous-variété lisse de dimension $n = m - d$. On pose $Y' = Y \underset{X}{\times} X'$. Dans tout ce paragraphe on fait l'hypothèse suivante :

(H) Y' est lisse (en particulier réduit).

Dans le cas où X' est une sous-variété (lisse) de X, on vérifie facilement que cette condition équivaut à la suivante : l'intersection de X' et de Y est *nette*, c'est-à-dire que, localement, X' et Y sont simultanément linéarisables par un choix convenable des coordonnées.

On note respectivement i et i' les injections $Y \to X$ et $Y' \to X'$; on pose $E = T_Y X$, $E' = T_{Y'} X'$, et on note $\overline{F} : E' \to E$ l'application tangente à F le long de Y' ; on posera aussi $f = F|Y'$.

Considérant $\mathcal{D}_{X' \to X}$ comme l'espace des opérateurs différentiels de $F^{-1}\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_{X'}$, on le filtre de la manière suivante : on pose

$$V_k \mathcal{D}_{X' \to X} = \{a | a F^{-1}(\mathcal{I}_Y^j) \subset \mathcal{I}_{Y'}^{\prime j-k} \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}\}$$

(*cf.* §4). Cette filtration est évidemment compatible avec les V-filtrations de $\mathcal{D}_X$ et $\mathcal{D}_{X'}$; par suite, si l'on note $\widehat{\mathcal{D}}_{X' \to X}$ le complété, il est muni d'une action de $\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'}$ à gauche et d'une action de $f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ à droite. Dans le cas où F est une immersion fermée (resp. une submersion), on vérifie en coordonnées locales que la flèche canonique, où les f^{-1} sont sous-entendus :

$$\mathcal{D}_{X' \to X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \widehat{\mathcal{D}}_{X|Y} \to \widehat{\mathcal{D}}_{X' \to X} (\text{resp. } \widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'} \underset{\mathcal{D}_{X'}}{\otimes} \mathcal{D}_{X' \to X} \to \widehat{\mathcal{D}}_{X' \to X})$$

est bijective.

On opère de même pour filtrer $\mathcal{D}_{X \leftarrow X'}$ et définir $\widehat{\mathcal{D}}_{X \leftarrow X'}$.

On définit alors les images directes et inverses de façon analogue à la manière usuelle : pour $M \in \operatorname{ob} D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'})$, on pose $F_+ M = Rf_*(\widehat{\mathcal{D}}_{X \leftarrow X'} \overset{L}{\underset{\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'}}{\otimes}} M) \in \operatorname{ob} D(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$; pour $N \in \operatorname{ob} D^b(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$, on pose

$$F^! N = \widehat{\mathcal{D}}_{X' \to X} \overset{L}{\underset{f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}}{\otimes}} f^{-1} M[m' - m] \in \operatorname{ob} D(\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'}).$$

[Nous laissons le lecteur examiner, s'il le désire, comment il faudrait définir F^+N; le seul cas dont nous avons besoin est celui où $X' = Y$, $F = i$, cas qui a été vu antérieurement].

Le résultat que nous avons en vue ici est le suivant :

THÉORÈME 9.2.1. — *Soit $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'})$. Outre l'hypothèse (H), on suppose f propre sur* $\operatorname{Supp} M$*; on suppose de plus que les groupes de cohomologie $\underline{H}^i \operatorname{Sp} M = \operatorname{sp} \underline{H}^i M$ admettent localement sur Y une bonne filtration en tant que $\mathcal{D}\langle E'\rangle$-modules. Alors :*

i) *On a $F_+M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$.*

ii) *On a un isomorphisme fonctoriel* $\operatorname{Sp} F_+M = \overline{F}_+ \operatorname{Sp} M$.

A). — Démontrons d'abord le théorème dans le cas où X et X' sont des fibrés vectoriels respectivement sur Y et Y', (fibrés que l'on notera E et E'), et où F est un morphisme de fibrés. L'hypothèse (H) signifie ici que F est injectif fibre par fibre; d'autre part, avec les notations de 6.1, il existe $P \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{mon}}(\mathcal{D}\langle E'\rangle)$ tel qu'on ait $M = \widehat{P}$; et d'après 8.6, on a $P = \operatorname{Sp} M$. Le couple (f, P) vérifie alors les hypothèses de 9.1.1.

On a un morphisme naturel.

9.2.2. — $f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}_{E|Y} \underset{f^{-1}\mathcal{D}\langle E\rangle}{\otimes} \mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{E\leftarrow E'} \to \widehat{\mathcal{D}}_{E\leftarrow E'}.$

Par tensorisation avec P et image directe, on en déduit un morphisme

$$(F_+P)^\wedge = \widehat{\mathcal{D}}_{E|Y} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}\langle E\rangle}{\otimes}} F_+P \longrightarrow Rf_*\Big(\widehat{\mathcal{D}}_{E\leftarrow E'} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}\langle E'\rangle}{\otimes}} P\Big) = F_+\widehat{P}.$$

Le théorème, dans le cas particulier considéré, résulte alors de 9.1.1 et du lemme suivant :

LEMME 9.2.3. — *Sous les hypothèses précédentes, cette flèche est un isomorphisme.*

On décompose F en $E' \xrightarrow{G} Y' \times E \xrightarrow{H} E$, avec $G = (p', F)$, H la projection; on vérifie que, dans les deux membres, on a $F_+ = H_+G_+$. D'autre part le théorème est vrai pour G [parce que 9.2.2 est un isomorphisme pour une immersion fermée]; enfin, on vérifie que l'hypothèse sur les bonnes filtrations traverse G_+; on est donc ramené à traiter le cas d'une projection.

Le résultat est local sur Y; en changeant un peu les notations, on est donc ramené au cas où l'on a $E = Y \times \mathbb{C}^d$, $Y' = Y \times Z$, $E' = Y' \times \mathbb{C}^d$, avec F la projection $E' \to E$, et $f = F|Y'$. On peut d'autre part supposer que P est un module. En passant aux modules à droite et en résolvant P comme en 9.1.1, on se ramène à étudier le cas où $P = Q \underset{\mathcal{O}_{Y'}}{\otimes} \mathcal{D}\langle E' \rangle$, Q cohérent sur $\mathcal{O}_{Y'}$ et à support propre sur Y'; on a

$$P \overset{L}{\underset{\mathcal{D}\langle E'\rangle}{\otimes}} \mathcal{D}^{\mathrm{al}}_{E' \to E} = Q \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\mathcal{D}\langle E \rangle$$

posant

$$Q_k = Q \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1} \operatorname{gr}^V_k \mathcal{D}\langle E \rangle$$

le résultat qu'il faut démontrer s'écrit $\prod\limits_{k \leq k_0} R^i f_* Q_k \xrightarrow{\sim} R^i f_* \prod\limits_{k \leq k_0} Q_k$; c'est-à-dire qu'il faut démontrer que, dans notre situation, l'image directe commute au produit; c'est un cas particulier du lemme plus ou moins "bien connu" suivant :

LEMME 9.2.4. — *Soient G_k $(k \leq k_0)$ des faisceaux sur $Y' = Y \times Z$, avec $\cup \operatorname{Supp} G_k$ propre sur Y; supposons ceci :*

i) *Tout point $y' \in Y'$ possède un système fondamental de voisinages acycliques pour tous les G_k.*

ii) *Tout point $y \in Y$ possède un système fondamental de voisinages acycliques pour les $R^i f_* G_k$.*

Alors, on a un isomorphisme $\prod R^i f_* G_k \sim R^i f_* \prod G_k$.

Soit $\Gamma^{\cdot}_k$ une résolution flasque de G_k; le complexe $\prod \Gamma^{\cdot}_k$ est évidemment flasque; de *i)*, on déduit que ce complexe est une résolution de $\prod G_k$. Alors, de *ii)*, on déduit que la cohomologie du complexe $f_* \prod \Gamma^{\cdot}_k = \prod f_* \Gamma^{\cdot}_k$ commute au produit [en effet si $U \subset Y$ est acyclique pour les $R^i f_* G_k$, on a par un argument classique de suite spectrale

$$\Gamma(U, R^j f_* G_k) = H^j(f^{-1}U, G_k)$$

d'où

$$\prod \Gamma(U, \underline{H}^j f_* \Gamma^{\cdot}_k) = \prod H^j \Gamma(f^{-1}U, \Gamma^{\cdot}_k)$$

le second membre vaut $H^j \Gamma(f^{-1}U, \prod \Gamma^{\cdot}_k)$ et le résultat s'ensuit].

On applique ce lemme en prenant pour voisinage de y' (resp. y) des polycylindres assez petits de Y' (resp. Y). Bien entendu, il faut aussi vérifier que la flèche du lemme est la même que celle que l'on a définie auparavant; ce point ne présente pas de difficulté.

B). — Pour démontrer 9.2.1, *supposons d'abord que $F : X' \to X$ soit une immersion fermée*. Indiquons rapidement comment on peut faire; en reprenant les notations du §8, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E' & \xrightarrow{i'} & \widetilde{X}' & \xrightarrow{p'} & X' \\ \overline{F}\downarrow & & \widetilde{F}\downarrow & & F\downarrow \\ E & \xrightarrow{i} & \widetilde{X} & \xrightarrow{p} & X. \end{array}$$

Dans ce diagramme les deux carrés sont cartésiens et il s'agit de voir comment les opérations $\hat{p}'^{+}$, Ψ' et finalement la complétion le long de Y' se comportent vis-à-vis des images directes.

i) Soit $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'})$; on a un isomorphisme

$$\widetilde{F}_+\hat{p}'^{+}M[s^{-1}] \simeq \hat{p}^{+}F_+M[s^{-1}].$$

En effet, comme le carré de droite est cartésien et comme F est une immersion, on a un isomorphisme

$$\mathcal{D}_{\widetilde{X}\leftarrow\widetilde{X}'} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{\widetilde{X}'}}{\otimes}} \mathcal{D}_{\widetilde{X}'\to X'} \simeq \mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{D}_{X\leftarrow X'}$$

(on omet les F^{-1}, $\widetilde{F}^{-1}$ *etc.*); on vérifie que cet isomorphisme s'étend aux complétés pour la V-filtration définie par les paires $(E', \widetilde{X}')$ et $(E, \widetilde{X})$; d'autre part, il commute manifestement avec la localisation $[s^{-1}]$. L'assertion résulte de là.

ii) Posons $P' = \hat{p}'^{+}M[s^{-1}]$ et $P = \widetilde{F}_+P'$; alors on a un isomorphisme $\Psi(P) \simeq \overline{F}_+\Psi(P')$.

En effet, posons $\widetilde{P}' = P' \otimes \widehat{\mathcal{N}}$, $\widetilde{P} = P \otimes \widehat{\mathcal{N}}$ (notations du §7); on a $\widetilde{F}_+\widetilde{P}' = \widetilde{P}$ et il s'agit donc de démontrer qu'on a $\overline{F}_+i'^{+}\widetilde{P}' = i^{+}\widetilde{F}_+\widetilde{P}'$. Pour établir ce résultat, il suffit d'établir la même formule avec $\widetilde{P}'$ remplacé par $\widehat{\mathcal{D}}_{\widetilde{X}'|E'}$; comme $\widetilde{F}_+$ et i'^{+} commutent à la complétion, il suffit même de l'établir pour $\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$; par dualité, cela se ramène à $\overline{F}_+i'^{!}\mathcal{D}_{\widetilde{X}} = i^{!}\widetilde{F}_+\mathcal{D}_{\widetilde{X}}$; c'est une formule de changement de base comme en i).

iii) Localement, la situation se ramène à celle considérée en A). Donc on sait déjà que F_+M est spécialisable. Alors, ce qui précède, joint à 8.8 montre qu'on a $(\operatorname{Sp} F_+M)^{\mathrm{an}} = \overline{F}_+(\operatorname{Sp} M)^{\mathrm{an}}$.

Le second membre est évidemment égal à $(\overline{F}_+ \operatorname{Sp} M)^{\mathrm{an}}$; par 8.8 on en déduit l'isomorphisme $\operatorname{Sp} F_+M = \overline{F}_+ \operatorname{Sp} M$. [Une autre manière de conclure consiste à passer aux complétés et à en déduire une flèche $(\operatorname{Sp} F_+M)^\wedge = (\overline{F}_+ \operatorname{Sp} M)^\wedge \to \overline{F}_+\widehat{\operatorname{Sp} M}$; on déduit alors de A) que cette flèche est un isomorphisme].

C). — Maintenant pour démontrer le théorème, on factorise F en $X' \xrightarrow{G} X'' = X' \times X \xrightarrow{H} X$, avec G le graphe, et H la projection; on a ici $Y'' = X' \times Y$, $T_{Y''}X'' = X' \times E$; on vérifie qu'on a $F_+ = H_+G_+$, $\overline{F}_+ = \overline{H}_+\overline{G}_+$; d'autre part le théorème est vrai pour G; en particulier l'hypothèse sur les bonnes filtrations traverse G. Donc on est ramené au cas de la projection H. En changeant un peu les notations, on doit démontrer le théorème dans le cas où $X' = X \times Z$ et par conséquent $Y' = Y \times Z$, $E' = E \times Z$, *etc.*

Nous allons utiliser ici **A)** de manière beaucoup plus essentielle qu'en **B)**. Soit $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'})$; localement sur Y, on est dans la situation **A)**, donc i) est vrai, ii) est vrai localement et tout se ramène à définir une flèche globale. Pour cela, nous allons reprendre le même diagramme qu'en **B)** et procéder suivant les mêmes étapes :

i) On a ici une flèche (pas un isomorphisme)

$$\mathcal{D}_{\widetilde{X}\to X} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{D}_{X\leftarrow X'} \longrightarrow \mathcal{D}_{\widetilde{X}\leftarrow \widetilde{X}'} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{\widetilde{X}'}}{\otimes}} \mathcal{D}_{\widetilde{X}'\to X}.$$

En passant aux complétés comme ci-dessus et en localisant en s^{-1}, on en déduit une flèche $P \to \widetilde{F}_+P'$ avec $P = \hat{p}^+F_+M[s^{-1}]$, $P' = \hat{p}'^+M[s^{-1}]$.

ii) Posons $\widetilde{P} = P \otimes \widehat{\mathcal{N}}$, $\widetilde{P}' = P' \otimes \widehat{\mathcal{N}}$; on a donc une flèche $\widetilde{P} \to \widetilde{F}_+\widetilde{P}' = (\widetilde{F}_+P') \otimes \mathcal{N}$ (la dernière égalité résulte de la formule de projection parce que $\widetilde{F}$ est propre sur $\operatorname{Supp} P'$). Pour en déduire une flèche $\Psi(P) = i^+\widetilde{P} \to \overline{F}_+\Psi(P') = \overline{F}_+i'^+\widetilde{P}'$, il suffit donc de fabriquer une flèche $i^+\widetilde{F}_+\widetilde{P}' \to \overline{F}_+i'^+\widetilde{P}'$.

Cette flèche se fabrique par *adjonction* : on a une flèche $\mathcal{D}_{\widetilde{X}'} \to i'_+i'^+\mathcal{D}_{\widetilde{X}'}$, déduite par dualité de la flèche 1.5 $i'_!i'^!\mathcal{D}_{\widetilde{X}'} (= R\Gamma_{[E']}\mathcal{D}_{\widetilde{X}'}) \to \mathcal{D}_{\widetilde{X}'}$. D'où par tensorisation avec $\widetilde{P}'$ une flèche

$$(*) \qquad \widetilde{F}_+\widetilde{P}' \longrightarrow \widetilde{F}_+i'_+i^+\widetilde{P}' = i_+\overline{F}_+i'^+\widetilde{P}';$$

posons $Q = \overline{F}_+i'^+\widetilde{P}'$; on a $Q = \overline{F}_+(\operatorname{Sp} M)^{\mathrm{an}} = (\overline{F}_+ \operatorname{Sp} M)^{\mathrm{an}}$; donc par **A)**, Q est $\mathcal{D}_E$-cohérent, et l'on a donc $Q \xrightarrow{\sim} i^+i_+Q$; en appliquant i^+ à la flèche $(*)$, on trouve la flèche cherchée.

iii) On vérifie que la flèche $(\operatorname{Sp} F_+M)^{\mathrm{an}} = \Psi(P) \to \overline{F}_+\Psi(P') = \overline{F}_+(\operatorname{Sp} M)^{\mathrm{an}}$ provient localement de l'isomorphisme $\operatorname{Sp} F_+M = \overline{F}_+ \operatorname{Sp} M$ obtenu en **A)** (on peut aussi raisonner en passant aux complétés formels). On déduit alors de **A)** que c'est un isomorphisme et le théorème en résulte.

Pour terminer ce numéro, indiquons rapidement la variante du théorème précédent relative aux cycles proches. On garde la situation précédente $X' \xrightarrow{F} X$, et on suppose $Y \subset X$ de codimension 1, défini par $\{\varphi = 0\}$, avec $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $d\varphi \neq 0$ partout sur Y; posant $\varphi' = \varphi \circ F$, on suppose que φ' vérifie la même condition (ce qui revient à supposer, outre (H), que Y' est partout dans X' de codimension 1). On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 9.2.5. — *Soit $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'})$.*

i) *On a $\Psi(M) = \Psi(\operatorname{Sp} M)$.*

ii) *On suppose que* $\operatorname{Supp} M$ *est propre sur X et que les $\underline{H}^i \operatorname{Sp} M$ admettent localement sur Y une bonne filtration; alors on a $\Psi(F_+ M) = f_+ \Psi(M)$.*

Lorsqu'on a $X = Y \times \mathbb{C}$ et $X' = Y' \times \mathbb{C}$ la première assertion est immédiate, et la seconde se déduit alors de 9.2.1. On se ramène à cette situation par plongement dans le graphe $X' \to X' \times \mathbb{C}$, $X \to X \times \mathbb{C}$ et en montrant par des arguments analogues à ceux de 9.2.1 **B)**, que l'assertion ii) est vraie pour des immersions fermées. Nous laissons les détails au lecteur.

9.3. Images inverses. — Le résultat est ici le suivant :

THÉORÈME 9.3.1. — *Soient X une variété analytique complexe et $Y \subset X$ une sous-variété lisse. Soit $F : X' \to X$ une submersion, et posons $Y' = F^{-1}Y$. Alors, pour $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$, on a $F^! M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'})$ et $\operatorname{sp} F^! M = \overline{F}^! \operatorname{Sp} M$.*

($\overline{F}$ désigne, ici encore, l'application tangente $E' = T_{Y'}X' \to T_Y X = E$.)

La démonstration peut être laissée au lecteur. Le seul problème réside dans la commutation $i'^+ \widetilde{F}^! = \overline{F}^! i^+$ dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{i'} & \widetilde{X}' \\ \overline{F}\downarrow & & \widetilde{F}\downarrow \\ E & \xrightarrow{i} & \widetilde{X} \end{array}$$

Mais, comme les flèches verticales sont des submersions, les images inverses $\widetilde{F}^!$ et $\overline{F}^!$ coïncident avec $\widetilde{F}^+$ et $\overline{F}^+$ à un décalage près.

COROLLAIRE 9.3.2. — *Dans la même situation, supposons Y de codimension 1, et définie par $\{\varphi = 0\}$, avec $\varphi \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, $d\varphi$ partout $\neq 0$ sur Y. Alors, on a $\Psi(F^! M) = f^! \Psi(M)$.*

En effet, on a $\Psi(F^! M) = \Psi(\overline{F}^! \operatorname{sp} M)$ et il est immédiat que le second membre vaut $f^! \Psi(\operatorname{Sp} M) = f^! \Psi(M)$.

Voici encore un résultat relatif aux images inverses (comparer avec [Ve1]).

Proposition 9.3.3. — *Soient X une variété analytique complexe, et $Y \subset X$ une sous-variété lisse; on note i l'injection $Y \to X$. Pour $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y})$, on a des isomorphismes fonctoriels $i^! M \simeq \bar{i}^! \operatorname{Sp} M$ et $i^+ M \simeq \bar{i}^+ \operatorname{Sp} M$ ($\bar{i}$ désigne ici l'injection $Y \to E = T_Y X$).*

Il suffit de démontrer la première assertion, la seconde s'en déduisant par dualité. Pour cela posons $M' = R\Gamma_{[Y]} M$, $M'' = M[*Y]$; on a un triangle $M' \to M \to M'' \xrightarrow{+1} \ldots$, et $i^! M' \xrightarrow{\sim} i^! M$, $i^! M'' = 0$. D'autre part, le résultat est vrai pour M' car on a $M' = i_! i^! M'$; on applique alors 9.2.1 à $X' = Y' = Y$ et à $i^! M$ considéré comme complexe sur Y'; on a évidemment $\operatorname{sp} i^! M' = i^! M'$; d'où $M' = i_! i^! M' = i_! \operatorname{sp} i^! M' = \operatorname{sp} i_! i^! M' = \operatorname{sp} M'$. Il suffit donc de montrer qu'on a $i^! \operatorname{Sp} M'' = 0$; le résultat est local, donc on peut supposer que $X = E$ et qu'on a $M'' = \widehat{P}$, P monodromique; alors le résultat est trivial puisqu'on a $i^! M'' = i^! P$ et $P = \operatorname{sp} M''$.

La proposition précédente jointe à 3.7 donne la formule suivante : $i^+ M = \pi_+ \operatorname{Sp} M$ (π la projection $E \to Y$). Dans le cas d'un module spécialisable cette formule est démontrée dans [Sa1] et [Ma2].

9.4. Le cas des $\mathcal{D}$-modules. — Dans ce numéro, nous indiquons comment les résultats précédents s'étendent au cas des $\mathcal{D}$-modules. Le seul point délicat est l'extension de 9.2.1; nous reprenons donc X, Y, X', *etc.* comme en 9.2. Soit $R_V \mathcal{D}_X = \oplus (V_k \mathcal{D}_X) t^k \subset \mathcal{D}_X[t, t^{-1}]$ l'anneau de Rees de la V-filtration; étant donné une V-filtration d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent M, on définit son module de Rees par $R_V M = \oplus (V_k M) t^k$; on sait que $R_V \mathcal{D}_X$ est à fibres nœthériennes (on le considère comme faisceau sur X) et cohérent, et que la filtration de M est bonne si et seulement si $R_V M$ est cohérent (*cf.* [Me1]; l'idée d'utiliser l'anneau de Rees est reprise de ces auteurs; toutefois il nous semble nécessaire de faire l'hypothèse de "bonne filtration globale" directement sur $R_V M$). On note $R_V \mathcal{O}_X = \oplus (V_k \mathcal{D}_X \cap \mathcal{O}_X) t^k$. Le théorème 9.2.1 admet alors la variante suivante :

Théorème 9.4.1. — *Soit $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\mathcal{D}_{X'})$; outre l'hypothèse (H), on suppose F propre sur* $\operatorname{Supp} M$ *; on suppose de plus que, localement sur X, pour tout i, $R_V \underline{H}^i M$ est engendré par un sous $R_V \mathcal{O}_X$-module* *cohérent (V est ici la filtration canonique de $\underline{H}^i M$). Alors*

i) *On a* $F_+ M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\mathcal{D}_X)$.

ii) *On a* $\operatorname{Sp} F_+ M = \overline{F}_+ \operatorname{Sp} M$.

iii) *La flèche canonique* $(F_+ M)^\wedge \to F_+ \widehat{M}$ *est un isomorphisme.*

[Cette flèche se définit comme en 9.2.3].

Pour démontrer ce résultat, on décompose F en une immersion fermée et une projection, comme en 9.2; le cas de l'immersion se traite sans difficulté [(i) et iii) sont immédiats et ii) s'en déduit]. Donc nous pouvons supposer que F est une projection $X' = X \times Z \to X$.

Montrons d'abord i). Il suffit de démontrer cette assertion lorsque M est un module.

Remarquons en passant que l'hypothèse implique l'existence d'une bonne filtration localement sur X pour M, et localement sur Y pour $\operatorname{Sp} M$; donc par 1.3.1 et 9.1.1, pour tout i, $\underline{H}^i F_+ M$ est cohérent, et $\underline{H}^i \overline{F}_+ \operatorname{Sp} M$ est monodromique. En reprenant les mêmes raisonnements, on voit que $\underline{H}^i F_+ R_V M = \oplus (\underline{H}^i F_+ V_k M) t^k$ est $R_V \mathcal{D}_X$-cohérent.

Filtrons alors $N = \underline{H}^i F_+ M$ par les images N_k des $\underline{H}^i F_+ V_k M$. Cette filtration est bonne; pour le voir, il suffit de démontrer que $R_V N = \oplus N_k t^k$ est $R_V \mathcal{D}_X$-cohérent; c'est un quotient d'un module cohérent, donc il suffit de montrer que le noyau est localement de type fini; et, sur un polycylindre compact assez petit, le noyau du morphisme $\underline{H}^i F_+ R_V M \to R_V N$ est engendré par ses sections, et le théorème de Frisch permet de conclure.

D'autre part, comme $\{V_k M\}$ vérifie la condition 5.1.2, la filtration $\{N_k\}$ la vérifie aussi; donc c'est la filtration canonique. *A fortiori*, N est spécialisable.

ii) Pour démontrer les autres assertions, on pourrait penser à démontrer *a priori* qu'on a $(F_+ M)^\wedge \to F_+ \widehat{M}$. Il est même possible que cette assertion soit vraie dans des cas plus généraux que celui considéré ici, mais nous ne possédons aucun résultat dans ce sens. Nous allons donc procéder dans l'autre sens et démontrer ii).

Alors iii) se déduira de ii) et de 9.2.1, ii), modulo des vérifications de commutation de diagramme que nous omettrons.

Pour démontrer ii) on reprend le diagramme commutatif considéré en 9.2.

$$\begin{array}{ccccc} E' & \xrightarrow{i'} & \widetilde{X}' & \xrightarrow{p'} & X' \\ \overline{F}\downarrow & & \widetilde{F}\downarrow & & F\downarrow \\ E & \xrightarrow{i} & \widetilde{X} & \xrightarrow{p} & X. \end{array}$$

Soit $\overline{\mathcal{N}} = \mathbb{C}\{s\} \underset{\mathbb{C}[s]}{\otimes} \mathcal{N}$ l'espace des fonctions de classe de Nilsson holomorphes près de $0 \in \mathbb{C}$; on a $(\operatorname{Sp} M)^{\mathrm{an}} = i'^{+}\widetilde{P}'$, avec $\widetilde{P}' = P' \otimes \overline{\mathcal{N}}$, $P' = p'^{+}M[s^{-1}] = p'^{!}M[s^{-1}][-2]$ (la complétion ici est inutile, car elle ne change pas i'^{+}). Donc il suffit de démontrer les assertions suivantes :

a) on a $p^{!}F_{+}M = \widetilde{F}_{+}p'^{!}M$;

b) on a $i^{+}\widetilde{F}_{+}\widetilde{P}' = \overline{F}_{+}i'^{+}\widetilde{P}'$.

Pour démontrer ces assertions nous utiliserons la proposition suivante où les notations sont indépendantes de celles qui précèdent.

Proposition 9.4.2. — *Soient X et $X' = X \times Z$ deux variétés analytiques complexes et soit $F : X' \to X$ la projection, soit $Y \xrightarrow{G} X$ un morphisme; on considère le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} Y' = Y \times Z & \xrightarrow{G'} & X' = X \times Z \\ F'\downarrow & & F\downarrow \\ Y & \xrightarrow{G} & X. \end{array}$$

Soit $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_{X'})$; on suppose $\operatorname{Supp} M$ propre sur X et on suppose que, localement sur X, les $\underline{H}^i M$ admettent de bonnes filtrations. Alors on a $G^{!}F_{+}M = F'_{+}G'^{!}M$.

Ici, on se ramène encore aux deux cas : G est une immersion fermée, et G est une projection.

Dans le cas d'une immersion fermée, on vérifie immédiatement qu'on a

$$\mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{D}_{X\leftarrow X'} = \mathcal{D}_{Y\leftarrow Y'} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{Y'}}{\otimes}} \mathcal{D}_{Y'\to X'}$$

(nous omettons les F^{-1}, G'^{-1} *etc.*).

Le résultat suit alors par la formule de projection.

Dans le cas d'une projection, posons $Y = X \times T$; on a une flèche naturelle

$$\mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{D}_{X\leftarrow X'} \longrightarrow \mathcal{D}_{Y\leftarrow Y'} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_{Y'}}{\otimes}} \mathcal{D}_{Y'\to X'}$$

en effet le premier espace s'identifie aux opérateurs différentiels sur X à coefficients dans $\mathcal{O}_{X\times T} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_{X\times Z} \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \omega_Z$ et le second aux opérateurs à coefficients dans $\mathcal{O}_{X\times T\times Z} \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \omega_Z$; la flèche provient alors de la flèche évidente

$$\mathcal{O}_{X\times T} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{O}_{X\times Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{X\times T\times Z}.$$

Cette flèche donne un morphisme $G^! F_+ M \to F'_+ G'^! M$; pour démontrer que c'est un isomorphisme, par le même argument qu'en 1.3.1 on peut se contenter de traiter le cas où l'on a $M = \mathcal{D}_{X'} \underset{\mathcal{O}_{X'}}{\otimes} H$, avec H cohérent sur $\mathcal{O}_{X'}$, et à support propre sur X' ; on vérifie facilement que l'assertion revient à démontrer que la flèche naturelle $LG^* RF_* H' \to RF'_* LG'^* H'$ est un isomorphisme, avec LG^* l'image inverse en géométrie analytique et $H' = H \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z$. Ceci est un résultat connu de géométrie analytique, d'ailleurs conséquence facile du théorème des images directes de Grauert (indication : pour tout point $y \in Y$, la flèche précédente devient un isomorphisme lorsqu'on la restreint à $\{y\}$, *i.e.* lorsqu'on lui applique $\overset{L}{\underset{\mathcal{O}_{Y,y}}{\otimes}} \mathbb{C}$; la cohérence des faisceaux permet alors de conclure en utilisant le lemme de Nakayama).

L'assertion a) résulte immédiatement de cette proposition. Pour démontrer b) on fabrique d'abord une flèche $i^+ \widetilde{F}_+ \widetilde{P}' \to \overline{F}_+ i'^+ \widetilde{P}'$ comme en 9.2.1. Pour établir que cette flèche est un isomorphisme, par limite inductive, on peut remplacer $\widetilde{P}'$ par $\widetilde{P}'_{\alpha,k} = P' \otimes \overline{\mathcal{N}}_{\alpha,k}$, avec $\overline{\mathcal{N}}_{\alpha,k} = \bigoplus_{0\le \ell\le k} \mathbb{C}\{s\}[s^{-1}] s^\alpha (\log s)^\ell$. On vérifie qu'alors, toutes les hypothèses sont satisfaites pour appliquer la dualité, et notamment utiliser 1.5.3. Écrivant Q pour l'un des $\widetilde{P}'_{\alpha,k}$, on aura alors $i^+ \widetilde{F}_+ Q = D i^! \widetilde{F}_+ DQ$ et $\overline{F}_+ i'^+ Q = D\overline{F}_+ i'^! DQ$. On vérifie alors que la flèche $\overline{F}_+ i'^! DQ = i^! \widetilde{F}_+ DQ$ duale de la précédente coïncide avec l'isomorphisme donné par 9.4.2 (avec les substitutions évidentes $\widetilde{X}$ au lieu de X, E au lieu de Y, *etc.*). Nous omettrons cette vérification.

Remarque 9.4.3. — Soit $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$ et *supposons* M *holonome* (*i.e.* à cohomologie holonome). On sait alors que les $\underline{H}^i M$ admettent une bonne filtration globale : ce résultat est démontré dans [KK2] dans le cas régulier; dans [Ma5] il est indiqué que l'hypothèse de régularité peut être omise. D'autre part, d'après un résultat de Kashiwara rappelé au §5, M est spécialisable.

Il nous paraît très probable que les $R_V \underline{H}^i M$ satisfont les hypothèses de 9.4.1, mais nous n'avons pas de démonstration de ce fait. *Le théorème reste cependant vrai avec l'hypothèse "M holonome, et F propre sur* $\operatorname{Supp} M$". En effet, F_+M est cohérent, et un raisonnement classique de Kashiwara montre alors qu'il est holonome, donc spécialisable, d'où i). D'autre part $(\operatorname{Sp} M)^{\mathrm{an}}$ est aussi holonome, donc $\overline{F}_+(\operatorname{Sp} M)^{\mathrm{an}}$ l'est encore. On vérifie que les faits précédents suffisent pour la validité de la démonstration ci-dessus de ii) et iii).

Pour terminer, indiquons comment se généralisent les autres résultats de 9.2 et 9.3. Les énoncés 9.2.5, i), 9.3.1, 9.3.2 et 9.3.3 restent vrais en y remplaçant $\widehat{\mathcal{D}}_{X|Y}$ par $\mathcal{D}_X$. Pour l'énoncé 9.2.5, ii), il faut faire des hypothèses analogues à celles que nous venons de faire c'est-à-dire, soit supposer que les $R_V \underline{H}^i M$ vérifient la condition donnée en 9.4.1, soit supposer M holonome. Nous laissons ces questions au lecteur.

10. Compléments et remarques diverses.

10.1. — L'exposé qui précède est incomplet sur au moins deux points :

a) Comme il a été signalé dans l'introduction, le lien avec le point de vue microlocal de [KK1], [La1], [La2], [La3] n'a pas été abordé (le principe de ce lien est en gros le suivant : pour $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{sp}}(\mathcal{D}_X)$, le transformé de Fourier de $\operatorname{Sp} M$ ne dépend que du microlocalisé de M le long de $T^*_Y X$).

b) X étant toujours une variété analytique complexe, il conviendrait d'examiner le cas où $Y \subset X$ n'est pas nécessairement lisse; cette situation s'introduit naturellement, par exemple dans la théorie des cycles proches, ou aussi lorsqu'on a un morphisme $X' \to X$, avec Y lisse, mais $Y' = X' \underset{X}{\times} Y$ non lisse.

Certains cas particuliers, peuvent être traités à partir des remarques suivantes :

Reprenons d'abord, dans la situation où tout est lisse, le cas considéré en 9.2.1, avec $F : X' \to X$ une immersion fermée; alors les énoncés 9.2.1 et 9.4.1 admettent la réciproque suivante : *soit $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'})$; si F_+M est spécialisable, M l'est aussi (et, bien sûr, on a $\operatorname{Sp} F_+M = \overline{F}_+ \operatorname{Sp} M$); même chose avec $\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'}$ remplacé par $\mathcal{D}_{X'}$.*

Ici, la V-complétion commute à l'image directe, donc on peut se limiter au cas de $\widehat{\mathcal{D}}_{X'|Y'}$. Le résultat est local, donc on peut supposer

$X = E(= T_Y X)$, $X' = E'$, $F = \overline{F}$; alors $F_+ M$ est de la forme $\widehat{P}$, avec P monodromique, et on a évidemment : $\operatorname{Supp} P \subset F(E')$. Alors, on a $M = F^+ F_+ M = F^+ \widehat{P} = (F^+ P)^\wedge$ et le résultat s'ensuit.

Ceci nous incite à faire la construction suivante : soit X une variété analytique complexe, et soit $Y \subset X$ un sous-espace analytique fermé non nécessairement lisse, (ni même réduit); supposons donnés $Y_1 \subset X_1$, Y_1 et X_1 lisses et une immersion fermée $i : X \to X_1$, avec $Y = X \underset{X_1}{\times} Y_1$; soit alors $M \in \operatorname{ob} D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_X)$; par définition nous dirons que M est spécialisable le long de Y si $i_+ M$ est spécialisable le long de Y_1, et nous considérerons $\operatorname{Sp} i_+ M$ comme "le spécialisé" de M le long de Y (ou, au moins, comme un substitut dudit). On peut voir que le fait pour M d'être spécialisable ne dépend pas de (i, X_1, Y_1); nous laissons de côté la question de savoir dans quelle mesure et en quel sens $\operatorname{Sp} i_+ M$ est "indépendant" de ces données.

Cette construction s'applique par exemple lorsque Y est un *diviseur* de X (hypersurface, avec multiplicités données sur les composantes) : on prend pour X' le fibré ayant pour faisceau de sections $\mathcal{O}_X(Y)$, les fonctions méromorphes sur Y avec pôles de l'ordre au plus égal à celui du diviseur; ici i est donné par l'injection canonique $1 \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(Y))$. On a $i(X) \underset{X_1}{\times} \{0\} = Y$, $\{0\}$ désignant la section nulle.

Si Y est défini par les zéros de $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, cela revient à envoyer X par le graphe dans $X \times \mathbb{C}$; on pourra alors considérer que les cycles proches de M sont donnés par $\Psi_p(i_+ M)$, p la projection $X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Cette construction ne s'applique pas à un $Y \subset X$ de codimension quelconque; pour traiter ce cas, et même plus généralement celui où X est singulier, il faudrait utiliser la théorie des $\mathcal{D}$-modules sur les espaces analytiques [Sai3]; localement les questions peuvent se traiter comme il est esquissé ci-dessus, par plongement dans des variétés lisses; le problème serait donc de définir et d'étudier à partir de là des objets globaux. Nous n'aborderons pas cette question.

10.2. — Pour terminer, plaçons-nous dans le cas des complexes bornés à cohomologie holonome régulière; on notera $D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathcal{D}_X)$ qu'ils constituent.

Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe; posons $Y = \{f = 0\}$ et supposons df partout $\neq 0$ sur Y. Pour $G \in \operatorname{ob} D^b(\mathbb{C}_X)$ on définit les "cycles proches de G le long de Y" suivant Deligne [SGA] de la manière suivante; soit $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ un revêtement universel de $\mathbb{C}^*$ (par exemple, celui dont le point base est 1); on pose $\widetilde{X}^* = X \underset{\mathbb{C}}{\times} \widetilde{\mathbb{C}}^*$ et on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{p} & \widetilde{X}^k \\ \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \tilde{f} \\ \{0\} & \xrightarrow{\bar{i}} & \mathbb{C} & \xleftarrow{\bar{p}} & \widetilde{\mathbb{C}}^*. \end{array}$$

On pose alors $\Psi^{\mathrm{top}}(G) = i^{-1}Rp_*p^{-1}G$; l'action évidente de la monodromie T permet de considérer ce complexe comme l'objet de la catégorie $D^b(\mathbb{C}_Y[T, T^{-1}])$.

Soit d'autre part $M \in \mathrm{ob}\, D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$; on sait que la "correspondance de Riemann-Hilbert"

$$M \longmapsto DRM = \omega \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} M (= R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_X, M)[m], m = \dim X)$$

est une équivalence entre $D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ et la sous-catégorie pleine de $D^b(\mathbb{C}_X)$ formée des complexes à cohomologie analytiquement constructible [Ka4], [Me2]. On a alors le théorème suivant, avec par définition $\Psi(M) = \Psi(\widehat{M})$.

THÉORÈME 10.2.1. — *On a un isomorphisme* $\Psi^{\mathrm{top}}(DRM) = DR\Psi(M)$.

Ce théorème est dû dans le cas d'un module à Beilinson [Bei] et Kashiwara [Ka1] (voir aussi [Ma1] pour le cas particulier $M = \mathcal{O}_X$, Y singulier, cas que l'on interprète comme en 10.1 ci-dessus).

Une exposition détaillée de cette question se trouve dans [Me2]; nous la suivrons, pour montrer comment le résultat s'étend aux complexes.

i) On a $\Psi^{\mathrm{top}}(DRM) = DR\Psi^{\mathrm{top}}M = DR(M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Psi^{\mathrm{top}}\mathcal{O}_X)$.

La première égalité est évidente en utilisant la représentation canonique de "DR" par le complexe de De Rham.

Pour la seconde, on remarque qu'on a $Rp_*p^{-1}\mathcal{O}_X = p_*p^{-1}\mathcal{O}_X$ (utiliser les théorèmes A et B de Cartan-Oka); alors, on voit immédiatement que $\Psi^{\mathrm{top}}\mathcal{O}_X$ est plat sur $\mathcal{O}_X$. Enfin, la flèche évidente $M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Psi^{\mathrm{top}}\mathcal{O}_X \to \Psi^{\mathrm{top}}M$ donne par passage à "DR" un isomorphisme (on se ramène au cas où M est un module, et on prend alors localement une résolution libre de M).

ii) Soit $\Psi^{df}\mathcal{O}_X \subset \Psi^{\mathrm{top}}\mathcal{O}_X$ le sous-faisceau des fonctions de détermination finie (= l'action de T y est localement finie); on démontre que la flèche

$$DR(M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Psi^{df}\mathcal{O}_X) \longrightarrow DR(M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Psi^{\mathrm{top}}\mathcal{O}_X)$$

est un isomorphisme, *cf.* [Me2]. À noter que ceci utilise seulement l'holonomie, et pas la régularité.

iii) Soit $\Psi^N\mathcal{O}_X \subset \Psi^{df}\mathcal{O}_X$ le sous-faisceau des fonctions de classe de Nilsson (*i.e.* de détermination finie, et à croissance modérée dans tout secteur le long de Y).

Le *théorème de régularité* montre que la flèche $DR(M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Psi^N\mathcal{O}_X) \to DR(M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Psi^{df}\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme; *cf.* [Me2].

iv) On a donc finalement $\Psi^{\mathrm{top}}(DRM) = DR(M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Psi^N\mathcal{O}_X)$. Désignons maintenant comme en 7.1 par $\mathcal{N}$ l'espace vectoriel des fonctions de classe de Nilsson et posons $\mathcal{N}^{\mathrm{an}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}[t]}{\otimes} \mathcal{N}$; on a $\Psi^N\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}{\otimes} \mathcal{N}^{\mathrm{an}} \mid Y$ et par conséquent $\Psi(M) = i^+(M \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Psi^N\mathcal{O}_X)$ (le foncteur i^+ est inchangé par complétion). Le théorème résulte donc de la proposition suivante, appliquée à $P = M \underset{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}{\otimes} \mathcal{N}^{\mathrm{an}}$.

PROPOSITION 10.2.2. — *Soit $P \in \operatorname{ob} D^b(\mathcal{D}_X)$; on suppose que localement, P est limite inductive de complexes holonomes réguliers. Alors, on a $DRi^+P = i^{-1}DRP$.*

Comme en 9.2.1, c), on a une flèche $\mathcal{D}_X \to i_+i^+\mathcal{D}_X$ déduite par dualité de la flèche 1.5 $i_!i^!\mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_X$; d'où par tensorisation avec P une flèche $P \to i_+i^+P$ et une flèche $DRP \to DRi_+i^+P$; comme i^+P est quasi-cohérent, on a $DRi_+i^+P = i_+DRi^+P$, d'où une flèche $DRP \to i_+DRi^+P$; et par adjonction, on en déduit la flèche cherchée $i^+DRP \to DRi^+P$.

Maintenant, si P est holonome régulier, cette flèche est un isomorphisme (ceci est une autre forme du théorème de régularité). Le résultat s'en déduit par passage à la limite inductive. D'où la proposition et le théorème.

Soit maintenant $Y \subset X$ une sous-variété lisse quelconque (non nécessairement de codimension un). Considérons comme au §8 le diagramme de déformation au cône normal

$$\begin{array}{ccccc} T_YX = & E & \xrightarrow{i} & \widetilde{X} & \xrightarrow{p} X \\ & \downarrow & & q\downarrow & \\ & \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}. & \end{array}$$

Pour $G \in \operatorname{ob} D^b(\mathbb{C}_X)$, on pose avec Verdier [Ve1] $\mathrm{Sp}^{\mathrm{top}}\, G = \Psi_q(p^{-1}G)^\natural$ ($\natural$ = oubli de la monodromie). On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 10.2.3. — *Pour* $M \in \operatorname{ob} D^b_{hr}(\mathcal{D}_X)$ *on a* $\mathrm{Sp}^{\mathrm{top}}(DRM) = DR(\mathrm{Sp}\, M)$.

Par définition, $DR\,\mathrm{Sp}\, M = DR(\mathrm{Sp}\, M)^{\mathrm{an}}$. Par le théorème de régularité, p^+M est holonome régulier et l'on a $p^{-1}DRM = DRp^+M$. Le résultat découle alors immédiatement de 10.2.1.

BIBLIOGRAPHIE

[Ab] B. ABDEL GADIR, Analyse microlocale des systèmes différentiels holonomes, Thèse, Grenoble, 1992.

[BMV] J.L. BRYLINSKI, B. MALGRANGE, J.L. VERDIER, Transformation de Fourier géométrique I, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 297 (1983), 55–58; II, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 303 (1986), 193–198.

[Ba] C. BĂNICĂ, Le complété formel d'un espace analytique le long d'un sous-espace, Man. Math., 6 (1972), 207–244.

[Be] A. BEILINSON, Lettre à P. Deligne, non publiée, 1981.

[Bo] A. BOREL & al., Algebraic $\mathcal{D}$-modules, Persp. Math., Acad. Press, 2, 1987.

[Ca] H. CARTAN, Idéaux de fonctions analytiques, Ann. E.N.S., 61 (1944), 149–197.

[GR] H. GRAUERT, R. REMMERT, Bilder und Urbilder analytischen Garben, Ann. of Math., 68-2 (1958), 393–443.

[Ka1] M. KASHIWARA, Vanishing cycles and holonomic systems of differential equations, Springer Lect. Notes, 1016 (1983), 134–142.

[Ka2] M. KASHIWARA, On holonomic systems of differential equations II, Invent. Math., 49 (1978), 121–135.

[Ka3] M. KASHIWARA, b-functions and holonomic systems, Invent. Math., 38 (1976), 33–53.

[Ka4] M. KASHIWARA, The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems, Publ. RIMS, 20 (1984), 319–365.

[KK1] M. KASHIWARA, T. KAWAI, Second microlocalization and asymptotic expansions, Springer Lect. Notes in Physics, 126 (1980), 21–76.

[KK2] M. KASHIWARA, T. KAWAI, On holonomic systems of microdifferential equations III, Publ. RIMS, 17 (1981), 813–979.

[La1] Y. LAURENT, Vanishing cycles and second microlocalization, Alg. Analysis, Acad. Press, I (1989), 381–391.

[La2] Y. LAURENT, Vanishing cycles of $\mathcal{D}$-modules, Invent. Math., 112 (1993), 491–539.

[La3] Y. LAURENT, Polygone de Newton et b-fonction pour les modules microdifférentiels, Ann. E.N.S., 4-20 (1987), 391–441.

[Ma1] B. MALGRANGE, Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, Astérisque, 101–102 (1983), 243–267.

[Ma2] B. MALGRANGE, Extension of holonomic $\mathcal{D}$-modules, Alg. Analysis, Acad. Press, I (1989), 403–411.

[Ma3] B. MALGRANGE, Équations différentielles à coefficients polynomiaux, Progress in Math, Birkhäuser, 96, 1991.

[Ma4] B. MALGRANGE, Séminaire sur les opérateurs différentiels et pseudodifférentiels, Université Sci. et Méd. de Grenoble, 1976.

[Ma5] B. MALGRANGE, Filtration des modules holonomes, in Analyse algébrique des perturbations singulières, II Méthodes différentielles, L. Boutet de Monvel ed. Hermann (1994), 35–41.

[Me1] Z. MEBKHOUT, Le formalisme des six opérations de Grothendieck, Travaux en cours, Hermann, 1989.

[Me2] Z. MEBKHOUT, Une équivalence de catégories – Une autre équivalence de catégories, Comp. Math., 51 (1984), 51–62 et 63–88.

[Me3] Z. MEBKHOUT, Le théorème de comparaison entre cohomologies de De Rham d'une variété analytique complexe, Publ. Math. I.H.E.S., 69 (1989), 47–89.

[Sa1] C. SABBAH, $\mathcal{D}$-modules et cycles évanescents, Travaux en cours, Hermann, 24 (1987), 53–98.

[Sa2] C. SABBAH, Modules d'Alexander et $\mathcal{D}$-modules, Duke Math. Journal, 60-3 (1990), 729–814.

[Sai1] M. SAITO, Duality for vanishing cycle functors, Publ. RIMS, 25–6 (1989), 889–921.

[Sai2] M. SAITO, Induced $\mathcal{D}$-modules and differential complexes, Bull. Soc. Math. France, 117 (1989), 361–384.

[Sai3] M. SAITO, $\mathcal{D}$-modules on analytic spaces, Preprint RIMS, Kyoto, 694, 1990.

[Sc] J.P. SCHNEIDERS, Dualité pour les modules différentiels, Thèse, Univ. Liège, 1986.

[Se] J.P. SERRE, Algèbre locale et multiplicités, Springer Lect. Notes, 11 (1965).

[SGA] SGA 7, Springer Lect. Notes, 288 (1973).

[SKK] M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA, Microfunctions and pseudodifferential equations, Springer Lect. Notes, 287 (1973), 264–529.

[Ve1] J.L. VERDIER, Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée, Astérisque, 101-102 (1982), 332–364.

[Ve2] J.L. VERDIER, Séminaire de géométrie analytique, exposé 9, Astérisque, 36–37 (1976), 189–228.

Manuscrit reçu le 17 novembre 1994,
révisé le 15 mai 1995,
accepté le 13 juin 1995.

Y. LAURENT & B. MALGRANGE,
Laboratoire de Mathématiques
Université de Grenoble I
URA 188 du CNRS
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex (France).