ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANNE BERTRAND-MATHIS

Nombres normaux dans diverses bases

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 5 (1995), p. 1205-1222

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_5_1205_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 5 (1995), 1205–1222

NOMBRES NORMAUX DANS DIVERSES BASES

par Anne BERTRAND-MATHIS

1. Qu'est-ce qu'un nombre normal?

Étant donné un nombre β strictement supérieur à 1, nous appellerons $B(\beta)$ l'ensemble des nombres réels x tels que la suite $(x\beta^n)_{n\geq 0}$ soit équirépartie modulo un; notons que presque tout x (au sens de la mesure de Lebesgue) se trouve dans $B(\beta)$ ([C]). Lorsque g est un entier naturel il est bien connu que pour tout entier p non nul ([M]) :

$$B(g^p) = B(g).$$

Mendès-France [MF] a posé la question suivante : les propositions "θ est un nombre de Pisot" et "pour tout $p \neq 0$, $B(\theta^p) = B(\theta)$" sont-elles équivalentes?

Nous dirons que les nombres réels u et v sont multiplicativement équivalents s'il existe m et p appartenant à $\mathbb{N}^*$ tels que $u^m = v^p$. Wolfang Schmidt [Sc] a montré que si les deux entiers naturels g et h ne sont pas équivalents alors

$$B(g) \neq B(h).$$

Pearce et Keane [PK] ont donné une autre preuve de ce résultat, preuve qui se généralise un peu, par exemple au cas où $g = 10$ et $h = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Feldman et Smorodinsky [FS] donnent également une preuve

Mots-clés : Nombres normaux – Systèmes de numérotation.
Classification math. : 11K16 – 58F11.

du résultat de Schmidt, preuve que nous désirons étendre ici à des cas où g et h ne sont plus entiers naturels et relier à d'autres notions de normalité. La plupart des preuves de cet article s'inspirent de Feldman et Smorodinsky.

Brown, Moran et Pollington ([BMP], [MP]) ont montré qu'étant donné un réel $\beta > 1$ la propriété $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $B(\beta) = B(\beta^p)$ est toujours fausse sauf si β est un entier et que $B(\theta) = B(\beta)$ si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que θ^r et β^r appartiennent tous deux à $\mathbb{N}$, $\dfrac{\operatorname{Ln}\theta}{\operatorname{Ln} b}$ soit rationnel et $\mathbb{Q}(\theta)$ égal à $\mathbb{Q}(\beta)$. Leur preuve utilise des produits de Riess et ils n'hésitent pas à considérer des mesures non invariantes. Nous ne détaillerons pas ici leurs résultats mais il faut remarquer que, confrontés à ceux que nous prouvons ici, ils permettent d'établir aisément un certain nombre de résultats nouveaux qui seront publiés ultérieurement.

Lorsque g est un entier il est équivalent de dire que :

– la suite $(xg^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo 1;

– étant donné la transformation T de $[0,1[$ dans lui-même : $Tx = \{gx\}$, la suite $(T^n x)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un (étant donné un nombre réel y, $\{y\}$ désignera la partie fractionnaire de g et $[y]$ sa partie entière);

– pour tout entier k, tout bloc de k chiffres compris entre 0 et $g-1$ apparaît dans le développement en base g de x avec la fréquence $1/g^k$.

Tout ceci se vérifie aisément. Un nombre de $B(g)$ est dit "normal en base g". La normalité est donc liée à trois notions :

- la répartition modulo un de la suite $(xg^n)_{n\geq 0}$;
- l'itération de la transformation $T : x \to \{gx\}$;
- la répartition des chiffres dans le g-développement de x.

Ces trois notions correspondent au même phénomène; mais lorsque β n'est plus un entier naturel, ces trois notions s'étendent dans trois directions différentes : on peut s'intéresser à :

1) La répartition modulo un de la suite $(x\beta^n)_{n\geq 0}$; nous appellerons encore $B(\beta)$ l'ensemble des nombres réels x tels que la suite $(x\beta^n)_{n\geq 0}$ soit équirépartie modulo un. Mais si T_β est la transformation de $[0,1[$ dans lui-même qui à x associe $\{\beta x\}$ alors $(T_\beta)^n x$ n'est plus du tout égal à $\{x\beta^n\}$ bien que ce soit le cas si β est un entier naturel.

2) La répartition modulo un de la suite du tore de dimension k, $([0,1[)^k$, $(x\beta^n, x\beta^{n+1}, \ldots, x\beta^{n+k-1})_{n\geq 0}$, pour diverses valeurs de k;

lorsque g est entier, déjà pour $k = 2$ la suite $(xg^n, xg^{n+1})_{n\geq 0}$ n'est jamais équirépartie modulo un; mais lorsque β est algébrique de degré r, pour presque tout x la suite $(x\beta^n, \ldots, x\beta^{n+r-1})_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un (il y a alors équirépartition de $(x\beta^n, \ldots, x\beta^{n+k-1})_{n\geq 0}$ pour tout $k \leq r$ mais jamais pour $k > r$ car alors $x\beta^{n+k-1}$ est combinaison linéaire de $x\beta^n, \ldots, x\beta^{n+k-2}$; nous appellerons $T(\beta)$ l'ensemble de ces nombres et nous dirons qu'ils sont normaux au sens géométrique.

Lorsque β est entier algébrique de degré r, la suite $(\{x\beta^n\}, \{x\beta^{n+1}\}, \ldots, \{x\beta^{n+r-1}\})_{n\geq 0}$ est l'itérée de $(\{x\}, \{x\beta\}, \ldots, \{x\beta^{r-1}\})$ par une transformation ergodique $\mathcal{C}_\beta$ du tore $([0,1[)^r$ muni de la mesure de Lebesgue, de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \cdots & & 0 & 1 \\ a_1 & & \cdots & & & a_r \end{pmatrix}$$

où l'on suppose que $\beta^r = a_1\beta^{r-1} + \cdots + a_r$ est l'équation minimale de β sur $\mathbb{Z}$. Si β est algébrique mais pas entier algébrique, nous ne voyons pas apparaître de transformation du tore associée à β de façon naturelle.

Lorsque β est transcendant, pour presque tout x, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ les suites $(x\beta^n, x\beta^{n+1}, \ldots, x\beta^{n+k-1})_{n\geq 0}$ sont équiréparties modulo un; on dit alors que la suite $(x\beta^n, x\beta^{n+1}, \ldots, x\beta^{n+k}, \ldots)_{n\geq 0}$ du tore $([0,1[)^{\mathbb{N}}$ est équirépartie modulo un; $(\{x\beta^n\}, \{x\beta^{n+1}\}, \ldots)$ est l'itéré du point $(\{x\}, \{\beta x\}, \ldots)$ par la transformation $\mathcal{C}$ de $([0,1[)_{\mathbb{N}}$ dans lui-même : $(y_1, y_2, y_3, \ldots) \to (y_2, y_3, y_4, \ldots)$.

3) Une troisième voie est celle des développements en base β et de la dynamique symbolique. Tout nombre réel x s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \varepsilon_1\beta^s = \varepsilon_2\beta^{s-1} + \cdots + \varepsilon_{s+1} + \frac{\varepsilon_{s+2}}{\beta} + \frac{\varepsilon_{s+3}}{\beta^2} + \frac{\varepsilon_i}{\beta^{i-s-1}} + \frac{\varepsilon_{i+1}}{\beta^{i-s}} + \cdots$$

où $\varepsilon_i \in \mathbb{N}$ avec la condition suivante : pour tout $i \geq 1$

$$\varepsilon_{i+1}\beta^{s-i-1} + \varepsilon_{i+2}\beta^{s-i-2} + \cdots < \beta^{s-i}$$

et la suite $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ est assujettie à certaines conditions ([P],[B]); (on pourrait écrire $x = [x] + \dfrac{\eta_1}{\beta} + \dfrac{\eta_2}{\beta^2} + \cdots$ mais c'est l'écriture précédente que nous utiliserons).

Remarquons que $x \in [\beta^s, \beta^{s+1}[$; par ailleurs la suite $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ appartient à $([0,1,2,\ldots,[\beta]])^{\mathbb{N}}$ si $\beta \notin \mathbb{N}$, (à $[0,\ldots,\beta-1])^{\mathbb{N}}$ sinon) et si nous munissons $([0,1,\dots,[\beta])^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit de la topologie discrète sur $(0,1,\dots,[\beta])$ alors la fermeture $\overline{X}$ de l'ensemble X des β-développements $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ forme un système dynamique symbolique (*i.e.* un fermé de $(0,\dots,[\beta])^{\mathbb{N}}$ invariant par la transformation $T : q_1q_2\cdots \to q_2q_3\cdots$). Ce système dynamique est appelé β-shift. Si par exemple $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, les β-développements $(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots)$ sont les suites sur $[0,1]$ vérifiant pour tout $i \geq 1$, $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = 0$. Les blocs de chiffres figurant dans au moins un β-développement sont dits β-admissibles (si $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 00 et 1001 sont admissibles, 11 et 01101 ne le sont pas).

Si l'on se restreint au cas où $x \in [0,1[$ on peut définir une transformation T_β de $[0,1[$ dans lui-même :

$$T_\beta = \{\beta x\}$$

et lorsque $x = \dfrac{\varepsilon_1}{\beta} + \dfrac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots + \dfrac{\varepsilon_n}{\beta^n} + \cdots$ alors $T_\beta^n x = \dfrac{\varepsilon_n}{\beta} + \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\beta^2} + \cdots$.

Mais $\{\beta^n x\} = \{\varepsilon_1\beta^{n-1} + \varepsilon_2\beta^{n-2} + \cdots + \varepsilon_n + \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\beta} + \cdots)$ et n'est pas égal à $T_\beta^n x$, sauf si $\beta \in \mathbb{N}$.

La transformation T_β conserve une unique mesure μ_β absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ([R], [P]); on en déduit aisément que pour presque tout x de $[0,1[$, puis pour presque tout x de $\mathbb{R}$, chaque bloc β-admissible de L chiffres $b_1\cdots b_L$ apparaît dans le β-développement de x avec une fréquence $\mu_{[b_1\cdots b_L]}$ indépendante de x, égale à la mesure $\mu_\beta(I)$ où I est l'intervalle :

$$I = \left\{x \in [0,1[;\ x = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots \quad \text{avec } \varepsilon_1\cdots\varepsilon_L = b_1\cdots b_L\right\}.$$

Lorsque $\beta = 10$ par exemple, $\mu_{[94]} = \mu_{10}\left(\left[\dfrac{9}{10} + \dfrac{4}{100}, \dfrac{9}{10} + \dfrac{5}{100}\right[\right) = \dfrac{1}{100}$. La mesure $\mu_{[b_1\cdots b_L]}$ est de l'ordre de $\dfrac{1}{\beta^L}$.

Les réels x dans le β-développement desquels tous les blocs figurent avec la bonne fréquence sont dits "à β-développement normal" et nous appellerons $N(\theta)$ l'ensemble de ces nombres.

De façon évidente, on a toujours $T(\beta) \subseteq B(\beta)$ mais l'inclusion inverse n'est pas nécessairement vraie. Les rapports entre $N(\beta)$, $T(\beta)$ et $\beta(\beta)$ sont en général assez flous sauf dans le cas où $\beta \in \mathbb{N}$: alors $B(\beta) = N(\beta)$ ($T(\beta)$ n'est pas pertinent dans ce cas puisque $r = 1$). Dans ce cas où β est un nombre de Pisot $N(\beta) = T(\beta) \subset B(\beta)$ ([Be3]).

Lorsque la suite $(\beta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un (ce qui arrive à presque tout β!) l'inclusion $B(\beta) \subset N(\beta)$ est fausse ($1 \in B(\beta)$ et $1 \notin N(\beta)$) [Bel].

L'inclusion $T(\theta) \subset N(\theta)$ est de même presque partout fausse.

Les résultats que nous prouvons ici – au moyen d'ensembles de Cantor – comparent $N(\theta)$ et $B(\beta)$ lorsque θ est un nombre de Pisot et β un réel entier algébrique, et $N(\theta)$ et $N(\beta)$ lorsque θ et β sont tous deux des nombres de Pisot.

2. Énoncé des résultats.

Soit β un nombre réel strictement supérieur à 1, soit $[0,1[$ muni de la transformation $T_\beta : x \to \{\beta x\}$. Une mesure $\dot{\mu}$ invariante par T_β définit une mesure μ invariante sur le β-shift muni de la transformation $T : (\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots) \to (\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots)$, image de $\dot{\mu}$ par l'application f qui à $x = \dfrac{\varepsilon_1}{\beta} + \dfrac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots$ associe $(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots)$. Étant donné une mesure $\dot{\mu}$ T_β-invariante sur $[0,1[$, nous dirons que $\dot{\mu}$ est une mesure de Bernoulli pour T_β si pour tout bloc β-admissible $b_1\cdots b_2$

$$\mu([b_1\cdots b_2]) = \mu([b_1])\cdot \mu([b_2])\cdots \mu([b_L]),$$

où $[b_1\cdots b_L]$ désigne l'ensemble des suites $(\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots)$ du β-shift vérifiant $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_L = b_1\cdots b_L$ et où $\mu = f^{-1}(\dot{\mu})$, *i.e.* $\mu([b_1\cdots b_L]) = \dot{\mu}(I)$ où I désigne l'intervalle β-adique $\left\{x :\ x = \dfrac{\varepsilon_1}{\beta} + \cdots;\ \varepsilon_1\cdots\varepsilon_L = b_1\cdots b_L\right\}$. Nous dirons que $\dot{\mu}$ est "faiblement de Bernoulli pour T_β" si

$$\sum \varlimsup_{n\to\infty} |\mu(T^{-n}[b_1\cdots b_k] \cap [a_1\cdots a_k]) - \mu([b_1\cdots b_k])\cdot \mu([a_1\cdots a_k])| < \infty$$

où la somme est prise sur l'ensemble des couples $(b_1\cdots b_k, a_1\cdots a_k)$ de blocs de k chiffres admissibles. Les mesures markoviennes en particulier sont faiblement de Bernoulli.

Dans la suite nous identifierons μ et $\dot{\mu}$ (la correspondance est bi-univoque et nous qualifierons indifféremment μ ou $\dot{\mu}$ de "Bernoulli" ou "faiblement Bernoulli".

THÉORÈME. — *Soient β et θ deux nombres réels strictement supérieurs à 1 non équivalents multiplicativement; on suppose de plus que β est un entier naturel ou un nombre de Pisot et que θ est entier algébrique.*

1. *Soit $\dot{\mu}$ une mesure de Bernoulli (ou plus généralement faiblement de Bernoulli) pour T_β, non dégénérée (i.e. aucun chiffre n'admet la probabilité 1). Alors $\dot{\mu}$-presque tout x de $[0,1[$ appartient à $T(\theta)$ (et donc à $B(\theta)$). Autrement dit, lorsque les chiffres de x sont répartis dans la base β selon une mesure μ suffisamment régulière, alors avec la probabilité 1 la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un.*

Plus généralement, étant donné $\gamma \in \mathbb{R}^*$ et la même mesure $\dot{\mu}$, pour μ-presque tout x la suite $(\gamma x\theta^n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un.

Remarque. — Il est par contre clair que, si μ n'est pas la mesure maximale de Parry μ_β, $\dot{\mu}$-presque aucun x n'appartient à $N(\beta)$; de plus un ensemble de μ-mesure 1 contient un ensemble T_β-invariant de μ-mesure 1.

2. *$B(\theta)$ n'est pas inclus dans $B(\beta)$; la dimension de Hausdorff de $B(\theta) \setminus B(\beta)$ est strictement positive et $B(\theta) \setminus B(\beta)$ contient un ensemble T_β-invariant.*

3. *$T(\theta)$ n'est pas inclus dans $N(\beta)$ et la différence $T(\theta) \setminus N(\beta)$ a pour dimension de Hausdorff 1 et contient un ensemble T_β-invariant. Il s'ensuit que $B(\theta)$ n'est pas inclus dans $N(\beta)$, que $B(\theta) \setminus N(\beta)$ a pour dimension de Hausdorff 1 et contient un ensemble T_β-invariant de $\dot{\mu}$-mesure 1.*

Il existe donc $x \in B(\beta)$ tel que pour tout n, $T_\beta^n(x)$ ne soit jamais dans $B(\theta)$.

Brown, Moran et Pollington [BMP] montrent que si β et θ ne sont pas équivalents multiplicativement, alors $B(\beta)$ n'est pas inclus dans $B(\theta)$.

Comme lorsque β est entier naturel $T(\beta) = B(\beta) = N(\beta)$ l'assertion 3 du théorème implique les résultats de W. Schmidt et A. Pollington :

COROLLAIRE 1. — *Soient g et h deux entiers naturels non équivalents. Alors $B(g) \neq B(h)$ et la dimension de Hausdorff de $B(g) \setminus B(h)$ est égale à 1.*

Comme lorsque β est un nombre de Pisot, $N(\beta) = T(\beta)$ on déduit immédiatement de l'assertion 3 du théorème, le résultat suivant qui concerne les développements en base β et θ :

COROLLAIRE 2. — *Soient β et θ deux nombres de Pisot non multiplicativement équivalents.*

1) *Soit μ une mesure de Bernoulli non dégénérée pour T_β (ou encore une mesure faiblement de Bernoulli).*

Alors μ-presque tout x est dans $N(\theta)$. Plus généralement pour tout réel α non nul, μ-presque tout x vérifie $\alpha x \in N(\theta)$. Autrement dit si les chiffres de x en base β sont répartis selon une mesure μ convenable, ils sont répartis dans la base θ selon la mesure maximale de Parry μ_θ avec la probabilité 1.

2) *$N(\theta)$ n'est pas inclus dans $N(\beta)$ et la différence $N(\theta) \setminus N(\beta)$ est de dimension de Hausdorff* 1 *et contient un ensemble T_β-invariant de $\dot{\mu}$-mesure 1.*

De plus

$$T(\theta) \not\subset T(\beta), \quad B(\theta) \not\subset B(\beta)$$

avec la même remarque pour les dimensions de Hausdorff.

Autrement dit, si β et θ sont deux nombres de Pisot non équivalents, il y a des nombres dont le développement est normal en base θ et pas en base β et des nombres x tels que la suite $(x\theta^n, \dots, x\theta^{n+\deg\theta-1})_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un mais pas la suite $(x\beta^n, \dots, x\beta^{n+\deg\beta-1})_{n\geq 0}$.

Il est certain que la distinction faite entre les trois notions de normalité présentées ici rend assez confuse la description des phénomènes – autrement dit les énoncés des résultats – et concourt à introduire dans l'esprit du lecteur un regrettable mélange. Le mélange est excellent pour les mesures mais pas pour la digestion. Néanmoins ces distinctions sont tout à fait pertinentes. En résumé, $N(\beta)$ est lié aux chiffres des développements, $B(\beta)$ à la répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, c'est la notion la plus aisée à définir mais la moins maniable et la plus instable, $T(\beta)$ concerne la répartition dans le tore de dimension $\deg\beta$ et est plus facile à étudier (voir [C] et [S2]) et il est remarquable que dans le cas où β est un nombre de Pisot, alors $N(\theta) = T(\theta) \subset B(\theta)$ ([Be1]), mais cependant pour la plupart des Pisot $N(\theta) \neq B(\theta)$ ([Be4]).

Le développement de $\gamma\theta^n$ en base β.

Dans ce paragraphe nous supposerons θ et β réels strictement supérieurs à 1 et $\alpha = \dfrac{\operatorname{Ln}\theta}{\operatorname{Ln}\beta}$ irrationnel; γ désignera un réel non nul.

Développons $\gamma\theta^n$ en base β :

$$\gamma\theta^n = c_1\beta^k + c_2\beta^{k-1} + \cdots + c_{k+1} + \frac{c_{k+2}}{\beta} + \cdots \tag{1}$$

avec à chaque étape $\sum_{i>j} c_i\beta^{k-i+1} < \dfrac{1}{\beta^j}$.

PROPOSITION 1. — *Soient θ et β des réels > 1 vérifiant $\dfrac{\operatorname{Ln}\theta}{\operatorname{Ln}\beta} \notin \mathbb{Q}$, soit $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Soit $b = b_1 \cdots b_L$ une suite de chiffres β-admissibles avec $b_i \neq 0$ pour un i au moins appartenant à $(1, \ldots, L)$.*

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier M_0 tel que pour $M > M_0$, l'ensemble β des entiers naturels n pour lesquels b apparaît parmi les M premiers chiffres $c_1 \cdots c_M$ du β-développement de $\gamma\theta^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est un ensemble D dont la densité inférieure est supérieure à $1 - \varepsilon$.

COROLLAIRE 3. — *Soient β et θ deux nombres réels strictement supérieurs à 1, non multiplicativement équivalents, $b_1 \cdots b_L$ un mot β-admissible, γ un réel non nul; alors l'ensemble des entiers n tels que $b_1 \cdots b_L$ apparaisse au moins une fois avant la virgule dans le β-développement de $\gamma\theta^n$ a pour densité 1.*

Convergence faible vers la mesure de Lebesgue.

PROPOSITION 2. — *Soit β un nombre de Pisot, μ une mesure de Bernoulli (ou encore faiblement de Bernoulli) pour T_β ; soit r un entier, soit $\theta > 1$ un nombre transcendant ou algébrique de degré r, vérifiant $\dfrac{\operatorname{Ln}\beta}{\operatorname{Ln}\theta} \notin \mathbb{Q}$, et soit A une réunion finie d'intervalles du tore (resp. de parallélépipèdes du tore $[0,1[^r$). Alors, pour tout $\varepsilon_1 > 0$, tout $\varepsilon_2 > 0$ et tout réel d non nul il existe un ensemble N' d'entiers de densité au moins $1 - \varepsilon_2$ tel que*

$$\forall n \in N', \quad |\mu(\{x \in [0,1[;\ \{dx\ \theta^n\} \in A\}) - \lambda(A)| < \varepsilon_1$$

(resp. $|\mu(\{x \in [0,1[;\ (dx\ \theta^n, \ldots, dx\ \theta^{n+r-1}) \in A \bmod 1\}) - \lambda(A)| < \varepsilon_1$), λ désignant la mesure de Lebesgue.

La proposition 3 est conséquence du :

LEMME 1. — *Soit β un nombre de Pisot de degré r; soit μ une mesure de Bernoulli pour le shift T_β (ou encore une mesure faiblement de Bernoulli) : soit s un entier strictement positif et d un nombre réel non nul de la forme $a_1 + a_2\beta + \cdots + a_r\beta^{r-1}$ où $a_i \in \mathbb{Z}$ pour $i = 1, \ldots, r$.*

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe K_0 tel que pour tout $K > K_0$ il existe J_0 tel que $\forall J > J_0$, si $b = \beta^J + \beta^{2J} + \cdots + \beta^{KJ}$ et si m admet un développement en base β de la forme

$$m = c\beta^{N+(K+1)J} + b\beta^N + a \quad \text{avec} \quad a < \beta^N$$

où N est un entier quelconque alors :

$$\left| \int_0^1 e^{2i\pi r d m x} dr(x) \right| < \varepsilon.$$

La condition sur m signifie que le mot $b = 10\cdots010\cdots01\cdots10\cdots1$ apparaît dans le développement de m (avant la virgule).

Enfin voici une remarque sur la T_β-invariance :

LEMME 2. — *Soit (E, T) un système dynamique, μ une mesure T-invariante, S un ensemble mesurable vérifiant $\mu(S) = 1$. Alors S contient un ensemble S_1 T-invariant vérifiant $\mu(S_1) = 1$.*

En effet, pour tout n $\mu(T^{-n}S) = 1$ d'où $\mu\Big(\bigcap\limits_{n\geq 0} T^{-n}S\Big) = 1$ et $S_1 = \bigcap T^{-n}S$ convient.

3. Démonstrations.

Preuve de la proposition 1 (*cf.* [FS]). — Soit C le complémentaire de D; montrons que la densité supérieure de C est inférieure à ε si M est assez grand. Fixons M et fixons un entier $N = hM$ multiple de M; considérons l'ensemble $C(N)$ des entiers n de C tels que $\gamma\theta^n > \beta^N$; il existe un entier $i \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma\theta^n \in \{\beta^{iN}, \beta^{(i+1)N}[$ et donc tel que $\gamma\theta^n$ s'écrive :

$$\gamma\theta^n = c_1\beta^{iN+a} + c_2\beta^{iN+a-1} + \cdots + c_{a+1}\beta^{iN} + c_{a+2}\beta^{iN-1} + c_{a+3}\beta^{iN-2} + \cdots$$

et $\gamma\theta^n$ s'écrit :

$$\gamma\theta^n = K' + K''\beta^{iN}$$

avec

$$\begin{aligned} K' &= c_{a+2}\beta^{iN-1} + c_{a+3}\beta^{iN-2} + \cdots \in [0, \beta^{iN}[\\ K'' &= c_1\beta^a + c_2\beta^{a-1} + \cdots + c_{a+1} \in [1, \beta^N[. \end{aligned}$$

Les nombres K' et K'' ainsi définis sont déterminés de façon unique.

Si b n'apparaît pas dans les M premiers chiffres $b_1 \cdots b_M$ de $\gamma\theta^n$ c'est qu'il n'apparaît pas dans les M premiers chiffres de K''. Soit $E = E(N)$ l'ensemble des nombres réels de $[1, \ldots, \beta^N[$ tels que b n'apparaît pas parmi les M premiers chiffres de leur β-développement; soit $F_j = E \cap [\beta^{M+j}, \beta^{M+j+1}[$ pour $j = 0, 1, \ldots, N-M-1$.

Montrons que, λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$:

LEMME 2. — *Il existe une constante $\delta < \beta$ telle que*

$$\lambda(F_j) < \beta^j \delta^M.$$

Montrons pour cela que

LEMME 3. — *Soit $b_1 \cdots b_L$ un mot β-admissible. Il existe une constante $\delta < \beta$ telle que le nombre ω_r de mots $c_1 \cdots c_r$ de longueur r admissibles pour le β-shift et ne contenant pas le mot $b_1 \cdots b_L$ vérifie pour tout r assez grand*

$$\omega_r < \delta^r.$$

Preuve du lemme 3. — Fixons le mot $c_1 \cdots c_r$. L'ensemble des suites $(d_i)_{i \geq 1}$ β-admissibles dans lesquelles $c_1 \cdots c_r$ n'apparaît jamais forme un fermé T-invariant, et donc un sous-shift A du β-shift; celui-ci étant intrinsèquement ergodique ([H]), et d'entropie $\operatorname{Ln}\beta$, A est d'entropie $\operatorname{Ln} u$ avec $u < \beta$. Or $\operatorname{Ln} u = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\operatorname{Ln}\omega_r}{r}$ et donc pour un certain $\delta \in]u, \beta[$ il existe r_0 tel que

$$\forall r > r_0, \quad \omega_r < \delta^r.$$

Nous supposerons dans la suite $b_1, \ldots, b_L$ fixé, δ fixé et $M > r_0$.

Preuve du lemme 2. — F_j est réunion d'intervalles "β-adique" de la forme

$$\Big[\beta^{M+j}\Big(\frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{c_M}{\beta^M}\Big);\ \beta^{M+j}\Big(\frac{d_1}{\beta} + \cdots + \frac{d_M}{\beta^M}\Big)\Big[$$

où $c_1 \cdots c_M$ est un mot β-admissible de longueur M et $d_1 \cdots d_M$ le plus petit mot admissible de même longueur qui lui est strictement supérieur pour l'ordre lexicographique; la longueur de cet intervalle est donc majorée par $\beta^{M+j-M} = \beta^j$, le nombre de mots $c_1 \cdots c_M$ est majoré par δ^M d'après le lemme 1, et ainsi

$$\lambda(F_j) < \beta^j \delta^M.$$

Preuve de la proposition 1. — Un entier n est dans C si $n \operatorname{Ln}\theta + \operatorname{Ln}\gamma \in \dfrac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln}\beta}$ où $\dfrac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln}\beta}$ désigne l'ensemble $\Big\{\dfrac{x}{N \operatorname{Ln}\beta};\ x \in E\Big\}$. Quelle est la proportion de $[0, N]$ occupée par $\operatorname{Ln} E$? D'après le théorème des accroissements finis, étant donné que $\operatorname{Ln} x$ admet pour dérivée $\dfrac{1}{x}$:

$$\lambda(\operatorname{Ln} F_j) \leq \frac{1}{\beta^{M+1}} \lambda(F_j) \leq \frac{\beta^j \delta^M}{\beta^{M+1}} < \Big(\frac{\delta}{\beta}\Big)^M.$$

Réunissant les F_j pour $j = 0, 1, \dots, N-M-1$, comme

$$E = \Big(\bigcup_{j=0}^{N-M-1} F_j\Big) \cup (E \cap [0, M])$$

$$\lambda\Big(\frac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln}\beta}\Big) \leq \frac{1}{N}\frac{M + (N-M)\big(\frac{\delta}{\beta}\big)^M}{\operatorname{Ln}\beta}.$$

Fixons ε ; comme δ ne dépend pas de M, il existe M_0 tel que

$$\forall M > M_0,\ \forall N \text{ tel que } \frac{M}{N \operatorname{Ln}\beta} < \frac{\varepsilon}{2},\ \lambda\Big(\frac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln}\beta}\Big) < \varepsilon.$$

La suite $n\alpha + \operatorname{Ln}\gamma$ étant équirépartie modulo un et $\dfrac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln}\beta}$ étant une réunion finie d'intervalles dont la somme des longueurs est majorée par ε, la suite $n\alpha + \operatorname{Ln}\gamma$ tombe dans $\dfrac{\operatorname{Ln} E}{N \operatorname{Ln}\beta}$ avec une fréquence inférieure ou égale à ε et K'' tombe dans E avec une fréquence inférieure ou égale à ε, d'où la proposition.

Preuve du lemme 1. — Nous ferons la démonstration dans le cas où μ est Bernoulli et $d = 1$. Le cas général se traite de même. Nous montrerons tout d'abord le lemme suivant : pour tout nombre réel y, $\|y\|$ désignera la distance à l'entier le plus proche. La preuve du lemme 1 découle du lemme 4 :

LEMMA 4. — *Soit β un nombre de Pisot de degré r et soit $d = a_1 + a_2\beta + \cdots + a_r\beta^{r-1}$ où $a_i \in \mathbb{Z}$. Il existe une constante $H = H(d)$ dépendant de d et un nombre $\zeta \in]0, 1[$ tel que si $x \in]0, 1[$ a pour β développement*

$$x = \frac{\varepsilon_1}{\beta} + \frac{\varepsilon_2}{\beta^2} + \cdots$$

alors pour tout entier q et tout entier h

$$\Big\| dx\, \beta^q - d\Big(\varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \varepsilon_q + \frac{\varepsilon_{q+1}}{\beta} + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h}\Big)\Big\| < H\zeta^h.$$

C'est-à-dire qu'on peut approcher $dx\,\beta^n$ en tronquant

$$x\beta^n = \varepsilon_1\beta^q + \cdots + \varepsilon_{q-h+1}\beta^{h+1} + \varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h} + \frac{\varepsilon_{q+h+1}}{\beta^{h+1}} + \cdots$$

la précision dépendant du nombre $2h + 1$ de termes considérés. En réalité il s'agit de la continuité de Hölder d'une certaine application. Nous ferons la démonstration dans le cas où $d = 1$.

Soient $\beta_1, \ldots, \beta_r$ les conjugués de β différents de β; ils sont de module strictement supérieur à 1; soit $\zeta = \sup\left(\left|\frac{1}{\beta}\right| + |\beta_1|, \ldots, |\beta_r|\right)$. Nous avons $0 < \zeta < 1$. Soit $h \in \mathbb{N}$:

$$x\ \beta^n = \varepsilon_1\beta^{q-1} + \varepsilon_2\beta^{q-2} + \cdots + \varepsilon_{q-h+1}\beta^{h+1} + \varepsilon_{q-h}\beta^h + \\ \cdots + \varepsilon_q + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h} + \frac{\varepsilon_{q+h+1}}{\beta^{h+1}} + \cdots$$

Comme $\|y+z\| \leq \|y\| + \|z\|$,

$$\left\|x\ \beta^n - \left(\varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h}\right)\right\| \\ \leq \|\varepsilon_1\beta^{q-1}\| + \cdots + \|\varepsilon_{q-h+1}\beta^{h+1}\| + \left\|\frac{\varepsilon_{q+h+1}}{\beta^{h+1}} + \frac{\varepsilon_{q+h+2}}{\beta^{h+2}} + \cdots\right\|.$$

D'après les formules de Newton, pour $e \in \mathbb{N}$, $\beta^e + \beta_2^e + \cdots + \beta_r^e \in \mathbb{Z}$ et donc

$$\|\beta^e\| \leq \|\beta_2^e\| + \cdots + \|\beta_r^e\| \leq (r-1)\zeta^e.$$

Ainsi, comme $\zeta > \dfrac{1}{\beta}$ et comme ε_i est majoré par β, il existe H tel que

$$\left\|x\ \beta^n - \left(\varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h}\right)\right\| < \beta(r-1)\sum_{e>h}\zeta^e + \beta\sum_{e>h}\zeta^e \\ \leq \frac{\beta r\zeta}{1-\zeta}\zeta^h = H\ \zeta^h.$$

Montrons maintenant le lemme 1 (toujours avec $d = 1$). Soient b et m comme dans l'énoncé et s un entier fixé.

$$e^{2i\pi smx} = e^{2i\pi s(c\beta^{(N+(K+1)J)x})} \cdot e^{2i\pi b\beta^N x} \cdot e^{2i\pi ax}$$

et

$$e^{2i\pi sbx} = \prod_{i=1}^{K} e^{2i\pi s\beta^{N+iJ}x}.$$

D'une façon générale $|e^{2i\pi\eta} - 1| \leq 2\pi\eta$ et pour tout y

$$|e^{2i\pi(y+\eta)} - e^{2i\pi y}| < 2\pi\eta.$$

Nous en déduisons aisément que

$$\left|\prod_{i=1}^{K} e^{2i\pi(y_i+\eta_i)} - \prod_{i=1}^{K} e^{2i\pi y_i}\right| \leq 2\pi|\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_k|$$

et que pour tout $h \in \mathbb{N}$:

$$\left|\prod_{i=1}^{K} e^{2i\pi sx\beta^{N+iJ}} - \prod_{i=1}^{K} e^{2i\pi s\left(\varepsilon_{N+iJ+h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{N+iJ-h}}{\beta^h}\right)}\right| \leq KH\cdot 2\pi\cdot\zeta^h.$$

Supposons $J > 2h$. Les fonctions f_i définies ainsi :

$$f_i(x) = f_i((\varepsilon_n)_{n\geq 1}) = e^{2i\pi s\left(\varepsilon_{N+iJ+h}\beta^h+\cdots+\frac{\varepsilon_{N+iJ-h}}{\beta^h}\right)}$$

sont, pour $i = 1, \ldots, K$, des fonctions indépendantes et donc

$$\int_0^1 f_1(x)f_2(x)\cdots f_K(x)\ d\mu(x) = \prod_{i=1}^{K}\int_0^1 f_i(x)\ d\mu(x).$$

Comme μ conserve T_β qui induit le shift sur $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ les intégrales $\int_0^1 f_i d\mu$ sont égales à $\int_0^1 f_1\ d\mu$ ou encore à $\int_0^1 e^{2i\pi s\left(\varepsilon_{q-h}\beta^h+\cdots+\frac{\varepsilon_{q+h}}{\beta^h}\right)} d\mu$; or μ est non atomique (à cause de la non dégénérescence et de l'invariance) et donc il existe η avec $\left|\int_0^1 e^{2i\pi sx}d\mu(x)\right| < \eta < 1$ et comme $\left|x\ \beta^n - \left(\varepsilon_{q-h}\beta^h + \cdots + \frac{\varepsilon_{q-h}}{\beta^h}\right)\right| < H\cdot 2\pi\cdot \zeta^h$ il vient

$$\left|\int_0^1 f_i(x)\ d\mu(x) - \int_0^1 e^{2i\pi nx}\ d\mu(x)\right| < \int_0^1 H\cdot 2\pi\cdot \zeta^h\ d\mu < H\cdot 2\pi\cdot \zeta^h$$

$$\left|\int_0^1 f_i(x)\ d\mu(x) < \eta + H\cdot 2\pi\cdot \zeta^h.\right.$$

Fixons $\eta_1 < 1$ et h_0 tel que $\eta + H\cdot 2\pi\cdot \zeta^{h_0} = \eta_1 < 1$. Alors $\forall h > h_0$

$$\left|\int_0^1 f_i(x)\ d\mu(x)\right| < \eta_1 < 1 \quad \text{et} \quad \left|\prod_{i=1}^{K} f_i(x)\ d\mu(x)\right| < \eta_i^K.$$

D'autre part

$$\int e^{2i\pi s(c\beta^{N+(K+1)J}+b\beta^N+a)x}d\mu = \int e^{2i\pi sb(\beta^{N+J})x}\cdot B$$

où B est l'intégrale conditionnelle de $e^{2i\pi s(c\beta^{N+(K+i)J}+a)x}$ sachant $e^{2i\pi sb\beta^N x}$. Cette intégrale est majorée par 1 et donc

$$\left|\int_0^1 e^{2i\pi s(c\beta^{N+(K+1)J}+b\beta^N+a)x}\ d\mu\right| \leq \int_0^1 e^{2i\pi sb\beta^N x}\ d\mu \leq \eta_1^K + KH\cdot 2\pi\cdot \zeta^h$$

où h_0 est fixé tel que $\eta + H\cdot 2\pi\cdot \zeta^{h_0} = \eta_1 < 1$ et $J > 2h_0$. Soit $\varepsilon > 0$; fixons K_0 tel que $\eta_1^{K_0} < \varepsilon/2$ et fixons $K \geq K_0$. Fisons $h_1(K)$ supérieur à h_0 tel que

$$K\cdot H\cdot 2\pi\cdot \gamma^{h_1} < \varepsilon/2.$$

Alors si $J > 2h_1(K)$, on a

$$\left|\int_0^1 e^{2i\pi s(c\beta^{N+(K+1)J}+b\beta^N+a)x}\ d\mu\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Preuve de la proposition 2. — Soit A comme dans l'énoncé et $\varepsilon > 0$; θ est supposé algébrique de degré r. Soit $s = h_1 + h_2\beta + \cdots + h_r\beta^{r-1}$ avec $h_i \in \mathbb{Z}$ et $|h_i| < H$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Fixons d, ε et ε_2; le lemme 1 nous dit qu'étant donné $\varepsilon > 0$ et $H \in \mathbb{N}^*$, il existe J et K et un nombre b tels que

$$\Big|\int e^{2i\pi s d m x}\, d\mu(x)\Big| < \varepsilon$$

dès que m est de la forme $a + b\beta^N + c\beta^{N+(K+1)J}$ où $a < \beta^N$, c'est-à-dire

$$\Big|\int e^{2i\pi d m(h_1 x + h_2 x\theta + \cdots + h_r x\theta^{r-1})}\, d\mu(x)\Big| < \varepsilon.$$

La fonction caractéristique χ de A étant approchée convenablement par des combinaisons linéaires de caractères du tore $\mathbb{T}^r(x_1, \ldots, x_2) \to e^{2i\pi(h_1x_1 + \cdots + h_rx_r)}$ il vient si ε est assez petit que

$$|(\mu\{x; (x, x\theta, \ldots, x\theta^{r-1}) \in A \operatorname{mod} \text{un}\}) - \lambda(A)| < \varepsilon_1.$$

Prenant pour bloc de chiffres le bloc obtenu à partir de b, la proposition 1 nous dit qu'il existe un ensemble N' de densité inférieure supérieure à $1 - \varepsilon_2$ tel que tous les mots m de la forme $\{d\theta^n;\ n \in N'\}$ sont aussi de la forme $a + b\beta^N + c\beta^{N+(K+1)J}$, d'où le résultat.

LEMME 5. — *Soit θ un nombre réel strictement supérieur à 1; étant donné un intervalle I du tore, un réel $\varepsilon > 0$ et un entier K, χ la fonction caractéristique de I, désignons par $A_{K,I,\varepsilon}$ l'ensemble des $x \in [0, 1[$ tels que*

$$\Big|\frac{\chi(x) + \chi(\{\theta x\}) + \cdots \chi(\{\theta^K x\})}{K} - \lambda(I)\Big| < \varepsilon.$$

Alors $\forall I$, $\forall \eta > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_0$, $\forall K > K_0$, $\lambda(A_{K,I,\varepsilon}) \geq 1 - \eta$.

De même, lorsque θ est algébrique de degré r et que I est un parallélogramme du tore $\mathbb{T}^r$: soit $A_{K,I,\varepsilon}$ l'ensemble des $x \in [0, 1[$ tels que, χ désignant encore la fonction caractéristique de I

$$\left|\frac{\left(\chi\begin{pmatrix}\{x\}\\ \{x\theta\}\\ \vdots\\ \{x\theta^{r-1}\}\end{pmatrix} + \chi\begin{pmatrix}\{x\theta\}\\ \{x\theta^2\}\\ \vdots\\ \{x\theta^{r}\}\end{pmatrix} + \cdots + \chi\begin{pmatrix}\{x\theta^K\}\\ \{x\theta^{K+1}\}\\ \vdots\\ \{x\theta^{K+r-1}\}\end{pmatrix}\right)}{K} - \lambda(I)\right| < \varepsilon.$$

Alors $\forall I$, $\forall \eta > 0$, $\forall \varepsilon$, $\exists K_0$, $\forall K > K_0$, $\lambda(A_{K,I,\varepsilon}) \geq 1 - \eta$.

Montrons-le dans le cas d'un intervalle du tore : presque tout x est normal en base θ et vérifie donc

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}(\chi(\{x\}) + \cdots + \chi(\{\theta^N x\})) = \lambda(I)$$

et l'ensemble B est nombres de $[0,1[$ normaux en base θ vérifie

$$B \subset \varlimsup_{K_1\to\infty} \Big(\bigcap_{K>K_1} A_{K,I,\varepsilon} \Big).$$

Comme $\lambda(B) = 1$, il vient $\lim\limits_{K\to\infty} \lambda(A_{K,I,\varepsilon}) = 1$. Il en va de même si I est un parallélogramme du tore $\mathbb{T}^r$ dans le cas où θ est algébrique de degré r, car pour presque tout x la suite

$$\left(C_\theta^n \begin{pmatrix} x \\ x\theta \\ \vdots \\ x\theta^{r-1} \end{pmatrix} \right)_{n\geq 0} = \begin{pmatrix} \{x\theta^n\} \\ \{x\theta^{n+1}\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{n+r-1}\} \end{pmatrix}_{n\geq 0}$$

est répartie selon la mesure de Lebesgue dans le tore $\mathbb{T}^r$.

Preuve du théorème 1. — Montrons que l'ensemble W des nombres x de $[0,1[$ tels que la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$ ne soit pas équirépartie modulo un dans le tore $\mathbb{T}^r$ est de μ-mesure nulle.

Si $x \in W$ c'est qu'il existe un parallélogramme I et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que, χ désignant la fonction caractéristique de I

$$\forall N_0,\ \exists N{>}N_0 \left| \frac{1}{N} \left(\chi \begin{pmatrix} \{x\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{r-1}\} \end{pmatrix} + \cdots + \chi \begin{pmatrix} \{x\theta^N\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{N+r-1}\} \end{pmatrix} \right) - \lambda(I) \right| > \varepsilon.$$

Soit $B_{K,I,\varepsilon,d}$ l'ensemble des x tels que pour un ensemble $N'(x)$ de densité inférieure au moins égale à d on ait :

$$\forall n \in N',\ T_\theta^n \begin{pmatrix} \{c\} \\ \{x\theta\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{r-1}\} \end{pmatrix} \in A_{K,I,\varepsilon}$$

et soit $\overline{B}_{K,I,\varepsilon,d}$ le complémentaire de $B_{K,I,\varepsilon,d}$.

Notons que si $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\overline{B}_{K,I,\varepsilon,d} \subseteq \overline{B}_{K,I,\varepsilon_1,d}$ et que si $d < d_1 \overline{B}_{K,I,\varepsilon,d_1} \subseteq \overline{B}_{K,I,\varepsilon,d}$. Lorsque $x \in B_{K,I,\varepsilon,d}$, si on note $\bar{x}$ le vecteur $\begin{pmatrix} \{x\} \\ \{x\theta\} \\ \vdots \\ \{x\theta^{r-1}\} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{N\to\infty} \left| \Big(\frac{1}{N} (\chi(\bar{x}) + \cdots + \chi T_\theta^N(\bar{x})) \Big) - \lambda(I) \right| \\
&= \varlimsup_{N\to\infty} \left| \frac{K}{N} \Big(\frac{\chi(\bar{x}) + \cdots + \chi(T_\theta^K \bar{x})}{K} + \frac{\chi - T_\theta^{K+1}\bar{x} + \cdots + T_\theta^{2K}(\bar{x}))}{K} + \right. \\
&\qquad \left. \cdots + \frac{\chi(T_\theta^{N-K+1}(\bar{x})) + \cdots + \chi(T_\theta^N(\bar{x}))}{K} \Big) - \lambda(I) \right| \leq \varepsilon + d
\end{aligned}$$

(on a supposé N multiple de K ce qui ne restreint pas la généralité de la preuve).

En effet sur les N/K facteurs tous sont majorés par ε sauf dN au plus qui sont majorés par 1 en valeur absolue, et en fait $\bar{x} \in A_{K,I,\varepsilon+d}$ (notons que c'est ici qu'intervient l'hypothèse : θ entier algébrique : si on étudie

$$\frac{1}{K}\left[\chi\begin{pmatrix}\{x\theta^{HN}\}\\ \vdots\\ \{x\theta^{HN+r-1}\}\end{pmatrix}+\cdots+\chi\begin{pmatrix}\{x\theta^{HN+K}\}\\ \vdots\\ \{x\theta^{HN+K+r-1}\}\end{pmatrix}\right]$$

l'appartenance de $\begin{pmatrix}\{x\theta^{HN}\}\\ \{x\theta^{HN+1}\}\\ \vdots\\ \{x\theta^{HN+r-1}\}\end{pmatrix}$ à $A_{K,I,\varepsilon}$ nous renseigne sur $\begin{pmatrix}\{x\theta^{HN}\}\cdot\{\theta_i\}\\ \vdots\\ \{x\theta^{HN+r-1}\}\cdot\{\theta^i\}\end{pmatrix}$ qui n'a rien à voir avec $\begin{pmatrix}\{x\theta^{HN+i}\}\\ \vdots\\ \{x\theta^{HN+r-1+i}\}\end{pmatrix}$ alors que si θ est entier algébrique de degré r

$$\begin{pmatrix}\{x\theta^{t+s}\}\\ \vdots\\ \{x\theta^{t+s+r-1}\}\end{pmatrix}=C_\alpha^t\begin{pmatrix}\{x\theta^{s}\}\\ \vdots\\ \{x\theta^{s+r-1}\}\end{pmatrix}\quad(\text{cf. §1}).$$

Donc si x n'est pas dans $T(\theta)$ c'est que $\exists I$, $\exists\varepsilon > 0$, $\exists K_0$, $\forall K > K_0$, $\exists d$ et ε_1 avec $\varepsilon_1 + d < \varepsilon$ tels que $x \in \overline{B}_{I,K,\varepsilon_1,d}$; ainsi

$$[0,1[\smallsetminus T(\theta) \subseteq \bigcup_I\Bigl(\bigcup_\varepsilon \bigcup_{\substack{d,\varepsilon_1\\ d+\varepsilon_1<\varepsilon}}\Bigl(\varliminf_{K_0\to\infty}\bigcap_{K>K_0}\overline{B}_{I,K,\varepsilon,d}\Bigr)\Bigr).$$

Les réunions et intersections ci-dessus peuvent être ramenées à une quantité dénombrable de réunions et intersections.

Or d'après la proposition 2 et le lemme 5

$$\forall I, \forall\varepsilon > 0, \forall\eta > 0, \exists K_0, \forall K > K_0,\quad \lambda(A_{K,I,\varepsilon}) \geq 1-\eta$$

et $\forall\varepsilon_1 > 0$ et $d > 0$, $\exists N'$ de densité supérieure à $1-d$ tels que

$$\forall n \in N',\ |\mu(\{x, T_\theta^n(\bar{x}) \in A_{K,I,\varepsilon}\}) - \lambda(A_{K,I,\varepsilon})| < \varepsilon_1$$

et en réunissant ces deux inégalités $\forall I$, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\varepsilon_1$, $\forall d$, $\exists N' \subset \mathbb{N}$ de densité supérieure à $1-d$ tel que

$$\forall n \in N',\ |\mu(\{x, T_\theta^n(\bar{x}) \in A_{K,I,\varepsilon}\}) - 1| < \eta + \varepsilon_1$$

et donc $\forall I$, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall\eta$, $\forall\varepsilon_1$, $\forall d$, $\exists K_0 = K_0(\eta)$, $\forall K > K_0$, $|\mu(\overline{B}_{K,I,\varepsilon,d}) < \eta + \varepsilon_1|$ d'où $\mu\Bigl(\varliminf\bigcap_{K>K_0}\overline{B}_{K,I,\varepsilon_1,d}\Bigr) = 0$ et $\mu([0,1[\smallsetminus T(\theta)) = 0$.

Nous avons donc prouvé que μ-presque tout x est dans $T(\theta)$, donc dans $B(\theta)$ et plus généralement que si $d \neq 0$ est un nombre réel fixé d'avance, pour μ-presque tout x, dx est dans $T(\theta)$, et donc dans $B(\theta)$. Ceci prouve l'assertion 1 du théorème.

L'assertion 2 se déduit de l'assertion 1. En effet, si β est un nombre de Pisot de β développement en base β: $\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta} + \cdots$ et si μ est la mesure de Bernoulli telle que $\mu(0) = \mu(1) = 1/2$ alors μ-presque partout x est dans $T(\theta)$ mais presque aucun x n'est dans $B(\beta)$, ([BE1], théorème 14) et presque aucun dans $N(\beta)$: $B(\theta)$ n'est pas inclus dans $B(\beta)$ ni dans $N(\beta)$ et $T(\theta) \not\subset B(\beta)$, $T(\theta) \not\subset N(\beta) = T(\beta)$. Un raisonnement un peu plus général permet d'obtenir l'assertion concernant les dimensions de Hausdorff.

Soit δ le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $\delta = a_0 + \frac{a_1}{\delta} + \cdots + \frac{a_K}{\delta^K}$; δ est un entier algébrique et lorsque K tend vers l'infini δ tend vers β; soit μ_δ la mesure de Parry-Rényi sur le δ-shift : elle induit sur les chiffres des β-développements une mesure de masse 1, d'entropie $\operatorname{Ln}\delta$, et qui est faiblement de Bernoulli (elle est la mesure associée à un système sofique [BE1], th. I). Elle induit sur le β-shift une mesure μ possédant les mêmes propriétés; cette mesure μ vérifie d'après l'assertion 1 "μ-presque tout x est dans $T(\theta)$".

Comme les δ-développements sont des β-développements non normaux en base β (pour mille et une raison, par exemple parce que l'entropie $\operatorname{Ln}\delta$ est trop petite, ou alors parce que certains mots β-admissibles manquent à l'appel) "μ-presque aucun x n'est dans $N(\beta)$" et la dimension de Hausdorff du support de μ est au moins $\frac{\operatorname{Ln}\delta}{\operatorname{Ln}\beta}$ [BM1]. La dimension de Hausdorff de $T(\theta) \setminus N(B)$ est donc 1.

Preuve du corollaire. — Preuve de l'assertion 1 : lorsque θ est un nombre de Pisot $N(\theta) = T(\theta)$ et donc si μ-presque partout x est dans $T(\theta)$ alors μ-presque partout est dans $N(\theta)$ et il vient

$$\begin{aligned} T(\theta) \subseteq N(\beta) \Longrightarrow & N(\theta) \not\subset N(\beta) \\ & N(\theta) \not\subset T(\beta) \\ & N(\theta) \not\subset B(\beta). \end{aligned}$$

Les questions de dimensions de Hausdorff se traitent de même.

BIBLIOGRAPHIE

[BE1] A. BERTRAND-MATHIS, Développements en base de Pisot et répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, langages codés et θ-shift, Bull. Soc. Math. France, 114 (1986), 271–323.

[BE2] A. BERTRAND-MATHIS, Le θ-shift sans peine, preprint.

[BE3] A. BERTRAND-MATHIS, Répartition modulo un et développements en base θ, C. R. Acad. Sci. Paris, 289 (1979), 1–4.

[BE4] A. BERTRAND-MATHIS, Preprint, Université de Poitiers.

[BMP] G. BROWN, W. MORAN, A. POLLINGTON, Normality to non-integer bases, C. R. Acad. Sci. Paris, 316, Série I (1993), 1241–1244.

[C] J.W.S. CASSELS, An introduction to diophantine approximation, Cambridge Univ. Press, London, 1957.

[FS] J. FELDMAN, M. SMORODINSKY, Normal numbers from independent Process, Ergod. Th. and Dynam. Syst., 12 (1992), 707–712.

[H] F. HOFBAUER, Maximal measures for simple piecewise monotonic transformations, Z. Wahrschein Verw. Gebiete, 52, n° 3 (1980).

[M] J. MAXFIELD, Normal k-uples, Pacific J. Math., 3 (1953), 189–196.

[MF1] M. MENDÈS-FRANCE, Thèse, Journal of Analysis (1986).

[MF2] M. MENDÈS-FRANCE, Les ensembles de Bésineau, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres, fasc. 7, Paris 1975.

[P] W. PARRY, On the β-expansions of real numbers, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar., 11 (1960), 401–416.

[Po] A. POLLINGTON, The Hausdorff dimension of a set of normal numbers, Pacific J. Math., 95 (1981), 193–204.

[PK] C.E.M. PEARCE, M. KEANE, Normal numbers, Journal of Australian Math. Soc., (1988).

[R] A. RENYI, Representations for real numbers, Acta. Math. Sci. Hungar., 8 (1957), 447–495.

[S1] W. SCHMIDT, On normal numbers, Pacific J. of Math., 10 (1960), 661–672.

[S2] W. SCHMIDT, Uber die Normalität von Zahlen zu verschiedenen basen, Acta. Arith., 7 (1962), 299–301.

[Sm] M. SMORODINSKY, β-shifts are Bernoulli shifts, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar., 24 (1973), 273–278.

Manuscrit reçu le 21 décembre 1993,
révisé le 9 novembre 1994,
accepté le 10 juillet 1995.

Anne BERTRAND-MATHIS,
Université de Poitiers
Département de Mathématiques
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex (France).