ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

VALÉRIE FLAMMANG

Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle à extrémités rationnelles

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 3 (1995), p. 779-793

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_3_779_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 3 (1995), 779–793

SUR LE DIAMÈTRE TRANSFINI ENTIER D'UN INTERVALLE À EXTRÉMITÉS RATIONNELLES

par Valérie FLAMMANG

1. Introduction.

Soient X une partie compacte du plan complexe et P un polynôme de $\mathbb{C}[x]$. On note $||P||_X = \max_{x \in X} |P(x)|$ et $\deg(P)$ le degré de P.

- Le *diamètre transfini* de X est défini par :

$$t(X) = \inf_{\substack{P \in \mathbb{C}[x] \\ \deg(P)>0 \\ P \text{ unitaire}}} \left(||P||_X^{1/\deg(P)}\right).$$

- Le *diamètre transfini entier* de X est défini par :

$$t_{\mathbb{Z}}(X) = \inf_{\substack{P \in \mathbb{Z}[x] \\ \deg(P)>0}} \left(||P||_X^{1/\deg(P)}\right).$$

Il est évident qu'on a toujours $t(X) \leq t_{\mathbb{Z}}(X)$.

Des travaux d'Okada et de Fekete et Szegö [6], on déduit que, si X est une partie symétrique par rapport à l'axe réel, alors $t(X) < 1$ implique $t_{\mathbb{Z}}(X) < 1$ et que pour un tel X, si $t(X) \geq 1$, alors $t_{\mathbb{Z}}(X) = t(X)$. Dans le cas où I est un intervalle réel de longueur L, on connaît la valeur de $t(I)$: $t(I) = \frac{1}{4}L$.

Donc, si $L \geq 4$, alors, $t_{\mathbb{Z}}(I) = t(I) = \frac{1}{4}L$. Par contre, quand $L < 4$, la valeur du diamètre transfini entier n'est pas connue. On peut seulement dire que $t_{\mathbb{Z}}(I) < 1$.

Mots-clés : Diamètre transfini entier – Programmation linéaire semi-infinie.
Classification math. : 41A10 – 11H.

Le diamètre transfini entier de $[0,1]$ a été beaucoup étudié car on pensait pouvoir en tirer une preuve directe du théorème des Nombres Premiers [7]. Pour estimer ce diamètre, on se sert de la propriété suivante :

$$t_{\mathbb{Z}}[0,1] = t_{\mathbb{Z}}\big[0,\, \tfrac{1}{4}\big]^{1/2}.$$

On connaît également l'importance du diamètre transfini entier pour le calcul de la mesure d'irrationalité du logarithme d'un nombre rationnel [2].

• Concernant la minoration, par des méthodes reposant soit sur une transformation des polynômes cyclotomiques, soit sur une transformation rationnelle de l'intervalle $[0,\, \frac{1}{4}]$, Aparicio [4] démontre que :

$$t_{\mathbb{Z}}[0,1] \geq 0,420763.$$

Amoroso [1] combine l'inégalité de Liouville et la théorie des polynômes orthogonaux pour minorer le diamètre transfini entier d'un intervalle réel. En particulier, il obtient :

$$t_{\mathbb{Z}}[0,1] \geq 0,415678.$$

• Pour la majoration, Aparicio considérant sur $[0,\, \frac{1}{4}]$ le polynôme

$$Q(x) = x^{11}(1-4x)^2(1-5x)^2(29x^2-11x+1),$$

petit sur $[0,\, \frac{1}{4}]$, aboutit à :

$$t_{\mathbb{Z}}[0,1] \leq 0,429053.$$

Amoroso [1], pour majorer le diamètre transfini d'un intervalle réel, utilise le théorème de Minkovski et il en déduit, par exemple :

$$t_{\mathbb{Z}}[0,1] \leq 0,424774.$$

Cependant, sa méthode n'est pas effective et elle ne fournit pas de polynôme explicite analogue à celui d'Aparicio.

L'objectif de cet article est de donner des encadrements du diamètre transfini entier d'intervalles à bornes rationnelles $I = \left[\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right]$.

Dans le second paragraphe, nous nous intéressons à la minoration de $t_{\mathbb{Z}}(I)$ et nous montrons :

THÉORÈME 1.1. — *Soient p, r des entiers et q, s des entiers positifs non nuls. Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ une famille de polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ totalement positifs (i.e dont toutes les racines sont réelles positives) et telle que P_n et P_m n'ont pas de racine commune pour $n \neq m$. Supposons que la suite $\big(s \cdot |P_n(-q/s)|^{1/\deg(P_n)}\big)_{n\geq 0}$, (resp. la suite $\big(q \cdot |P_n(-s/q)|^{1/\deg(P_n)}\big)_{n\geq 0}$) admette un plus petit point d'accumulation $\alpha > 0$, (resp. $\beta > 0$). Alors :*

$$t_{\mathbb{Z}}\Big(\Big[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\Big]\Big) \geq \max\Big(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\Big).$$

Remarque. — Si $I = [0,1]$, alors $s \cdot |P_n(-q/s)|^{1/\deg(P_n)}$ est égal à $|L(P_n)|^{1/\deg(P_n)}$ où $L(P)$ désigne la longueur usuelle de P. Dans ce cas particulier, on obtient donc une relation entre le diamètre transfini entier de $[0,1]$ et la longueur des polynômes totalement positifs.

L'outil essentiel de la démonstration est un lemme de Chudnovsky. Soulignons que toute suite de polynômes satisfaisant les hypothèses de ce lemme sur I fournit une minoration de $t_{\mathbb{Z}}(I)$. Le problème devient donc de construire une bonne famille de polynômes afin que la minoration soit la meilleure possible. Nous appliquons ce lemme à une suite de polynômes introduite par C.J. Smyth (définie dans le paragraphe 2.3). Nous constatons alors que cette suite transposée sur l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$ coïncide avec celle utilisée par Aparicio en 1979 qui donne la meilleure minoration connue de $t_{\mathbb{Z}}[0,1]$. Nous obtenons :

THÉORÈME 1.2. — *On a :*

$$t_{\mathbb{Z}}\Big(\Big[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\Big]\Big) \geq \frac{1}{(q+s)} \prod_{i=0}^{\infty} (1+\lambda_i)^{-\frac{1}{2^{i+1}}},$$

avec
$$\lambda_0 = \frac{qs}{(q+s)^2} \quad \text{et} \quad \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i)^2}.$$

Il découle de cette minoration le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.3. — *On a :*

$$\frac{1}{\max(q,s)} \geq t_{\mathbb{Z}}\Big(\Big[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\Big]\Big) \geq \frac{1}{q+s}\Big(1 + \frac{1}{q/s + s/q + 2}\Big)^{-1}.$$

En particulier, quand s tend vers $+\infty$, on a :

$$\frac{1}{s} \geq t_{\mathbb{Z}}\Big(\Big[0, \frac{1}{s}\Big]\Big) \geq \frac{1}{1+s}\Big(1 - \frac{1}{s} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{s^2}\Big)\Big).$$

Ces résultats améliorent ceux d'Amoroso pour tous les intervalles satisfaisant $|ps - qr| = 1$. Pour $[0, 1]$, nous retrouvons la valeur d'Aparicio. D'autres exemples seront donnés à la fin du dernier paragraphe.

Dans le troisième paragraphe, nous examinons des intervalles $I = [p/q, r/s]$ avec $|ps - qr| = 1$. Nous montrons que la majoration de $t_{\mathbb{Z}}(I)$ est liée à la minoration de certaines mesures de polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ à racines réelles positives. Ces minorations s'obtiennent à l'aide de fonctions auxiliaires (*cf.* [10] et [8]). Nous en ferons un bref rappel.

En particulier, pour l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$, nous montrons qu'une transformation naturelle des polynômes du théorème 4.1 de [8] fournit une suite d'éléments de $\mathbb{Z}[x]$ qui constituent les facteurs d'un polynôme de petite norme sur $[0, \frac{1}{4}]$. Ce polynôme donne donc une majoration de $t_{\mathbb{Z}}[0, \frac{1}{4}]$ (les premiers termes de la suite sont x, $4x - 1$, $5x - 1$ et $29x^2 - 11x + 1$).

Les majorations de $t_{\mathbb{Z}}(I)$ obtenues améliorent les résultats présentés par Amoroso dans [1]. De plus, nous obtenons par notre méthode un polynôme *explicite* majorant $t_{\mathbb{Z}}(I)$.

Dans le quatrième paragraphe, nous présentons un tableau donnant des encadrements de $t_{\mathbb{Z}}(I)$ pour quelques intervalles I.

Je remercie Christopher Smyth pour m'avoir fait remarquer le lien entre le diamètre transfini entier et la longueur des polynômes. Cette relation lui avait été signalée par Peter Borwein.

2. Minoration de $t_{\mathbb{Z}}(I)$ quand $I = [p/q, r/s]$.

2.1. Démonstration du théorème 1.1.

Nous utiliserons le résultat suivant de Chudnovsky [5] :

LEMME 2.1. — *Soient X un compact de $\mathbb{C}$ et $(T_n)_{n \geq 0}$ des polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ vérifiant :*

(a) *T_n et T_m n'ont pas de racines communes pour $n \neq m$;*

(b) *le coefficient dominant de T_n est a_n et son degré d_n ;*

(c) *toutes les racines des polynômes T_n appartiennent à X.*

Alors :

$$t_{\mathbb{Z}}(X) \geq \overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{-1/d_n}$$

Démonstration. — Soit $(Q_\ell)_{\ell\geq 0}$ une suite de polynômes à coefficients entiers telle que

$$\lim_{\ell\to+\infty} \|Q_\ell\|_X^{1/\deg(Q_\ell)} = t_{\mathbb{Z}}(X).$$

Si T_n ne divise pas Q_ℓ alors

$$1 \leq |\,\text{résultant}(T_n, Q_\ell)| = \big|cd(T_n)\big|^{\deg(Q_\ell)} \prod_{T_n(\alpha_i)=0} \big|Q_\ell(\alpha_i)\big|$$

c'est-à-dire

$$1 \leq \big|cd(T_n)\big|^{\deg(Q_\ell)} \|Q_\ell\|_X^{d_n}$$

et donc

$$|a_n|^{-1/d_n} \leq \|Q_\ell\|_X^{d_n}.$$

La suite $(P_n)_{n\geq 0}$ du théorème 1.1 permet de construire une suite de polynômes $(T_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant aux hypothèses du lemme précédent sur I à l'aide de la transformation de $]0,+\infty[$ dans I qui à x associe $t = \dfrac{p+rx}{q+sx}$. On a alors :

$$T_n(t) = (st-r)^{\deg(P_n)} \cdot P_n\Big(\frac{p-tq}{st-r}\Big).$$

Notons que $\deg(T_n) = \deg(P_n)$

Quand t tend vers $+\infty$, la limite de $T_n(t)/t^{\deg(P_n)}$ fournit le coefficient dominant a_n de T_n dont nous avons besoin pour appliquer le lemme. Il vaut donc :

$$a_n = s^{\deg(P_n)} \cdot P_n\Big(-\frac{q}{s}\Big).$$

On remarque que les intervalles $I = \Big[\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\Big]$ et $J = \Big[1-\dfrac{r}{s}, 1-\dfrac{p}{q}\Big]$ ont le même diamètre transfini entier (utiliser la transformation $x \mapsto 1-x$). Donc le résultat reste vrai en échangeant s et q.

Il résulte du lemme de Chudnovsky la minoration annoncée de $t_{\mathbb{Z}}(I)$.

2.2. Démonstration du corollaire 1.3.

Une récurrence montre aisément que pour tout $i \geq 0$:

$$\frac{1}{\lambda_i} \geq \frac{q}{s} + \frac{s}{q} + 2.$$

Par le théorème 1.1, on obtient :

$$t_{\mathbb{Z}}(I) \geq (q+s)^{-1} \prod_{i=0}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{q/s + s/q + 2}\Big)^{-1/2^{i+1}}$$

c'est-à-dire :

$$t_{\mathbb{Z}}(I) \geq \frac{1}{q+s} \Big(1 + \frac{1}{q/s + s/q + 2}\Big)^{-1}.$$

La seconde minoration du corollaire est évidente en posant $q = 1$.

2.3. Démonstration du théorème 1.2.

Nous allons tout d'abord introduire une suite de polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ vérifiant les hypothèses du théorème 1.1 sur I.

Smyth [9] a introduit une suite (β_n) de nombres réels avec :

$$\begin{cases} \beta_0 = 1, \\ \beta_{n-1} = \beta_n - \beta_n^{-1} \end{cases}$$

à partir de laquelle se déduit une suite de nombres positifs $(\gamma_n = \beta_n^2)$ telle que :

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1, \\ \gamma_{n-1} = \gamma_n + \gamma_n^{-1} - 2. \end{cases}$$

LEMME 2.2. — *Les polynômes minimaux P_n de γ_n satisfont :*

(a) $P_0(x) = x - 1$ *et* $P_n(x) = x^{\deg(P_{n-1})} \cdot P_{n-1}(x + x^{-1} - 2)$;

(b) P_n *est réciproque, i.e.* $P_n(x) = x^{\deg(P_n)} \cdot P_n(x^{-1})$ *pour* $n \geq 1$;

(c) $\deg(P_n) = 2^n$;

(d) *toutes les racines des* P_n *sont dans* $]0, +\infty[$;

(e) *pour* $n \neq m$, P_n *et* P_m *n'ont pas de racine commune*

$$\text{(f)} \qquad P_n(x) = \prod_{i=1}^{2^n}(x-\gamma_{n,i}) = \prod_{i=1}^{2^{n-1}}(x-\gamma_{n,i})(x-\gamma_{n,i}^{-1})$$
$$= \prod_{i=1}^{2^{n-1}}\big(x^2-(\gamma_{n-1,i}+2)x+1\big).$$

Il nous faut évaluer le coefficient dominant $a_n = s^{\deg(P_n)} \cdot P_n(-q/s)$:

$$|a_n| = \prod_{i=1}^{2^{n-1}}\left[q^2+(\gamma_{n-1,i}+2)qs+s^2\right]$$
$$= \prod_{i=1}^{2^{n-1}}\left[(q+s)^2+qs\gamma_{n-1,i}\right] = (q+s)^{2^n}\prod_{i=1}^{2^{n-1}}(1+\lambda_0\gamma_{n-1,i})$$

où
$$\lambda_0 = \frac{qs}{(q+s)^2}.$$

Nous avons besoin ici d'un résultat intermédiaire.

Lemme 2.3.

$$\prod_{i=1}^{2^n}(1+\lambda_0\gamma_{n,i}) = \Big(\prod_{i=0}^{n}(1+\lambda_i)^{2^{-i}}\Big)^{2^n} \quad \text{où} \quad \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i)^2}.$$

Démonstration. — Procédons par récurrence sur n.

$$A_{n+1} = \prod_{i=1}^{2^{n+1}}(1+\lambda_0\gamma_{n+1,i})$$
$$= \prod_{i=1}^{2^n}(1+\lambda_0\gamma_{n+1,i})(1+\lambda_0\gamma_{n+1,i}^{-1})$$
$$= \prod_{i=1}^{2^n}\left[1+\lambda_0(\gamma_{n+1,i}+\gamma_{n+1,i}^{-1})+\lambda_0^2\right]$$
$$= \prod_{i=1}^{2^n}\left[1+\lambda_0^2+\lambda_0(\gamma_{n,i}+2)\right]$$
$$= \prod_{i=1}^{2^n}\left[(1+\lambda_0)^2+\lambda_0\gamma_{n,i}\right]$$
$$= (1+\lambda_0)^{2^{n+1}}\prod_{i=1}^{2^n}(1+\lambda_0'\gamma_{n,i}) \quad \text{où} \quad \lambda_0' = \frac{\lambda_0}{(1+\lambda_0)^2}.$$

On utilise l'hypothèse de récurrence sur n avec λ'_0 :

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= (1+\lambda_0)^{2^{n+1}} \Big(\prod_{i=0}^{n}(1+\lambda'_i)^{2^{-i}}\Big)^{2^n} && \text{où} \quad \lambda'_{i+1} = \frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i)^2} \\
&= (1+\lambda_0)^{2^{n+1}} \Big(\prod_{j=1}^{n+1}(1+\lambda'_{j-1})^{2^{-(j-1)}}\Big)^{2^n} && \text{en posant} \quad i = j-1 \\
&= \Big[(1+\lambda_0)\prod_{j=1}^{n+1}(1+\lambda_j)^{2^{-j}}\Big]^{2^{n+1}} && \text{car} \quad \lambda_j = \lambda'_{j-1} \\
&= \Big[\prod_{j=0}^{n+1}(1+\lambda_j)^{2^{-j}}\Big]^{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme et $|a_n|$ vaut :

$$|a_n| = (q+s)^{2^n}\Big(\prod_{i=0}^{n-1}(1+\lambda_i)^{2^{-i}}\Big)^{2^{n-1}}.$$

Finalement, d'après le lemme de Chudnovsky, on obtient

$$t_{\mathbb{Z}}\Big(\Big[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\Big]\Big) \geq \frac{1}{q+s}\Big\{\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=0}^{n-1}(1+\lambda_i)^{2^{-i}}\Big\}^{-1/2}$$

avec

$$\lambda_0 = \frac{qs}{(q+s)^2} \quad \text{et} \quad \lambda_{i+1} = \frac{\lambda_i}{(1+\lambda_i)^2}.$$

Ceci achève la preuve du théorème 1.2. On remarquera que la minoration ne dépend que de $\lambda_0 = (q/s + s/q + 2)^{-1}$.

2.4. Comparaison avec la méthode d'Aparicio pour $I = [0, 1]$.

Nous montrons dans ce paragraphe que, pour l'intervalle $[0, 1]$, la suite de polynômes donnée par Aparicio et la nôtre sont identiques.

Pour ses polynômes, Aparicio utilise une transformation rationnelle ϕ de $[0, \frac{1}{4}]$ dans lui-même : $\phi(t) = \dfrac{t(1-4t)}{(1-3t)^2}$.

- Il définit la suite $(Q_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\begin{cases} Q_0 = 1 - 5t, \\ Q_n = (1-3t)^{2^n} \cdot Q_{n-1}\big(\phi(t)\big) \ ; \ \deg(Q_n) = 2^n. \end{cases}$$

Les Q_n vérifient les hypothèses du lemme 2.1 sur $[0, \frac{1}{4}]$.

- Dans notre méthode, les T_n sur $[0, \frac{1}{4}]$ satisfont :

$$\begin{cases} T_0 = 1 - 5t \\ T_n = (1-4t)^{2^n} \cdot P_n\Big(\dfrac{t}{1-4t}\Big) \ ; \ \deg(T_n) = 2^n. \end{cases}$$

Procédons par récurrence pour montrer l'égalité de nos suites.

Supposons donc que $T_n = Q_n$. Alors :

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= (1-3t)^{2^{n+1}} \cdot Q_n\Big(\frac{t(1-4t)}{(1-3t)^2}\Big) \\ &= (1-3t)^{2^{n+1}} \cdot T_n\Big(\frac{t(1-4t)}{(1-3t)^2}\Big) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (1-5t)^{2^{n+1}} \cdot P_n\Big(\frac{t(1-4t)}{(1-5t)^2}\Big) \qquad \text{par définition de } T_n. \end{aligned}$$

Calculons d'autre part $P_{n+1}\Big(\dfrac{t}{1-4t}\Big)$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}\Big(\frac{t}{1-4t}\Big) &= \Big(\frac{t}{1-4t}\Big)^{2^n} \cdot P_n\Big(\frac{t}{1-4t} + \Big(\frac{t}{1-4t}\Big)^{-1} - 2\Big) \\ &= \Big(\frac{t}{1-4t}\Big)^{2^n} \cdot P_n\Big(\frac{(1-5t)^2}{t(1-4t)}\Big) \\ &= \Big(\frac{1-5t}{1-4t}\Big)^{2^{n+1}} \cdot P_n\Big(\frac{t(1-4t)}{(1-5t)^2}\Big) \qquad \text{car } P_n \text{ est réciproque.} \end{aligned}$$

Revenons maintenant à Q_{n+1} :

$$Q_{n+1}(t) = (1-5t)^{2^{n+1}} \cdot \Big(\frac{1-4t}{1-5t}\Big)^{2^{n+1}} \cdot P_{n+1}\Big(\frac{t}{1-4t}\Big)$$

c'est-à-dire

$$Q_{n+1}(t) = T_{n+1}(t).$$

La suite de polynômes d'Aparicio et la nôtre sont donc bien identiques.

3. Majoration de $t_{\mathbb{Z}}([p/q, r/s])$ quand $|ps - qr| = 1$.

PROPOSITION 3.1. — *Soient n et N des entiers positifs non nuls. Soient $b = (b_j)_{1\leq j\leq n}$ des entiers strictement positifs et $(P_j)_{1\leq j\leq n}$ des polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ tels que $\sum_{j=1}^{n} b_j \deg(P_j) < N$. Soit la fonction*

$$h(x,b) = \frac{|q+sx|}{\prod_{j=1}^{n} |P_j(x)|^{b_j/N}}$$

définie pour $x > 0$ et $P_j(x) \neq 0$ pour $1 \leq j \leq n$ et telle que $\min_{x>0} h(x,b) = e^m > 0$.

Alors il existe un polynôme P dans $\mathbb{Z}[x]$ de degré N tel que :

$$\|P\|_I^{1/N} \leq e^{-m}.$$

Par conséquent,

$$t_{\mathbb{Z}}(I) \leq e^{-m}.$$

Démonstration. — Pour $x > 0$ et $P_j(x) \neq 0$, $1 \leq j \leq n$, on a :

$$e^m \leq \frac{|q+sx|}{\prod_{j=1}^{n} |P_j(x)|^{b_j/N}}.$$

Il en résulte :

$$(1) \qquad \prod_{j=1}^{n} \left|P_j(x)\right|^{b_j} \leq e^{-mN}|q+sx|^N \quad \text{pour} \quad x>0.$$

Posons

$$P^*(x) = \prod_{j=1}^{n} \left|P_j(x)\right|^{b_j}\,; \qquad \deg(P^*) \leq N.$$

La relation (1) ci-dessus devient $|P^*(x)| \leq e^{-Nm}|q+sx|^N$ pour $x > 0$.

On effectue maintenant un changement de variable pour se ramener dans I. Si $x > 0$ alors $t = \dfrac{p+rx}{q+sx}$ appartient à I. Enfin, définissons :

$$P(t) = P^*\Big(\frac{p-tq}{st-r}\Big)(st-r)^N.$$

On a $\deg(P) = \deg(P^*) + (N - \deg(P^*)) = N$. La relation (1) donne alors, pour $t \in I$,

$$\left|P(t)\right| \leq e^{-Nm}\left|q + s\frac{p - st}{st - r}\right|^N |st - r|^N$$

c'est-à-dire $|P(t)| \leq e^{-Nm}$ puisque $|ps - qr| = 1$. Donc

$$\max_{t\in I}\left|P(t)\right|^{1/\deg(P)} \leq e^{-m} \,;$$

P est explicite et $t_{\mathbb{Z}}(I) \leq e^{-m}$.

Soit $P \in \mathbb{Z}[x]$ un polynôme à racines réelles α_i positives, $1 \leq i \leq d$. La quantité $\prod_{i=1}^{d}(q + s\alpha_i) = R_{q,s}(P)$ définit une mesure de P. La proposition précédente montre que la majoration de $t_{\mathbb{Z}}(I)$ dépend de la minoration de la mesure $R_{q,s}$.

Nous exploitons le principe des fonctions auxiliaires pour déterminer la solution m du problème d'optimisation suivant :

$$e^m = \max_{(b_j)} \min_{x>0} h(x, b).$$

(Les b_j sont des réels strictement positifs.)

Afin de rendre ce problème linéaire par rapport aux b_j, nous étudions la fonction

$$f(x, b) = \log|q + sx| - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} b_j \log\left|P_j(x)\right|.$$

Une méthode de programmation linéaire semi-infinie permet de donner une valeur numérique approchée des b_j optimaux.

On choisit d'abord un ensemble fini X_0 de nombres positifs sur lequel f est susceptible de prendre de petites valeurs. L'ensemble, constitué des milieux de deux zéros consécutifs des polynômes intervenant dans la fonction auxiliaire, convient. Puis, on résout le problème de programmation linéaire standard suivant :

$$\max_{(b_j)} \min_{x\in X_0} f(x, b).$$

On obtient une famille particulière $b^0 = (b_j^0)$ et $m_0 = \min_{x\in X_0} f(x, b^0)$. Ensuite, on calcule $m_0' = \min_{x>0} f(x, b^0)$ et l'on a $m_0' \leq m \leq m_0$. L'étape suivante consiste à recommencer le procédé sur l'ensemble fini X_1 réunion de X_0 et des zéros de $f'(x, b^0)$. On trouve, en général, m_1 et m'_1 vérifiant :

$$m'_0 \leq m'_1 \leq m \leq m_1 \leq m_0.$$

L'opération ainsi répétée fournit deux suites (m_i) et (m'_i) telles que :

$$m'_0 \leq \cdots \leq m'_i \leq m \leq m_i \leq \cdots \leq m_0.$$

On s'arrête dès qu'il y a assez bonne convergence, quand $m_i - m'_i < 10^{-6}$, par exemple. Ceci est possible pourvu que le nombre de polynômes ne soit pas trop grand. Supposons que p itérations suffisent, alors on prend $m = m_p$.

Détaillons l'exemple où $I = [0, 1]$. La fonction auxiliaire qui intervient est de la forme :

$$f(x) = \log(x+1) - b_0 \log(x) - b_1 \log|x-1| - \sum_{j=2}^{7} b_j \log|P_j(x)|$$

avec

$$\begin{aligned}
P_2 &= x^2 - 3x + 1,\\
P_3 &= (x^3 - 5x^2 + 6x - 1)(x^3 - 6x^2 + 5x - 1),\\
P_4 &= x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1,\\
P_5 &= (x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1)(x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 7x + 1),\\
P_6 &= x^8 - 15x^7 + 83x^6 - 220x^5 + 303x^4 - 220x^3 + 83x^2 - 15x + 1,\\
P_7 &= x^2 - 4x + 1.
\end{aligned}$$

C'est la même fonction qui apparaît dans [8] pour l'étude de la longueur des entiers algébriques totalement positifs car $\log(x+1)$ est directement associé à la longueur $L(P)$ d'un polynôme à racines positives.

Nous obtenions le théorème suivant (th 4.1) :

THÉORÈME 3.2. — *Tous les polynômes P à coefficients entiers, de degré d, unitaires, totalement positifs et non divisibles par $x, x-1$ et par les facteurs irréductibles des P_i pour $i = 2, \ldots, 6$, vérifient :*

$$L(P)^{1/d} = R(P) \geq 2,3611014\, |P(0)|^{c_0/d}\, |P(1)|^{c_1/d} \prod_{i=2}^{6} |\text{rés}\,(P, P_i)|^{c_i/d}$$

avec

$$
\begin{aligned}
c_0 &= 0,31784899 & c_1 &= 0,11621266\\
c_2 &= 0,03824029 & c_3 &= 0,00624421\\
c_4 &= 0,01501115 & c_5 &= 0,00321130\\
c_6 &= 0,00575228. & &
\end{aligned}
$$

En particulier,

$$R(P) > 2,3611014.$$

Ici, on en déduit

$$m = 2,3611014 \quad \text{et} \quad t_{\mathbb{Z}}([0,1]) \leq e^{-m} = 0,42353115.$$

Remarque. — Comme $t_{\mathbb{Z}}[0,1] = t_{\mathbb{Z}}[0,\, \frac{1}{4}]^{\frac{1}{2}}$, on aurait pu étudier une fonction auxiliaire sur $[0,\, \frac{1}{4}]$. Elle serait composée des transformés des P_j par $x = \dfrac{t}{1-4t}$, soit respectivement

$$
\begin{aligned}
T_0 &= t,\\
T_1 &= 5t - 1,\\
T_2 &= 29t^2 - 11t + 1,\\
T_3 &= 30589t^6 - 34083t^5 + 15613t^4 - 3759t^3 + 501t^2 - 35t + 1,\\
T_4 &= 941t^4 - 703t^3 + 193t^2 - 23t + 1,\\
T_5 &= 981181t^8 - 1456351t^7 + 936448t^6 - 340465t^5 + 76491t^4\\
&\qquad - 10865t^3 + 952t^2 - 47t + 1,\\
T_6 &= 969581t^8 - 1441511t^7 + 928579t^6 - 338252t^5 + 76143t^4\\
&\qquad - 10836t^3 + 951t^2 - 47t + 1,\\
T_7 &= 33t^2 - 12t + 1\,;\\
U_0 &= 1 - 4t.
\end{aligned}
$$

Les trois premiers polynômes apparaissent dans le polynôme cité dans l'introduction et étudié par Aparicio pour $[0,\, \frac{1}{4}]$.

4. Résultats numériques.

Minoration et majoration de $t_{\mathbb{Z}}(I)$.

I		minoration	majoration	
$[0, \frac{1}{2}]$	(0,27334798)	0,28464223	0,28786121	(0,29069307)
$[0, \frac{1}{3}]$	(0,21095904)	0,21767399	0,22077192	(0,22210898)
$[0, \frac{1}{4}]$	(0,17278874)	0,17701068	0,17937863	(0,18043337)
$[0, \frac{1}{5}]$	(0,14665213)	0,14947069	0,15199329	(0,15220315)
$[0, \frac{1}{6}]$	(0,12752602)	0,12950020	0,13170886	(0,13173675)
$[0, \frac{1}{10}]$	(0,08408791)	0,08473875	0,08573519	(0,08592011)
$[0, \frac{1}{12}]$	(0,07190912)	0,07233143	0,0731068	(0,07324779)
$[0, \frac{1}{15}]$	(0,05909715)	0,05934001	0,05991511	(0,06000011)
$[0, \frac{1}{20}]$	(0,04558513)	0,04569987	0,04607753	(0,04612155)
$[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$	(0,11954914)	0,16917092	0,17072255	(0,17181856)
$[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]$	(0,06153947)	0,10604672	0,10768567	(0,10832409)
$[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$	(0,07255604)	0,12052665	0,12196998	(0,12313371)
$[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}]$	(0,08230163)	0,12321607	0,12546057	(0,12578497)
$[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]$	(0,05014593)	0,09364456	0,09490391	(0,09567263)

Les résultats entre parenthèses sont ceux d'Amoroso [1].

Tableau I

Remarque. — Les intervalles

$$\left[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right] \quad \text{et} \quad \left[1 - \frac{r}{s}, 1 - \frac{p}{q}\right]$$

ayant même diamètre transfini entier, pour $[0, \frac{1}{10}]$, $[0, \frac{1}{12}]$, $[0, \frac{1}{15}]$ et $[0, \frac{1}{20}]$, nous avons utilisé la fonction auxiliaire :

$$\log |s + qx| - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} b_j \log\left|P_j(x)\right|.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. AMOROSO, Sur le diamètre transfini entier d'un intervalle réel, Annales de l'Institut Fourier, 40-4 (1990), 885–911.

[2] F. AMOROSO, f-Transfinite diameter and number theoretic applications, Annales de l'Institut Fourier, 43-4 (1993), 1179–1198.

[3] E. APARICIO, Metodos para el calculo approximado de la desviacion diopantea uniforme minima a cero en un segmento, Revista Matematica Hispano-Americana, 4 Serie, t. XXXVIII, n° 6 (1978), 259–270.

[4] E. APARICIO, New bounds for the uniform Diophantine deviation from zero in $[0,1]$ and $[0,\frac{1}{4}]$, Proceedings of the sixth conference of Portuguese ad Spanish mathematicians, Part I, Santander (1979), 289–291.

[5] G.V. CHUDNOVSKY, Number Theoretic Applications of Polynomials with Rational Coefficients Defined by Extremality Conditions, Arithmetic and Geometry, Vol. I, ed. M. Artin and J. Tate, Birkhaüser, Progress in Math., 35 (1983), 61–105.

[6] M. FEKETE and G. SZEGÖ, On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set, Math. Zeit., 63 (1955), 158–172.

[7] O. FERGUSON, Approximation by polynomials with integral coefficients, Math. Surveys, 17, AMS, Providence, R.I., 1980.

[8] V. FLAMMANG, Sur la longueur des entiers algébriques totalement positifs, J. Number Theory (à paraître).

[9] C.J. SMYTH, On the measure of totally real algebraic numbers I, J. Austral. Math. Soc. (Ser.A), 30 (1980), 137–149.

[10] C.J. SMYTH, On the measure of totally real algebraic numbers II, Math. Comp., 37 (1981), 205–208.

[11] C.J. SMYTH, The mean values of totally real algebraic integers, Math. Comp., 42 (1984), 663–681.

Manuscrit reçu le 25 avril 1994,
révisé le 2 janvier 1995,
accepté le 29 mars 1995.

Valérie FLAMMANG,
URA CNRS n° 399
Département de Mathématiques et Informatique
Université de Metz, île du Saulcy
57045 Metz Cedex 1 (France).