ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CAROLINE GRUSON

Description de certains super groupes classiques

Annales de l'institut Fourier, tome 44, n° 1 (1994), p. 39-63

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_1_39_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 1 (1994), 39-63

DESCRIPTION DE CERTAINS SUPER GROUPES CLASSIQUES

par Caroline GRUSON

Table des matières.

Introduction.

Weil a donné dans [12] une description des groupes de Lie simples non exceptionnels comme groupes d'automorphismes d'algèbres semi-simples à involution. Le but de cet article est de généraliser cette construction au cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué. Dans la première partie, on démontre un résultat adaptant au cas d'un super groupe de Lie C^∞ un théorème de Cartier, ce qui permet d'affirmer qu'un sous foncteur en groupes de $GL(n,m)$ défini par des équations est représentable par un super groupe de Lie.

Dans la seconde partie, on décrit les super algèbres semi-simples à involution sur $\mathbb{C}$ et l'on montre que leurs groupes d'automorphismes sont des types suivants : $\mathbb{P}OSP(n,2m,\mathbb{C})$, $\mathbb{P}GL(n,m,\mathbb{C})$, $\mathbb{P}\mathbf{P}(n,\mathbb{C})$, $\mathbb{P}\mathbf{Q}(n,\mathbb{C})$.

Mots-clés : Super groupes de Lie – Super algèbres de Lie – Algèbres de Hopf – Algèbres semi-simples à involution.
Classification A.M.S. : 14A22 – 14L05 – 14M30 – 17A70 – 20Gxx.

La troisième partie est consacrée aux formes réelles : pour passer au cas réel, il faut montrer que les automorphismes des super groupes complexes obtenus proviennent d'automorphismes des super algèbres à involution, ce qui chez Weil se traduit par l'exclusion du groupe $SO(8)$. En effet, celui-ci a six automorphismes extérieurs dont deux seulement proviennent de l'algèbre à involution. Si l'on se place, comme Weil, dans le cas d'un sous-corps k d'un corps K, on constate que si le groupe de Galois de K sur k est S_3 ou A_3, le phénomène de la trialité peut faire apparaître des k-formes de $SO(8,K)$ auxquelles ne correspond aucune forme quadratique sur k (voir Jacobson, Exceptional Lie algebras, Marcel Dekker, 1971, §5).

Le cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué n'introduit pas de difficulté supplémentaire, d'après Serganova [9].

Je souhaite remercier Michel Duflo, qui m'a proposé le sujet de ce travail et en a suivi attentivement la réalisation.

1. Généralisation au cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué d'un théorème de Cartier.

Cartier a démontré dans [3] que les schémas en groupes sont lisses en caractéristique zéro.

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit $(G, \mathcal{O}_G)$ un super groupe de Lie différentiable, $\mathcal{O}_G$ désignant le faisceau des germes de fonctions C^∞ sur G. Soit $\mathcal{I}$ un idéal $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué localement de type fini de $\mathcal{O}_G$. Notons (m, m^*) la multiplication de $(G, \mathcal{O}_G)$; on suppose que $m^*(\mathcal{I}) \subset p_1^*(\mathcal{I}) + p_2^*(\mathcal{I})$, p_1 et p_2 étant les deux projections de $G \times G$ sur G. Alors il existe un sous-super groupe $(H, \mathcal{O}_H)$ de $(G, \mathcal{O}_G)$ tel que $\mathcal{I}$ soit l'idéal des germes de fonctions nulles sur H.*

Montrons tout d'abord le résultat au voisinage de l'élément neutre e de G. Soit $(f_1, \ldots, f_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_q)$ un système de générateurs de $\mathcal{I}$ au voisinage de e. Considérons la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \partial f_i/\partial y_j & \partial f_i/\partial \eta_j \\ \partial \varphi_i/\partial y_j & \partial \varphi_i/\partial \eta_j \end{pmatrix}$$

dans un système $(y_1, \ldots, y_n, \eta_1, \ldots, \eta_p)$ de coordonnées locales de G au voisinage de e. Prenons sa valeur en e et extrayons un ensemble maximal de lignes indépendantes. Supposons que ces lignes correspondent à $(f_1, \ldots, f_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_l)$.

Complétons $(f_1, \ldots, f_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ en un système de coordonnées locales, qu'on notera dorénavant $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_p)$ (on a : $x_1 = f_1, \ldots, x_k = f_k, \xi_1 = \varphi_1, \ldots, \xi_l = \varphi_l$).

On considère maintenant la sous-super variété $(X, \mathcal{O}_X)$ de $(G, \mathcal{O}_G)$ définie par :

$$x_1 = 0, \ldots, x_k = 0, \xi_1 = 0, \ldots, \xi_l = 0.$$

On définit un germe de loi de composition interne sur X, notée $(g,h) \to g * h$, de la façon suivante : si $g, h,$ *et* $m(g,h)$ sont dans l'ouvert de coordonnées et que g *et* h sont dans X, $g * h$ est la projection de $m(g,h)$ sur X (i.e. l'élément de X ayant les mêmes coordonnées que $m(g,h)$ selon $(x_{k+1}, \ldots, x_n, \xi_{l+1}, \ldots, \xi_p)$).

On se propose de démontrer que les applications $(f_{k+1}, \ldots, f_m, \varphi_{l+1}, \ldots, \varphi_q)$ s'annulent sur X.

Soit T_eX l'espace tangent à X au point e. Soit d un élément de T_eX, on lui associe un germe en e de champ de vecteurs sur X, noté V_d, défini de la façon suivante : si f est un germe de fonction sur X en e, on pose :

$$V_d(f)(g) = d(h \mapsto f(g * h)).$$

LEMME 1.1. — *Si f est la restriction à X d'un élément de $\mathcal{I}$, il en est de même pour $V_d(f)$.*

Démonstration. — Soit u un élément de $\mathcal{I}$ dont la restriction à X est f. Composons le germe de f avec le germe de projection de G sur X (qui a servi à définir la loi $*$) et notons f^X le résultat. Alors $u - f^X$ s'annule sur X, ce qui prouve que f^X appartient à $\mathcal{I}$; sa restriction à X est f. De plus, si $g, h,$ et $m(g,h)$ sont assez voisins de e, $f^X(m(g,h)) = f^X(g * h)$ par construction.

Calculons $V_d(f^X)(g) = d(h \mapsto f^X(g * h))$. Le germe

$$(g,h) \longmapsto f^X(g * h) = f^X(m(g,h))$$

appartient à $m^*(\mathcal{I})$. Or $m^*(\mathcal{I}) \subset p_1^*(\mathcal{I}) + p_2^*(\mathcal{I})$. Donc il existe des germes a_i, b_i, c_i, d_i de sections de $\mathcal{O}_{G\times G}$ en (e,e) tels que :

$$f^X(g*h) = \sum_i a_i(g,h)f_i(g) + \sum_i b_i(g,h)\phi_i(g) + \sum_i c_i(g,h)f_i(h) + \sum_i d_i(g,h)\phi_i(h).$$

Donc

$$V_d(f^X)(g) = \sum_i (d_h a_i)f_i(g) + \sum_i (d_h b_i)\phi_i(g) + \sum_i (d_h c_i)f_i(e) + \sum_i d(f_i)c_i(g,e) + \sum_i (d_h d_i)\phi_i(e) + \sum_i (d\phi_i)d_i(g,e)$$

où d_h désigne la dérivation partielle par rapport à h dans la direction d. Or $d(f_i) = d(\phi_i) = 0$: en effet le système de coordonnées locales a été construit pour !

Donc $V_d(f^X)(g) = \sum d_h a_i f_i(g) + \sum d_h b_i \phi_i(g) \in \mathcal{I}$. □

Notons I l'idéal des germes en e des restrictions de $\mathcal{I}$ à X. On vient de voir que I est stable par tous les V_d, $d \in T_eX$, donc par toutes les dérivations de X au voisinage de e.

Rappelons la définition d'une super algèbre proche, adaptée de Weil [11].

DÉFINITION 1.1. — *Soit k un corps de caractéristique zéro, on appelle super algèbre proche sur k une super algèbre locale de dimension finie super commutative de corps résiduel k.*

Par exemple, l'algèbre extérieure $k[\xi_1, \dots \xi_n]$ en n variables impaires est une super algèbre proche.

LEMME 1.2. — *Soit I un idéal gradué de type fini de l'anneau des germes en 0 de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^{n+\epsilon p}$, stable par toutes les dérivations et ne contenant pas 1. Alors $I = 0$.*

Démonstration. — Etudions le cas où $n = 0$, donc où il n'y a que des variables impaires. On veut montrer qu'un idéal de $\Lambda(\mathbb{R}^p)$ stable par toutes les dérivations est soit nul soit $\Lambda(\mathbb{R}^p)$. Soit I un tel idéal, supposons $I \neq 0$; soit β un élément non nul de I. On considère un terme de β de plus bas degré possible, supposons que c'est $\alpha\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_k$. On multiplie alors β par $\xi_{k+1} \wedge \ldots \wedge \xi_p$, et on trouve $\alpha\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_p$. Donc I contient $\Lambda^p(\mathbb{R}^p)$. Or par dualité de l'algèbre extérieure, $\Lambda^p(\mathbb{R}^p)$ correspond à $\Lambda^0((\mathbb{R}^p)^*) = \mathbb{R}$, et la dérivation dans une direction définie par un élément de $(\mathbb{R}^p)^*$ correspond à la multiplication par cet élément. Donc $I = \Lambda(\mathbb{R}^p)$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général ; notons $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_p)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^{n+\varepsilon p}$ et $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+q}$ un système de générateurs homogènes de I au voisinage de 0. Tout élément de I est considéré comme un germe d'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\Lambda(\mathbb{R}^p)$.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Dérivons le système de générateurs choisi dans la direction v. On obtient ainsi un système homogène d'équations différentielles :

$$\partial f_k/\partial v = \sum_{1 \leq j \leq m+q} a_{kj} f_j, \quad k = 1, \ldots, m+q \quad (a_{kj} \in \mathrm{End}(\Lambda(\mathbb{R}^p))).$$

Le cas traité ci-dessus ($n = 0$) montre que les conditions initiales de ce système sont nulles. Par le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles, la solution nulle est la seule possible. □

Donc I est nul, donc $\mathcal{I}$ est identique à l'idéal des fonctions nulles sur X, donc $(f_1, \ldots, f_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ est un système submersif de générateurs de $\mathcal{I}$ au voisinage de e. La condition

$$m^*(\mathcal{I}) \subset p_1^*(\mathcal{I}) + p_2^*(\mathcal{I})$$

implique que H_P est un sous-groupe de G_P pour toute algèbre proche P : soit P une algèbre proche, on note G_P le groupe des points proches de G à valeurs dans P, qui est défini comme suit : pour toute super variété différentiable $(X, \mathcal{O}_X)$, la théorie des points proches [11] permet, pour toute algèbre proche P, de munir l'ensemble X_P des morphismes d'espaces annelés $(\{pt\}, P) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ d'une structure de variété différentiable.

Soit $H = H_{\mathbb{R}}$ le sous-groupe de $G = G_{\mathbb{R}}$ formé des points proches de G à valeurs dans $\mathbb{R}$ où les sections de $\mathcal{I}$ sont nulles. C'est par définition le support du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_G/\mathcal{I}$, et par hypothèse, c'est un sous-groupe de G.

Pour prouver le théorème 1.1, il reste à voir que $\mathcal{I}$ peut être engendré, au voisinage de tout point h de H, par un système submersif d'équations.

Définissons la translation à gauche par h :

$$(L_h, L_h^*) : (G, \mathcal{O}_G) \to (G, \mathcal{O}_G).$$

C'est la composée :

$$(G, \mathcal{O}_G) \xrightarrow{(\mathrm{id},h)} (G \times G, \mathcal{O}_{G\times G}) \xrightarrow{(m,m^*)} (G, \mathcal{O}_G)$$

où les flèches sont : à droite la multiplication, à gauche le produit cartésien des deux morphismes suivants de $(G, \mathcal{O}_G)$ dans lui même

$$\mathrm{id} : (G, \mathcal{O}_G) \to (G, \mathcal{O}_G)$$

$$h : (G, \mathcal{O}_G) \longrightarrow (\{pt\}, \mathbb{R}) \xrightarrow{h, h \in G_{\mathbb{R}}} (G, \mathcal{O}_G).$$

Soit A l'anneau des germes de sections de $\mathcal{O}_G$ au voisinage de e.

Si l'on note A_h l'anneau des germes de sections de $\mathcal{O}_G$ au voisinage de h, (L_h, L_h^*) induit un isomorphisme $\varphi_h : A_h \longrightarrow A$.

Notons I l'idéal formé des germes de sections de $\mathcal{I}$ au voisinage de e.

Notons I_h l'idéal des germes de sections de $\mathcal{I}$ au voisinage de h. On est ramené à montrer que $\varphi_h(I_h) = I$.

Calculons l'application $L_{(h,P)} : G_P \longrightarrow G_P$ qui correspond à (L_h, L_h^*).

L'application (m, m^*) induit le produit m_P dans G_P. L'identité devient l'identité, il reste à déterminer ce que nous avons noté h. $\mathbb{R}$ s'injecte dans P, donc il y a un unique point proche $(\{pt\}, P)$ dans $(G, \mathcal{O}_G)$ qui se factorise par

$$(\{pt\}, \mathbb{R}) \xrightarrow{h} (G, \mathcal{O}_G).$$

On note h_P ce point de G_P.

Compte tenu de ce qui précède, $L_{h,P}$ est la translation à gauche (bien définie car G_P est un groupe) par h_P.

Soit H_P le sous-groupe de G_P défini par $\mathcal{I}_P$; (rappelons comment est défini $\mathcal{I}_P$: soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une super variété différentiable, si U est un ouvert de X et si $f \in \mathcal{O}_X(U)$, pour chaque $x \in U_P$, on définit $f_P(x)$ comme l'image de f par l'homomorphisme $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow P$ associé à la donnée de x. Alors f_P est une fonction différentiable sur U_P à valeurs dans P . Par définition, $\mathcal{I}_P$ est l'idéal des fonctions différentiables sur G_P engendré par les coefficients des f_P, dans une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel P , lorsque f parcourt les sections locales de $\mathcal{I}$.). L'élément h_P appartient à H_P. En effet, h_P est un morphisme $(\{pt\}, P) \to (G, \mathcal{O}_G)$, $\{pt\}$ étant envoyé sur h. On a donc un homomorphisme $\alpha_{h_P} : A_h \longrightarrow P$.

Or par construction de h_P, ce morphisme se factorise par $\mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Ker}(\alpha_{h_P})$ est égal à l'idéal maximal de A_h et contient donc I_h. Donc h_P annule les éléments de $\mathcal{I}_P$, i.e. appartient à H_P.

L'application $L_{h,P}$ induit donc une bijection de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(A/I, P)$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(A_h/I_h, P)$. En faisant varier P, cela prouve que $\varphi_h(I_h) = I$.

On a donc prouvé que l'on a des coordonnées locales partout, d'où le théorème. □

Ce résultat tel qu'il est énoncé n'est pas très maniable. On a vu, au cours de la démonstration, que la condition $m^*(\mathcal{I}) \subset p_1^*(\mathcal{I})+p_2^*(\mathcal{I})$ implique que H_P est un sous groupe de G_P pour toute algèbre proche P. Dans le cas C^∞, cette seconde condition est strictement plus faible que la première (présence de fonctions plates). Par contre, dans le cas analytique, les deux conditions sont équivalentes :

Soient $(G, \mathcal{O}_G)$ un super groupe de Lie analytique réel, $\mathcal{O}_{G,e}$ l'anneau local des germes de sections de $\mathcal{O}_G$ au voisinage de e, $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{G,e}$ et A le complété $\mathcal{M}$-adique de $\mathcal{O}_{G,e}$. Soit I l'idéal des germes de sections de $\mathcal{I}$ au voisinage de e. On note $\hat{I}$ son complété $\mathcal{M}$-adique. Avec ces notations, la condition du théorème 1.1 s'écrit :

$$\mu^*(\hat{I}) \subset A\hat{\otimes}I + I\hat{\otimes}A,$$

où μ^* désigne la comultiplication dans l'algèbre de Hopf A et $\hat{\otimes}$ est le produit tensoriel complété.

Montrons que si, pour toute algèbre proche P, I_P définit un sous-groupe H_P de G_P, alors cette condition est satisfaite :

Soit P une algèbre proche quotient de $A\hat{\otimes}A$ par un idéal gradué J qui contienne $A\hat{\otimes}I + I\hat{\otimes}A$; notons $f : A\hat{\otimes}A \to P$ l'homomorphisme canonique. Montrons que $\mu(\hat{I}) \subset J$; on aura alors le résultat voulu par le théorème de Krull (car $A\hat{\otimes}I + I\hat{\otimes}A = \bigcap J$ pour J idéal contenant $A\hat{\otimes}I + I\hat{\otimes}A$ et de codimension finie comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Un point de G_P d'image e dans $G_{\mathbb{R}}$ est un homomorphisme de $\hat{A}$ dans P. L'homomorphisme f donné de $A\hat{\otimes}A$ dans P définit donc un couple (g_1, g_2) de G_P. Comme le noyau J de f contient $A\hat{\otimes}I + I\hat{\otimes}A$, g_1 et g_2 sont dans H_P. Par ailleurs, $f \circ \mu$ est l'homomorphisme de A dans P correspondant à g_1g_2. Or $g_1g_2 \in H_P$ par hypothèse, donc $\mu^*(\hat{I}) \subset J$.

On a donc l'énoncé suivant, qui est la généralisation du théorème de Cartier :

THÉORÈME 1.2. — *Soit $(G, \mathcal{O}_G)$ un super groupe de Lie analytique réel, soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent de $\mathcal{O}_G$ tel que pour toute algèbre proche P, $\mathcal{I}_P$ définisse un sous-groupe fermé de G_P . Alors il existe un sous super groupe de Lie $(H, \mathcal{O}_H)$ de $(G, \mathcal{O}_G)$ tel que $\mathcal{I}$ soit l'idéal des fonctions nulles sur H.*

En effet, la démonstration du théorème 1.1 se reproduit identiquement en remplaçant C^∞ par analytique.

2. Super algèbres à involution et super groupes complexes.

2.1. *Involutions des super algèbres semi-simples complexes.*

DÉFINITION 2.1. — *Soit A une super algèbre complexe, on appelle involution sur A un isomorphisme d'algèbres de A sur A^{opp} de carré l'identité (A^{opp} désigne l'algèbre opposée de A , i.e. la loi de multiplication est $(a, b) \mapsto (-1)^{p(a)p(b)}ba$).*

Les super algèbres considérées dans la suite sont de dimension finie. On connait la classification des super algèbres simples sur $\mathbb{C}$ ([7], chap.3, prop.6.4.7) ; nous les noterons $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C}), (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash (0,0)$ et $M_n(\mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}^*$ (rappelons que $\mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C}$ désigne le super corps de centre $\mathbb{C}$ défini par l'adjonction d'un élément impair ε de carré 1). On remarque que $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})$ est isomorphe à $M_{m+\varepsilon n}(\mathbb{C})$. Une super algèbre semi-simple complexe est un produit d'algèbres de ces types. Soit i une involution sur une super algèbre semi-simple $A = \Pi A_\mu$, où les A_μ sont simples. Comme i est un isomorphisme d'algèbres, elle induit une permutation d'ordre ≤ 2 (car elle est de carré l'identité) de l'ensemble des indices. Distinguons ce qui se passe pour un bloc stable $A_\mu \times A_\nu$ de ce qui se passe pour un facteur simple unique. Si A et B sont deux algèbres simples, se donner une involution sur $A \times B$ qui permute les facteurs revient à identifier B et A^{opp}. Pour classifier les super algèbres simples à involution, il reste à déterminer toutes les involutions des super algèbres simples citées plus haut.

Soit A une super algèbre simple complexe, nous allons décrire un antiautomorphisme T de A tel que $T^2(x) = (-1)^{p(x)}x$ pour tout x homogène dans A. Soit i une involution de A, $i \circ T^{-1}$ est un automorphisme de A , qui d'après la version graduée du théorème de Skolem Noether, théorème 2.1 ci-dessous ([7] chap. III, prop. 6.5.1.) est intérieur au sens suivant : il existe un élément a homogène inversible dans A tel que $(i \circ T^{-1})(x) = (-1)^{p(a)p(x)} axa^{-1}$ $\forall x \in A$. Exprimons maintenant que i est de carré l'identité. Soit a un élément homogène inversible de A , on note φ_a l'automorphisme intérieur de A défini par a.

On calcule $T \circ \varphi_a$:

$$T \circ \varphi_a(x) = T((-1)^{p(a)p(x)} axa^{-1})$$

$$T \circ \varphi_a(x) = (-1)^{p(a)p(x)}(-1)^{p(a^{-1})p(ax)} T(a^{-1})T(ax)$$

$$T\circ\varphi_a(x) = (-1)^{p(a)p(x)}(-1)^{p(a)((p(a)+p(x))}(-1)^{p(a)} T(a)^{-1}(-1)^{p(a)p(x)} T(x)T(a)$$

$$T \circ \varphi_a(x) = \varphi_{T(a)^{-1}} \circ T(x).$$

Or $i = \varphi_a \circ T$, donc $1 = i^2 = \varphi_a \circ T \circ \varphi_a \circ T = \varphi_a \circ \varphi_{T(a)^{-1}} \circ T^2$.

Mais $\varphi_a \circ \varphi_{T(a)^{-1}} = \varphi_{aT(a)^{-1}}$; donc $\varphi_{aT(a)^{-1}} \circ T^2(x) = x$ pour tout x, donc $\varphi_{aT(a)^{-1}}(x) = (-1)^{p(x)}x$.

Remarque. — De plus, on voudrait avoir la classification des algèbres à involution à automorphisme près. Soit (A, i) une algèbre simple à involution, soit $j = \varphi_b \circ i$ un antiautomorphisme de A, un calcul analogue nous dit que pour que j soit une involution, il faut et il suffit que $bi(b)^{-1} = \lambda I, \lambda \in \mathbb{C}^*$.

Par ailleurs, i et j sont conjuguées par un automorphisme de A si et seulement si il existe $c \in A^\times$ tel que $b = ci(c)$ (on a noté $A^\times$ le groupe multiplicatif de A).

Définissons maintenant T dans les deux cas considérés.

1) $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C}), (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash \{(0,0)\}$

Soit Z une algèbre graduée super commutative; rappelons que $M_{n+\varepsilon m}(Z)$ est constituée de matrices par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

A étant une matrice (n,n), B une matrice (n,m), C une matrice (m,n) et D une matrice (m,m), avec la graduation suivante :

$$(M_{n+\varepsilon m}(Z))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \ A \text{ et } D \text{ (resp. } B \text{ et } C) \text{ à coeff. dans } Z_0 \text{ (resp. } Z_1) \right\}$$

$$(M_{n+\varepsilon m}(Z))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\ A \text{ et } D \text{ (resp. } B \text{ et } C) \text{ à coeff. dans } Z_1 \text{ (resp. } Z_0) \right\}.$$

On définit un antiautomorphisme, appelé la super transposition, de la façon suivante :

$$^{\mathrm{str}}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ -{}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \text{ si } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ appartient à } (M_{n+\varepsilon m}(Z))_0$$

$$^{\mathrm{str}}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & -{}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \text{ si } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ appartient à } (M_{n+\varepsilon m}(Z))_1$$

voir [8], chap.3, §3, 1.

Il est clair que si Z est totalement pair, ${}^{\mathrm{str}}({}^{\mathrm{str}}(x)) = (-1)^{p(x)}x$ pour tout x homogène dans $M_{n+\varepsilon m}(Z)$.

On remarque que cette super transposition se déduit par extension des scalaires de celle sur $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})$.

On peut maintenant calculer toutes les involutions sur $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})$.

Soit a un élément homogène inversible de $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})$. Alors $\varphi_a \circ T$ est une involution de $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})$ si et seulement si $(-1)^{p(x)}\varphi_{aT(a)^{-1}}(x) = x$ pour tout x homogène de $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})$.

Remarque. — $x \mapsto (-1)^{p(x)}x$ est l'automorphisme intérieur de $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})$ défini par la matrice $\sigma = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$.

Donc la condition peut s'écrire :

$$aT(a)^{-1}\sigma \in \mathbb{C}^*.$$

Distinguons maintenant deux cas suivant la parité de a.

Si a est un élément pair, on peut écrire $a = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $aT(a)^{-1}\sigma = \lambda I$.

Donc $T(aT(a)^{-1}\sigma) = T(\lambda I) = \lambda I$, et $T(aT(a)^{-1}\sigma) = T(\sigma)a^{-1}T(a) = \sigma a^{-1}T(a)$. Donc $aT(a)^{-1}\sigma\sigma a^{-1}T(a) = \lambda^2 I$, soit $aT(a)^{-1}a^{-1}T(a) = \lambda^2 I$.

Or a et $T(a)$ commutent car chacun laisse stable la partie paire et la partie impaire de $\mathbb{C}^{n+\varepsilon m}$ et $a = \lambda T(a)$ sur la partie paire , $a = -\lambda T(a)$ sur la partie impaire.

On peut donc en déduire que $\lambda^2 = 1$. Donc $aT(a)^{-1}\sigma = 1$, soit :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tA^{-1} & 0 \\ 0 & {}^tB^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \pm I$$

$$\begin{pmatrix} A^tA^{-1} & 0 \\ 0 & -B^tB^{-1} \end{pmatrix} = \pm I.$$

Conclusion : ou bien A est une matrice symétrique et B est une matrice alternée, ou bien A est une matrice alternée et B est une matrice symétrique. Il y a deux classes d'automorphismes si $n \neq m$, en effet si l'on applique la remarque de la page 48, ceci est clair, car les parties symétrique et alternée se séparent et chacune d'elles ressort de la classification usuelle de ces matrices. De plus, si $n \neq m$, l'automorphisme $M_{n+\varepsilon m} \to M_{m+\varepsilon n}$ permute les deux classes. Si $n = m$, il n'y a qu'une classe d'automorphismes, en choisissant $a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{(-1)}I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

Si a est un élément impair, on a $m = n$, puisque a est inversible.

Posons

$$a = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad a^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

On écrit $aT(a)^{-1}\sigma = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Effectuons le calcul :

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{\text{str}} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \lambda I.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} A\,{}^tB^{-1} & 0 \\ 0 & B\,{}^tA^{-1} \end{pmatrix} = -\lambda I.$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} A = -\lambda^t B \\ B = -\lambda^t A \end{cases}$$

ce qui impose $\lambda^2 = 1$.

On en déduit que a est de la forme :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix} \text{ ou bien } a = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a dans ce cas qu'une seule classe d'automorphismes d'après la remarque de la page 48 (les deux représentants $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ sont conjugués par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$).

2) $M_n(\mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}^*$

Un élément de $M_n(\mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C})$ s'écrit $a + \varepsilon b$ où a et b appartiennent à $M_n(\mathbb{C})$, avec $\varepsilon^2 = 1$, homogène de degré 1.

On pose $T(a + \varepsilon b) =^t a + \varepsilon\sqrt{(-1)}\ {}^t b$ avec $\sqrt{(-1)}^2 = -1$.

On remarque que (conformément au théorème de Skolem Noether énoncé ci-dessous) $x \mapsto (-1)^{p(x)}x$ est l'automorphisme $\varphi_{\varepsilon i}$ qui provient d'un élément impair.

Lorsqu'on écrit la condition nécessaire pour que $\varphi_A \circ T$ soit une involution, on obtient :

$$AT(A)^{-1}.\varepsilon\sqrt{(-1)} \text{ appartient au centre.}$$

Celui-ci ne contenant que des éléments pairs puisqu'il s'agit de $\mathbb{C}$, il y a une contradiction.

Conclusion : La super algèbre simple $M_n(\mathbb{C}+\varepsilon\mathbb{C})$ n'a pas d'involution.

PROPOSITION 2.1. — *On a les classes d'isomorphismes suivantes d'algèbres semi-simples à involution sur* $\mathbb{C}$ *:*

a) $(M_{n+2\varepsilon m}(\mathbb{C}),\ \varphi_a \circ T)$, $(n,m) \in \mathbb{N}^2\backslash\{(0,0)\}$, $a = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & -I_m & 0 \end{pmatrix}$.

b) $(M_{n+\varepsilon n}(\mathbb{C}),\ \varphi_a \circ T)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$,

c) $(M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C}) \times M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})^{\mathrm{opp}}$, *inversion des facteurs),* $(n,m) \in \mathbb{N}^2\backslash\{(0,0)\}, n \geq m$,

d) $(M_n(\mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C})^{\mathrm{opp}}$, *inversion des facteurs),* $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2. *Groupes d'automorphismes des algèbres semi-simples à involution.*

Soit (A, i) une super algèbre semi-simple complexe à involution.

Soit P une super algèbre proche sur $\mathbb{C}$, on note $A(P)$ la super algèbre $A \underset{\mathbb{C}}{\otimes} P$.

Décrivons les automorphismes (triviaux sur le centre, en particulier P-linéaires) de $(A(P), i_P)$ où i_P désigne l'involution sur $A(P)$ obtenue par extension des scalaires. Rappelons que l'on appelle centre de A l'ensemble des éléments $a \in A$ homogènes tels que, pour tout x homogène dans A, $ax = (-1)^{p(a)p(x)}xa$.

Théorème 2.1 (Skolem Noether). — *Les automorphismes de $A(P)$ triviaux sur le centre sont intérieurs (voir [7], chap.3, prop. 6.5.1 dans le cas où le centre est totalement pair).*

La démonstration classique s'adapte aisément.

Soit u appartenant à $A(P)$, u inversible et pair ; soit φ_u l'automorphisme intérieur associé. Exprimons que φ_u commute avec i_P :

$$\varphi_u \circ i_P = i_P \circ \varphi_u \iff u i_P(a) u^{-1} = i_P(uau^{-1}),\ \forall a \in A(P)$$

$$\varphi_u \circ i_P = i_P \circ \varphi_u \iff u i_P(a) u^{-1} = i_P(u^{-1}) i_P(a) i_P(u)$$

$$\varphi_u \circ i_P = i_P \circ \varphi_u \iff i_P(u)u \text{ appartient au centre de } A(P).$$

Dans le cas où A est simple, le centre de $A(P)$ est P, donc $\varphi_u \circ i_P = i_P \circ \varphi_u$ équivaut à $i_P(u)u = \lambda \in P_0^*$ (P_0^* est l'ensemble des éléments pairs inversibles de P).

Remarque. — Rappelons-nous que u et μu, $\mu \in P_0^*$, définissent le même automorphisme intérieur de $A(P)$. Par ailleurs, on peut extraire des racines carrées dans P_0^* (lemme de Hensel, voir [7], chap.2, démonstration du thm.4.6.1), donc il existe une racine carrée μ de λ^{-1} et l'on a :

$$\varphi_{\mu u} = \varphi_u \text{ et } i_P(\mu u)\mu u = 1.$$

(Comme tout λ^{-1} a exactement deux racines carrées, on a deux choix possibles pour le représentant de l'automorphisme intérieur.)

Donc, si on note $G(P)$ l'ensemble des $v \in A(P)_0^*$ tels que $i_P(v)v = 1$, $v \longrightarrow \varphi_v$ est un homomorphisme surjectif de noyau $\{-1, 1\}$ de la composante neutre de $A(P)_0^*$ sur celle du groupe des automorphismes de (A_P, i_P).

Si A est semi-simple, on a vu qu'il suffit de considérer le cas $A = B \times B^{\mathrm{opp}}$, l'involution étant la permutation des facteurs, le centre de $A(P)$ devient $P \times P$ et l'on a :

$i_P(u)u = i_P(i_P(u)u)$, donc $i_P(u)u \in P_0^* \times P_0^*$, et on peut l'écrire (λ, λ).

Si $i_P(\mu u)\mu u = 1$, où $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, on a la relation $\mu_1\mu_2 = \lambda^{-1}$, on a donc une infinité de solutions et l'on en choisit arbitrairement une.

Donc, si on note $G(P)$ l'ensemble des $v \in A(P)_0^*$ tels que $i_P(v)v = 1$, $v \to \varphi_v$ de $B(P)_0^*$ dans $A(P)_0^*$ est un homomorphisme surjectif de noyau P_0^* dans la composante neutre de $\mathrm{Aut}(A_P, i_P)$.

Associons maintenant à (A, i) un super groupe de Lie.

Soit $V = V_0 \oplus V_1$ un super espace vectoriel de dimension $n + \varepsilon m$, $n \geq 0$, $m \geq 0$, $m + n \neq 0$. On choisit une base de V et on identifie les endomorphismes de V avec les matrices de $M_{n+\varepsilon m}$. Pour toute algèbre proche P, on définit :

$GL(n, m, P) = \{g \in M_{n+\varepsilon m}(P)_0, g \text{ inversible}\}$, et l'on note $GL(n, m)$ le super groupe de Lie ainsi obtenu. Soit $GL(A)$ le super groupe de Lie complexe associé à l'espace vectoriel A.

Soit φ un élément de $GL(A)(\mathbb{C})$. Dire que c'est un automorphisme de l'algèbre à involution (A, i) peut se traduire par :

$$\varphi \circ i - i \circ \varphi = 0$$
$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \text{ pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } A.$$

La deuxième équation s'interprète comme suit : notons μ la multiplication de A, on peut dire que μ est un élément de $A^* \otimes A^* \otimes A$; on fait agir $GL(A)$ sur $A^* \otimes A^* \otimes A$ (par l'inverse de la transposée sur les deux premiers facteurs) et on note $\mathrm{Aut}(A)$ l'ensemble des éléments qui fixent μ. Si P est une algèbre proche, $\mathrm{Aut}(A(P))$ est défini par les mêmes équations qui sont en nombre fini.

La première équation, $[\varphi, i] = 0$, est identique sur chaque algèbre proche.

On a donc un sous-ensemble de $GL(A)$ défini par un nombre fini d'équations, que l'on peut noter $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$, telles que pour toute algèbre proche P, $f_{1,P} = 0, \ldots, f_{k,P} = 0$ définisse un sous-groupe de $GL(A(P))$. Comme $GL(A)$ est un super groupe analytique, nous sommes dans les hypothèses du théorème de Cartier, ce qui permet de conclure que l'ensemble des automorphismes de (A, i) muni du faisceau structural $\mathcal{O}_{GL(A)}/I$, où I est l'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_k$, est un super groupe de Lie, que nous notons $\mathrm{Aut}(A, i)$, et l'on a $\mathrm{Aut}(A, i)(P) = \mathrm{Aut}(A(P), i)$.

Rappelons les définitions suivantes de certains super groupes de Lie :

Soit $V = V_0 \oplus V_1$ un super espace vectoriel de dimension $n + \varepsilon m$, $n \geq 0$, $m \geq 0$, $m + n \neq 0$.

Supposons que m est pair. Soit B une forme bilinéaire symétrique paire non dégénérée sur V (i.e. $B(V_0, V_1) = 0$, la restriction de B à V_0 est symétrique, la restriction de B à V_1 est alternée). $OSP(n, m, P)$ est défini comme étant le sous groupe de $GL(n, m, P)$ préservant B. On note $OSP(n, m)$ le super groupe de Lie analytique complexe correspondant.

Si $n = m$, soit B une forme bilinéaire impaire symétrique non dégénérée sur V (la restriction de B à $V_0 \times V_0$ et à $V_1 \times V_1$ est nulle). Le groupe $\mathbf{P}(n, P)$ est l'ensemble des automorphismes de $GL(n, n, P)$ qui préservent B, pour toute algèbre proche P. On note $\mathbf{P}(n)$ le super groupe de Lie complexe correspondant.

Enfin, on définit $\mathbf{Q}(n, P)$ comme étant le sous groupe de $GL(n, n, P)$ constitué des matrices qui commutent à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. On notera $\mathbf{Q}(n)$ le super groupe de Lie analytique complexe ainsi obtenu.

Faisons maintenant un tableau décrivant les groupes d'automorphismes.

On note $\mathbb{P}G$ le quotient du super groupe G par son centre, en remarquant que si l'on définit, pour toute algèbre proche P, $\mathbb{P}G(P)$ comme le quotient de $G(P)$ par son centre, on obtient un super groupe de Lie.

Dans la colonne de droite, on indique le sous super groupe $\mathrm{Aut}^{ev}(A, i)$ de $\mathrm{Aut}(A, i)$ défini de la manière suivante : pour toute algèbre proche P, $\mathrm{Aut}^{ev}(A, i)(P)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(A, i)(P)$ formé des automorphismes intérieurs provenant d'éléments de $A(P)_0$. Il est d'indice 2 ou 1 dans $\mathrm{Aut}(A, i)$ suivant qu'il existe ou non des automorphismes intérieurs de (A, i) provenant d'éléments impairs de A.

Il y a des isomorphismes entres ces groupes : $\mathbb{P}GL(1, 2)$ est isomorphe à $\mathbb{P}OSP(2, 2)$ et pour tout $n \neq m$, $\mathbb{P}GL(n, m)$ est isomorphe à $\mathbb{P}GL(m, n)$ (ceci provient d'un isomorphisme entre les algèbres à involution correspondantes).

Algèbre	T	Involution	Groupe obtenu [indice dans $\mathrm{Aut}(A,i)$]
$M_{n+2\varepsilon m}(\mathbb{C})$ $(n,m)\in\mathbb{N}^2\backslash(0,0)$	str	$\varphi_a\circ T$ $a=\begin{pmatrix} I & 0 & 0\\ 0 & 0 & I\\ 0 & -I & 0\end{pmatrix}$	$\mathbb{P}OSP(n,2m)$ $=OSP(n,2m)/\{-1,1\}$ [1]
$M_{n+\varepsilon n}(\mathbb{C})$ $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$	str	$\varphi_a\circ T$ $a=\begin{pmatrix} 0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}$	$\mathbb{P}\mathbf{P}(n)$ $=\mathbf{P}(n)/\{-1,1\}$ [2]
$M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})\times M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})^{\mathrm{opp}}$ $(m,n)\in\mathbb{N}^2\backslash(0,0), m\geq n$		Inversion des facteurs	$\mathbb{P}GL(n,m)$ $=GL(n,m)/GL(1)$ [2 si $n=m$ 1 sinon]
$M_n(\mathbb{C}+\varepsilon\mathbb{C})\times M_n(\mathbb{C}+\varepsilon C)^{\mathrm{opp}}$ $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$		Inversion des facteurs	$\mathbb{P}\mathbf{Q}(n)$ $=\mathbf{Q}(n)/GL(1)$ [2]

Le groupe $\mathbb{P}OSP(n,2m)$ n'est pas connexe si n est pair. Notons $SOSP(n,2m)$ la composante neutre de $OSP(n,2m)$, le groupe $\mathbb{P}OSP(n,2m)$ est toujours connexe.

Le centre de $SOSP(n,2m)$ est $\{-I,I\}$, si n est pair.

Le centre de $\mathbf{P}(n)$ est $\{-I,I\}$.

Si $n=m$, $\mathbb{P}GL(n,n)\neq\mathbb{P}SL(n,n)$ donc l'algèbre de Lie du groupe obtenu n'est pas simple; l'algèbre de Lie de $\mathbf{Q}(n)$ n'est pas simple; lorsque l'on compare avec [5], on vérifie que les autres super algèbres de Lie obtenues sont simples à l'exception de celles provenant de $\mathbb{P}\mathbf{P}(1)$, $\mathbb{P}\mathbf{P}(2)$.

Remarque. — Dans [5], Kac n'utilise pas la même indexation : ce qu'il note $\mathfrak{p}(n)$ (resp. $\mathfrak{q}(n)$), nous le notons $\mathfrak{p}(n+1)$ (resp. $\mathfrak{q}(n+1)$).

On appellera "vraiment classiques" les super algèbres de Lie provenant des groupes que nous venons d'obtenir. Remarquons qu'on retrouve ainsi les "séries étranges" de Kac, $\mathfrak{p}(n)$ et $\mathfrak{q}(n)$, les séries $\mathfrak{sl}(n,m)$, $n\neq m$,

$\mathfrak{gl}(n,n)$ et $\mathfrak{osp}(n,2m)$, alors que les algèbres basiques classiques dites exceptionnelles, $D(2,1,\alpha)$, $\alpha \neq -2$, -1, 0, $-1/2$, 0, 1, $F(4)$, $G(2)$, $G(3)$, $E(6)$, $E(7)$, $E(8)$ n'apparaissent pas.

3. Formes réelles des groupes d'automorphismes des algèbres semi-simples complexes à involution.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $(G,\mathcal{O}_G)$ un super groupe de Lie réel connexe, notons $(Z,\mathcal{O}_Z)$ le centre de $(G,\mathcal{O}_G)$ et supposons que le groupe des points réels soit trivial. Soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Supposons que la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$ soit de l'un des types suivants : $\mathfrak{osp}(n,2m,\mathbb{C})$ avec $(n,m) \in \mathbb{N}^2\backslash\{(2,1),(8,0)\}, p\mathfrak{gl}(n,m,\mathbb{C})$, avec $(n,m) \in \mathbb{N}^2, \mathfrak{p}(n,\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}, n > 2, p\mathfrak{q}(n,\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}, n > 2$. Alors il existe une super algèbre réelle à involution dont la composante neutre du groupe des automorphismes soit $(G,\mathcal{O}_G)$.*

Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de l'un des types désignés et soit $(G_{\mathbb{C}},\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$ un super groupe de Lie complexe connexe de centre trivial d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Soit (A,i) une algèbre semi-simple à involution sur $\mathbb{C}$ dont $(G_{\mathbb{C}},\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$ soit le groupe des automorphismes (voir le tableau précédent, (A,i) est déterminée à isomorphisme près).

Notons $\mathrm{Aut}(G_{\mathbb{C}},\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$ l'ensemble des automorphismes du super groupe $(G_{\mathbb{C}},\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$, $\mathrm{Aut}(A,i)$ le groupe des automorphismes de l'algèbre à involution. Un élément de $\mathrm{Aut}(A,i)$ induit un élément de $\mathrm{Aut}(G_{\mathbb{C}},\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$. Réciproquement :

PROPOSITION 3.1. — *Tout élément de* $\mathrm{Aut}(G_{\mathbb{C}},\mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$ *provient d'un unique élément de* $\mathrm{Aut}(A,i)$.

Démonstration. — Il revient au même de regarder les groupes d'automorphismes des super algèbres de Lie. Utilisons la classification des automorphismes des super algèbres de Lie simples complexes faite par Serganova dans [9], th.1. Il convient de travailler cas par cas.

a) $G_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}SOSP(n,2m,\mathbb{C})$, $m \neq 0$, $(n,m) \neq (2,1)$, $n \neq 0$.

Si $n = 2k+1$, $k \geq 0$, tout automorphisme de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est intérieur, d'où le résultat.

Si $n = 2k,\ k > 0$, le groupe des automorphismes extérieurs est d'ordre 2. Or $\mathrm{Aut}(A, i)$ a dans ce cas deux composantes connexes, $G_{\mathbb{C}}$ et $gG_{\mathbb{C}}$ où

$$g = \begin{pmatrix} A & O \\ 0 & I_{2m} \end{pmatrix}, A \in O(2k), \det A = -1.$$

L'élément g induit un automorphisme non intérieur de $(G_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$ qui est d'ordre 2 modulo les automorphismes intérieurs.

b) $G_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}GL(n, m, \mathbb{C})$ où on exclut le cas $n = m = 2$.

Si $n = m$, on remarque qu'alors, $\mathbb{P}GL(n, n, \mathbb{C}) \neq \mathbb{P}SL(n, n, \mathbb{C})$: en effet, $SL(n, n, \mathbb{C})$ contient les homothéties, donc on a une suite exacte :

$$1 \to \mathbb{P}SL(n, n, \mathbb{C}) \to \mathbb{P}GL(n, n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^* \to 1$$

par le bérézinien.

Cette suite définit un homomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans le groupe des automorphismes extérieurs de $\mathbb{P}SL(n, n, \mathbb{C})$.

D'autre part, Serganova donne la suite exacte :

$$1 \to \mathbb{C}^* \to \mathrm{Ext}(\mathfrak{psl}(n, n, \mathbb{C})) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \to 1,$$

et sa description permet d'identifier la flèche de gauche de cette suite exacte et l'homomorphisme ci-dessus. Il reste la classe de $x \mapsto^{\mathrm{str}} x^{-1}$, qui correspond à l'automorphisme non intérieur de $M_{n+\varepsilon n}(\mathbb{C}) \times M_{n+\varepsilon n}(\mathbb{C})^{\mathrm{opp}}$: $(A, B) \mapsto ({}^{\mathrm{str}}B, {}^{\mathrm{str}}A)$, et la classe du changement de parité, qui provient de l'automorphisme intérieur défini par l'élément impair $\left(\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\right)$ de A.

Si $n \neq m$, alors $\mathbb{P}SL(n, n, \mathbb{C}) = \mathbb{P}GL(n, n, \mathbb{C})$ et le seul automorphisme extérieur est

$x \mapsto^{\mathrm{str}} x^{-1}$ qui est bien un automorphisme de $\mathrm{Aut}(A, i)$.

c) $G_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}\mathbf{P}(n, \mathbb{C}),\ n > 2$.

De même que pour $SL(n, n, \mathbb{C})$, les homothéties sont dans $S\mathbf{P}(n, n, \mathbb{C}) = \{x \in \mathbf{P}(n, \mathbb{C}) | \mathrm{Ber}(x) = 1\}$. Ce cas se traite de la même manière que $\mathbb{P}GL(n, n, \mathbb{C})$.

d) $G_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}\mathbf{Q}(n, \mathbb{C}),\ n > 2$.

Le groupe des automorphismes extérieurs de $\mathfrak{pq}(n, \mathbb{C})$ est le groupe cyclique d'ordre 4 engendré par $(a + \varepsilon b) \mapsto ({}^t a + \varepsilon i {}^t b)^{-1}$ où on considère $\mathbf{Q}(n, \mathbb{C})$ comme le groupe multiplicatif des éléments pairs inversibles de $M_n(\mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C})$ (cf p. 50). Il s'agit donc de ce que nous avions alors noté T composé avec le passage à l'inverse.

On a donc la proposition. □

Démonstration du théorème. — Soit $(A_{\mathbb{R}}, i_{\mathbb{R}})$ une forme réelle quelconque de (A, i) et soit α la conjugaison $\mathbb{C}$-linéaire correspondante. Soit β l'automorphisme antiholomorphe de $(G_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$ défini par α. D'autre part, soit φ l'involution antiholomorphe de $(G_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$ dont l'ensemble des points fixes est $(G, \mathcal{O}_G)$. Alors $\beta \circ \varphi$ est un automorphisme holomorphe de $(G_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$ qui provient par la proposition d'un automorphisme ψ de (A, i) ; alors $\alpha \circ \psi$ définit un automorphisme antiholomorphe de (A, i) qui correspond à $\beta^2 \circ \varphi$ dans $(G_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{G_{\mathbb{C}}})$. Il est donc involutif et par conséquent il définit une structure réelle unique sur (A, i). □

4. Formes réelles des groupes simples complexes classiques.

4.1. *Super groupe de Brauer de* $\mathbb{R}$ ([10]).

Ecrivons d'abord la liste des super corps de centre $\mathbb{R}$. Par ordre croissant de dimension, on trouve :

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R} + \varepsilon\mathbb{R}$, $\varepsilon^2 = 1$

$\mathbb{R} + \varepsilon\mathbb{R}$, $\varepsilon^2 = -1$

$\mathbb{H}$

$\mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C}$, $\varepsilon^2 = 1$ où l'automorphisme intérieur défini par ε est la conjugaison.

$\mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C}$, $\varepsilon^2 = -1$ où l'automorphisme intérieur défini par ε est la conjugaison.

$\mathbb{H} + \varepsilon\mathbb{H}$, $\varepsilon^2 = 1$, où ε commute avec tous les éléments de $\mathbb{H}$.

$\mathbb{H} + \varepsilon\mathbb{H}$, $\varepsilon^2 = -1$, où ε commute avec tous les éléments de $\mathbb{H}$.

Ce sont tous les éléments du super groupe de Brauer de $\mathbb{R}$.

Faisons le lien avec les algèbres de Clifford :

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme quadratique non dégénérée Q ; son algèbre de Clifford est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée centrale simple. Rappelons que le passage à l'algèbre de Clifford transforme somme directe orthogonale en produit tensoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, et qu'une forme quadratique de signature nulle a une algèbre de Clifford de classe nulle dans le super groupe de Brauer.

Remarque (8-périodicité). — L'algèbre de Clifford de $Q(x,y,z,t) = x^2+y^2+z^2+t^2$ est isomorphe à l'algèbre de Clifford de $-Q$. En effet, dans l'algèbre de Clifford $C(Q)$, les éléments yzt, xzt, xyt, xyz anticommutent deux à deux et sont de carré -1, ils sont de plus homogènes de degré 1. On utilise l'homomorphisme de $C(-Q)$ dans $C(Q)$ qui transforme x' en yzt, y' en xzt, z' en xyt, t' en xyz (propriété universelle des algèbres de Clifford) : c'est un isomorphisme car les algèbres de Clifford sont $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduées simples. Ceci montre que la classe d'une algèbre de Clifford dans le super groupe de Brauer a pour ordre un diviseur de 8.

Cherchons maintenant la classe de chaque algèbre de Clifford dans la liste des super corps.

$C(0)$ correspond à $\mathbb{R}$

$C(x^2)$ correspond à $\mathbb{R}+\varepsilon\mathbb{R}$, $\varepsilon^2=1$

$C(x^2+y^2)$ correspond à $\mathbb{C}+\varepsilon\mathbb{C}$, $\varepsilon^2=1$

(car $xyxy=-1$ dans $C(x^2+y^2)$)

$C(x^2+y^2+z^2)$ correspond à $\mathbb{H}+\varepsilon\mathbb{H}$, $\varepsilon^2=1$

(car $(xy)^2=(xz)^2=(yz)^2=-1$ et xy, xz, yz anticommutent.)

$C(x^2+y^2+z^2+t^2)$ est isomorphe à $M(1,1,\mathbb{H})$ qui correspond à $\mathbb{H}$.

On peut donc en déduire l'identification suivante du super groupe de Brauer de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ suivante :

$0 \to \mathbb{R}$

$1 \to \mathbb{R}+\varepsilon\mathbb{R}$, $\varepsilon^2=1$

$2 \to \mathbb{C}+\varepsilon\mathbb{C}$, $\varepsilon^2=1$

$3 \to \mathbb{H}+\varepsilon\mathbb{H}$, $\varepsilon^2=1$

$4 \to \mathbb{H}$

$5 \to \mathbb{H} + \varepsilon\mathbb{H}, \ \varepsilon^2 = -1$

$6 \to \mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C}, \ \varepsilon^2 = -1$

$7 \to \mathbb{R} + \varepsilon\mathbb{R}, \ \varepsilon^2 = -1.$

4.2. *Classification des involutions des super algèbres simples sur* $\mathbb{R}$.

a) Algèbres simples de centre $\mathbb{R}$.

Remarquons d'abord que si une algèbre centrale simple admet une involution, elle est isomorphe à son algèbre opposée, donc sa classe dans le super groupe de Brauer est d'ordre divisant 2. Elle est donc nécessairement de la forme $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{R})$ ou $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{H})$.

Comme dans le cas complexe, on introduit d'abord un antiautomorphisme T de l'algèbre tel que $T^2(x) = (-1)^{p(x)}x$ pour tout x homogène :

$M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{R}) : T(x) =^{\mathrm{str}} x$

$M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{H}) : T(x) =^{\mathrm{str}} \overline{x}$ où $\overline{x}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués quaternioniques de ceux de x.

Soit i une involution d'une telle algèbre A; on sait que i se déduit de T par composition avec un automorphisme intérieur pair ou impair :

$$i = \varphi_a \circ T$$

avec $\varphi_{aT(a)^{-1}}(x) = (-1)^{p(x)}x$.

Cas $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{R})$, a pair.

On a

$$a = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \ {}^{\mathrm{str}}a = \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ 0 & {}^tB \end{pmatrix}, \ aT(a)^{-1} = \begin{pmatrix} A^tA^{-1} & 0 \\ 0 & B^tB^{-1} \end{pmatrix},$$

la condition ci-dessus s'écrit donc, quitte à échanger n et m : A symétrique non dégénérée et B alternée non dégénérée, la classification se fait par la "signature" de A, $(p, n-p)$ avec $p \leq n/2$.

Cas $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{H})$, a pair.

Par le même calcul que précédemment, on obtient les conditions suivantes $a = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A est une matrice hermitienne et B est antihermitienne, toutes deux non dégénérées, la classification se fait par la signature de A, voir [1] §7.

Cas $M_{n+\varepsilon n}(\mathbb{R})$, a impair.

On a

$$a = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}, \ {}^{\mathrm{str}}a^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -{}^tA^{-1} \\ {}^tB^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \ aT(a)^{-1} = \begin{pmatrix} A^tB^{-1} & 0 \\ 0 & -B^tA^{-1} \end{pmatrix},$$

la condition ci-dessus s'écrit donc $B =^t A$ et la classe de a est celle de $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

Cas $M_{n+\varepsilon n}(\mathbb{H})$, a impair.

Par le même calcul que précédemment, on obtient que a est équivalent à $\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

b) Involutions anti-$\mathbb{C}$-linéaires des algèbres simples de centre $\mathbb{C}$.

Cas $M_{n+\varepsilon m}(\mathbb{C})$.

L'involution cherchée est la composée de l'antiautomorphisme anti-$\mathbb{C}$-linéaire

$$x \mapsto^{\mathrm{str}} \overline{x}$$

avec un automorphisme intérieur φ_a.

En écrivant que le carré de la composée est l'identité, on trouve comme précédemment : $a = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec $A =^t \overline{A}$, $B = -{}^t\overline{B}$, A et B non dégénérées; la classification se fait par la signature des matrices hermitiennes A et iB.

Par ailleurs, si on cherche pour a impair, on obtient $a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ ou $a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, qui donnent lieu à des algèbres à involution isomorphes comme dans le cas $\mathbb{P}\mathbf{P}(n, \mathbb{C})$.

Cas $M_n(\mathbb{C} + \varepsilon\mathbb{C})$.

Une involution est la composée de l'antiautomorphisme anti-$\mathbb{C}$-linéaire

$$A + \varepsilon B \mapsto^t \overline{A} + \sqrt{-1}\varepsilon^t\overline{B}$$

et d'un automorphisme intérieur nécéssairement pair φ_a.

En écrivant que le carré est l'identité, on obtient la condition $a =^t \overline{a}$. La classification se fait par la signature.

c) Involutions $\mathbb{C}$-linéaires des algèbres simples complexes.

Ce cas a déja été traité dans 1.1.

4.3. Groupes d'automorphismes des algèbres semi-simples réelles à involution.

Comme dans le cas complexe, la donnée d'une super $\mathbb{R}$-algèbre semi-simple à involution détermine un super groupe de Lie analytique réel : le foncteur correspondant associe à toute algèbre proche P la composante neutre du groupe des automorphismes de l'algèbre à involution tensorisée par P. On applique comme dans le cas complexe le théorème de Cartier pour montrer que ce foncteur est représentable.

Dans le cas d'une algèbre non simple, l'involution considérée est l'échange des deux facteurs A et A^{opp}, et le groupe est la composante neutre du groupe des automorphismes de A. La classification revient donc à celle des super algèbres simples sur $\mathbb{R}$.

Il reste à faire une liste des résultats.

Nous avons défini p. 53 un groupe associé à l'algèbre à involution (A, i), que nous avons noté $\mathrm{Aut}^{ev}(A, i)$.

I. Nous avons fait p. 54 un tableau des groupes complexes obtenus comme groupes d'automorphismes d'algèbres semi-simples complexes à involution, provenant d'automorphismes intérieurs par des éléments pairs. Nous obtenons donc ces groupes complexes considérés comme réels.

II. Nous avons fait la liste en 3.1 des super corps de centre $\mathbb{R}$. Soit A une algèbre de matrices sur un tel corps, on considère l'involution de $A \times A^{\mathrm{opp}}$ consistant à échanger les facteurs, le groupe associé est le quotient du groupe multiplicatif $A^\times$ de A par son centre.

III. En dehors de ces groupes, nous avons trouvé les groupes du tableau ci-dessous : (les notations sont celles de [5]).

Algèbre	Involution	Groupe obtenu	Forme complexe
$M_{n+\epsilon m}(\mathbb{R})$	$\varphi_a \circ^{\mathrm{str}}$ $a = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ A hermitienne de signature 2p-n, B alternée	$\mathbb{P}SOSP((p, n-p), m, \mathbb{R})$	$\mathbb{P}SOSP(n, m, \mathbb{C})$
$M_{n+\epsilon m}(\mathbb{H})$	$\varphi_a \circ^{\mathrm{str}}$ $a = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ A hermitienne de signature $2p-n$, B antihermitienne	$\mathbb{P}SOSP((p, n-p), m, \mathbb{H})$	$\mathbb{P}SOSP(2n, 2m, \mathbb{C})$
$M_{n+\epsilon n}(\mathbb{R})$	$\varphi_a \circ^{\mathrm{str}}$ $a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbb{P}\mathbf{P}(n, \mathbb{R})$	$\mathbb{P}\mathbf{P}(n, \mathbb{C})$
$M_{n+\epsilon n}(\mathbb{H})$	$\varphi_a \circ^{\mathrm{str}}$ $a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbb{P}\mathbf{P}(n, \mathbb{H})$	$\mathbb{P}\mathbf{P}(2n, \mathbb{C})$
$M_{n+\epsilon m}(\mathbb{C})$	$\varphi_a \circ^{\mathrm{str}^-}$ $a = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ A hermitienne de signature 2p-n, B antihermitienne, iB de signature $2q-m$	$\mathbb{P}SU((p, n-p), (q, m-q))$	$\mathbb{P}GL(n, m, \mathbb{C})$
$M_{n+\epsilon n}(\mathbb{C})$	$\varphi_a \circ^{\mathrm{str}^-}$ $a = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$	$\mathbb{P}OP(n)$ $(*)$	$\mathbb{P}GL(n, n, \mathbb{C})$
$M_n(\mathbb{C} + \epsilon\mathbb{C})$	$A + \varepsilon B \mapsto^t \overline{a} + i\varepsilon^t\overline{b}$ composée avec φ_a où $a \in M_n(\mathbb{C})$, a hermitienne de signature $2p-n$	$\mathbb{P}\mathbf{Q}((p, n-p),\ \mathbb{R})$	$\mathbb{P}\mathbf{Q}(n, \mathbb{C})$

(*) La notation est adaptée de celle de [9], cette algèbre n'apparaissant pas dans [5].

On retrouve donc ainsi la liste des formes réelles donnée dans [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Algèbre chap. 9, Hermann, Paris, 1959.

[2] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, chap.1, Hermann, Paris, 1960.

[3] P. CARTIER, Groupes algébriques et groupes formels, Colloque sur la théorie des groupes algébriques, CBRM, Librairie universitaire, Louvain (1962), 87-111.

[4] M. DEMAZURE, P. GABRIEL, Groupes algébriques I, Masson, Paris, 1970.

[5] V.G. KAC, Lie superalgebras, Advances in Math., 26 (1977), 8-96.

[6] M. KAROUBI, Algèbres de Clifford et K-théorie, Annales E.N.S., 4eme série, tome 1 (1968), 161-270.

[7] M.A. KNUS, Quadratic and hermitian forms over rings, Grundlehren der Math. Wissenschaften, 294, Springer (1991).

[8] Y.I. MANIN, Gauge field theory and complex geometry, Grundlehren der Math. Wissenschaften, 289, Springer (1988).

[9] V.V. SERGANOVA, Automorphisms of simple Lie superalgebras, Math. USSR Izvestiya, 24 (1985), 539-551.

[10] C.T.C. WALL, Graded Brauer groups, J. reine angew. Math., 213 (1964), 187-199.

[11] A. WEIL, Théorie des points proches sur les variétés différentiables, Colloque de géométrie différentielle, CNRS (1953), pp. 111-117.

[12] A. WEIL, Algebras with involutions and the classical groups, J. Ind. Math. Soc., 24 (1960), 589-623.

Manuscrit reçu le 8 mars 1993.

Caroline GRUSON,
Université de Paris VII
Mathématiques – URA 748
Couloir 45-55, 5e étage
2 place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05.