Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 5 (1993), 1535-1543

MINIMAUX DES FEUILLETAGES ALGÉBRIQUES DE $\mathbb{CP}(n)$

par Dominique CERVEAU

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension un sur l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}(n)$. On note $\mathrm{Sing}\,\mathcal{F}$ l'ensemble singulier de $\mathcal{F}$; c'est un ensemble algébrique non vide de codimension supérieure ou égale à deux. Une variante du théorème de Chow affirme que $\mathcal{F}$ est donné par une équation de Pfaff $\omega = 0$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x)dx_i$$

où les a_i sont des polynômes homogènes de même degré ν satisfaisant

(i) $\omega \wedge d\omega = 0$ (condition d'intégrabilité)

(ii) $\sum x_i a_i(x) = 0$ (condition d'Euler)

(iii) $\mathrm{cod}(S(\omega) = \{x, a_i((x)) = 0\}) \geq 2$.

Si $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{CP}(n)$ désigne la projection canonique, alors $\mathrm{Sing}\,\mathcal{F} = \pi(S(\omega) - \{0\})$.

DÉFINITION. — *Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{CP}(n) - \mathrm{Sing}\,\mathcal{F}$ est un ensemble minimal s'il est compact dans $\mathbb{CP}(n) - \mathrm{Sing}\,\mathcal{F}$, invariant par $\mathcal{F}$ – i.e. si $m \in M$ la feuille $\mathcal{L}_m$ de $\mathcal{F}$ par m est contenue dans M – et minimal au sens de l'inclusion.*

La question de l'existence de minimaux sur $\mathbb{CP}(n)$ est une question actuellement ouverte. C'est elle qui motive le présent travail.

Mots-clés : Feuilletages algébriques – Holonomie – Ensembles minimaux.
Classification A.M.S. : 32L30 – 62S65 – 34A20.

1. Variétés de Lévi.

Soit $M^{2n-1} \subset \mathbb{CP}(n)$ une sous-variété lisse réelle de codimension réelle un. En chaque point $m \in M^{2n-1}$ l'espace tangent $T_mM^{2n-1} \subset T_m\mathbb{CP}(n) \cong \mathbb{C}^n$ contient un unique hyperplan complexe $E_m \cong \mathbb{C}^{n-1}$; si le champ de plan $m \mapsto E_m$ est intégrable on dit que M^{2n-1} est une hypersurface de Lévi.

THÉORÈME [L]. — *Il n'existe pas d'hypersurfaces de Lévi de l'espace $\mathbb{CP}(n)$ pour $n \geq 3$.*

Pour $n = 2$ on ne sait pas si telles hypersurfaces existent.

2. Propriétés de l'ensemble minimal.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{CP}(n)$ et M un minimal de $\mathcal{F}$. Les propriétés suivantes sont établies ou se déduisent de [CLS] et [BLM].

PROPOSITION.

1) *L'ensemble M est d'intérieur vide;*

2) *M est unique, i.e. $\mathcal{F}$ possède au plus un seul minimal;*

3) *Soit $H \subset \mathbb{CP}(n)$ une hypersurface algébrique de $\mathbb{CP}(n)$ alors $H \cap M \neq \emptyset$.*

Remarque. — Soient $m \in M$ et $\mathcal{L}_m$ la feuille de $\mathcal{F}$ par m; alors $M = \overline{\mathcal{L}}_m$.

THÉORÈME. — *Il existe $m \in M$ tel que la feuille $\mathcal{L}_m$ ait de l'holonomie hyperbolique.*

Le théorème indique que l'image du morphisme d'holonomie

$$\mathrm{Hol} : \pi_1(\mathcal{L}_m, m) \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$$

contient un élément $f : \mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}, 0$ tel que $|f'(0)| < 1$.

Une feuille $\mathcal{L}_m$ satisfaisant la conclusion du théorème sera dite porteuse d'hyperbolicité.

3. Résultats.

On se propose d'établir le :

THÉORÈME. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un de l'espace projectif $\mathbb{CP}(n)$. Si $\mathcal{F}$ possède un ensemble minimal M et si $\mathcal{L}_m$ est une feuille porteuse d'hyperbolicité, $\mathcal{L}_m \subset M$, on a l'alternative suivante : ou bien*

i) *M est une hypersurface de Lévi*

ou bien

ii) *l'image du morphisme* $\mathrm{Hol}\colon \pi_1(\mathcal{L}_m, m) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ *est un groupe abélien linéarisable.*

Évidemment si la dimension n est supérieure ou égale à 3 seule subsiste la partie ii) : les porteurs d'hyperbolicité ont leur holonomie abélienne linéarisable. Nous verrons de plus que dans le cas i) M est localement défini par l'annulation de la partie réelle d'une fonction holomorphe.

4. Secteurs de Nakaï.

La description des groupes non résolubles de difféomorphismes faite par Isao Nakaï dans [N] est l'argument essentiel de la démonstration du théorème.

Soit $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$; on appelle séparatrice de G un germe de courbe analytique réelle $\gamma \subset \mathbb{C}, 0$ invariant par G, *i.e.* invariant par tous les éléments de G. Si G a un nombre fini de séparatrices $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ on appelle secteurs de Nakaï de G les composantes connexes du complément de $\gamma = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$ dans $\mathbb{C}, 0$.

Soit F un germe d'ensemble à l'origine de $\mathbb{C}$. On dit que G agit densément sur F s'il existe un sous-groupe $G_F \subset G$, G_F engendré par un nombre fini d'éléments $g_1, \ldots, g_N$ tels que :

1) $G_F(F) \subset F$.

2) Il existe des représentants $\widetilde{F}$, $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_N$, $\tilde{g}_i$ définis au voisinage de $\widetilde{F}$ tels que pour tout point $x \in \widetilde{F}$ l'orbite de x suivant le pseudo-groupe $\widetilde{G}_F = \langle \tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_N \rangle$ soit dense dans $\widetilde{F}$.

Le résultat fondamental suivant est dû à Nakaï.

THÉORÈME [N]. — *Soit $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ un sous-groupe non résoluble. Alors ou bien G agit densément sur $\mathbb{C},0$ ou bien G a un nombre fini de séparatrices $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$. Si $\gamma=\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_n$ alors γ est holomorphiquement isomorphe à $\{\mathrm{Re}\, z^n=0\}$; de plus G agit densément sur chaque secteur de Nakaï et sur chaque composante connexe des séparatrices.*

5. Sous-groupes résolubles de $\mathrm{Diff}\,\mathbb{C},0$.

On note $\mathcal{H}_1$ le groupe des transformations homographiques fixant l'origine de $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{H}_1=\left\{z\longrightarrow\frac{az}{1+bz},\quad a\in\mathbb{C}^*,\ b\in\mathbb{C}\right\}$$

et $\mathcal{H}_p$ son revêtement ramifié par $z\mapsto z^p$:

$$\mathcal{H}_p=\left\{z\longrightarrow\frac{az}{\sqrt[p]{1+bz^p}},\quad a\in\mathbb{C}^*,\ b\in\mathbb{C},\ \sqrt[p]{1}=1\right\}.$$

THÉORÈME [CM] [N]. — *Soit G un sous-groupe résoluble non abélien de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$; alors G est formellement conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{H}_p$, pour un certain p.*

Notons $E_{-1,1}$ le sous-groupe de $\mathcal{H}_1$ engendré par $z\mapsto -z$ et $z\mapsto\dfrac{z}{1-z}$, puis $E_{\omega,p}$ le sous-groupe de $\mathcal{H}_p$ engendré par $z\mapsto\omega\cdot z$ et $z\mapsto\dfrac{az}{\sqrt[p]{1+bz^p}}$ où ω est une racine $p^{\text{ième}}$ de -1.

Un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ est dit exceptionnel s'il est formellement conjugué à l'un des groupes $E_{\omega,p}$.

THÉORÈME [CM]. — *Soient $G_i\subset\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$, $i=1,2$ deux sous-groupes formellement conjugués par un difféomorphisme formel $\hat{h}$. Si G_1 est non abélien et non exceptionnel alors $\hat{h}$ converge.*

On en déduit aisément le :

COROLLAIRE. — *Soit $G\subset\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ un sous-groupe résoluble non abélien; si G contient un élément hyperbolique alors G est holomorphiquement conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{H}_p$ pour un certain p.*

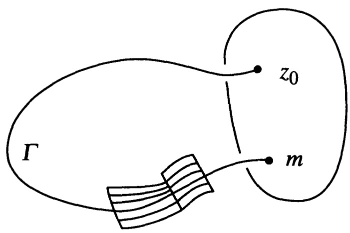
6. Démonstration du théorème.

Soient $\mathcal{L}_m \subset M$ une feuille (porteuse d'hyperbolicité ou non) et D un disque centré en m transverse à $\mathcal{F}$ au voisinage de m. On note $L_m = \mathcal{L}_m \cap D$.

L'ensemble $L_m - \{m\}$ s'accumule en m et est autosimilaire au sens suivant : si $z_0 \in L_m - \{m\}$ il existe un difféomorphisme $\varphi_{z_0} : V(m) \to V(z_0)$ d'un voisinage de m dans D dans un voisinage de z_0 dans D tel que

$$\varphi_{z_0}(L_m \cap V(m)) = L_m \cap V(z_0).$$

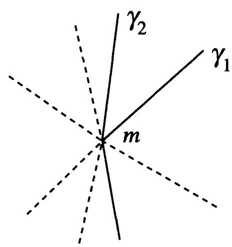
On constate ce point en traçant un chemin Γ joignant m à z_0 dans $\mathcal{L}_m$ et en écrivant le long de Γ la structure produit induite par $\mathcal{F}$.



De plus L_m est dense dans $M \cap D$ et $M \cap D$ est autosimilaire aux points de L_m.

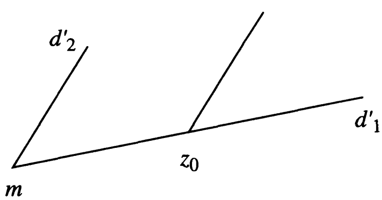
PROPOSITION. — *Si l'image de* Hol : $\pi_1(\mathcal{L}_m, m) \mapsto \mathrm{Diff}(D, m)$ *est non résoluble alors M est une hypersurface de Lévi.*

Preuve. — On note G l'image de Hol. Par construction des difféomorphismes d'holonomie le germe $M \cap D, m$ est invariant par l'action de G. En résulte que G ne peut agir densément sur D, m, sinon M serait d'intérieur non vide. Par suite, G possède un nombre fini de séparatrices $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ et de secteurs de Nakaï $S_1, \ldots, S_{2n}$. Comme G agit densément sur les secteurs de Nakaï les intersections $S_i \cap (M \cap D, m)$ sont vides, sinon encore une fois M serait d'intérieur non vide. Puisque G agit densément sur chaque composante connexe de $\gamma - \{0\}$, $\gamma = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$, nécessairement $M \cap D, m$ est constitué d'un certain nombre d'adhérences de composantes connexes. Quitte à faire agir un difféomorphisme de D, m on peut suivant Nakaï supposer que $M \cap D, m$ est constitué d'un certain nombre de demi-droites.



AFFIRMATION. — *$M \cap D, m$ est une droite (un germe de).*

Soit d'_1 une demi-droite contenue dans M, m et z_0 un point de $L_m \cap d'_1$, z_0 voisin de m. Supposons $D \cap M, m = d'_{1,m}$; d'après l'autosimilarité ce cas ne peut se présenter ; en effet, $D \cap M, z_0$ contient un germe de droite. Par suite, $M \cap D, m$ contient d'autres demi-droites. Soit d'_2 une telle demi-droite. Montrons que d'_1 et d'_2 engendrent la même droite d. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi ; d'après l'autosimilarité $M, z_0 \cap D$ contiendra une courbe isomorphe à deux demi-droites (fig.) non alignées. L'une de ces demi-droites, pour z_0 suffisamment petit, entre dans un secteur de Nakaï.



Ceci impliquant encore une fois que M est d'intérieur non vide.

Finalement $D \cap M, m$ est défini par les zéros de la partie réelle d'une submersion définie en m ; par suite au voisinage de m il existe un polydisque U_m et une fonction holomorphe $f_m \in \mathcal{O}(U_m)$, f_m submersion, telle que :

$$U_m \cap M, m = \{\operatorname{Re} f_m = 0\}.$$

La densité de $\mathcal{L}_m$ dans M et la compacité de M permettent de sélectionner un recouvrement (U_i) de $\mathbb{CP}(n)$ et des submersions holomorphes $f_i : U_i \to \mathbb{C}$ tel que $M \cap U_i = \{\operatorname{Re} f_i\}$.

Ceci implique que M est une variété de Lévi. □

Remarque. — La proposition ci-dessus n'utilise pas l'hyperbolicité ; elle est valable pour toute feuille de M.

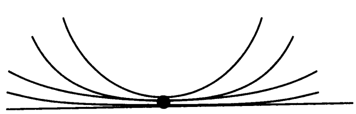
PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{L}_m \subset M$ une feuille porteuse d'hyperbolicité; si l'image de Hol : $\Pi_1(\mathcal{L}_m, m) \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ est résoluble non abélienne alors M est une hypersurface de Lévi.*

Preuve. — Soit D un disque transverse à $\mathcal{F}$ en m sur lequel on représente l'holonomie; soit $G \subset \mathrm{Diff}(D, m)$ l'image de Hol. D'après le corollaire du §5, on peut supposer que $G \subset \mathcal{H}_p$, et nous supposerons pour plus de commodité que $p = 1$, les raisonnements n'étant pas altérés par une ramification. Puisque $\mathcal{L}_m$ porte de l'hyperbolicité et est non abélienne on peut supposer que G contient les transformations $z \mapsto \lambda z$, $|\lambda| < 1$ et $z \mapsto \dfrac{z}{1-z}$; on note G_1 le groupe engendré par ces deux éléments.

LEMME 1. — *Si λ est réel, le groupe G_1 agit densément sur les demi-droites $\mathbb{R}^+_{,0}$ et $\mathbb{R}^-_{,0}$.*

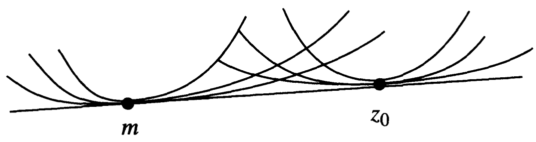
Preuve. — Comme $|\lambda| < 1$ le groupe G_1 contient de petits éléments paraboliques; le sous-groupe G_1' de G_1 constitué des éléments paraboliques agit alors densément sur $\mathbb{R}^{\pm}_{,0}$. □

Remarquons que l'adhérence du groupe G_1' est précisément le groupe $\left\{\dfrac{z}{1-tz},\ t \in \mathbb{R}\right\}$. Ceci implique que l'adhérence de G_1 est le groupe $\left\{\dfrac{\lambda^n z}{1-tz},\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. En résulte que tout germe d'ensemble fermé $F \subset \mathbb{C}, 0$ invariant par G_1 est ou bien un demi-axe $\mathbb{R}^+_{,0}$ ou $\mathbb{R}^-_{,0}$, ou bien contient une infinité d'arcs de cercles tangents en 0 à $\mathbb{R}$ (fig.) contenant $\mathbb{R}^{\pm}_{,0}$ dans leur adhérence. De plus, F contient $\mathbb{R}^+_{,0}$ ou $\mathbb{R}^-_{,0}$.



LEMME 2. — *Si λ est réel, M est une hypersurface de Lévi.*

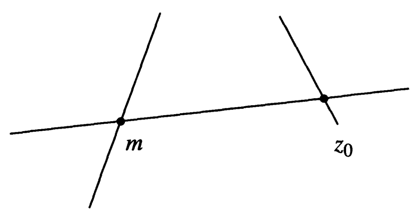
Preuve. — On adopte les notations du cas non résoluble. D'après la remarque suivant le lemme 1, on peut supposer que $\mathbb{R}^+_{,0}$ est contenu dans $M \cap D, m$ et par un argument déjà employé $M \cap D, m$ contient toute la droite réelle $\simeq \mathbb{R}^+_{,0}$ passant par m. Si $M \cap D, m$ coïncide avec cette droite on conclut que M est de Lévi. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; alors en m, $M \cap D, m$ contient une infinité d'arcs de cercles. Mais si $z_0 \in \mathbb{R}^+_{,0}$ est un point voisin de $0 \simeq m$, $z_0 \in \mathcal{L}_m$ alors par autosimilarité $M \cap D, z_0$ contient un arc de courbe Δ distinct de $\mathbb{R}^+_{,0}$ (fig.) ; cet arc sera génériquement transverse aux arcs précédents.



L'adhérence de l'orbite de Δ sous l'action de G_1 contiendra alors un ouvert et M ne sera pas d'intérieur vide (ce passage est en fait un peu délicat car on ne doit pas travailler avec G_1 agissant sur la sphère de Riemann entière, mais les objets étant purement locaux on doit faire les calculs d'orbites en restant dans un disque fixe).

LEMME 3. — *λ est réel.*

Preuve. — Si λ est non réel mais d'argument 2Π-rationnel, alors λ^n pour un certain n est réel. Par un argument similaire au lemme 2, on constate que $M \cap D, m$ contient au moins deux droites.



Mais en un point z_0 voisin de m, on retrouvera une telle configuration et de nouveau on montrera que M est d'intérieur non vide. Si λ est d'argument 2Π-irrationnel alors tout fermé F invariant par G_1 en 0 est $\mathbb{C}, 0$ tout entier, d'où le lemme.

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. — Notre résultat s'applique en fait à tout feuilletage holomorphe d'une variété holomorphe possédant une feuille contenue dans un minimal et porteuse d'hyperbolicité.

BIBLIOGRAPHIE

[BLM] Ch. BONATTI, LANGEVIN, R. MOUSSU, Feuilletages de $\mathbb{CP}(n)$: de l'holonomie hyperbolique pour les minimaux exceptionnels, Publ. Math. I.H.E.S., n° 75 (1992), 123–134.

[CLS] C. CAMACHO, A. LINSNETO, P. SAD, Minimal set of foliations on complex projective spaces, Publ. Math. I.H.E.S., 68 (1988), 187–203.

[CM] D. CERVEAU, R. MOUSSU, Groupes d'automorphismes de $\mathbb{C}, 0$ et équations différentielles $ydy + \cdots = 0$, Bull. S.M.F., 116 (1988), 459–488.

[L] A. LINSNETO, Préprint, Impa Rio (1993).

[N] I. NAKAÏ, Separatix for conformal transformation groups of $\mathbb{C}, 0$, Preprint Hokkaïdo (1992).

Dominique CERVEAU,
Université de Rennes I
IRMAR
Campus de Beaulieu
F–35042 Rennes Cedex.