Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 3 (1993), 743-750

UN CRITÈRE TOPOLOGIQUE D'EXISTENCE DE PÔLES POUR LE PROLONGEMENT MÉROMORPHE DE $\int_A f^\lambda \square$

par D. BARLET & A. MARDHY

Soit $\tilde{f} : (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbf{R}, 0)$ un germe de fonction analytique réelle non identiquement nul. Soit U un ouvert semi-analytique contenant 0 dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et soit $f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ un représentant de $\tilde{f}$. Soit $A_1 \cdots A_\kappa$ les composantes connexes de $U - f^{-1}(0)$ et $a_1 \cdots a_\kappa$ des nombres complexes. Pour $\varphi \in C_c^\infty(U)$ et $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, définissons $\int_A f^\lambda \varphi$ où $A = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha A_\alpha \in H^0(U - f^{-1}(0), \mathbf{C})$ de la façon suivante :

$$\int_A f^\lambda \varphi = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha e^{-i\pi\lambda\varepsilon_\alpha} \int_{A_\alpha} |f(x)|^\lambda \varphi(x)\, dx$$

où

$$\varepsilon_\alpha = 0 \ \text{ si } \ A_\alpha \subset \{f > 0\}$$

et

$$\varepsilon_\alpha = 1 \ \text{ si } \ A_\alpha \subset \{f < 0\}.$$

On a bien sûr un prolongement méromorphe de la distribution $\int_A f^\lambda \square$ au plan complexe tout entier avec un nombre fini de séries de pôles rationnels de la forme $-u - m$ où $u \in]0, 1] \cap \mathbf{Q}$ et $m \in \mathbf{N}$.

Mots-clés : Cycles évanescents – Fibre de Milnor.
Classification A.M.S. : 32S55.

Notre propos est de donner une condition suffisante simple de nature topologique assurant l'existence d'un pôle en $-u-m$ pour $m \in \mathbf{N}$, $m \gg 1$, pour $u \in]0,1[\cap \mathbf{Q}$ donné, dans le prolongement analytique de la distribution $\displaystyle\int_A f^\lambda \square$.

Ceci est destiné à compléter le résultat de [B1]. L'exemple le plus simple où le critère de [B1] se montre insuffisant est celui de la forme quadratique de $\mathbf{R}^3$ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ pour laquelle on a trois composantes connexes.

On vérifiera à la fin de cet article que cet exemple est complètement décrit par notre résultat.

De manière plus générale, le critère de [B1] est inopérant pour les singularités isolées (dans le complexe) dès que la fibre de Milnor réelle est non compacte. Nos hypothèses seront toujours vérifiées quand la complexifiée est à singularité isolée.

Pour pouvoir énoncer notre résultat, il nous faut d'abord introduire la situation topologique qui sous-tend notre hypothèse.

Soit $f_{\mathbf{C}} : X \longrightarrow D$ un représentant de Milnor du complexifié de $\widetilde{f}$ (voir [B3]) et notons par $F_{\mathbf{C}}$ la fibre de Milnor de $f_{\mathbf{C}}$.

Si $s_0 \in D^* \cap \mathbf{R}^+$ est choisi comme point base de D^*, $F_{\mathbf{C}} = f_{\mathbf{C}}^{-1}(s_0)$. Soit $U = X_{\mathbf{R}} = X \cap \mathbf{R}^{n+1}$ et $f = f_{\mathbf{C}}/X_{\mathbf{R}}$. Notons par $F_{\mathbf{R}}$ la fibre de Milnor (réelle) de f, c'est-à-dire, par définition

$$F_{\mathbf{R}} = f^{-1}(s_0) \coprod f^{-1}(-s_0).$$

Définissons alors $\theta : F_{\mathbf{R}} \longrightarrow F_{\mathbf{C}}$ de la façon suivante :

$$\theta/f^{-1}(s_0) : f^{-1}(s_0) \longrightarrow f_{\mathbf{C}}^{-1}(s_0) = F_{\mathbf{C}}$$

est simplement l'inclusion donnée par complexification :

$$\theta/f^{-1}(-s_0) : f^{-1}(-s_0) \longrightarrow f_{\mathbf{C}}^{-1}(s_0) = F_{\mathbf{C}}$$

est la composée de la complexification

$$f^{-1}(-s_0) \longrightarrow f_{\mathbf{C}}^{-1}(-s_0)$$

et du difféomorphisme

$$\mathcal{T} : f_{\mathbf{C}}^{-1}(-s_0) \longrightarrow f_{\mathbf{C}}^{-1}(s_0)$$

donné par un demi-tour *dans le sens direct* en utilisant le fait que $f_{\mathbf{C}} : X_{\mathbf{C}} - f_{\mathbf{C}}^{-1}(0) \longrightarrow D^*$ est une fibration C^∞ localement triviale (Milnor

[M]) et la monodromie correspondante. Donc θ est un plongement fermé sur $f^{-1}(s_0)$ et sur $f^{-1}(-s_0)$; θ est donc une immersion propre.

L'application d'intersection

$$I : H_n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \xrightarrow{\cap F_{\mathbf{R}}} H_0(F_{\mathbf{R}}, \mathbf{C})$$

qui consiste à prendre l'image réciproque d'un n-cycle compact de $F_{\mathbf{C}}$ par θ correspond, via l'identification $H_n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}) \simeq H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ donnée par la dualité de Poincaré, et le calcul de De Rham, à la forme linéaire qui a une n-forme $C^\infty \varphi$ à support compact d-fermée sur $F_{\mathbf{C}}$ associe pour chaque composante connexe $\widetilde{A}_j$ de $F_{\mathbf{R}}$ (*) le nombre complexe $\int_{\theta(\widetilde{A}_j)} \varphi$.

Considérons maintenant l'application transposée

$$\delta : H^0(F_{\mathbf{R}}, \mathbf{C}) \longrightarrow H^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C}).$$

À chaque composante connexe $\widetilde{A}_j$ de $F_{\mathbf{R}}$ elle associe sa classe fondamentale (comme cycle fermé de degré n) via θ_*.

Considérons maintenant la monodromie T_c agissant sur $H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ et notons par $H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$ le sous-espace spectral de T_c pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ ($u \in]0,1[\cap \mathbf{Q}$ est fixé) et par $N_c = \frac{1}{2i\pi}\log(e^{2i\pi u}T_c)$ le logarithme nilpotent (à $2i\pi$ près) de la partie unipotente de $T_c / H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$.

Nous montrons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit $u \in]0,1[\cap \mathbf{Q}$ et supposons que $f_{\mathbf{C}}$ ait l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ comme point singulier isolé relativement à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ (**).*

Soit $e \in H_c^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$ et soit $A = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha A_\alpha \in H^0(X_{\mathbf{R}} - f^{-1}(0), \mathbf{C})$.

Posons $\widetilde{A} = A \cap F_{\mathbf{R}} = \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha (A_\alpha \cap F_{\mathbf{R}}) \in H^0(F_{\mathbf{R}}, \mathbf{C})$.

Si on a $\langle \delta\widetilde{A}, N_c^h(e)\rangle \neq 0$ avec $h \in \mathbf{N}$, alors pour $m \in \mathbf{N}$ assez grand, le prolongement méromorphe de la distribution $\int_A f^\lambda \square$ admet un pôle d'ordre $\geq h+1$ en $-m-u$. $\square$

(*) $X_{\mathbf{R}} - f^{-1}(0) \longrightarrow D^* \cap \mathbf{R}$ est une fibration localement triviale (C^∞) ; les composantes connexes de $F_{\mathbf{R}}$ sont en bijection avec celles de $X_{\mathbf{R}} - f^{-1}(0)$.
(**) Voir [B2], définition 1, p. 407.

Démonstration du théorème. — Le premier ingrédient de la démonstration consiste à présenter "analytiquement" la classe de cohomologie $e \in H^n_c(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$ dont l'hypothèse affirme l'existence.

Fixons $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $N^k_c e = 0$ et $N^{k-1}_c e \neq 0$; on aura donc $k \geq h+1$ et si E désigne le sous-espace vectoriel N_c stable de $H^n_c(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$ engendré par e, on aura $\dim_{\mathbf{C}} E = k$.

Utilisons maintenant la construction de [B2], pp. 447–448 (dans la preuve de la proposition 3) ; c'est possible car les hypothèses standards sont moins restrictives que notre hypothèse de singularité isolée relativement à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$.

On peut donc trouver des n-formes semi-méromorphes à pôles dans $\{f = 0\}$ $w_1 \cdots w_k$ sur X, à supports f-propres et vérifiant les conditions suivantes :

i) $dw_j = u\dfrac{df}{f} \wedge w_j + \dfrac{df}{f} \wedge w_{j-1}$ sur $\{f \neq 0\}$, $\forall j \in [1, k]$ avec la convention $w_0 = 0$.

ii) Les images des $w_j/F_{\mathbf{C}}$ dans $H^n_c(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ forment une base de E.

iii) $1 = \langle \delta\widetilde{A}, w_{k-h}/F_{\mathbf{C}} \rangle = \sum_{\alpha=1}^{K} a_\alpha \int_{\theta(\widetilde{A}_\alpha)} w_{k-h}$.

En effet la singularité isolée relativement à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ (avec $0 < u < 1$) assure que l'application canonique

$$\mathrm{can} : H^n_c(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}} \longrightarrow H^n(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})_{e^{-2i\pi u}}$$

est un isomorphisme ([B2], théorème 3). Donc pour tester la condition ii), il suffit de la tester sur les images par can, ce qui est immédiat d'après la construction de $w_1 \cdots w_k$.

Montrons que iii) se déduit aisément de ii) si l'on suppose h maximal vérifiant $\langle \delta(\widetilde{A}), N^h_c(e) \rangle \neq 0$.

En effet notre hypothèse nous dit que la forme linéaire définie par $\delta(\widetilde{A})$ sur E n'est pas nulle sur $N^h_c(E)$.

Comme $w_{k-h}/F_{\mathbf{C}}$ engendre le quotient (de dimension 1) $\dfrac{N^h_c(E)}{N^{h+1}_c(E)}$ et que $\delta(\widetilde{A})$ est nul sur $N^{h+1}_c(E)$, on aura bien

$$\langle \delta(\widetilde{A}), w_{k-h}/F_{\mathbf{C}} \rangle = 1$$

si on normalise convenablement les w_i.

Choisissons maintenant $m \in \mathbf{N}$ assez grand pour que

$$\widetilde{w}_j = f^m w_j$$

soit C^∞ à support f-propre dans $X_{\mathbf{C}}$ pour $j \in [1,k]$. On aura alors

i bis) $d\widetilde{w}_j = (m+n)\dfrac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_j + \dfrac{df}{f} \wedge \widetilde{w}_{j-1}$ sur X avec la convention $\widetilde{w}_0 \equiv 0$. De plus on peut supposer que les $\widetilde{w}_j$ vérifient les conditions ii) et iii) précédentes (quitte à renormaliser!).

Posons alors pour $j \in [1,k]$, $\alpha \in [1,\kappa]$ et $s \in D \cap \mathbf{R}$

$$F_{j,\alpha}(s) = \int_{f^{-1}(s)\cap A_\alpha} \widetilde{w}_j.$$

On aura alors, grâce à i bis)

$$s\frac{d}{ds}(F_{j,\alpha})(s) = (m+n)F_{j,\alpha}(s) + F_{j-1,\alpha}(s)$$

et si $A_\alpha \subset \{f > 0\}$

$$F_{j,\alpha}(s_0) = \int_{\widetilde{A}_\alpha} \widetilde{w}_j \quad \text{où } \widetilde{A}_\alpha = A_\alpha \cap F_{\mathbf{R}}.$$

Si $A_\alpha \subset \{f < 0\}$

$$F_{j,\alpha}(-s_0) = \int_{\widetilde{A}_\alpha} \widetilde{w}_j \quad \text{où } \widetilde{A}_\alpha = A_\alpha \cap F_{\mathbf{R}}$$

ce qui donne

$$\sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha F_{j,\alpha}((1-2\varepsilon_\alpha)s_0) = \int_{\widetilde{A}} \widetilde{w}_j$$

car

$$1 - 2\varepsilon_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } A_\alpha \subset \{f > 0\} \\ -1 & \text{si } A_\alpha \subset \{f < 0\}. \end{cases}$$

On a donc $\sum\limits_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha F_{k-h,\alpha}((1-2\varepsilon_\alpha))s_0) = 1$ via iii).

Si on pose $\phi_j(s) = \sum\limits_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha F_{j,\alpha}((1-2\varepsilon_\alpha)s)$ pour $s \in D \cap \mathbf{R}^+$, on aura donc $\phi_{k-h}(s_0) = 1$ et $\forall j \in [1,k]$ $\quad s\dfrac{d}{ds}(\phi_j)(s) = (m+n)\phi_j(s) + \phi_{j-1}(s)$ avec la convention $\phi_0 \equiv 0$.

Comme on a $\phi_1(s_0)=\cdots=\phi_{k-h-1}(s_0)=0$ et $\phi_{k-h}(s_0)=1$, il en résulte que $\phi_{k-h}(s)=\left(\dfrac{s}{s_0}\right)^{m+n}$, $\forall s\in D\cap\mathbf{R}^+$ et donc $\phi_k(s)=\left(\dfrac{s}{s_0}\right)^{m+n} P\left(\log\dfrac{s}{s_0}\right)$, $\forall s\in D\cap\mathbf{R}^+$ où P est un polynôme unitaire de degré h. Si $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$ vaut

identiquement 1 près de 0, on aura $\int_0^{+\infty} s^\lambda \psi(s)\phi_k(s)\, ds$ qui aura un pôle d'ordre $h+1$ en $s = -m-u-1$ de partie principale $\dfrac{(-1)^h h!}{(s+m+u+1)^{h+1}}$.
Mais

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} s^\lambda \psi(s)\phi_k(s)\, ds &= \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha \int_{A_\alpha} [(1-2\varepsilon_\alpha)f]^\lambda f^*(\psi)\widetilde{w}_k \wedge df \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\kappa} a_\alpha e^{-i\pi\lambda\varepsilon_\alpha} \int_{A_\alpha} |f|^\lambda \varphi\end{aligned}$$

où $\varphi = f^*(\psi)\widetilde{w}_k \wedge df$.

Ceci achève la preuve du théorème. □

Examinons l'exemple $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ donné par $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$.

Par homogénéité de f, on peut supposer que $X_\mathbf{C} = \mathbf{C}^3$, $X_\mathbf{R} = \mathbf{R}^3$; on a alors

$$X_\mathbf{R} - f^{-1}(0) = A_1 \coprod A_2 \coprod A_3$$

avec $A_1 = \{f > 0\}$, $A_2 = \{f < 0,\ z > 0\}$ et $A_3 = \{f < 0,\ z < 0\}$. On a donc

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_1 &= \{x^2+y^2-z^2 = 1\} \\ \widetilde{A}_2 &= \{x^2+y^2-z^2 = -1,\ z > 0\} \\ \widetilde{A}_3 &= \{x^2+y^2-z^2 = -1,\ z < 0\}\end{aligned}$$

$$F_\mathbf{R} = \widetilde{A}_1 \coprod \widetilde{A}_2 \coprod \widetilde{A}_3$$

et enfin

$$F_\mathbf{C} = \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 1\}.$$

Alors $H^0(F_\mathbf{R}, \mathbf{C}) = \mathbf{C}\widetilde{A}_1 \oplus \mathbf{C}\widetilde{A}_2 \oplus \mathbf{C}\widetilde{A}_3$ et $H^2(F_\mathbf{C}, \mathbf{C}) = \mathbf{C}w$ avec

$$w = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

La monodromie agit sur $H^2(F_\mathbf{C}, \mathbf{C})$ par $T = -1$ car $dw = \dfrac{3}{2}\dfrac{df}{f} \wedge w$ montre que $\dfrac{w}{f^{3/2}}$ est une base horizontale multiforme du fibré de Gauss-Manin de $f_\mathbf{C}$.

La sphère standard $S = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbf{R}^3 \mid \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1\}$ s'injecte naturellement dans $F_\mathbf{C}$ via $\eta_0 : (\alpha,\beta,\gamma) \longrightarrow (\alpha,\beta,i\gamma)$ et ceci donne un générateur de $H_2(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{Z})$ puisque

$$\int_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} i(\alpha d\beta \wedge d\gamma + \beta d\gamma \wedge d\alpha + \gamma d\alpha \wedge d\beta)$$

$$= i \int_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<1} 3d\alpha d\beta d\gamma = 4i\pi \neq 0.$$

Malheureusement $\eta_0(S) \cap \widetilde{A}_1$ n'est pas transversal (on trouve le cercle $\{x^2 + y^2 = 1\} \cap \{z = 0\}$ de $\widetilde{A}_1$).

En utilisant la déformation suivante de η_0

$$\eta_\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha ch\varphi + i\beta sh\varphi, \beta ch\varphi - i\alpha sh\varphi, i\gamma)$$

pour $\varphi \in \mathbf{R}$, on obtient que

$$\widetilde{A}_1 \cap [\eta_0(S)] = (0) \quad \text{en homologie}$$

puisque pour $\varphi > 0$, $\theta_\varphi(S) \cap \widetilde{A}_1 = \phi$.

Pour calculer $I(\widetilde{A}_2)$ et $I(\widetilde{A}_3)$, nous allons calculer en fait $\mathcal{T}^{-1}(\eta_0(S)) \cap \widetilde{A}_2$ et $\mathcal{T}^{-1}(\eta_0(S)) \cap \widetilde{A}_3$ dans $f_{\mathbf{C}}^{-1}(-1)$.

Le cycle $\mathcal{T}^{-1}(\eta_0(S))$ est homologue à l'image de S via l'application (*)

$$(\alpha, \beta, \gamma) \longrightarrow (-i\alpha ch\varphi + \beta sh\varphi, -i\beta ch\varphi - \alpha sh\varphi, \gamma).$$

On trouve donc pour $\varphi > 0$

$$-i\eta_\varphi(S) \cap \widetilde{A}_2 = \{(0, 0, 1)\}$$
$$-i\eta_\varphi(S) \cap \widetilde{A}_3 = \{(0, 0, -1)\}.$$

Comme $\widetilde{A}_2$ et $\widetilde{A}_3$ sont échangés par la monodromie qui vaut -1, les signes correspondant à ces intersections sont opposés et on a donc

$$I(\eta_0(S)) = \varepsilon(\widetilde{A}_2 - \widetilde{A}_3)$$

où $\varepsilon = \pm 1$ dépend des orientations choisies.

On a donc $\delta(\widetilde{A}_1) = 0$ et $\delta(\widetilde{A}_2) = \delta(\widetilde{A}_3) \neq 0$ dans $H^2(F_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$. On en déduit en particulier que le prolongement méromorphe de $\int_A (x^2+y^2-z^2)^\lambda \square$ aura un pôle pour $\lambda = -k-\frac{1}{2}$, $k \in \mathbf{N}$ assez grand, dès que $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ vérifiera

$$\alpha_2 + \alpha_3 \neq 0.$$

(*) On suit $f_{\mathbf{C}}^{-1}(s)$ de 1 à -1 dans le sens indirect cette fois (donc $-i\eta_\varphi(S)$ donne un cycle homologue à $\mathcal{T}^{-1}(\eta_0(S))$ dans $f_{\mathbf{C}}^{-1}(-1)$).

En fait on vérifie facilement que

$$\int_{x^2+y^2-z^2>0} (x^2+y^2-z^2)^\lambda \square$$

n'a pas de pôle en $\lambda = -k - \frac{1}{2}$, $\forall k \in \mathbf{N}$ et donc que notre critère est nécessaire et suffisant pour cet exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] D. Barlet, Contribution effective dans le réel, Comp. Math., vol. 56 (1985), 351–359.

[B2] D. Barlet, Interaction de strates consécutives pour les cycles évanescents, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 24 (1991), 401–506.

[B3] D. Barlet, Monodromie et pôles du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda}\square$, Bull. Soc. Math. France, t. 114 (1986), 247–269.

[M] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies, n° 61, Princeton (1968).

Manuscrit reçu le 5 janvier 1993.

D. BARLET,
Université de Nancy I
Département de Mathématiques
BP 239
54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex (France)
&
A. MARDHY,
Université Chouaib Doukkali
Département de Mathématiques
BP 20
El Jadida (Maroc).