ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUSTAVE CHOQUET
PAUL-ANDRÉ MEYER

Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques

Annales de l'institut Fourier, tome 13, nº 1 (1963), p. 139-154
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_1_139_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13 (1963), 139 à 154.

EXISTENCE ET UNICITÉ DES REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES DANS LES CONVEXES COMPACTS QUELCONQUES

par Gustave CHOQUET et Paul-André MEYER (Paris)

1. Introduction.

La démonstration initiale [5] des théorèmes d'existence et d'unicité des représentations intégrales dans un convexe compact X en termes de points extrémaux de X a reçu ces dernières années des améliorations successives :

E. Bishop et K. de Leeuw [3] ont abordé le théorème d'existence dans le cas général et montré l'intérêt d'introduire un ordre sur l'ensemble $\mathcal{M}^+(X)$ des mesures de Radon positives sur X.

H. Bauer [1 et 2] a étudié la frontière associée à une famille de fonctions et introduit l'idée de caractériser le cas d'unicité par des propriétés fonctionnelles.

M. Hervé [9], puis F. F. Bonsall [4] ont donné des démonstrations d'existence très simples dans le cas métrisable.

G. Mokobodzki [19] a caractérisé les mesures maximales dans le cas général.

P. A. Meyer [10] puis G. Choquet [8] ont donné de nouvelles caractérisations du cas d'unicité.

Le présent exposé, volontairement dépouillé pour rester accessible, constitue une synthèse de l'essentiel des résultats connus. On constatera que, grâce au théorème de Hahn-Banach et à la notion de mesure maximale, le théorème d'existence a maintenant une démonstration fort simple; on pourra remarquer aussi que la notion de point extrémal fait son apparition plus tard que dans les exposés antérieurs.

Nous terminerons en montrant comment les propriétés des frontières associées à un espace vectoriel de fonctions continues sur un espace compact se déduisent simplement des propriétés des convexes compacts.

2. Définitions et notations.

1. X désigne un convexe compact d'un e. l. c. (espace vectoriel topologique localement convexe séparé) E.

2. $\mathcal{E}(X)$, ou plus simplement $\mathcal{E}$, est l'ensemble des points extrémaux de X.

3. S est le cône convexe de $\mathcal{C}(X)$ constitué par les fonctions convexes; comme S contient les constantes, est semi-réticulé supérieurement et sépare les points de X, S est total dans $\mathcal{C}(X)$ d'après le théorème de Stone-Weierstrass.

4. $A = S \cap (-S)$ est l'ensemble des fonctions affines continues sur X.

5. $\mathcal{M}^+$ (resp. $\mathcal{M}^1$) est le cône convexe des mesures de Radon $\geqslant 0$ sur X (resp $\geqslant 0$ et de norme 1), muni de la topologie vague.

6. Pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+$, on désigne par $r(\mu)$ sa résultante $\int x \, d\mu(x)$.

7. Soit f une fonction numérique bornée définie sur X. Nous poserons :

$$\widehat{f} = \inf_{\substack{g \in -S \\ g \geqslant f}} g; \qquad \check{f} = \sup_{\substack{g \in S \\ g \leqslant f}} g$$

On a évidemment $\check{f} \leqslant f \leqslant \widehat{f}$. La fonction $\widehat{f}$ est concave semi-continue supérieurement (s. c. s.), la fonction $\check{f}$ convexe semi-continue inférieurement (s. c. i.). Toute fonction concave s. c. s. étant l'enveloppe inférieure des fonctions affines continues qui la majorent (comme on le voit en appliquant le théorème de Hahn-Banach à l'ensemble des points de $X \times R$ situés au dessous de son graphe), on peut remplacer « $g \in -S$ » dans la définition de $\widehat{f}$ par « $g \in A$ » ou « g concave s. c. s. ».

L'application $f \to \hat{f}$ est évidemment croissante et sous-linéaire :

$$\widehat{f+g} \leqslant \hat{f} + \hat{g}; \qquad \widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f} \quad (\lambda \in \mathbf{R}_+)$$

Si f est concave s. c. s., on a $\hat{f} = f$.

8. Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}^+$, on notera $\hat{\mu}$ l'application $f \to \mu(\hat{f})$ de $\mathcal{C}(X)$ dans $\mathbf{R}$. On définit de même l'application $\hat{\mu}$. La fonction $\hat{\mu}$ est évidemment croissante et sous-linéaire, et l'on a $\mu \leqslant \hat{\mu}$.

Lemme 1. — *Pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$ et pour tout $x \in X$, on a :*

$$\hat{f}(x) = \sup \mu(f), \qquad (\textit{où} \quad \mu \in \mathcal{M}^1 \quad \textit{et} \quad r(\mu) = x);$$

on a la même relation en se bornant aux μ discrètes.

Démonstration. — Montrons d'abord que la fonction f' définie par $f'(x) = \sup \mu(f)$, ($\mu \in \mathcal{M}^1$ et $r(\mu) = x$) est concave et s. c. s. : La concavité résulte de ce que l'application $\varphi : \mu \to (r(\mu), \mu(f))$ de $\mathcal{M}^1$ dans $X \times \mathbf{R}$ étant linéaire, $\varphi(\mathcal{M}^1)$ est convexe; la semi-continuité résulte de ce que $\varphi(\mathcal{M}^1)$ est compact.

La relation $\hat{f} = f'$ sera donc établie si l'on montre que toute $g \in A$ qui majore $\hat{f}$ majore f', et inversement.

Or $g \geqslant \hat{f}$ entraîne $g \geqslant f$, donc $g(x) = \mu(g) \geqslant \mu(f)$, (où $x = r(\mu)$), d'où $g(x) \geqslant f'(x)$.

Inversement, puisque $f' \geqslant f$, $(g \geqslant f')$ entraîne $(g \geqslant f)$, donc $g \geqslant \hat{f}$.

L'énoncé relatif aux mesures discrètes résulte du précédent en remarquant que toute $\mu \in \mathcal{M}^1$ est limite de ν discrètes de $\mathcal{M}^1$, de même résultante [1].

9. On appelle *ensemble bordant* X toute partie de X de la forme $\{x : f(x) = \hat{f}(x)\}$ où $f \in S$. Comme $(\hat{f} - f)$ est s. c. s., concave et $\geqslant 0$, chacun de ces ensembles est un G_δ de complémentaire (dans X) convexe.

Lemme 2. — *$\mathcal{E}$ est l'intersection des ensembles bordant* X.

[1] Remarquer que si (ω_i) est un recouvrement ouvert fini de X, on peut lui associer une partition de μ en mesures μ_i, telle que μ_i soit portée par ω_i; et utiliser la mesure discrète $\nu = \Sigma \|\mu_i\| \, \varepsilon_{x_i}$, où x_i désigne la résultante de la mesure $\mu_i / \|\mu_i\|$.

Démonstration. — D'une part le lemme 1 montre que, pour toute f et pour tout $x \in \mathcal{E}$, on a $\widehat{f}(x) = f(x)$, donc $\mathcal{E}$ est dans chaque ensemble bordant X.

D'autre part si $x \notin \mathcal{E}$, il existe a, $b \in X$ tels que $x \in]a, b[$; il existe alors une $l \in A$ qui sépare a et b; posons $f = l^2$. On a bien $f \in S$ et $x \notin \{y : f(y) = \widehat{f}(y)\}$.

3. Mesures maximales et théorème d'existence.

DÉFINITION. — *Soient* μ *et* ν *deux mesures* $\in \mathcal{M}^+$; *nous poserons* $\mu \prec \nu$ *si l'on a*: $\mu(f) \leqslant \nu(f)$ *pour toute* $f \in S$ (*ou encore* $\nu(g) \leqslant \mu(g)$ *pour toute* $g \in -S$).

Comme S est total dans $\mathcal{C}(X)$, il est immédiat que cette relation est une relation d'ordre. Une mesure maximale pour cet ordre sera dite simplement *maximale.*

La relation $\mu \prec \nu$ entraîne $\mu(f) = \nu(f)$ pour toute $f \in A = S \cap (-S)$, donc μ et ν ont même résultante et même norme.

Exemple. — Pour toute $\mu \in \mathcal{M}^1$, de résultante x, on a $\varepsilon_x \prec \mu$. En effet cette relation équivaut à $f(x) \leqslant \mu(f)$ pour toute $f \in S$.

Cet exemple suffit à suggérer que $\mu \prec \nu$ signifie, en gros, que ν est plus dispersée, plus proche du bord de X que μ; d'où l'intérêt des mesures maximales, qu'on espère portées par le bord de X.

THÉORÈME 3. — *Toute* $\mu \in \mathcal{M}^+$ *est majorée, au sens de l'ordre* $\prec$, *par une mesure maximale.*

Démonstration. — En vertu du théorème de Zorn, il suffit de montrer que $\mathcal{M}^+$, ordonné par $\prec$, est inductif: Soit M une partie de $\mathcal{M}^+$, totalement ordonnée pour l'ordre $\prec$, et soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des sections de M; cet ultrafiltre converge vaguement vers une mesure μ, et il est clair que μ majore M.

LEMME 4. — *Soit* $\mu \in \mathcal{M}^+$ *et soit* ν *une forme linéaire sur* $\mathcal{C}(X)$; *on a l'équivalence*:

$$(\nu \leqslant \widehat{\mu} \text{ sur } \mathcal{C}(X)) \Longleftrightarrow (\nu \in \mathcal{M}^+ \text{ et } \mu \prec \nu).$$

Démonstration — 1. Supposons $\nu \leqslant \mu$.

Pour toute $f \leqslant 0$, on a $\widehat{\mu}(f) \leqslant 0$, d'où $\nu(f) \leqslant 0$; autrement dit $\nu \in \mathcal{M}^+$.

Pour toute $f \in -S$, $\mu(f) = \widehat{\mu}(f)$, donc $\nu(f) \leqslant \mu(f)$; autrement dit $\mu \prec \nu$.

2. Inversement, si $\mu \prec \nu$ et si $g \in -S$ avec $f \leqslant g$, on a :

$$\nu(f) \leqslant \nu(g) \leqslant \mu(g).$$

En prenant la borne inférieure du dernier membre sur g, on obtient la relation cherchée, $\nu(f) \leqslant \widehat{\mu}(f)$.

THÉORÈME 5. — *Soit* $\mu \in \mathcal{M}^+$; *les énoncés suivants sont équivalents* :

1. μ *est maximale.*
2. $\widehat{\mu}$ *est linéaire sur* $\mathcal{C}(X)$.
3. $\mu = \widehat{\mu}$ *sur* $\mathcal{C}(X)$,
4. $\mu = \widehat{\mu}$ *sur* S.

Démonstration. — On va montrer que $1 \Longleftrightarrow 2$ et que $2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 2$. La clef de la démonstration est la partie ci-dessous du théorème de Hahn-Banach :

Si p désigne une fonction numérique sous-linéaire sur un espace vectoriel V, dire qu'il existe une seule forme linéaire l sur V telle que $l \leqslant p$, équivaut à dire que p est linéaire (et alors évidemment $l = p$).

$1 \Longleftrightarrow 2$. D'après le lemme 4, on a :
(μ maximale) $\Longleftrightarrow$ (il existe une seule forme linéaire ν sur $\mathcal{C}(X)$ telle que $\nu \leqslant \widehat{\mu}$).

D'après l'énoncé de Hahn-Banach, ceci équivaut aussi à dire que $\widehat{\mu}$ est linéaire.

$2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4$: Si $\widehat{\mu}$ est linéaire, comme μ est aussi linéaire et que $\mu \leqslant \widehat{\mu}$, on a $\mu = \widehat{\mu}$.

$4 \Longrightarrow 2$. On a toujours $\mu = \widehat{\mu}$ sur $-S$; donc si $\mu = \widehat{\mu}$ sur S, $\widehat{\mu}$ est linéaire sur chaque droite de $(S - S)$; comme de plus elle est sous-linéaire sur $(S - S)$, elle est linéaire sur $(S - S)$, donc aussi sur $\mathcal{C}(X)$.

REMARQUE 6. — 1) On peut affaiblir le critère 4 en imposant seulement la relation $\mu = \widehat{\mu}$ sur un sous-cône convexe de S total dans $\mathcal{C}(X)$.

2) La linéarité de $\widehat{\mu}$ sur S ne suffit pas pour que μ soit maximale: Du théorème 11 résulte en effet que lorsque X est un simplexe, $\widehat{\mu}$ est linéaire sur S, quelle que soit μ.

3) La relation $\widehat{\mu}(f) = -\widehat{\mu}(-f)$ montre que le critère 3 peut s'écrire aussi $\mu = \check{\mu}$.

On peut dire encore que μ est maximale si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$, il existe $g_1 \in S$ et $g_2 \in -S$ tels que $g_1 \leqslant f \leqslant g_2$ et $\mu(g_2 - g_1) < \varepsilon$.

Corollaire 7. — (μ *maximale*) $\Longleftrightarrow$ (μ *portée par tout ensemble bordant* X).

En effet ($\mu = \widehat{\mu}$ sur S) $\Longleftrightarrow$ ($\mu(f) = \mu(\widehat{f})$ pour toute $f \in S$); et comme $f \leqslant \widehat{f}$,

$$(\mu(f) = \mu(\widehat{f})) \Longleftrightarrow (\mu \text{ est portée par } \{x : f(x) = \widehat{f}(x)\}).$$

Corollaire 8. — *Tout* $x \in X$ *est résultante d'une* $\mu \in \mathcal{M}^1$ *portée par tout ensemble bordant* X.

En effet, d'après le théorème 3, il existe une μ maximale telle que $\varepsilon_x \prec \mu$. La relation $\|\mu\| = \|\varepsilon_x\| = 1$ et le corollaire 7 terminent la démonstration.

Corollaire 9. — 1) *L'ensemble des mesures maximales est un sous-cône convexe de* $\mathcal{M}^+$, *stable par intégration et héréditaire à gauche.*

2) *Il est réticulé pour son ordre propre.*

Démonstration. — 1) En effet toute somme (ou plus généralement toute intégrale) de mesures portées par un ensemble bordant X est portée par le même ensemble; de même si μ est portée par un tel ensemble, il en est de même de toute $\nu \leqslant \mu$.

2) Le cône $\mathcal{M}^+$ étant réticulé pour son ordre propre, il en est de même de tout sous-cône convexe et héréditaire à gauche, de $\mathcal{M}^+$.

4. Théorème d'unicité.

Il sera commode, dans ce qui suit, de supposer que X est une base d'un cône convexe C, c'est-à-dire que X est l'intersection de C avec un hyperplan affine fermé ne contenant pas

O et rencontrant toutes les génératrices de C; ceci est réalisable quel que soit X: Il suffit d'identiffier E à l'hyperplan affine $E \times \{1\}$ de $E \times \mathbf{R}$ et de prendre pour C le cône $\check{X}$ engendré par X.

Il est immédiat que deux quelconques de ces cônes, C_1 et C_2, sont linéairement isomorphes, dans l'isomorphie qui, au point λx du premier, fait correspondre le point λx du second ($\lambda > 0$, $x \in X$).

En particulier, si l'un de ces cônes est réticulé pour son ordre propre, tous le sont.

Toute $f \in \mathcal{C}(X)$ se prolonge à $\check{X}$ de façon unique en une fonction positivement homogène; $\widehat{f}$ se prolonge de la même façon; on notera encore f et $\widehat{f}$ ces prolongements et $\check{S}$ (resp. $\check{\mathcal{C}}(X)$) l'ensemble des prolongements des éléments de S (resp. $\mathcal{C}(X)$).

La relation du lemme 1 concernant les mesures discrètes s'écrit alors, pour tout $f \in \check{\mathcal{C}}(X)$:

$\widehat{f}(x) = \sup \sum_i f(x_i)$, pour les familles finies (x_i) de points de $\check{X}$ telles que $x = \Sigma x_i$.

Lemme 10. — *Pour toute f affine s. c. s. sur* X, *et toute* $\mu \in \mathcal{M}^1$, *on a*:

$\mu(f) = f(x)$, *où x est la résultante de* μ.

Démonstration. — Pour toute ν discrète $\in \mathcal{M}^1$, de résultante x, et toute $g \in -S$ telle que $f \leqslant g$, on a :

$$f(x) = \nu(f) \leqslant \nu(g) \qquad \text{d'où} \qquad f(x) \leqslant \nu(g) \leqslant g(x).$$

Comme μ est limite de telles ν, on a la même relation pour μ. Or f est limite de l'ordonné filtrant décroissant des $g \geqslant f$, d'où à la limite :

$$f(x) \leqslant \mu(f) \leqslant f(x).$$

Définition. — *On dit que* X *est un* simplexe *lorsque le cône* $\check{X}$ *(donc aussi tout cône de base* X*) est réticulé pour son ordre propre.*

Théorème 11. — *Pour tout convexe compact* X, *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1. X *est un simplexe.*
2. *Pour toute $f \in$* S, *l'application $x \to \widehat{f}(x)$ est affine sur* X.

3. *Pour toute μ maximale $\in \mathcal{M}^1$, et pour toute $f \in$ S, on a*

$$\widehat{f}(x) = \mu(f), \qquad où \qquad x = r(\mu).$$

4. *L'application $f \to \widehat{f}$ est linéaire sur* S.

5. *Tout $x \in$ X est résultante d'une mesure maximale unique de $\mathcal{M}^1$, notée μ_x.*

Démonstration. — On va démontrer que

$$1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 5 \Longrightarrow 1.$$

$1 \Longrightarrow 2$. Soit $f \in \widehat{S}$; pour tous x, $y \in \check{X}$, on a :

$$\widehat{f}(x+y) = \sup\Big(\sum_{i\in I} f(u_i)\Big),$$

où les I sont finis, $u_i \in \check{X}$ et $\sum_{i\in I} u_i = x + y$.

Or, $\check{X}$ étant réticulé, la relation $\Sigma u_i = x + y$ entraîne ([2]) l'existence de (x_i) et (y_i), où x_i, $y_i \in \check{X}$, avec $\Sigma x_i = x$ et $\Sigma y_i = y$.

Donc :

$$\widehat{f}(x+y) = \sup(\Sigma f(x_i + y_i)) \leqslant \sup(\Sigma f(x_i) + \Sigma f(y_i)) \leqslant \widehat{f}(x) + \widehat{f}(y).$$

Donc $\widehat{f}$ est convexe; comme elle est aussi concave, elle est affine.

$2 \Longrightarrow 3$. Si $\widehat{f}$ est affine sur X, le lemme 10 montre que, pour toute $\mu \in \mathcal{M}^1$ de résultante x, on a :

$$\widehat{f}(x) = \mu(f).$$

Donc si μ est maximale, on a d'après le théorème 5,

$$\widehat{f}(x) = \mu(f).$$

$3 \Longrightarrow 4$, Comme tout $x \in$ X est résultante d'une μ maximale $\in \mathcal{M}^1$, la propriété 3 entraîne que, pour tout x, l'application $f \to \widehat{f}(x)$ est linéaire sur S, d'où la linéarité de l'application $f \to \widehat{f}$.

$4 \Longrightarrow 5$. Soit $x \in$ X; la fonction $f \to \widehat{f}(x)$ étant linéaire et croissante sur S se prolonge sur (S — S) en une forme linéaire μ_x qui est $\geqslant 0$ sur $(S - S)_+$; donc $\mu_x \in \mathcal{M}^+$.

([2]) Pour ce « lemme de décomposition », voir Bourbaki, Intégration, ch. II, § 1, n° 1.

D'après le lemme 1, on a $\mu(f) \leqslant \hat{f}(x) = \mu_x(f)$ pour toute μ de résultante x, et toute $f \in S$; donc $\mu \prec \mu_x$.

Autrement dit μ_x majore toute mesure μ de résultante x; c'est donc la seule mesure maximale de $\mathcal{M}^1$ de résultante x.

$5 \Longrightarrow 1$. D'après le corollaire 9, le cône convexe M des mesures maximales sur X est réticulé pour son ordre propre.

Or d'après l'hypothèse, l'application linéaire $\mu \rightarrow r(\mu)$ est une bijection de M sur $\check{X}$; donc $\check{X}$ est réticulé.

Autres critères. — C'est l'équivalence des énoncés 1 et 5 qui est la plus utilisée dans les applications; elle ramène la question d'unicité des représentations intégrales à la démonstration du fait qu'un cone C est réticulé.

Une telle démonstration est facile pour certains cones, tels que les suivants :

— Le cone des fonctions harmoniques positives sur un espace de Green.

— Le cone des mesures $\geqslant 0$ sur un espace compact, qui sont invariantes par une famille de diffusions continues conservant la masse.

— Le cone des mesures $\mu \geqslant 0$ sur un groupe abélien localement compact, satisfaisant à une relation $\alpha * \mu \leqslant \mu$, où α est une mesure $\geqslant 0$ donnée.

Une telle démonstration est parfois plus difficile; on peut alors tenter d'utiliser les critères 2, 3, 4, ou les critères 6, 7, 8 qui suivent et que nous ne démontrerons pas ici.

6. *Le cône convexe des fonctions numériques affines s. c. s. sur* X, *ordonné par* ($f_1 \leqslant f_2$ *si* $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ *pour tout* $x \in X$) *est semi-réticulé supérieurement.*

Cet énoncé démontré dans [8] est à rapprocher de l'énoncé suivant de Bauer [2] :
(A *ordonné par* A_+ *est réticulé*) $\Longleftrightarrow$ (X *est un simplexe et* $\mathcal{E}$ *est compact.*

7. Désignons par $L(\mathcal{E})$ l'ensemble des traces sur $\mathcal{E}$ des fonctions affines continues sur X; voici alors le critère :

Pour toute famille finie (f_i) *d'éléments de* $L(\mathcal{E})$, *l'ensemble des* $f \in L(\mathcal{E})$ *qui sont* $\geqslant$ *sup.* (f_i) *est filtrante décroissante et a pour limite sup.* (f_i).

On démontre ce critère en montrant son équivalence avec l'énoncé 2.

8. Convenons d'appeler « dilaté positif » de X toute partie de E de la forme $\emptyset$ ou bien $(kX + a)$, où $k \in R_+$ et $a \in E$; voici alors le critère, démontré dans [5] :

L'ensemble des dilatés positifs de X *est stable par intersection finie.*

9. *Critère partiel commode :* Soient H un ensemble quelconque, K un espace topologique compact, et f une application de H $\times$ K dans **R**, telle que pour tout $x \in$ H, l'application f_x : $y \rightarrow f(x, y)$ de K dans **R** soit continue, et telle que l'ensemble des f_x sépare les points de K.

Soit X l'ensemble, muni de la topologie de la convergence simple, des fonctions numériques g sur H de la forme :

$$g(x) = \int f(x, y)\, d\mu(y), \qquad \text{où} \qquad \mu \in \mathcal{M}^1(K)$$

Alors X est convexe compact; désignons par K$'$ le sous-ensemble de X homéomorphe à K, constitue par les fonctions g de la forme $g(x) = f(x, a)$. On a alors l'équivalence : (X est un simplexe et $K' = \mathcal{E}(X)$) $\Longleftrightarrow$ (l'ensemble des f_x est total dans $\mathcal{C}(K)$).

Théorème 12 (de mesurabilité). — *Soit* X *un simplexe. L'application* $x \rightarrow \mu_x$ *de* X *dans* $\mathcal{M}^1$ *muni de la topologie vague est de* 1re *classe.*

Démonstration. — Pour toute $f \in$ S, l'application

$$x \rightarrow \mu_x(f) = \hat{f}(x).$$

est s. c. s. Or toute $\varphi \in \mathcal{C}(X)$ est limite uniforme d'éléments de (S — S); donc pour toute $\varphi \in \mathcal{C}(X)$, l'application $x \rightarrow \mu_x(\varphi)$ est limite uniforme de différences de deux fonctions s. c. s.; c'est donc une application de 1re classe.

5. Mesures maximales et points extrémaux.

Les démonstrations des théorèmes précédents n'ont fait intervenir en aucune manière l'ensemble $\mathcal{E}$. Elles ne permettent même pas encore d'affirmer que cet ensemble n'est pas vide. Nous nous proposons d'étudier maintenant en quel sens on peut dire que les mesures maximales sont « portées » par $\mathcal{E}$. La situation n'est tout à fait simple que dans le cas où X est métrisable.

Lemme 13. — *Lorsque* X *est métrisable,* $\mathcal{E}$ *est le plus petit ensemble bordant* X.

En effet, il existe alors une suite (l_n) de formes linéaires continues qui sépare les points de X, avec $|l_n| < \frac{1}{n}$ sur X.

La fonction $f = \Sigma l_n^2$ est continue et strictement convexe sur X, donc pour tout $x \notin \mathcal{E}$, on a $f(x) < \widehat{f}(x)$. Autrement dit, d'après le lemme 2, $\mathcal{E} = \{x : f(x) = \widehat{f}(x)\}$.

Corollaire 14. — *Lorsque* X *est métrisable,* $\mathcal{E}$ *est un* G_δ, *les mesures maximales sont celles portées par* $\mathcal{E}$, *et tout* $x \in X$ *est résultante d'une* $\mu \in \mathcal{M}^1$ *portée par* $\mathcal{E}$.

Les résultats du paragraphe précédent nous permettent aussi d'énoncer immédiatement la proposition suivante :

Proposition 15. — *Soit* $\mu \in \mathcal{M}^+$.
(μ *portée par tout ouvert de* X *contenant* $\mathcal{E}$) $\Longrightarrow$ (μ *maximale*).

En effet, μ est alors portée par tout ensemble G_δ contenant $\mathcal{E}$, donc en particulier par tout ensemble bordant X.

En particulier toute μ portée par $\mathcal{E}$ est maximale.

Définition. — *On appellera* face *de* X *tout compact* $F \subset X$ *tel que toute* $\mu \in \mathcal{M}^1$, *de barycentre* $r(\mu) \in F$, *soit portée par* F.

Par exemple l'ensemble des points de X (ou d'une face non-vide de X) en lesquels une fonction convexe s. c. s. sur X atteint sa borne supérieure est une face non-vide.

Lemme 16. — *Toute face non-vide de* X *rencontre* $\mathcal{E}$.

Démonstration. — L'ensemble des faces étant évidemment stable par intersection quelconque, l'ensemble des faces non-vides contenues dans une face non-vide F_0 est inductif vers le bas; donc F_0 contient une face minimale non-vide F. Celle-ci ne peut contenir deux points distincts x, y; sinon il existerait une $l \in A$ telle que $l(x) < l(y)$; et l'ensemble des points de F en lesquels l atteint son maximum sur F étant lui-même une face et ne contenant pas x, F ne serait pas minimale. Donc F contient un seul point, évidemment $\in \mathcal{E}$; autrement dit F_0 rencontre $\mathcal{E}$.

Lemme 17. — (principe du maximum de Bauer). *Toute fonction f convexe s. c. s. sur* X *atteint sa borne supérieure sur* $\mathcal{E}$.

En effet il suffit d'appliquer le lemme 16 à la face de X constituée par l'ensemble des points où f atteint sa borne supérieure.

Remarque. — Il résulte du lemme 17 que toute famille filtrante décroissante d'éléments de S_+ qui tend vers 0 sur $\mathcal{E}$, tend partout vers 0, donc converge uniformément vers 0.

Lemme 18. — (μ *maximale*) $\Longrightarrow$ (μ *portée par tout* K_σ *contenant* $\mathcal{E}$).

Démonstration. — Ceci revient à montrer que si Y est une partie de X disjointe de $\mathcal{E}$, intersection d'une suite décroissante (ω_n) d'ouverts de X, et si μ est une mesure maximale, on a $\mu(K) = 0$ pour tout compact $K \subset Y$.

Pour tout n, il existe $f_n \in \mathcal{C}_+(X)$ avec $f_n = 1$ sur K et $f_n = 0$ hors de ω_n; d'où une suite (f_n) qu'on peut supposer décroissante, dont la limite f vaut 1 sur K et 0 sur $\mathcal{E}$. Il suffit maintenant de montrer que $\mu(f) = 0$.

Donnons nous $\varepsilon > 0$; on va construire une suite (g_p) décroissante telle que, pour tout p, on ait :

$$(1) \qquad g_p \in S_+; \qquad g_p \leqslant f_p; \qquad \mu(f_p) < \mu(g_p) + \varepsilon.$$

D'après la remarque 6.3, il existe g_1 satisfaisant aux conditions (1); plus généralement, supposons définie g_p pour tout $p \leqslant n$; comme $\varepsilon + \mu(g_n) - \mu(f_n) > 0$, il existe $g_{n+1} \in S_+$ telle que $g_{n+1} \leqslant \inf(g_n, f_{n+1})$ et

$$(2) \quad \mu(\inf(g_n, f_{n+1})) < \mu(g_{n+1}) + (\varepsilon + \mu(g_n) - \mu(f_n)).$$

Or, d'après la relation

$$g_n + f_{n+1} = \inf(g_n, f_{n+1}) + \sup(g_n, f_{n+1}) \leqslant \inf(g_n, f_{n+1}) + f_n,$$

on a :

$$(3) \qquad \mu(g_n) + \mu(f_{n+1}) \leqslant \mu(\inf(g_n, f_{n+1})) + \mu(f_n)$$

En ajoutant (2) et (3) on obtient bien $\mu(f_{n+1}) < \mu(g_{n+1}) + \varepsilon$.

Posons alors $g = \lim g_n$; les relations (1) donnent $\mu(f) \leqslant \mu(g) + \varepsilon$, donc si l'on montre que $g = 0$, on aura $\mu(f) \leqslant \varepsilon$ pour tout ε, donc $\mu(f) = 0$.

Or comme $0 \leqslant g \leqslant f$, la fonction g est nulle sur $\mathcal{E}$; comme elle est convexe et s. c. s., elle est nulle partout d'après le lemme 17.

PROPOSITION 19. — (μ *maximale*) $\Longrightarrow$ (μ *portée par tout ensemble* K-*souslinien contenant* $\mathcal{E}$).

Démonstration. — Soit A une partie quelconque de X; posons :

$$\mu^*(A) = \inf \mu(B) \qquad (\text{pour les } B \in \mathcal{K}_\sigma,\ B \supset A)\ (^3).$$

La fonction d'ensemble $A \to \mu^*(A)$ est une capacité abstraite, et il résulte d'un théorème de capacitabilité abstraite [7] que tout ensemble K-souslinien A (et en particulier tout ensemble K-borélien), est capacitable. Si μ est maximale, et si A contient $\mathcal{E}$, $\mu^*(A)$ est égale à $\mu(1)$ d'après le lemme 18; il en résulte que l'on a $\mu(A) = \mu(1)$.

COROLLAIRE 20. — 1) *Si* $\mathcal{E}$ *est* K-*souslinien,*

$$(\mu \textit{ maximale}) \Longleftrightarrow (\mu \textit{ portée par } \mathcal{E}).$$

2) *Si* $\mathcal{E}$ *est* K-*souslinien et si* X *est un simplexe, tout* $x \in X$ *est résultante d'une* μ *unique de* $\mathcal{M}^1$ *portée par* $\mathcal{E}$.

REMARQUE 21. — La réciproque de la proposition 19 est malheureusement inexacte. En effet nous allons montrer par un exemple qu'une mesure μ peut être portée par tout ensemble K-souslinien contenant $\mathcal{E}$ sans être pour cela maximale; cet exemple montre en particulier qu'une mesure pseudoportée par ξ (c.-à.-d. portée par tout ouvert de Baire contenant $\mathcal{E}$) n'est pas nécessairement maximale, même lorsque X est un simplexe.

Voici l'exemple, imaginé par Mokobodzki :

Soit Q un espace topologique compact contenant un point a qui n'ait pas dans Q une base dénombrable de voisinages, et portant une mesure diffuse $\pi \geqslant 0$ de norme 1 (par exemple $Q = [0, 1]^I$, avec I non dénombrable). Soit B le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(Q)$ constitué par les f telles que $f(a) = \pi(f)$.

Le convexe compact cherché est le sous-ensemble de B^* constitué par les formes linéaires positives ν sur B telles que

(3) On désigne par $\mathcal{K}_\sigma$ l'ensemble des K_σ de X.

$\nu(1) = 1$; il est identifiable à l'ensemble des $\mu \in \mathcal{M}^1(Q)$ ne chargeant pas a, et muni de la topologie faible associée aux formes linéaires $\mu \to \mu(f)$ (où $f \in B$). Sous cette dernière forme il est immédiat que X est un simplexe.

D'autre part, si l'on identifie Q à son image canonique dans X par l'application $x \to \varepsilon_x$, on a $\mathcal{E}(X) = (Q \dot{-} a)$ et les mesures maximales sur X sont celles portées par $\mathcal{E}(X)$.

Or, comme par l'hypothèse $(Q \dot{-} a)$ n'est pas un K_σ, on peut montrer que ce n'est pas non plus un ensemble K-sous-linien; donc tout ensemble K-souslinien contenant $\mathcal{E}(X)$ contient a, donc porte la mesure ε_a; en particulier cette mesure est pseudo-portée par $\mathcal{E}(X)$ sans être maximale.

6. Frontière fine associée à un espace vectoriel de fonctions continues.

Nous allons retrouver et préciser maintenant certains résultats de E. Bishop et K. de Leeuw concernant les frontières, à partir des résultats qui précèdent.

Soient Q un espace topologique compact, et B un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(Q)$ qui sépare les points de Q.

Nous appellerons B-plongement de Q toute injection continue φ de Q dans un e. l. c. E, telle que B soit identique à l'ensemble des $l \circ \varphi$, où l parcourt le dual de E, et telle que l'enveloppe convexe fermée de $\varphi(Q)$ soit compacte. Il existe des B-plongements de Q; en voici un, d'allure canonique, pour lequel $E = \mathbf{R}^B$:

$$\varphi(x) = (f(x))_{f \in B}$$

C'est évidemment une injection continue; toute $f \in B$ s'écrit $l_f \circ \varphi$, où l_f est la forme coordonnée d'indice f, et comme toute forme linéaire continue sur $\mathbf{R}^B$ est combinaison linéaire de formes coordonnées, on a bien $B = (\mathbf{R}^B)' \circ \varphi$. Enfin $\mathbf{R}^B$ est un e. l. c. complet, donc l'enveloppe convexe fermée de $\varphi(Q)$ est compacte.

Définition. — *On appelle* frontière fine *associée à* B *l'ensemble* $\mathcal{E}(B)$ *des* $x \in Q$ *ayant la propriété suivante*: *La seule* $\mu \in \mathcal{M}^1(Q)$ *telle que* $f(x) = \mu(f)$ *pour toute* $f \in Q$, *est* ε_x.

Afin de simplifier les notations, pour tout B-plongement φ de Q dans un e.l.c. E, nous identifierons désormais Q et $\varphi(Q)$.

Théorème 22. — *Pour tout* B-*plongement de* Q, *si l'on désigne par* X *l'enveloppe convexe fermée de* Q, *on a*

$$\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(B).$$

En effet, il est bien connu que dans X les points x non-extrémaux sont caractérisés par le fait d'être résultante d'une $\mu \in \mathcal{M}^1$ distincte de ε_x et portée par $\overline{\mathcal{E}(X)}$, donc aussi par Q; d'où l'équivalence annoncée.

Corollaire 23. — *Lorsque* Q *est métrisable,* $\mathcal{E}(B)$ *est un* G_δ.

Théorème 24. — 1) *Toute* $f \in B$ *atteint son maximum sur* $\mathcal{E}(B)$; 2) *La frontière de Silov* $s(B)$ *associée à* B *est* $\overline{\mathcal{E}(B)}$.

Démonstration. — Avec les notations précédentes toute forme linéaire continue atteint (sur X) son maximum sur $\mathcal{E}(X)$, autrement dit sur $\mathcal{E}(B)$.

Il en résulte que $s(B) \subset \overline{\mathcal{E}(B)}$.

D'autre part tout point extrémal de X est extrémal fort, c'est-à-dire admet une base de voisinages qui sont des tranches de X (intersection de X avec un demi-espace ouvert). Donc pour tout voisinage U de $x \in \mathcal{E}(B)$, il existe $f \in B$ qui n'atteint son maximum que sur U. Il en résulte $\mathcal{E}(B) \subset s(B)$, d'où finalement $s(B) = \overline{\mathcal{E}(B)}$.

Théorème 25. — *Pour tout* $x \in Q$, *il existe* $\mu \in \mathcal{M}^1$, *portée par tout sous-ensemble* K-*souslinien de* Q *contenant* $\mathcal{E}(B)$, *et équivalente à* ε_x *dans le sens suivant*:

Pour toute $f \in B$, *on a* $f(x) = \mu(f)$.

Démonstration. — Il suffit de prendre pour μ une mesure maximale $\in \mathcal{M}^1(X)$, de résultante x, puisque d'après la proposition 19, une telle μ est portée par tout ensemble K-souslinien contenant $\mathcal{E}(X)$.

Lorsque Q est métrisable, l'ensemble $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(B)$ est un G_δ de Q, donc aussi un $K_{\sigma\delta}$, donc une telle μ est portée par $\mathcal{E}(B)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BAUER, Minimalstellen von Funktionen und Extremal-punkte II, *Arch. Math.* 11, 1960, pp. 200-205.

[2] H. BAUER. Silovscher Rand und Dirichletsches Problem, *Ann. Inst. Fourrier*, Grenoble, t. 11, 1961, pp. 89-136.

[3] E. BISHOP et K. DE LEEUW, The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 9, 1959, pp. 305-331.

[4] F. F. BONSALL, On the representation of the points of a convex set, *J. London math. Soc.* (à paraître).

[5] G. CHOQUET, Existence et unicité des représentations intégrales, *Séminaire Bourbaki*, Décembre 1956, 139, 15 pages.

[6] G. CHOQUET, Le Théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 10, 1960, pp. 333-344.

[7] G. CHOQUET. Forme abstraite du théorème de capacitabilité, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 9, 1959, pp. 83-89.

[8] G. CHOQUET, Remarques à propos de la démonstration d'unicité de P. A. Meyer, *Séminaire du Potentiel*, t. 6, 1962, n° 8, 13 pages.

[9] M. HERVÉ, Sur les représentations intégrales à l'aide des points extrémaux, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 253, 1961, p. 366-368.

[10] P. A. MEYER, Sur les démonstrations nouvelles du théorème de Choquet, *Séminaire du Potentiel*, t. 6, 1962, n° 7, 9 pages.

[11] G. MOKOBODZKI, Balayage défini par un cône convexe de fonctions, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 254, 1962, p. 803-805.

[19] G. MOKOBODZKI, Principe du balayage, principe de domination, *Séminaire d'initiation à l'Analyse*, 1re année, 1962, n° 1, 11 pages.