Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 2 (1993), 469-483

SOLUTION FORMELLE GEVREY D'UNE ÉQUATION SINGULIÈREMENT PERTURBÉE : LE CAS MULTIDIMENSIONNEL

par Mireille CANALIS-DURAND

1. INTRODUCTION

1.1. Présentation du problème.

Considérons l'équation différentielle singulièrement perturbée :

$$\epsilon \frac{d\xi}{dx} = G(\xi, x, \alpha, \epsilon) \tag{1}$$

où G est une fonction analytique des variables ξ, x et α sur $\mathcal{D} = D(\xi_0, r_1) \times D(0, r_2) \times D(\alpha_0, r_3) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ avec $r_1,\ r_2,\ r_3 > 0 \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et Gevrey 1 en ϵ pour $\epsilon \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ secteur d'ouverture strictement inférieure à π).

Cela veut dire qu'on associe de manière unique à la fonction G une série formelle en ϵ : $\sum\limits_{p\geq 0} \Gamma_p(\xi, x, \alpha)\ \epsilon^p$ où les fonctions $\Gamma_p(\xi, x, \alpha)$ sont analytiques sur $\mathcal{D}$ et telles que :

$$\exists K,\ L > 0 \ /\ \| \Gamma_p \|_{\mathcal{D}} \leq K\ L^p\ p!$$

Soit $S = \{(\xi, x) \in \mathbb{C}^n \times\ \mathbb{C} \ /\ G(\xi, x, \alpha_0, 0) = 0\}$ la courbe lente de l'équation singulière.

Nous faisons les hypothèses supplémentaires :

Mots-Clés : Equations différentielles – Développements asymptotiques – Séries Gevrey.
Classification A.M.S. : 34E05.

- Il existe une application $x \to \phi(x)$ analytique sur un voisinage ouvert I de 0 dans $\mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, telle que :
$$\phi(0) = \xi_0$$
$$et\ \ \forall x,\ x \in I,\ G(\phi(x), x, \alpha_0, 0) = 0.$$
- La fonction analytique définie par $u(x) = D_1G(\phi(x), x, \alpha_0, 0)$ est telle que $u(0)$ possède 0 comme valeur propre simple et $\dfrac{d}{dx}(\det u(x))_{x=0} \neq 0$.

Dans cet article, sous une hypothèse supplémentaire (H), détaillée plus loin, nous allons montrer que les solutions formelles en ϵ de l'équation différentielle singulière sont Gevrey 1 [7]. Ce résultat constitue une généralisation de [2] qui traite l'exemple de l'équation de Van der Pol et de [3] qui traite du cas unidimensionnel. Pour cette généralisation, nous nous sommes placés dans les hypothèses où G. Wallet démontre l'existence de solutions surstables [10]. Remarquons que le caractère Gevrey 1 des solutions formelles permet également, par des procédés de sommation approchée inspirés des théorèmes de sommation [4], [5], [8], d'obtenir l'existence de telles solutions modulo une décroissance exponentielle ainsi que les véritables solutions comme on le montre dans [2] sur un exemple .

Y. Sibuya a démontré le caractère Gevrey des solutions formelles dans le cas où la partie linéaire de l'équation perturbée est inversible [9]. Nous allons montrer la propriété Gevrey dans le cas d'une partie linéaire singulière et ceci par des méthodes de majorations directes.

1.2. Un changement de variable.

Redressons la situation en effectuant le changement de variable :
$$Z = \frac{\xi - \phi(x)}{\epsilon},\ x = x,\ a = \frac{\alpha - \alpha_0}{\epsilon}.$$
L'équation (1) devient alors :
$$\epsilon \frac{dZ}{dx} = u(x)Z + a\frac{\partial G}{\partial \alpha}(\phi(x), x, \alpha_0, 0) - \psi(x) + \epsilon F(Z, x, a, \epsilon). \tag{2}$$
La fonction G est une fonction analytique des variables ξ, x et α sur $D(\xi_0, r_1) \times D(0, r_2) \times D(\alpha_0, r_3)$ et Gevrey 1 en ϵ pour $\epsilon \in \mathcal{S}$. De plus, la

fonction ϕ est analytique sur I et $\phi(0) = \xi_0$, il existe donc un réel r, $r > 0$ tel que $\phi(D(0,r)) \subset D(\xi_0, r')$, $r' < \frac{r_1}{2}$.

Ainsi, $\psi(x)$ est une fonction analytique sur $D(0,r)$ et $F(Z,x,a,\epsilon)$ est une fonction analytique de Z, x et a sur $D\left(\xi_0, \frac{r_1}{2}\right) \times D(0,r) \times D(0,r_3)$ et Gevrey 1 en ϵ pour $\epsilon \in \mathcal{S}$, $|\ \epsilon\ | \leq 1$.

1.3. Découplage des équations.

Nous utilisons un résultat de V.I. Arnold [1] relatif aux formes normales afin de découpler l'équation (2).

THÉORÈME 1. — *Soit H_0 le supplémentaire stable par $u(0)$ de* $\ker u(0)$. *Il existe, sur un voisinage $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathbb{C}$, des fonctions analytiques λ, p, Λ :*

$$\lambda : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{avec } \lambda(0) \neq 0$$

$$p : \mathcal{U} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

$$\Lambda : \mathcal{U} \longrightarrow GL_{n-1}(\mathbb{C})$$

telles que, quel que soit x dans $\mathcal{U}$, l'endomorphisme $x \to p(x)u(x)p(x)^{-1}$ se décompose dans $\ker u(0) + H_0$ *sous la forme suivante :*

$$p(x)u(x)p(x)^{-1} = \begin{pmatrix} x\lambda(x) & 0 \\ 0 & \Lambda(x) \end{pmatrix}.$$

Notations. — Le théorème 1 permet, par le changement de variable $Y = p(x)Z$, de transformer l'équation (2) par projection sur $\ker u(0) + H_0$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ en :

$$\begin{cases} \epsilon \dfrac{dy_1}{dx} &= x\lambda(x)y_1 + \tilde{\mathcal{G}}(x, y_1, \tilde{y}, a, \epsilon) \\ \epsilon \dfrac{d\tilde{y}}{dx} &= \Lambda(x)\tilde{y} + \tilde{\mathcal{H}}(x, y_1, \tilde{y}, a, \epsilon) \end{cases} \quad \text{où } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \tilde{y} \end{pmatrix}.$$

Nous faisons l'hypothèse supplémentaire (H) :

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}(\phi(0), 0, \alpha_0, 0) \notin H_0.$$

Ainsi, la fonction définie par $s(x) = p(x)\dfrac{\partial G}{\partial \alpha}(\phi(x), x, \alpha_0, 0) \mid_{\ker u(0)}$ est telle que $s(0) \neq 0$. Le système différentiel que nous étudions s'écrit donc :

$$(E_a) \qquad \begin{cases} \epsilon \dfrac{dy_1}{dx} & = & xk(x)y_1 + a\ s(x) - \psi_1(x) + \epsilon\ \mathcal{G}(x, y_1, \tilde{y}, a, \epsilon) \\ \epsilon \dfrac{d\tilde{y}}{dx} & = & \Lambda(x)\tilde{y} + a\ t(x) - \psi_2(x) + \epsilon\ \mathcal{H}(x, y_1, \tilde{y}, a, \epsilon) \end{cases}$$

où s, t, λ, ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions analytiques de x et les fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des fonctions analytiques des variables x, y_1, $\tilde{y}$, a et Gevrey 1 en ϵ.

2. SÉRIES FORMELLES

Nous allons chercher les solutions formelles de (E_a). Nous appellerons :

$$\hat{y}_1 = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k f_k^1 \qquad \hat{a} = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k a_k$$

et dans $\mathbb{C}^{n-1}$:

$$\hat{\tilde{y}} = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k \tilde{f}_k \quad avec\ \tilde{f}_k = (f_k^2, ..., f_k^n).$$

Nous voulons déterminer les coefficients a_k de la série $\hat{a}$, les fonctions $f_k^1(x)$ définies en tout point d'un voisinage de 0, coefficients de la série $\hat{y_1}$ et les fonctions $\tilde{f}_k(x)$ définies en tout point d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n-1}$, coefficients de la série $\hat{\tilde{y}}$.

Injectons $\hat{y}_1$, $\hat{\tilde{y}}$ et $\hat{a}$ dans l'équation (E_a) et identifions les puissances de ϵ.

2.1. Le terme constant.

Nous avons :

$$0 = x\lambda(x)f_0^1(x) + a_0 s(x) - \psi_1(x)$$

$$0 = \Lambda(x)\tilde{f}_0(x) + a_0 t(x) - \psi_2(x).$$

Comme $f_0^1(x)$ ne possède pas de pôle en $x = 0$, il vient :

$$a_0 = \frac{\psi_1}{s}(0) \quad et \ f_0^1(x) = \frac{s(x)}{\lambda(x)} A\left(\frac{\psi_1(x)}{s(x)}\right)$$

où A est l'opérateur : $A(v(x)) := \dfrac{v(x) - v(0)}{x}$

$$\tilde{f}_0(x) = \Lambda^{-1}(x)(\psi_2(x) - a_0 t(x)).$$

Remarquons que les fonctions f_0^1 et $\tilde{f}_0$ sont holomorphes au voisinage de 0.

2.2. Le problème formel associé.

Soient $\sum_{p\geq 0} g_p(y_1, \tilde{y}, x, a)\epsilon^p$ et $\sum_{p\geq 0} h_p(y_1, \tilde{y}, x, a)\epsilon^p$ les séries formelles associées aux fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ Gevrey 1 en ϵ pour $\epsilon \in \mathcal{S}$. Ces séries formelles sont à coefficients analytiques en $(y_1, \tilde{y}, x, a)$ dans un voisinage V de $(f_0^1(0), \tilde{f}_0(0), 0, a_0)$ dans $\mathbb{C}^{n+2}$.

Le système (E_a) se ré-écrit alors formellement (F_a) :

$$\begin{cases} \epsilon \dfrac{dy_1}{dx} &= x\lambda(x)(y_1(x) - f_0^1(x)) + s(x)\ (a - a_0) + \epsilon \displaystyle\sum_{p\geq 0} g_p(y_1, \tilde{y}, x, a)\epsilon^p \\ \epsilon \dfrac{d\tilde{y}}{dx} &= \Lambda(x)(\tilde{y}(x) - \tilde{f}_0(x)) + t(x)(a - a_0) + \epsilon \displaystyle\sum_{p\geq 0} h_p(y_1, \tilde{y}, x, a)\epsilon^p. \end{cases}$$

Et en développant les fonctions analytiques g_p et h_p par rapport aux variables $(y_1, \tilde{y}, a)$ au voisinage de $(f_0^1(x), \tilde{f}_0(x), a_0)$, on obtient le système différentiel dans $\mathbb{C}\{x\}[[\epsilon]]$:

(3)
$$\epsilon \frac{dy_1}{dx} = x\lambda(x)(y_1(x) - f_0^1(x)) + s(x)(a - a_0) + \epsilon \sum_{p,\mathbf{q},r\geq 0} \alpha_{p\mathbf{q}r}(x)\epsilon^p (y - f_0)^{\mathbf{q}}(a - a_0)^r$$

(4)
$$\epsilon \frac{d\tilde{y}}{dx} = \Lambda(x)(\tilde{y}(x) - \tilde{f}_0(x)) + t(x)(a - a_0) + \epsilon \sum_{p,\mathbf{q},r\geq 0} \beta_{p\mathbf{q}r}(x)\epsilon^p (y - f_0)^{\mathbf{q}}(a - a_0)^r$$

où $\mathbf{q} := (q_1, ..., q_n)$ et $(y - f_0)^{\mathbf{q}} := (y_1 - f_0^1)^{q_1}(y_2 - f_0^2)^{q_2} ... (y_n - f_0^n)^{q_n}$.

D'après les hypothèses faites sur $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, il existe ξ positif tel que $\forall\, p, \mathbf{q}, r \geq 0$, les fonctions $\alpha_{p\mathbf{q}r}$ et $\beta_{p\mathbf{q}r}$ sont analytiques pour x dans $D(0, \xi)$.

Pour ce système différentiel, nous allons montrer que les solutions formelles $\hat{y}_1$ et $\hat{\tilde{y}}$ dans $\mathbb{C}\{x\}[[\epsilon]]$ et $\hat{a} \in \mathbb{C}[[\epsilon]]$ sont Gevrey 1 en ϵ. Nous aurons ainsi résolu le problème formel associé.

3. FORMULES DE RÉCURRENCE

Nous nous plaçons dans le cadre formel et nous étudions les équations (3) et (4). Les fonctions analytiques $k, s, f_0, \alpha_{p\mathbf{q}r}, \beta_{p\mathbf{q}r}, t$ et le nombre complexe a_0 sont des données du problème. Nous rappelons que nous cherchons à déterminer les coefficients a_k de la série $\hat{a}$, les fonctions $f_k^1(x)$ définies en tout point d'un voisinage de 0, coefficients de la série $\hat{y}_1$ et les fonctions $\tilde{f}_k(x)$ définies en tout point d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n-1}$, coefficients de la série $\hat{\tilde{y}}$.

3.1. Notations.

Pour $k \geq 0$, notons G_{k+1} (respectivement H_{k+1}) le coefficient de ϵ^k - considéré comme une fonction de x - dans :

$$\epsilon \sum_{p \geq 0} g_p(\hat{y}_1, \hat{\tilde{y}}, x, \hat{a})\ \epsilon^p$$

$\Bigg($ respectivement dans :

$$\epsilon \sum_{p \geq 0} h_p(\hat{y}_1, \hat{\tilde{y}}, x, \hat{a})\ \epsilon^p \Bigg).$$

- Hypothèse : Comme les majorations des fonctions f_k^l, $2 \leq l \leq n$, seront identiques, nous supposons sans perte de généralité que $n = 2$.
- Expression de G_{k+1} :

$$G_{k+1} = \sum_{p=0}^{k} B_p$$

où $B_k = \alpha_{k00}$ et pour $0 \leq p \leq k-1$:

$$B_p = \sum_{q_1+r=1}^{k-p} \sum_{q_2=1}^{k-p-(q_1+r)} \alpha_{pq_1q_2r} \Omega_{q_1,q_2,j_r,k-p} + \sum_{q_1+r=1}^{k-p} \alpha_{pq_10r} \Omega_{q_1,0,j_r,k-p} + \sum_{q_2=1}^{k-p} \alpha_{p0q_20} \Omega_{0,q_2,0,k-p}.$$

On notera : $f_{\bar{i}_k}$ le produit des fonctions $f_{i_1} f_{i_2} ... f_{i_k}$ et σ_{i_k} la somme $i_1 + ... + i_k$.

$$\Omega_{q_1,q_2,j_r,k-p} = \sum_{\sigma_{i_{q_1}} + \sigma_{i'_{q_2}} + \sigma_{j_r} = k-p} f^1{}_{\bar{i}_{q_1}} f^2{}_{\bar{i}'_{q_2}} a_{\bar{j}_r}$$

$$\Omega_{q_1,0,j_r,k-p} = \sum_{\sigma_{i_{q_1}} + \sigma_{j_r} = k-p} f^1{}_{\bar{i}_{q_1}} a_{\bar{j}_r}$$

$$\Omega_{0,q_2,0,k-p} = \sum_{\sigma_{i_{q_2}} = k-p} f^2{}_{\bar{i}_{q_2}}.$$

3.2. Les formules de récurrence.

THÉORÈME 2. — *Avec les notations précédentes, les coefficients a_k, $f_k^1(x)$ et $\tilde{f}_k(x)$ sont uniques et s'obtiennent à l'aide des formules de récurrence suivantes :*

$$a_{k+1} = \frac{f_k^{1\prime}(0) - G_{k+1}(0)}{s(0)} \tag{5}$$

$$f_{k+1}^1(x) = \frac{s}{\lambda}(x) A \left(\frac{f_k^{1\prime} - G_{k+1}}{s} \right)(x) \tag{6}$$

où A est l'opérateur : $A(v(x)) := \dfrac{v(x) - v(0)}{x}$

$$\tilde{f}_{k+1}(x) = \Lambda^{-1}(x)(\tilde{f}'_k - H_{k+1} - a_{k+1}\, t)(x). \tag{7}$$

Preuve. — Identifions les termes en facteur de ϵ^{k+1} dans l'équation (3) :

$$f_k^{1\prime}(x) = x\lambda(x) f_{k+1}^1(x) + s(x) a_{k+1} + G_{k+1}(x)$$

ainsi :

$$f_{k+1}^1(x) = \frac{s(x)}{\lambda(x)} \left(\frac{\dfrac{f_k^{1\prime}(x) - G_{k+1}(x)}{s(x)} - a_{k+1}}{x} \right).$$

Afin que $f_{k+1}^1(x)$ soit définie en 0, nous avons :

$$a_{k+1} = \frac{f_k^{1\prime}(0) - G_{k+1}(0)}{s(0)}$$

et

$$f^1_{k+1}(x) = \frac{s(x)}{\lambda(x)} A \left(\frac{f_k^{1\prime}(x) - G_{k+1}(x)}{s(x)} \right)$$

où A est l'opérateur défini précédemment.

Identifions les termes en facteur de ϵ^{k+1} dans l'équation (4) :

$$\tilde{f}'_k(x) = \Lambda(x)\tilde{f}_{k+1}(x) + a_{k+1}t(x) + H_{k+1}(x)$$

ainsi :

$$\tilde{f}_{k+1}(x) = \Lambda^{-1}(x)(\tilde{f}'_k - H_{k+1} - a_{k+1}\, t)(x).$$

Les fonctions f^1_{k+1} et $\tilde{f}_{k+1}$ sont holomorphes au voisinage de 0.

4. THÉORÈME DE MAJORATION

On va effectuer des majorations directes sur les formules de récurrence obtenues dans le théorème 2.

4.1. Les données du problème.

Soit ρ un réel positif non nul strictement inférieur au minimum des rayons de convergence des fonctions analytiques définies précédemment.

On prendra, pour les majorations, les normes suivantes :

$\| f^1_k \|_{t\rho} := \sup | f^1_k(x) |$ pour $x \in D(0, t\rho)$

$\| \tilde{f}_k \|_{t\rho} := \mathrm{Max} \| f^l_k \|_{t\rho}$ pour $2 \leq l \leq n$

$\| \Lambda \|_{t\rho} := \mathrm{Max} \| \Lambda_{i,j} \|_{t\rho}$ pour $1 \leq i, j \leq n-1$.

Soit c un réel dépendant de ρ qui vérifie les inégalités suivantes : $c > 2$, $c > \rho/2$ et c majore les normes suivantes :

$\left\| \frac{s}{\lambda} \right\|_\rho$; $\left\| \frac{1}{s} \right\|_\rho$; $\left\| \frac{\psi_1}{s} \right\|_\rho$; $\| \psi_2 \|_\rho$; $\| \Lambda^{-1} \|_\rho$; $\| \alpha_{000} \|_\rho$; $\| \beta_{000} \|_\rho$; $\| t \|_\rho$; $\| {f_0}^1 \|_\rho$; $\| \tilde{f}_0 \|_\rho$; $| a_0 |_\rho$.

De plus, c vérifie $\| \alpha_{p\mathbf{q}r} \|_\rho \leq c^{p+|q|+r}\, p!$ où $| q | := q_1 + ... + q_n$ (et de même pour les fonctions $\beta_{p\mathbf{q}r}$).

4.2. Les outils de la démonstration.

4.2.1. Lemme de majoration des dérivées [6].

Soit f analytique sur un disque de rayon ρ, soit $t_0 \in [0,1[$ et soit $k \geq 0$:

$$\forall\, t, t_0 \leq t < 1, \quad \| f \|_{t\rho} \leq \frac{M}{(1-t)^k}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\, t, t_0 \leq t < 1, \quad \| f' \|_{t\rho} \leq \frac{M\ (k+1)\ e}{(1-t)^{k+1}\rho}.$$

4.2.2. Majoration de $\| A(f) \|$.

Soit f analytique sur un disque de rayon ρ, soit $t_0 \in]0,1[$. On a alors :

$$\forall\, t, t_0 \leq t < 1, \quad \| A(f) \|_{t\rho} \leq \frac{2}{\rho t_0} \| f \|_{t\rho}.$$

4.2.3. Combinatoire.

- Appelons $S_{k,n}$ la quantité :

$$S_{k,n} = \sum_{i_1+\ldots+i_k \;=\; n,\; i_1 \geq 1, \ldots, i_k \geq 1} i_1!\ i_2! \ldots i_k!.$$

Nous avons la majoration :

$$S_{k,n} \leq 4^{k-1}\ (n+1-k)!.$$

Cette majoration se montre par récurrence sur l'entier k. Nous avons :

$$S_{2,n} = 1!\ (n-1)! + 2!\ (n-2)! + \ldots + (n-2)!\ 2! + (n-1)!\ 1! \leq 4\ (n-1)!.$$

Supposons la majoration vraie jusqu'à l'ordre k, $k \geq 2$.

$$S_{k+1,n} = \sum_{l=1}^{n-k} l!\ S_{k,n-l} \leq \sum_{l=1}^{n-k} l!\ 4^{k-1}\ (n+1-l-k)!$$

or

$$\sum_{l=1}^{n-k} l!\ (n+1-l-k)! \leq 4\ (n-k)!$$

donc

$$S_{k+1,n} \leq 4^{k-1} \sum_{l=1}^{n-k} l!\ (n+1-l-k)! \leq 4^k\ (n-k)!$$

- Appelons ${T^c}_n$ la quantité :

$$ {T^c}_n = \sum_{k=0}^{n-1} c^k\ (n-k)!.$$

Nous avons la majoration :

$$ {T^c}_n \leq\ e^c\ n!$$

en effet :

$$\frac{1}{n!}{T^c}_n = \sum_{k=0}^{n-1} c^k\ \frac{(n-k)!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c^k}{k!}\ \leq\ e^c.$$

4.3. Majoration de a_1, f_1^1 et $\tilde{f}_1$.

Nous supposons que la constante c, définie précédemment, vérifie de plus : $c > \frac{e}{\rho}$ et $c > \frac{2}{\rho t_0}$.

D'après les formules de récurrence (5), (6) et (7), nous avons :

$$a_1 = \frac{f_0^{1'} - G_1}{s}(0) \quad d'où \quad |\ a_1\ |\leq \frac{2c^3}{(1-t)}$$

$$f_1^1 = \frac{s}{\lambda}A\left(\frac{f_0^{1'} - G_1}{s}\right) \quad d'où \quad \|\ f_1^1\ \|\leq \frac{2c^5}{(1-t)}$$

$$\tilde{f}_1 = \Lambda^{-1}(\tilde{f}_0' - H_1 - a_1 t) \quad d'où \quad \|\ \tilde{f}_1\ \|\leq \frac{4c^5}{(1-t)}.$$

4.4. Le théorème de majoration.

THÉORÈME 3. — *Soient ρ et c définis précédemment et soit t_0 réel, $0 < t_0 < 1$. Quel que soit $t \in [t_0, 1[$, les séries $\sum_{k\geq 0} f_k^i(x)\epsilon^k$, pour $1 \leq i \leq n$ sont Gevrey 1 pour $x \in D(0, t\rho)$ et $\sum_{k\geq 0} a_k\epsilon^k$ est Gevrey 1. Plus précisément, quel que soit $k \geq 1$:*

$$| a_k | \leq \frac{M^k}{(1-t)^k}\ k!$$

$$\| f_k^1 \|_{t\rho} \leq \frac{M^k}{(1-t)^k}\ k! \qquad .$$

$$\| \tilde{f}_k \|_{t\rho} \leq \frac{M^k}{(1-t)^k}\ k!$$

où $M = 14c^5e^{8c}$.

Preuve. — D'après les formules de récurrence (5), (6) et (7),

$$a_{k+1} = \frac{f_k^{1'} - G_{k+1}}{s}(0) \quad \textit{d'où}\ | a_{k+1} | \leq c\ (\| f_k^{1'} \|_{t\rho} + \| G_{k+1} \|_{t\rho})$$

$$f_{k+1}^1 = \frac{s}{\lambda} A\left(\frac{f_k^{1'} - G_{k+1}}{s}\right) \quad \textit{d'où}\ \ \| f_{k+1}^1 \|_{t\rho} \leq\ c^3\ (\| f_k^{1'} \|_{t\rho} + \| G_{k+1} \|_{t\rho})$$

$$\tilde{f}_{k+1} = \Lambda^{-1}(\tilde{f}_k' - H_{k+1} - a_1 t) \ \ \textit{d'où}\ \ \| \tilde{f}_{k+1} \|_{t\rho} \leq\ c\ (\| \tilde{f}_k' \|_{t\rho} + \| H_{k+1} \|_{t\rho} + | a_{k+1} |\ \ \| t \|_{t\rho}).$$

On est donc amené à majorer $\| G_{k+1} \|_{t\rho}$ et $\| H_{k+1} \|_{t\rho}$. Le choix de la constante c permet de donner une même majoration des deux quantités précédentes.

De plus, la preuve du théorème va découler du lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit $(u_n)_n$ une suite définie par :*

$$u_1 \textit{ donné et } u_{n+1} \leq\ \alpha\ (n+1)\ u_n + \beta u_n\ , \qquad u_1, \alpha, \beta > 0$$

alors

$$u_{n+1} \leq u_1\ M^n\ (n+1)! \textit{ où } M = \alpha + \beta.$$

La preuve de ce lemme est triviale et on appliquera le résultat de ce lemme à la suite $u_k = \mathrm{Max}(\| f_k^1 \|_{t\rho}, \| \tilde{f}_k \|_{t\rho})$.

4.4.1. Majoration de $\| G_{k+1} \|_{t\rho}$.

LEMME 2. — *Soit* $u_k = \mathrm{Max}(\| f_k^1 \|_{t\rho}, \| \tilde{f}_k \|_{t\rho})$. *Si l'on suppose que* u_k *est majoré par une quantité du type annoncé, à savoir* $\frac{M^k}{(1-t)^k}\, k!$, *alors :*

$$\| G_{k+1} \|_{t\rho} \leq \gamma u_k \quad \text{où } \gamma = 13c^2 e^{8c}.$$

Preuve du lemme.

$$\| G_{k+1} \|_{t\rho} \leq \sum_{p=0}^{k} \| B_p \|_{t\rho}$$

$$\| B_k \|_{t\rho} \leq c^k\, k!$$

et pour $0 \leq p \leq k-1$:

$$\begin{aligned} \| B_p \|_{t\rho} \leq \sum_{q_1+r=1}^{k-p} \sum_{q_2=1}^{k-p-(q_1+r)} & c^{p+q_1+q_2+r} p! \| \Omega_{q_1,q_2,j_r,k-p} \|_{t\rho} \\ & + \sum_{q_1+r=1}^{k-p} c^{p+q_1+r} p! \| \Omega_{q_1,0,j_r,k-p} \|_{t\rho} \\ & + \sum_{q_2=1}^{k-p} c^{p+q_2} p! \| \Omega_{0,q_2,0,k-p} \|_{t\rho}. \end{aligned}$$

• Or :

$$\| \Omega_{q_1,q_2,j_r,k-p} \|_{t\rho} \leq \sum_{\sigma_{i_{q_1}} + \sigma_{i'_{q_2}} + \sigma_{j_r} = k-p} \| f^1{}_{\bar{i}_{q_1}} f^2{}_{\bar{i}'_{q_2}} a_{\bar{j}_r} \|_{t\rho}$$

$$\| \Omega_{q_1,q_2,j_r,k-p} \|_{t\rho} \leq \frac{M^{k-p}}{(1-t)^{k-p}} \sum_{\sigma_{i_{q_1}} + \sigma_{i'_{q_2}} + \sigma_{j_r} = k-p} i_1! \ldots i_{q_1}! i'_1! \ldots i'_{q_2}! j_1! \ldots j_r!.$$

D'après la notation $S_{q_1+q_2+r,k-p}$ du paragraphe (2.2.3), nous avons :

$$\| \Omega_{q_1,q_2,j_r,k-p} \|_{t\rho} \leq \frac{M^{k-p}}{(1-t)^{k-p}} S_{q_1+q_2+r,k-p}.$$

D'après les majorations du paragraphe (2.2.3), nous avons :

$$\| \Omega_{q_1,q_2,j_r,k-p} \|_{t\rho} \leq \frac{M^{k-p}}{(1-t)^{k-p}} 4^{q_1+q_2+r-1} (k-p+1-q_1-q_2-r)!.$$

- De même, nous avons :

$$\| \Omega_{q_1,0,j_r,k-p} \|_{t\rho} \leq \sum_{\sigma_{i_{q_1}}+\sigma_{j_r}=k-p} \| f^1{}_{\bar{i}_{q_1}} a_{\bar{j}_r} \|_{t\rho}$$

$$\| \Omega_{q_1,0,j_r,k-p} \|_{t\rho} \leq \frac{M^{k-p}}{(1-t)^{k-p}} 4^{q_1+r-1} (k-p+1-q_1-r)!.$$

- Et également :

$$\| \Omega_{0,q_2,0,k-p} \|_{t\rho} \leq \sum_{\sigma_{i_{q_2}}=k-p} \| f^2{}_{\bar{i}_{q_2}} \|_{t\rho}$$

$$\| \Omega_{0,q_2,0,k-p} \|_{t\rho} \leq \frac{M^{k-p}}{(1-t)^{k-p}} 4^{q_2-1} (k-p+1-q_2)!.$$

En reportant les inégalités précédentes dans l'expression de B_p, il vient :

$$\| B_p \|_{t\rho} \leq \left(\frac{c(1-t)}{M}\right)^p p!\, c \frac{M^k}{(1-t)^k} \sum_{q_1+r=1}^{k-p} (4c)^{q_1+r-1}$$
$$\sum_{q_2=1}^{k-p-(q_1+r)} (4c)^{q_2} (k-p+1-(q_1+r)-q_2)!$$
$$+ \left(\frac{c(1-t)}{M}\right)^p p!\, c \frac{M^k}{(1-t)^k} \sum_{q_1+r=1}^{k-p} (4c)^{q_1+r-1} (k-p+1-(q_1+r))!$$
$$+ \left(\frac{c(1-t)}{M}\right)^p p!\, c \frac{M^k}{(1-t)^k} \sum_{q_2=1}^{k-p} (4c)^{q_2-1} (k-p+1-q_2)!.$$

D'après les majorations du paragraphe (2.2.3), nous avons :

$$\| B_p \|_{t\rho} \leq \left(\frac{c(1-t)}{M}\right)^p p!\, c\, \frac{M^k}{(1-t)^k}\, 4c\, e^{4c} \sum_{q_1+r=1}^{k-p} (4c)^{q_1+r-1}\, (k-p+1-(q_1+r))!$$
$$+2 \left(\frac{c(1-t)}{M}\right)^p p!\, c\, \frac{M^k}{(1-t)^k}\, e^{4c}\, (k-p)!.$$

Enfin :

$$\| B_p \|_{t\rho} \leq\ 6c^2 e^{8c}\, \frac{M^k}{(1-t)^k} \left(\frac{c(1-t)}{M}\right)^p p!(k-p)!.$$

Et :

$$\| G_{k+1} \|_{t\rho} \leq\ c^k\ k!\ +\ 6c^2 e^{8c}\, \frac{M^k}{(1-t)^k} \sum_{p=0}^{p=k-1} \left(\frac{c(1-t)}{M}\right)^p p!(k-p)!$$

$$\| G_{k+1} \|_{t\rho} \leq\ c^k\ k!\ +\ 6c^2 e^{8c}\, \frac{M^k}{(1-t)^k}\ 2\ k! \quad car\ c \leq M.$$

Ainsi : $\| G_{k+1} \|_{t\rho} \leq\ \gamma\ u_k$ avec $\gamma = 13c^2 e^{8c}$.

4.4.2. Fin de la preuve du théorème de majoration.

Les expressions de f^1_{k+1} et de $\tilde{f}_{k+1}$ nous donnent :

$$\| f^1_{k+1} \|_{t\rho} \leq \frac{c^4}{(1-t)}(k+1)\ u_k + c^3 \gamma u_k$$

$$\| \tilde{f}_{k+1} \|_{t\rho} \leq \frac{c^2+c^3}{(1-t)}(k+1)\ u_k + (c+c^2)\gamma u_k.$$

D'après la définition de u_k et puisque $c > 2$, nous avons :

$$u_{k+1} \leq \frac{c^4}{(1-t)}(k+1)\ u_k + \frac{c^3\gamma}{(1-t)} u_k.$$

Il résulte du lemme 1 que :

$$u_{k+1} \leq \left(\frac{c^4+c^3\gamma}{(1-t)}\right)^k (k+1)!\ u_1.$$

D'après la valeur de γ et puisque $u_1 = \dfrac{4c^5}{(1-t)}$, on conclut que :

$$u_{k+1} \leq \frac{(14c^5e^{8c})^{k+1}}{(1-t)^{k+1}}(k+1)!.$$

De plus, $|a_{k+1}|$ est inférieur à $\| f^1_{k+1} \|_{t\rho}$, ce qui termine la preuve du théorème.

Remerciements : Je remercie B. Candelpergher de l'Université de Nice pour ses remarques et ses suggestions ainsi que les organisateurs du Séminaire d'Analyse Complexe de l'Université de Provence qui m'ont permis de simplifier la présentation des majorations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.I. ARNOLD, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, MOSCOU, Editions MIR, 1978.

[2] M. CANALIS-DURAND, Formal Expansion of van der Pol Equation Canard Solutions are Gevrey. Dynamic Bifurcations, 1990, Springer-Verlag, pp. 29-39.

[3] M. CANALIS-DURAND, Solution formelle Gevrey d'une équation singulièrement perturbée, Université de Nice, prépublication 277 (1990).

[4] B. CANDELPERGHER, Une introduction à la résurgence, Gazette des Mathématiciens, 42 (1989), 31-64.

[5] J. ECALLE, Les fonctions résurgentes. Université de Paris Sud, prépublication (1985), Tomes 1-3.

[6] B. MALGRANGE, Frobenius avec singularités-1. Codimension un, Publ. Math. IHES, 46 (1976), 163-173.

[7] J.P. RAMIS, Dévissage Gevrey. Journées singulières de Dijon, 1978, Astérisque, 59-60 (1978), 173-204.

[8] J.P. RAMIS, Les séries k-sommables et leurs applications, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 126 (1980).

[9] Y. SIBUYA, Gevrey property of formal solutions in a parameter. School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota 55455 USA, 1989, Preprint.

[10] G. WALLET, Overstability in Arbitrary Dimension. Dynamic Bifurcations, 1990, Springer-Verlag, pp. 57-70.

Manuscrit reçu le 15 juillet 1992,
révisé le 9 novembre 1992.

Mireille CANALIS-DURAND,
Université d'Aix-Marseille III
FEA - Laboratoire LMA
3, avenue Robert Schuman
13628 Aix-en-Provence (France).