Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 1 (1993), 251–263

CONTRACTIONS À SPECTRE DÉNOMBRABLE ET PROPRIÉTÉS D'UNICITÉ DES FERMÉS DÉNOMBRABLES DU CERCLE

par Mohamed ZARRABI

---

1. Introduction.

Soit X un espace de Banach et T un opérateur linéaire borné et inversible sur X. Nous montrons (Théorème 3.1) que si T est une contraction à spectre dénombrable et si

(1) $$\|T^{-n}\| = 0(e^{\epsilon n^{1/2}})(n \to +\infty) \text{ pour tout } \epsilon > 0,$$

alors T est une isométrie.

Le fait que le spectre de T soit dénombrable est une condition nécessaire pour obtenir un tel résultat. En effet, pour tout fermé E non dénombrable du cercle unité Γ on construit une contraction T à spectre contenu dans E et vérifiant (1), telle que $\|T^{-n}\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Soit E un fermé de Γ. On dit que E est un ensemble de multiplicité s'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ non identiquement nulle telle que $\sum\limits_{|n|\le m} c_n e^{int} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $e^{it} \in \Gamma\backslash E$. Un ensemble est dit d'unicité s'il n'est pas de multiplicité.

Il est bien connu que E est d'unicité si et seulement si toute pseudo-mesure μ à support dans E vérifiant $\hat{\mu}(n) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ est nulle.

Mots-clés : Contractions – Hyperdistributions – Unicité – Ensembles dénombrables – Synthèse spectrale.
Classification A.M.S. : 47A30 – 42A63 – 43A45.

Cantor a montré en 1872 que si E est dénombrable à "dérivation finie" alors E est d'unicité [6]. Ensuite Young a montré en 1907 que tout fermé dénombrable est d'unicité (le théorème de Salem-Zygmund [6] donne des exemples de parfaits de mesure nulle de multiplicité et des parfaits de mesures nulles d'unicité).

Il est bien connu que si E est dénombrable et si μ est une pseudomesure à support dans E avec $\hat{\mu}(n) \underset{n \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\mu = 0$ (ceci résulte du fait que $\hat{\mu}$ est presque périodique [7], Théorème VI-5-22).

Nous montrons en fait (corollaire 2.7) que si E est dénombrable alors toute hyperdistribution μ à spectre dans E telle que $|\hat{\mu}(n)| = 0(e^{\epsilon\sqrt{n}})(n \to +\infty)$ pour tout $\epsilon > 0$ et telle que $\hat{\mu}(n) \underset{n \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ est nulle.

Ceci donne une propriété d'unicité extrêmement forte des fermés dénombrables. Nous donnons également à la fin de ce travail un exemple qui montre que la propriété ci-dessus est trivialement fausse pour les fermés non dénombrables. Notons que nous avons obtenu ces résultats en établissant un résultat plus général sur les hyperdistributions à valeurs dans un espace de Banach.

Je tiens à remercier les Professeurs J. Esterle et W. Arendt pour les fructueuses discussions que j'ai eues avec eux, discussions qui sont à l'origine de cet article. Je tiens également à remercier le rapporteur qui m'a suggéré la remarque 2.c.

2. Propriétés d'unicité des ensembles dénombrables.

Soient Γ le cercle unité et $A(\Gamma)$ l'ensemble des fonctions

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\theta} \quad \text{avec} \quad \|f\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty,$$

où

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

A^+ est la sous algèbre de $A(\Gamma)$ formée par les fonctions à coefficients de Fourier négatifs nuls.

Soit $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de réels avec $w_n \geq 1 (n \in \mathbb{Z})$ telle que $w_{n+m} \leq w_n w_m$ pour tout $n,\ m \in \mathbb{Z}$. On dit alors que w est un poids.

L'algèbre de Beurling $A_w(\Gamma)$ définie par le poids w est l'ensemble des fonctions

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)e^{in\theta} \text{ avec } \|f\|_w = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)|w_n < +\infty.$$

L'algèbre $A_w(\Gamma)$ est régulière si et seulement si

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{\log w_n}{1+n^2} < +\infty \quad [7], \text{p.118, Ex.7.} \tag{2}$$

Si I est un idéal fermé de $A_w(\Gamma)$ on pose

$$h(I) = \{z \in \Gamma : f(z) = 0, (f \in I)\}.$$

Soit E une partie fermée de Γ. On note par $A_w(E)$ [resp. $A(E)$] l'algèbre des restrictions à E des fonctions de $A_w(\Gamma)$ [resp. $A(\Gamma)$].

Posons

$$I_w(E) = \{f \in A_w(\Gamma) : f = 0 \text{ sur } E\}$$
$$I(E) = \{f \in A(\Gamma) : f = 0 \text{ sur } E\}.$$

On note $J_w(E)$ [resp. $J(E)$] l'adhérence dans $A_w(\Gamma)$ [resp. A(Γ)] de l'ensemble des $f \in A_w(\Gamma)$ nulle au voisinage de E.

On dit que f vérifie la w-synthèse [resp. la synthèse] pour E si $f \in J_w(E)$ [resp. $J(E)$]. On dit que E est un ensemble de w-synthèse [resp. de synthèse] quand

$$J_w(E) = I_w(E) \quad [\text{resp. } J(E) = I(E)].$$

On dira que w est un poids d'Atzmon s'il vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} w_n = 1 \text{ pour } n \geq 0 \\ w_{-n} = 0(e^{\epsilon\sqrt{n}})(n \to +\infty) \text{ pour tout } \epsilon > 0. \end{cases} \tag{3}$$

On note par W l'ensemble des poids d'Atzmon.

Il est montré dans [8] que les fermés dénombrables du cercle vérifient la w-synthèse pour tous les poids $w \in W$, et que ce résultat est faux pour une large classe de fermés de mesure nulle du cercle.

Rappelons la notion d'ensemble de type AA^+. Si E est un fermé du cercle on pose $I^+(E) = \{f \in A^+ : f = 0 \text{ sur } E\}$ et on note par $A^+(E)$ l'algèbre des restrictions à E des fonctions de A^+. On a $A^+(E) = A^+/I^+(E)$ et $A^+(E)$ s'identifie continûment à une sous algèbre de $A(E)$. On dit que E est un ensemble de type ZA^+ si $I^+(E) \neq \{0\}$ et on dit que E est de type AA^+ si $A^+(E) = A(E)$. Quand l'isomorphisme entre $A^+(E)$ et $A(E)$ est isométrique on dit que E est un ensemble de type AA^+ isométrique.

Soit α la fonction $z \to z$ et $\theta : A^+ \to A^+(E)$ l'application canonique. Alors E est de type AA^+ si et seulement si E est de type ZA^+ et $\sup_{n\geq 0} \|\theta(\alpha)^{-n}\| < +\infty$ et E est de type AA^+ isométrique si et seulement si E est de type ZA^+ et $\|\theta(\alpha)^{-1}\| = 1$ (voir [5]).

Kahane et Katznelson ont montré dans [5] Théorème 2, que les fermés dénombrables sont de type AA^+ isométrique.

DÉFINITION 2.1. — *Soit X un espace de Banach. On appelle hyperdistribution dans X toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbf{Z}} \subset X$ telle que* $\overline{\lim}_{|n|\to+\infty} \|x_n\|^{\frac{1}{n}} \leq 1$.

On note par $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des hyperdistributions dans X. A chaque $x \in \mathcal{H}(X)$ sont associées deux fonctions analytiques :

$$x^+(z) = \sum_{n\geq 0} z^n x_n \qquad |z| < 1.$$

$$x^-(z) = -\sum_{n<0} z^n x_n \qquad |z| > 1.$$

Réciproquement la donnée de deux fonctions analytiques x^+ et x^- définies respectivement sur D et $\mathbb{C}\backslash\bar{D}$, avec $x^-(z) \to 0$ quand $|z| \to \infty$ définit une hyperdistribution x et l'application $x \to (x^+, x^-)$ est évidemment bijective.

DÉFINITION 2.2. — *Le spectre de $x \in \mathcal{H}(X)$ est le plus petit fermé S de Γ tel qu'il existe une fonction analytique sur $\mathbb{C}\backslash S$, à valeurs dans X qui coïncide avec x^+ sur D et x^- sur $\mathbb{C}\backslash\bar{D}$.*

Soit w un poids vérifiant (2). On note par X_w^∞ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}} \subset X$ tel que $\sup_{n\in\mathbf{Z}} \dfrac{\|x_n\|}{w_{-n}} < +\infty$. Considérons l'opération de $A_w(\Gamma)$ sur X_w^∞ définie par :

$$f.x = \left(\sum_{m\in\mathbf{Z}} \hat{f}(m) x_{n-m}\right)_{n\in\mathbf{Z}} \qquad (x \in X_w^\infty, f \in A_w(\Gamma)).$$

On a $\|f.x\|_w^\infty \leq \|f\|_w \|x\|_w^\infty$ où $\|.\|_w^\infty$ est la norme sur X_w^∞ définie par

$$\|x\|_w^\infty = \sup_{n\in\mathbf{Z}} \frac{\|x_n\|}{w_{-n}} \quad (x \in X_w^\infty).$$

On montre facilement le résultat suivant :

PROPOSITION 2.3. — *L'opération ci-dessus induit sur X_w^∞ une structure de $A_w(\Gamma)$-module de Banach.*

Pour $f \in A_w(\Gamma)$ et $x \in X_w^\infty$ on pose

$$< f, x >= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(-n) x_n.$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

$$< f, x >= \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \left[x^+(re^{i\theta}) - x^-\left(\frac{e^{i\theta}}{r}\right)\right] d\theta. \tag{4}$$

$$x^+(z) =< \alpha(\alpha - z)^{-1}, x > \qquad |z| < 1. \tag{5}$$

$$x^-(z) =< \alpha(\alpha - z)^{-1}, x > \qquad |z| > 1. \tag{6}$$

Notons que pour $X = \mathbb{C}$ on retrouve la notion classique d'hyperdistribution [6] Appendice I.

THÉORÈME 2.4. — *Soit w un poids vérifiant (2) et $x \in X_w^\infty$. Alors le spectre de x est égal à $h(x^\perp)$ où*

$$x^\perp = \{f \in A_w(\Gamma) : f.x = 0\}.$$

Preuve. — Soit E le spectre de x. Il existe une fonction φ analytique sur $\mathbb{C} \setminus E$ telle que :

$$\varphi(z) = x^+(z) \text{ pour } |z| < 1$$

$$\varphi(z) = x^-(z) \text{ pour } |z| > 1.$$

Si f est nulle au voisinage de E il résulte immédiatement de (4) que $< f, x >= 0$. On en déduit par continuité que $< f, x >= 0$ pour tout $f \in J_w(E)$.

Si $f \in J_w(E)$ alors $\alpha^n f \in J_w(E)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et par conséquent $< \alpha^n f, x >= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n - m) x_m = 0$. On en déduit que $f \in x^\perp$ et $J_w(E) \subset x^\perp$. Donc $h(x^\perp) \subset h(J_w(E)) = E$.

Soit $\pi : A_w(\Gamma) \to A_w(\Gamma)/x^\perp$ la surjection canonique et $\varphi : A_w(\Gamma) \to X$, $f \to < f, x >$. Si $f \in x^\perp$ on a $< f, x >= 0$ et donc $x^\perp \subset \ker \varphi$. Il existe alors $\tilde{\varphi} : A_w(\Gamma)/x^\perp \to X$ tel que $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$. On a

$$\begin{aligned} x^+(z) &=< \alpha(\alpha - z)^{-1}, x > \\ &= \varphi(\alpha(\alpha - z)^{-1}) \\ &= \tilde{\varphi}(\pi(\alpha)(\pi(\alpha) - z)^{-1}). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} x^-(z) &=< \alpha(\alpha - z), x > \\ &= \tilde{\varphi}(\pi(\alpha)(\pi(\alpha) - z)^{-1}). \end{aligned}$$

$x^\perp$ est un idéal fermé de $A_w(\Gamma)$. De plus les caractères de $A_w(\Gamma)$ sont les applications $\chi_z : f \to f(z)$ avec $|z| = 1$ et les caractères de $A_w(\Gamma)/x^\perp$ sont les applications $\pi(f) \to f(z)$ avec $z \in h(x^\perp)$. Donc $\mathrm{Sp}\pi(\alpha) = h(x^\perp)$. L'application $z \to (\pi(\alpha) - z)^{-1}$ est alors analytique sur $\mathbb{C} \backslash h(x^\perp)$. On en déduit que $E \subset h(x^\perp)$ et donc $E = h(x^\perp)$, ce qui achève la démonstration.

Soit $\mathcal{A}(X) = \left\{ x \in \mathcal{H}(X) : \sup_{n<0} \|x_n\| < +\infty \text{ et } \dfrac{\log^+ \|x_n\|}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$.
Le lemme suivant découle d'un calcul élémentaire qui se trouve dans la preuve de [8], Théorème 3.1.

LEMME 2.5. — *On a* $\mathcal{A}(X) = \bigcup_{w \in W} X_w^\infty$.

THÉORÈME 2.6. — *Soit $x \in \mathcal{A}(X)$. On suppose que le spectre de x est dénombrable. Alors la suite $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée et*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| = \sup_{n \leq 0} \|x_n\| = \overline{\lim_{n \to -\infty}} \|x_n\|.$$

Preuve. — Soit E le spectre de x. D'après le lemme 2.5, il existe un poids $w \in W$ tel que $x \in X_w^\infty$. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : A_w(\Gamma) &\to X \\ f &\to < f, x > . \end{aligned}$$

Comme w vérifie (2) on a $h(x^\perp) = E$ d'après le théorème 2.4. Puisque les ensembles dénombrables vérifient la w-synthèse [8] §3, on a $x^\perp = I_w(E)$. D'autre part $\varphi(x)$ est le terme d'ordre 0 de la suite $f.x$ donc $x^\perp \subset \ker\varphi$, $I_w(E) \subset \ker\varphi$ et $I^+(E) = I_w(E) \cap A^+ \subset \ker\varphi$.

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A^+ \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"'] & A_w(\Gamma) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & X \\ A^+(E) \arrow[r, "j"] & A_w(E) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

où π et θ sont les surjections canoniques, i et j sont les injections naturelles et où $\tilde{\varphi}$ est définie par $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$. De plus on a

$$\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\| \text{ et } \|\tilde{\varphi} \circ j\| = \|\varphi \circ i\|.$$

Soit $f \in A^+$. On a

$$\begin{aligned}\|(\varphi \circ i)(f)\| &= \|\sum_{n \geq 0} \hat{f}(n) x_{-n}\| \\ &\leq \Big(\sup_{n \leq 0} \|x_n\|\Big)\|f\|_1.\end{aligned}$$

On en déduit que $\|\tilde{\varphi} \circ j\| \leq \sup_{n \leq 0} \|x_n\|$. Donc

$$\begin{aligned}\|x_m\| = \|\varphi(\alpha^{-m})\| = \|\tilde{\varphi}(\pi(\alpha)^{-m})\| &= \|(\tilde{\varphi} \circ j)\theta(\alpha)^{-m})\| \\ &\leq \Big(\sup_{n \leq 0} \|x_n\|\Big)\|\theta(\alpha)^{-m}\|.\end{aligned}$$

Comme les fermés dénombrables de Γ sont de type AA^+ isométrique on a $\|\theta(\alpha)^{-m}\| = 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Ceci entraîne que

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| = \sup_{n \leq 0} \|x_n\|.$$

Or pour tout $p \geq 0$, $\alpha^p.x = (x_{n-p})_{n \in \mathbb{Z}}$ et

$$(\alpha^p.x)^+(z) = \alpha^p x^+(z) + \sum_{0 \leq n < p} x_{n-p} z^n \text{ pour } |z| < 1.$$

On a de même

$$(\alpha^p.x)^-(z) = \alpha^p x^-(z) + \sum_{0 \leq n < p} x_{n-p} z^n \text{ pour } |z| > 1.$$

On voit donc que le spectre de $\alpha^p.x$ est E et d'après ce qui précède on a $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| = \sup_{n \leq -p} \|x_n\|$. Ceci montre que $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\| = \overline{\lim}_{n \to -\infty} \|x_n\|$, ce qui achève la démonstration.

Comme conséquence de ce résultat, nous allons maintenant donner le corollaire qui met en évidence les propriétés d'unicité très fortes des ensembles dénombrables annoncées dans l'introduction.

Soit μ une hyperdistribution au sens de [6], Appendice 1. Notons que le spectre de μ coïncide avec le support de μ défini dans [6]. La suite associée à μ, appelée suite des coefficients de Fourier de μ, sera notée $(\hat{\mu}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. On dit que μ est une pseudomesure si $\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)| < +\infty$.

Soit E un fermé de Γ. On note par $HD(E)$ [resp. $PM(E)$] l'ensemble des hyperdistributions [resp. pseudomesures] à spectre contenu dans E; $PM(\Gamma)$ s'identifie au dual de $A(\Gamma)$. La norme de $\mu \in PM(\Gamma)$ est définie par $\|\mu\|_{PM} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)|$. On a le résultat suivant qui découle immédiatement du théorème 2.6 :

COROLLAIRE 2.7. — *Soit E un fermé dénombrable de Γ et soit $\mu \in HD(E)$. Si $\sup_{n<0} |\hat{\mu}(n)| < +\infty$ et $\dfrac{\log^+ |\hat{\mu}(n)|}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\mu \in PM(E)$ et $\|\mu\|_{PM} = \overline{\lim}_{n\to-\infty} |\hat{\mu}(n)|$. En particulier si $\hat{\mu}(n) \longrightarrow 0$ alors $\mu = 0$.*

Remarque 1. — Si $\overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{\log^+ |\hat{\mu}(n)|}{\sqrt{n}} > 0$ alors la conclusion du corollaire 2.7 est fausse. En effet, soit $\epsilon > 0$ et $\mu(z) = e^{-\epsilon\frac{z+1}{z-1}} - e^{-\epsilon}$ ($z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$); μ définit une hyperdistribution non nulle de spectre $\{1\}$. Si $\nu(z) = \mu\left(\dfrac{1}{z}\right) - \mu(0)$ ($z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$), alors ν définit aussi une hyperdistribution de spectre $\{1\}$ et on a pour $|z| < 1$,

$$\sum_{n\geq 0} \hat{\nu}(n)z^n = -\mu(0) - \sum_{n<0} \hat{\mu}(n)\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\mu(0) - \sum_{n>0} \hat{\mu}(-n)z^n.$$

On voit donc que $\hat{\mu}(n) = -\hat{\nu}(-n)$ pour $n < 0$. Notons par H^2 l'espace de Hardy sur le disque unité. Puisque $\nu \in H^2$ on a $\sum_{n>0} |\hat{\nu}(n)|^2 < +\infty$ et donc $\hat{\nu}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure que $\hat{\mu}(n) \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus on a

$$|\hat{\mu}(n)| = 0(e^{c(\epsilon n)^{1/2}}) \quad (n \to +\infty),$$

où $c > 0$ est une constante indépendante de ϵ. En effet, il existe une constante positive m telle que

$$|\mu(z)| \leq m e^{\frac{2\epsilon}{1-|z|}} \quad (|z| < 1).$$

D'après les inégalités de Cauchy on a pour tout $n \geq 0$ et tout r, $0 \leq r < 1$:

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(n)| &\leq r^{-n} \sup_{|z|=r} |\mu(z)| \\ &\leq m r^{-n} e^{\frac{2\epsilon}{1-r}}. \end{aligned}$$

Pour n assez grand et $r = 1 - \left(\dfrac{\epsilon}{n}\right)^{1/2}$ on obtient la borne cherchée des $\hat{\mu}(n)$.

3. Contractions à spectre dénombrable.

Nous allons maintenant établir un résultat sur les contractions à spectre dénombrable et dont la norme des puissances itérées vérifient une certaine croissance à l'infini. (La notation SpT désigne le spectre de T.)

THÉORÈME 3.1. — *Soit T une contraction inversible sur un espace de Banach X. On suppose que* SpT *est dénombrable et que* $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \|T^{-n}\|}{|\sqrt{n}} = 0$. *Alors T est une isométrie.*

Preuve. — Considérons $x = (T^{-n})_{n\in\mathbf{Z}}$. L'hypothèse faite sur T entraîne que $x \in \mathcal{A}(\mathcal{L}(X))$. On a

$$x^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} T^{-n}z^n = (I - zT^{-1})^{-1} = T(T-z)^{-1} \qquad |z| < 1.$$

$$x^-(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} T^{-n}z^n = -Tz^{-1}(I - z^{-1}T)^{-1} = T(T-z)^{-1} \qquad |z| > 1.$$

Donc le spectre de x est égal au SpT. D'après le théorème 2.6 on a

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}} \|T^n\| = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \|T^n\| \leq 1.$$

On en déduit que T est une isométrie.

Remarque 2.

a. Si dans le théorème 3.1 on remplace la condition "T est une contraction" par la condition "$M = \sup_{n\geq 0} \|T^n\| < +\infty$" on obtient que $\|T^n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

b. On peut obtenir le théorème 2.6 et le corollaire 3.1 à partir du corollaire 2.7 en utilisant des arguments classiques de dualité.

c. Notons que si la condition (1) est satisfaite seulement pour un $\epsilon > 0$, et non pour tout ϵ, alors la conclusion du théorème 3.1 est fausse. En effet soit $\theta(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ $(|z| < 1)$, H^2 l'espace de Hardy muni de la norme $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f^\star(e^{it})|^2 dt\right)^{1/2}$, où $f^\star$ est la limite non tangentielle de f sur le cercle unité. Si $f \in H^\infty$ on définit sur $H_0 := H^2 \ominus \theta H^2$ l'opérateur $T_f : g \to P_{H_0}(fg)$, où P_{H_0} est la projection orthogonale sur H_0; T_f est un opérateur continu de norme $\leq \|f\|_\infty$.

Notons par α la fonction $z \to z$ et posons $T = T_\alpha$. Alors Sp$T = \{1\}$, $\|T\| \leq 1$ et T n'est pas une isométrie. Nous allons montrer que la condition (1) est satisfaite pour un certain $\epsilon > 0$.

Soit λ un nombre complexe de module $|\lambda| < 1$ et soit

$$F_\lambda(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda} & \text{si } z \neq \lambda \\ f'(\lambda) & \text{si } z = \lambda. \end{cases}$$

Il est facile de voir que la fonction $F_\lambda \in H^\infty$ et que

$$\|F_\lambda\|_\infty \leq \frac{|f(\lambda)| + \|f\|_\infty}{1-|\lambda|}.$$

L'application $f \to T_f$ est un homomorphisme de H^∞ dans $\mathcal{L}(X)$, et on a

$$T_f - f(\lambda) = (T-\lambda)T_{F_\lambda} \quad (f \in H^\infty).$$

Si $f \in \theta H^\infty$, $T_f = 0$ et on a alors

$$(T-\lambda)^{-1} = -\frac{1}{f(\lambda)} T_{F_\lambda} \text{ si } f(\lambda) \neq 0.$$

Par conséquent

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{|f(\lambda)| + \|f\|_\infty}{(1-|\lambda|)|f(\lambda)|}.$$

En particulier pour $f = \theta$ on obtient

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{2}{(1-|\lambda|)} e^{\frac{2}{1-|\lambda|}}.$$

D'après les inégalités de Cauchy on a pour $n \geq 0$ et $0 \leq r < 1$

$$\begin{aligned} \|T^{-n}\| &\leq \frac{1}{r^{n-1}} \sup_{|\lambda|=r} \|(T-\lambda)^{-1}\| \\ &\leq \frac{2}{r^{n-1}(1-r)} e^{\frac{2}{1-r}}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient, comme dans la remarque 1, l'estimation cherchée des $\|T^{-n}\|$.

Gelfand a montré que si T est un opérateur borné et inversible sur un espace de Banach avec $\mathrm{Sp}T = \{1\}$ et $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|T^n\| < +\infty$ alors $T = I$ [1], Théorème 1.

COROLLAIRE 3.2. — *Soit T un opérateur borné et inversible sur un espace de Banach X. On suppose que $\mathrm{Sp}T = \{1\}$, $\sup_{n\geq 0} \|T^n\| < +\infty$ et $\dfrac{\log^+ \|T^{-n}\|}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $T = I$.*

Preuve. — On a $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|T^n\| < +\infty$ d'après le théorème 2.6 et on conclut par le théorème de Gelfand. Notons qu'on peut déduire directement le corollaire 3.2 du fait que les points vérifient la w-synthèse pour $w \in W$ [3], Proposition 6.

En effet considérons l'application

$$\varphi : A_w(\Gamma) \to \mathcal{L}(X)$$
$$f \to \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) T^n$$

où $w = (\|T^n\|)_{n \in \mathbf{Z}}$.

Puisque $A_w(\Gamma)$ est régulière on montre de même que dans [4] Théorème 2.5, que $h(\ker \varphi) = \mathrm{Sp}T = \{1\}$. Puisque les points vérifient la w-synthèse [3] Proposition 6, on a $\ker \varphi = I_w(\{1\})$. Ceci entraîne que $\dim \mathrm{Im}\, \varphi = 1$ et donc $T = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. L'hypothèse faite sur SpT montre que $\lambda = 1$ et donc $T = I$.

Nous concluons ce chapitre par des contre-exemples qui montrent que les hypothèses de dénombrabilité sont nécessaires pour obtenir le corollaire 2.7 et le théorème 3.1. En effet soit E un ensemble fermé non dénombrable et de mesure nulle sur le cercle unité. La partie parfaite F de E est le support d'une mesure positive continue singulière ν. Posons $J(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} d\nu(t)\right)$. Soit $I = JH^\infty \cap \mathcal{A}(D)$ où $\mathcal{A}(D)$ est l'algèbre du disque et H^∞ l'ensemble des fonctions analytiques et bornées sur D; I est un idéal fermé de $\mathcal{A}(D)$ strictement contenu dans $\mathcal{M}_F = \{f \in \mathcal{A}(D) : f_{|F} = 0\}$.

Soit $\pi : \mathcal{A}(D) \to \mathcal{A}(D)/I$ la surjection canonique. En utilisant la méthode utilisée par Atzmon pour évaluer $\|e^{-int}\|_{A^+(E)}$ quand E est un ensemble de type ZA^+ [3] preuve de la proposition 8.6, on montre que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\log \|\pi(\alpha)^{-n}\|}{n^{1/2}} = 0$.

Soit

$$T : \mathcal{A}(D)/I \to \mathcal{A}(D)/I$$
$$\pi(f) \to \pi(\alpha f).$$

Alors $\mathrm{Sp}T = \mathrm{Sp}\pi(\alpha) = F \subset E$ et T est une contraction.

D'autre part, si $f \in \mathcal{M}_F$ on a $\|f(T)T^n\| = \|\pi(f\alpha^n)\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après [4] Théorème 2.10, appliqué à $\mathcal{A}(D)$ et T. Comme $I \subsetneq \mathcal{M}_F$ on peut choisir $f \in \mathcal{M}_F$ avec $\pi(f) \neq 0$ et on obtient que $\|T^{-n}\| \geq \frac{\|\pi(f)\|}{\|\pi(f\alpha^n)\|} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Le fait que $\|\pi(\alpha)^{-n}\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ entraîne qu'il existe ℓ dans le dual de $\mathcal{A}(D)/I$ tel que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \mid < \pi(\alpha)^{-n}, \ell > \mid = +\infty,$$

d'après le théorème de Banach-Steinhaus.

Posons

$$\mu^+(z) = < \pi(\alpha)(\pi(\alpha) - z)^{-1}, \ell > \qquad |z| < 1$$

$$\mu^-(z) = < \pi(\alpha)(\pi(\alpha) - z)^{-1}, \ell > \qquad |z| > 1.$$

Alors $\hat{\mu}(n) = < \pi(\alpha)^{-n}, \ell > (n \in \mathbb{Z})$, et donc $\mu \notin PM(E)$. Or

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}} \frac{|\hat{\mu}(n)|}{\|\pi(\alpha)^{-n}\|} = \sup_{n\in\mathbf{Z}} \frac{| < \pi(\alpha)^n, \ell > |}{\|\pi(\alpha)^n\|} \leq \|\ell\|.$$

Donc $\sup_{n<0} |\hat{\mu}(n)| < +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\log^+ |\hat{\mu}(n)|}{\sqrt{n}} = 0$, $\mu \in HD(E)$ et $\mu \notin PM(E)$.

Notons enfin que si E est un fermé non dénombrable il existe un élément non nul $\mu \in HD(E)$ tel que $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log^+ |\hat{\mu}(n)|}{\sqrt{n}} = 0$ et $\hat{\mu}(n) \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. La fonction intérieure J construite plus haut se prolonge en une fonction analytique sur $(\mathbb{C} \cup \{\infty\})\backslash E$. Posons $V(z) = \frac{1}{J(z)} - \frac{1}{J(\infty)}$ $(z \in \mathbb{C}\backslash E)$. De même que dans la preuve du théorème 3.1 de [8], on montre que l'hyperdistribution μ obtenue à partir de V vérifie bien les conditions ci-dessus avec en fait $\sum_{n<0} |\hat{\mu}(n)|^2 < +\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G.R. Allan, T.J. Ransford, Power dominated elements in Banach algebras, Studia Math., 94 (1989), 63–79.

[2] H.H. Schaefer, M. Wolff and W. Arendt, On lattice isomorphisms with positive real spectrum and groups of positive operators, Math. Z., 164 (1978), 115–123.

[3] A. Atzmon, Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces, Acta Math., 144 (1980), 27–63.

[4] J. Esterle, E. Strouse, F. Zouakia, Theorems of Katznelson Tzafriri type for contractions, à paraître au Journal of Functional Analysis.

[5] J.P. Kahane, Y. Katznelson, Sur les algèbres de restrictions de séries de Taylor absolument convergentes à un fermé du cercle, J. Analyse Math., 23 (1970), 185–197.

[6] J.P. Kahane, R. Salem, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Paris, Hermann, 1963.

[7] Y. KATZNELSON, An introduction to harmonic analysis, Wiley, New York, 1968.

[8] M. ZARRABI, Synthèse spectrale dans certaines algèbres de Beurling sur le cercle unité, Bull. Soc. Math. France, 118 (1990), 241–249.

Manuscrit reçu le 7 janvier 1991,
révisé le 16 octobre 1992.

Mohamed ZARRABI,
Université Bordeaux I
U.F.R. de Mathématiques et Informatique
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex (France).