

ELHASSAN IDRISSE

Quelques contre-exemples pour la LS catégorie d'une algèbre de cochaînes

Annales de l'institut Fourier, tome 41, n° 4 (1991), p. 989-1003

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_4_989_0

© Annales de l'institut Fourier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES CONTRE-EXEMPLES POUR LA L.S.-CATÉGORIE D'UNE ALGÈBRE DE COCHAÎNES

par Elhassan IDRISSE

I. Introduction.

Soit k un corps de caractéristique quelconque. Une k -algèbre de cochaînes (A, d) est une k -algèbre différentielle graduée (en abrégé *a.d.g.*), concentrée en degrés positifs ou nuls et dont la différentielle est de degré 1. On suppose de plus que $H^0(A) = k$, $H^1(A) = 0$ et pour tout i , $\dim H^i(A) < \infty$. L'exemple standard d'un tel objet est l'algèbre $C^*(X; k)$ des cochaînes singulières à coefficients dans k d'un CW -complexe 1-connexe de type fini X . Halperin et Lemaire [5] ont introduit les invariants numériques

$$lMcat(A), \quad lMcat(A) \quad \text{et} \quad rMcat(A)$$

tels que :

i) $\max(lMcat(A), rMcat(A)) \leq Acat(A)$.

ii) Si $A = C^*(X; k)$ alors $Acat(A) \leq \text{cat}(X)$,

où $\text{cat}(X)$ désigne la catégorie de Lusternik-Schnirelmann de l'espace topologique X . Elle est définie par :

$$\text{cat}(X) \leq n \text{ si } X \text{ peut être recouvert} \\ \text{par } (n+1) \text{ ouverts contractiles dans } X.$$

Lorsque l'on se restreint aux algèbres de cochaînes commutatives graduées alors

$$lMcat(A) = rMcat(A)$$

et la valeur commune de ces invariants est notée $Mcat(A)$. En outre K. Hess [6] a démontré que si $k = \mathbb{Q}$ alors,

$$(*) \quad Mcat(A) = Acat(A).$$

Ce résultat associé à celui de Jessup [7] démontre la conjecture de Ganéa

$$cat(X \times S^n) = cat(X) + 1$$

pour les espaces rationnels.

Notre premier exemple montre que pour les algèbres de cochaînes quelconques,

$$lMcat(A) \neq rMcat(A),$$

bien que $H(A)$ soit une algèbre graduée commutative.

Afin d'étendre les résultats de Hess et de Jessup en caractéristique non nul, Ndombol [2] introduit l'invariant $biMcat(A)$, pour les algèbres de cochaînes quelconques et établit que

$$(**) \quad Acat(A) = biMcat(A).$$

Dans l'exemple IV, nous montrons que

$$rMcat(A) \neq biMcat(A) \quad \text{et} \quad lMcat(A) \neq biMcat(A).$$

Finalement, nous nous plaçons dans le contexte de la $L.S.$ -catégorie d'un homomorphisme dans la catégorie des $a.d.g.$ Les invariants précédents se généralisent ($cat(id_A) = cat(A)$) et l'on a

$$e(f) \leq \max(lMcat(f), rMcat(f)) \leq biMcat(f) \leq Acat(f).$$

Ceci nous permet, dans l'exemple V, de montrer que le résultat (**) de Ndombol ne s'étend pas à la catégorie d'un homomorphisme d'algèbres de cochaînes. Signalons que lorsque $k = \mathbb{Q}$, il existe une application continue qui induit au niveau des cochaînes un homomorphisme tel que $Acat(f) \neq biMcat(f)$ [8].

Je remercie J. C. Thomas, qui m'a donné des indications fort utiles pour l'élaboration de ce travail.

II. Définitions.

Soit k un corps de caractéristique quelconque. Les espaces vectoriels et les algèbres considérés sont sur k et nous écrivons simplement \otimes au lieu \otimes_k .

1. Rappels.

Soient $(T(V), d)$ un T -modèle minimal [5], B une algèbre de cochaînes et

$$f : (T(V), d) \rightarrow B$$

un morphisme d'a.d.g. Alors f induit sur B une structure naturelle de $T(V)$ -module à gauche (resp. à droite, de bimodule) différentiel gradué. On note $T^{>n}(V)$ l'idéal différentiel de $T(V)$ engendré par les produits des éléments de V de longueur supérieure à n , on note encore d la différentielle induite par d sur le quotient $T(V)/T^{>n}(V)$. D'après [5], il existe un modèle minimal de la projection $P : T(V) \rightarrow T(V)/T^{>n}(V)$, qui est unique à isomorphisme près :

$$\begin{array}{ccc}
 T(V) & \xrightarrow{P} & T(V)/T^{>n}(V) \\
 & \searrow i & \uparrow \psi \\
 & & T(V \oplus W)
 \end{array}$$

\cong

où P est la projection canonique : $T(V) \rightarrow T(V)/T^{>n}(V)$.

2. Définitions.

$Acat(f)$ (resp. $biMcat(f)$, $lMcat(f)$, $rMcat(f)$, $e_k(f)$) est le plus petit entier naturel n tel qu'il existe un morphisme $r : T(V \oplus W) \rightarrow B$ d'algèbres différentielles (resp. $T(V)$ -bimodules différentiels, $T(V)$ -modules différentiels à gauche, $T(V)$ -modules différentiels à droite, d'espaces vectoriels gradués différentiels), tel que $ri = f$.

Soient $h : A \rightarrow B$ un morphisme d'a.d.g. et $\psi : (T(V), d) \rightarrow A$, un modèle minimal de A , au sens de [5] on pose :

$$\begin{aligned}
 &(Acat(h), biMcat(h), lMcat(h), rMcat(h), e_k(h)) \\
 &= (Acat(h\psi), biMcat(h\psi), lMcat(h\psi), rMcat(h\psi), e_k(h\psi)).
 \end{aligned}$$

En particulier : si $h = \text{id}_A$ on trouve [5], [2] :

$$\begin{aligned} & (\text{Acat}(h), \text{biMcat}(h), \text{lMcat}(h), \text{rMcat}(h), e_k(h)) \\ & = (\text{Acat}(A), \text{biMcat}(A), \text{lMcat}(A), \text{rMcat}(A), e_k(A)). \end{aligned}$$

Des définitions il résulte clairement :

$$e(f) \leq \max(\text{rMcat}(f), \text{lMcat}(f) \leq \text{biMcat}(f) \leq \text{Acat}(f)).$$

Pour calculer effectivement ces invariants, il faut disposer d'une factorisation ψ qui soit maniable. Remarquons à ce propos que le morphisme d'a.g., $\psi : T(V \oplus W) \rightarrow T(V)/T^{>n}(V)$, est une résolution semi-libre au sens de [1], [4] dans la catégorie des $T(V)$ -module à gauche (resp. à droite).

Pour la suite, nous avons besoin de la construction explicite d'une résolution de $T(V)/T^{>n}(V)$ comme $T(V)$ -module à gauche (resp. à droite, de bimodule).

Soit $(T(V), d)$ un T -modèle minimal. Posons $M = {}_s(V^{\oplus n+1})$ où $s : V \rightarrow V$ est l'opérateur de suspension, de degré -1 , défini par $(sV)^n = V^{n+1}$.

3. Résolution semi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$ -module différentiel à gauche.

Considérons l'isomorphisme de k -espaces vectoriels gradués :

$$\alpha : T(V) \otimes M \rightarrow T^{>n}(V); \quad a \otimes sx \mapsto (-1)^{|a|} a \otimes x, \quad |a| = \text{degré de } a.$$

On étend la différentielle d de $T(V)$ à une différentielle δ sur $T(V) \otimes (k \oplus M)$, en posant pour tout $a \in T(V)$, et tout $sx \in M$:

$$\delta(a \otimes sx) = (\alpha - \alpha^{-1} d\alpha)(a \otimes sx).$$

D'après [3], $(T(V) \otimes (k \oplus M), \delta)$ est une résolution semi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$ -module différentiel à gauche.

Le morphisme

$$F : (T(V) \otimes (k \oplus M), \delta) \rightarrow (T(V)/T^{>n}(V), d)$$

défini par :

$$F|T(V) \otimes k = P \otimes \text{id}, \quad F|k \otimes M = 0,$$

est un quasi-isomorphisme.

4. Résolution semi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$ -module différentiel à droite.

Considérons l'isomorphisme de k -espaces vectoriels gradués :

$$\bar{\alpha} : M \otimes T(V) \rightarrow T^{>n}(V); \quad sy \otimes a \rightarrow y \otimes a.$$

On étend la différentielle d de $T(V)$ à une différentielle $\bar{\delta}$ sur $(k \oplus M) \otimes T(V)$, en posant pour tout $a \in T(V)$, et tout $sx \in M$:

$$\bar{\delta}(sx \otimes a) = (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}^{-1} d\bar{\alpha})(sx \otimes a).$$

De même $((k \oplus M) \otimes T(V), \bar{\delta})$ est une résolution semi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$ -module différentiel à droite.

5. Résolution semi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel [2].

i) Un morphisme de $T(V)$ -bimodule différentiel

$$h : (T(V) \otimes (k \oplus sV) \otimes T(V), d_1) \rightarrow (T(V), d)$$

est obtenu en posant :

$$\begin{aligned} h(1 \otimes 1 \otimes 1) &= 1 \\ h(1 \otimes sv \otimes 1) &= 0; \quad \text{pour tout } v \in V \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_1(v \otimes 1 \otimes 1) &= dv \otimes 1 \otimes 1, \\ d_1(1 \otimes 1 \otimes v) &= 1 \otimes 1 \otimes dv, \\ d_1(1 \otimes sv \otimes 1) &= v \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes v - S(dv), \end{aligned}$$

où l'application $S : T^+(V) \rightarrow T(V) \otimes sV \otimes T(V)$ est définie, pour tout $v_1, \dots, v_m \in V$, par :

$$\begin{aligned} S(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) &= 1 \otimes sv_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_m \\ &+ \sum_{j=2}^{m-1} (-1)^{|v_1| + \dots + |v_{j-1}|} v_1 \otimes \dots \otimes v_{j-1} \otimes sv_j \otimes v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_m \\ &+ (-1)^{|v_1| + \dots + |v_{m-1}|} v_1 \otimes \dots \otimes v_{m-1} \otimes sv_m \otimes 1. \end{aligned}$$

ii) Une structure de $T(V)$ -module à droite sur $T(V) \otimes (k \oplus M)$ est donnée par :

$$\begin{cases} (a \otimes 1) \# a' = a \cdot a' \otimes 1 \\ (a \otimes sx) \# a' = a \cdot \alpha^{-1}(x \otimes a'), \end{cases}$$

avec $a \in T(V)$, $a' \in T(V)$, $sx \in M$.

Alors

$$\begin{aligned}
 a) \quad & (T(V) \otimes (k \oplus M)) \otimes_{T(V)} (T(V) \otimes (k \oplus sV) \otimes T(V)) \\
 & = (T(V) \otimes (k \oplus sV \oplus M \oplus M \otimes sV) \otimes T(V), D)
 \end{aligned}$$

b) $F \otimes_{T(V)} h$ est une résolution semi-libre de $T(V)/T^{>n}(V)$ comme $T(V)$ -bimodule différentiel.

c) D vérifie les relations :

$$\begin{aligned}
 D(1 \otimes sv \otimes 1) &= d_1(1 \otimes sv \otimes 1) \\
 D(1 \otimes sx \otimes 1) &= \delta(1 \otimes sx \otimes 1) \\
 D(1 \otimes sx \otimes sv \otimes 1) &= x \otimes sv \otimes 1 \\
 &\quad - \alpha^{-1} d\alpha(1 \otimes sx) \otimes sv \otimes 1 \\
 &\quad + (-1)^{|sx|} (1 \otimes sx) \# v \otimes 1 \\
 &\quad + (-1)^{|sx|} (1 \otimes sx) \otimes 1 \otimes v \\
 &\quad + (-1)^{|sx|} \sum_{i,j} (-1)^{n_{i,j}} ((1 \otimes sx) \# \bar{S}_j^i dv) \otimes sv_j \otimes (\hat{S}_j^i(dv))
 \end{aligned}$$

avec : $v \in V$, $sx \in M$, $sv \in sV$, v_j désigne une base homogène de V , et \bar{S}_j^i, \hat{S}_j^i sont les endomorphismes de $T(V)$ définis par :

$$S dv = \sum_{i,j} \bar{S}_j^i(dv) \otimes sv_j \otimes \hat{S}_j^i(dv) \in T(V) \otimes sV \otimes T(V).$$

Du lemme de relèvement [1], on déduit :

6. PROPOSITION. — *Avec les notations précédentes,*

a) $lMcat(f) \leq n$ si et seulement si il existe un morphisme $r : T(V) \otimes (k \oplus M) \rightarrow B$ de $T(V)$ -modules différentiels à gauche tel que $ri = f$.

b) $rMcat(f) \leq n$ si et seulement si il existe un morphisme $\bar{r} : (k \oplus M) \otimes T(V) \rightarrow B$ de $T(V)$ -modules différentiels à droite tel que $\bar{r}i = f$.

c) $biMcat(f) \leq n$ si et seulement si il existe un morphisme

$$R : T(V) \otimes (k \oplus M \oplus sV \oplus M \otimes sV) \otimes T(V) \rightarrow B$$

de $T(V)$ -bimodules différentiels tel que $Ri = f$.

Alors le résultat de B. Ndongbol [N] se généralise en :

7. PROPOSITION.

a) $lMcat(f) \leq n$ si et seulement si il existe un morphisme $r : T(V) \otimes (k \oplus M) \rightarrow B$ de $T(V)$ -modules différentiels à gauche tel que $r(1 \oplus 1) = 1$.

b) $rMcat(f) \leq n$ si et seulement si il existe un morphisme $\bar{r} : (k \oplus M) \otimes T(V) \rightarrow B$ de $T(V)$ -modules différentiels à droite tel que $\bar{r}(1 \otimes 1) = 1$.

c) $biMcat(f) \leq n$ si et seulement si il existe un morphisme

$$R : T(V) \otimes (k \oplus M \oplus sV \oplus M \otimes sV) \otimes T(V) \rightarrow B$$

de $T(V)$ -bimodules différentiels tel que $R(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$ et $R(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$.

III. Exemple où $lMcat(id_A) \neq rMcat(id_A)$.

1. On construit un T -modèle minimal $A = (T(V), d)$ dont la cohomologie est une algèbre graduée commutative. L'espace vectoriel V est muni d'une nouvelle graduation $V = \bigoplus_{n \geq 1} V_{(n)}$ telle que pour $n > 2$ on a :

$$d(V_{(n)}) \subset T^{\geq 3}(V_{(\leq n-1)}) \oplus (V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \oplus \dots \oplus V_{(n-1)})) \oplus T^2(V_{(2)} \oplus \dots \oplus V_{(n-1)}) \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq n-1)})],$$

où

$$V_{(\leq j)} = V_{(1)} \oplus V_{(2)} \oplus \dots \oplus V_{(j)}$$

et $[V_{(1)}, T(V_{(\leq j)})]$ désigne le sous-espace vectoriel de $T(V)$ engendré par des éléments de la forme $v_x - (-1)^{|v||x|} xv$; avec $v \in V_{(1)}$, $x \in T(V_{(\leq j)})$ et $dx = 0$.

On pose :

$V_{(1)}$ l'espace vectoriel engendré par deux éléments a et a' :

$$|a| = 2 = |a'|, \quad da = 0 = da'.$$

$V_{(2)}$ l'espace vectoriel engendré par deux éléments b et b'

$$|b| = 3 = |b'|, \quad db' = a'.a, \quad db = a.a'$$

$$V_{(3)} = s\{[x] \in H^+(T(V_{(1)} \oplus V_{(2)})) \mid x \in T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)}) \oplus (V_{(1)} \otimes V_{(2)}) \oplus T^2(V_{(2)} \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq 2)})])\}.$$

$$d : V_{(3)} \rightarrow T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)}) \oplus (V_{(1)} \otimes V_{(2)}) \oplus T^2(V_{(2)}) \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq 2)})]$$

est une section de la restriction à

$$T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)}) \oplus (V_{(1)} \otimes V_{(2)}) \oplus T^2(V_{(2)}) \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq 2)})]$$

de la projection

$$p : T(V_{(1)} \oplus V_{(2)}) \cap \text{Ker } d \rightarrow H(T(V_{(1)} \oplus V_{(2)})).$$

$$V_{(n)} = s\{[x] \in H^+(T(V_{(<n-1)})) \mid x \in T^{\geq 3}(V_{(\leq n-1)})$$

$$\oplus (V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \oplus \dots \oplus V_{(n-1)}))$$

$$\oplus T^2(V_{(2)} \oplus \dots \oplus V_{(n-1)})$$

$$\oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq n-1)})]\}.$$

$$d : V_{(n)} \rightarrow T^{\geq 3}(V_{(\leq n-1)}) \oplus (V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \oplus \dots \oplus V_{(n-1)}))$$

$$\oplus T^2(V_{(2)} \oplus \dots \oplus V_{(n-1)}) \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq n-1)})]$$

est une section de la restriction à

$$T^{\geq 3}(V_{(\leq n-1)}) \oplus (V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \oplus \dots \oplus V_{(n-1)}))$$

$$\oplus T^2(V_{(2)} \oplus \dots \oplus V_{(n-1)}) \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq n-1)})]$$

de la projection

$$p : T(V_{(\leq n-1)}) \cap \text{Ker } d \rightarrow H(T(V_{(\leq n-1)})).$$

2. $H(T(V))$ est commutative, en effet si $[x], [y] \in H(T(V))$ alors par construction

$$xy - (-1)^{|x||y|}yx$$

est un bord.

3. Montrons que $l\text{Mcat}(T(V)) = 2$.

On a $l\text{Mcat}(T(V)) \geq 2$ car $d(a) = 0$ et a^2 n'est pas un bord. Reste à montrer que $l\text{Mcat}(T(V)) \leq 2$.

D'après le corollaire, il suffit de construire un morphisme

$$r : (T(V) \otimes (k \oplus M), \delta) \rightarrow (T(V), d)$$

de $T(V)$ -modules différentiels à gauche tel que $r(1 \otimes 1) = 1$, avec $M = s(V^{\otimes 3})$. On note (i_1, i_2, i_3) le tridegré d'un élément $s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \in s(V_{(i_1)} \otimes V_{(i_2)} \otimes V_{(i_3)}) \subset M$ et on ordonne les triplets par l'ordre lexicographique inverse. La différentielle, δ , baisse le tridegré des éléments de $k \otimes M$.

Construisons r , par récurrence sur le tridegré.

Soit (x, y, z) de tridegré $(1, 1, 1)$ alors $x, y, z \in V_{(1)}$ et par conséquent $dx = dy = dz = 0$.

D'autre part, la définition de δ montre que :

$$r\delta(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) = r(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \in T^3(V).$$

Par construction de d , il existe $v \in T(V)$ tel que :

$$r\delta(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) = dv.$$

On pose $r(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) = v$.

On remarque que $v \notin V_{(1)}$ car $v \neq 0$ et $|v| = 5$.

Supposons avoir construit r en tridegré $(i_1, i_2, i_3) < (p, q, t)$ tel que :

$$r\delta = dr,$$

et considérons (x_p, x_q, x_t) de tridegré (p, q, t) alors

$$\begin{aligned} r\delta(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) &= r(x_p \cdot x_q \cdot x_t \otimes 1 - \alpha^{-1} d(x_p \cdot x_q \cdot x_t)) \\ &= x_p \cdot x_q \cdot x_t - r(\alpha^{-1} d(x_p \cdot x_q \cdot x_t)). \end{aligned}$$

Posons : $d(x_p \cdot x_q \cdot x_t) = \sum_i y'_i \otimes y''_i$ où y''_i est un mot de longueur 3 et y'_i est un mot de longueur ≥ 1 . Comme r est $T(V)$ -linéaire à gauche, nous obtenons :

$$\begin{aligned} r\delta((1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t))) &= x_p \cdot x_q \cdot x_t - r\left(\alpha^{-1} \left(\sum_i y'_i \otimes y''_i\right)\right) \\ &= x_p \cdot x_q \cdot x_t - \left(\sum_i (-1)^{|y'_i|} y'_i \cdot r(1 \otimes s y''_i)\right). \end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence $dr \delta(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) = 0$.

Pour des raisons de degré, $r(1 \otimes s y''_i) \notin V_{(1)}$, par suite

$$r\delta((1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t))) \in T^+(V) \otimes (V_{(>1)} \oplus T^{\geq 2}(V)).$$

Alors, par construction de $(T(V), d)$ il existe $v \in (V_{(>1)} \oplus T^{\geq 2}(V))$ tel que :

$$r\delta(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) = dv.$$

On pose : $r(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) = v$.

D'où l'existence de r .

4. Vérifions que $rMcat(T(V)) > 2$.

Supposons que $rMcat(T(V)) \leq 2$. D'après le corollaire, il existe un morphisme $\bar{r} : (k \oplus M) \otimes T(V) \rightarrow T(V)$ de $T(V)$ -modules différentiels à droite avec, $\bar{r}(1 \otimes 1) = 1$ et $M = {}_sV^{\otimes 3}$.

Calculons $\bar{r}(s(a \otimes a \otimes a) \otimes 1)$;

$$\begin{aligned} d\bar{r}(s(a \otimes a \otimes a) \otimes 1) &= \bar{r}\bar{\delta}(s(a \otimes a \otimes a) \otimes 1) \\ &= \bar{r}(1 \otimes a^3) \\ &= a^3. \end{aligned}$$

D'où $\bar{r}(s(a \otimes a \otimes a) \otimes 1) = v$ avec $v \in V_{(3)}$, $dv = a^3$.

Maintenant calculons $\bar{r}\bar{\delta}(s(a \otimes a \otimes b) \otimes 1)$:

$$\begin{aligned} \bar{r}\bar{\delta}(s(a \otimes a \otimes b) \otimes 1) &= \bar{r}(a \otimes a \otimes b - s(a \otimes a \otimes a) \otimes a') \\ &= a^2 \cdot b - v \cdot a', \end{aligned}$$

qui ne peut pas être un bord. D'où la contradiction.

**IV. Exemple où $biMcat(A) \neq lMcat(A)$,
et où $biMcat(A) \neq rMcat(A)$.**

1. On construit un T -modèle minimal $A = (T(V), d)$ tel que :

$$V = \bigoplus_{i \geq 1} V_{(i)}, \quad dV_{(1)} = 0 \quad \text{et} \quad dV_{(i)} \subset T^{\geq 3}(V_{(<i)}) \quad \text{pour} \quad i \geq 2.$$

Plus précisément, posons :

$$V_{(1)} = ka \oplus ka' \quad \text{et} \quad V_{(2)} = s(T^3(V_{(1)}))$$

avec $|a| = 2 = |a'|$, $da = 0 = da'$, si $v \in V_{(2)}$ alors $v = s^{-1}(w)$, $w \in T^3(V_{(1)})$, on pose : $dv = w$

$$V_{(3)} = s\{[x] \in H^+(T(V_{(1)} \oplus V_{(2)})) \mid x \in T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)})\}.$$

$d : V_{(3)} \rightarrow T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)})$ est une section de la restriction à $T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)})$ de la projection

$$\begin{aligned} p : T(V_{(1)} \oplus V_{(2)}) \cap \text{Ker } d &\rightarrow H(T(V_{(1)} \oplus V_{(2)})). \\ V_{(i)} &= s\{[x] \in H^+(T(V_{(\leq i-1)})) \mid x \in T^{\geq 3}(V_{(\leq i-1)})\}. \end{aligned}$$

$d: V_{(i)} \rightarrow T^{\geq 3}(V_{(\leq i-1)})$ est une section de la restriction à $T^{\geq 3}(V_{(\leq i-1)})$ de la projection

$$p: T(V_{(\leq i-1)}) \cap \text{Ker } d \rightarrow H(T(V_{(\leq i-1)})).$$

2. Montrons que $\text{biMcat}(T(V)) > 2$.

Sinon, d'après le corollaire, il existe un morphisme,

$$R: T(V) \otimes (k \oplus M \oplus sV \oplus M \otimes sV) \otimes T(V) \rightarrow T(V)$$

de $T(V)$ -bimodules différentiels tel que $R(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$ et $R(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$.

Alors,

$$\begin{aligned} RD(1 \otimes s(a \otimes a \otimes a)) &= R(a \otimes a \otimes a) \\ &= a^3. \end{aligned}$$

D'où par construction, $R(1 \otimes s(a \otimes a \otimes a)) = b$ avec $b \in V_{(2)}$ et $db = a^3$.

$$\begin{aligned} RD(1 \otimes s(a \otimes a \otimes a')) &= R(a^2 a' \otimes 1 \otimes 1) \\ &= a^2 a' \end{aligned}$$

et $R(1 \otimes s(a \otimes a \otimes a')) = b'$ avec $b' \in V_{(2)}$ et $db' = a^2 a'$. Par suite,

$$\begin{aligned} RD(1 \otimes s(a \otimes a \otimes a) \otimes sa' \otimes 1) &= R(a^3 \otimes sa' \otimes 1 - a \otimes s(a \otimes a \otimes a') \otimes 1 \\ &\quad + 1 \otimes s(a \otimes a \otimes a) \otimes a') \\ &= ab' + ba'. \end{aligned}$$

Or ce dernier élément ne peut pas être un bord car $dV \subset T^{\geq 3}(V)$. D'où une contradiction.

3. Montrons que $\text{lMcat}(T(V), d) = 2$.

Comme $2 = \text{nil}(H(T(V))) \leq \text{lMcat}(T(V))$, reste à montrer que $\text{lMcat}(T(V), d) \leq 2$.

Soit $M = sV^{\otimes 3}$. On va construire par récurrence un morphisme $r: T(V) \otimes (k \oplus M) \rightarrow T(V)$ de $T(V)$ -modules différentiels à gauche tel que $r(1 \otimes 1) = 1$. Posons: $s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \in M$ est de tridegré (i_1, i_2, i_3) si $x_j \in V_{(i_j)}$; $j = 1, 2, 3$. On note $M_{<(p,q,t)}$ l'espace vectoriel engendré par les éléments de tridegré $<(p,q,t)$.

Soit $s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \in M$ de tridegré $(1,1,1)$ alors $x_i \in V_{(1)}$, $dx_i = 0$.
Alors,

$$\begin{aligned} rD(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) &= r(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \otimes 1) \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3. \end{aligned}$$

Par construction, il existe $y \in V_{(2)}$ tel que :

$$dy = rD(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)).$$

On pose :

$$r(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) = y.$$

Supposons avoir construit r pour tout générateur $s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)$ de M de tridegré $< (p,q,t)$, et tel que $dr = rD$.

Soit maintenant $s(x_p \otimes x_q \otimes x_t) \in M$ de tridegré (p,q,t) .

$$\begin{aligned} rD(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) &= r(x_p \cdot x_q \cdot x_t \otimes 1 - \alpha^{-1} d(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) \\ &= x_p \cdot x_q \cdot x_t - r(\alpha^{-1} d(x_p \otimes x_q \otimes x_t)). \end{aligned}$$

Puisque $d(V) \subset T^{\geq 3}(V)$, alors $d(x_p \cdot x_q \cdot x_t) = \sum_i y'_i \otimes y''_i$ avec y''_i est un mot de longueur 3 et y'_i est un mot de longueur ≥ 2 . Alors

$$\begin{aligned} rD(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) &= x_p \cdot x_q \cdot x_t - r\left(\alpha^{-1} \left(\sum_i y'_i \otimes y''_i\right)\right) \\ &= x_p \cdot x_q \cdot x_t - \left(\sum_i (-1)^{|y'_i|} y'_i \cdot r(1 \otimes s y''_i)\right). \end{aligned}$$

D'où $rD(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) \in T^{\geq 3}(V)$.

Comme $D(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) \in T(V) \otimes (k \oplus M_{<(p,q,t)})$, d'après l'hypothèse de récurrence on a :

$$d(rD(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t))) = 0.$$

D'où par construction, il existe $y \in V$ tel que :

$$rD(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) = dy.$$

On pose $r(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) = y$, d'où l'existence de r .

Conclusion : $lMcat(T(V), d) = 2$.

De même, on trouve $rMcat(T(V), d) = 2$.

V. Exemple où $\text{biMcat}(f) \neq \text{Acat}(f)$.

Soient $(T(V), d)$ un modèle libre minimal, et n un entier arbitraire. Considérons une factorisation de la projection $p: (T(V), d) \rightarrow (T(V)/T^{>n}(V), d)$.

$$\begin{array}{ccc}
 (T(V), d) & \xrightarrow{p} & (T(V)/T^{>n}(V), d) \\
 & \searrow i & \uparrow \simeq \psi \\
 & & (T(V) \cup T(W), D)
 \end{array}$$

(\cup désigne le coproduit dans la catégorie des k -a.d.g.).

Soient U un espace vectoriel isomorphe à $T^+(W)$,

$$\gamma: U \xrightarrow{\cong} T^+(W)$$

un isomorphisme d'espaces vectoriels, et $\beta: T^+(W) \rightarrow U$ l'inverse de γ .

On définit une différentielle δ sur $(T(V) \cup T(U))$, en posant :

$$\begin{cases} \delta(v) = d(v) & \text{si } v \in V, \\ \delta(u) = (id \cup \beta) d\gamma(u) & \text{si } u \in U, \end{cases}$$

alors δ est une dérivation, en effet :

$$\begin{aligned}
 \delta^2(v) &= d^2(v) = 0, & \text{si } v \in V. \\
 \delta^2(u) &= \delta((id \cup \beta) d\gamma(u)) \\
 &= (id \cup \beta) d(d\gamma(u)) \\
 &= 0, & \text{si } u \in U.
 \end{aligned}$$

Remarque. — $\delta(U)$ appartient au sous-espace vectoriel $T(V) \cup (k \oplus U)$ de $T(V) \cup T(U)$.

LEMME 1. — Soit l'inclusion $j: (T(V), d) \rightarrow (T(V) \cup T(U), \delta)$. Alors

$$\text{biMcat}(j) \leq n.$$

Preuve. — Soit l'inclusion $r: ((T(V) \cup T(W), D) \rightarrow (T(V) \cup T(U), \delta)$, $r = id \cup \beta$. Clairement, r est un morphisme de $T(V)$ -bimodules

différentiels. On a donc le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 (T(V), d) & \xrightarrow{p} & (T(V) \cup T(U), \delta) \\
 & \searrow i & \uparrow r \\
 & & (T(V) \cup T(W), D)
 \end{array}$$

et par définition $\text{biMcat}(j) \leq n$.

Considérons le cas particulier suivant : $n = 1$, $T(V) = T(a)$ avec $|a| = 2$.

LEMME 2. — Soit j comme dans le lemme 1, alors :

- i) $\text{biMcat}(j) = 1$.
- ii) $\text{Acat}(j) \geq 2$.

Preuve. — Un simple calcul nous donne,

$$(T(a) \cup T(W)) = (T(a) \cup T(w_3, w_4, w_5) \cup T(W')),$$

avec : $|w_i| = i$ et $|w'| \geq 5$ si $w' \in W'$.

$$\begin{cases}
 Dw_3 = a^2 \\
 Dw_4 = a \cdot w_3 - w_3 \cdot a \\
 Dw_5 = w_3 \cdot w_3 - a \cdot w_4 - w_4 \cdot a.
 \end{cases}$$

i) Montrons que $\text{biMcat}(j) = 1$.

$\text{biMcat}(j) \neq 0$ car $j^* : H(T(a), d) \rightarrow H(T(a) \cup T(U), \delta)$ est non nulle. D'après le lemme 1, on a alors $\text{biMcat}(j) = 1$.

ii) Montrons que $\text{Acat}(j) \geq 2$.

Supposons que $\text{Acat}(j) \leq 1$, par définition, il existe un morphisme d'a.d.g.

$$\ell : (T(a) \cup T(W), D) \rightarrow (T(a) \cup T(U), \delta)$$

tel que $\ell i = j$ d'où $\ell(a) = a$.

Et pour des raisons de degré on a :

$$\begin{cases}
 \ell(w_3) = \beta(w_3) \\
 \ell(w_4) = \beta(w_4) + \lambda a^2, & \lambda \in k \\
 \ell(w_5) \in T(V) \cup (k \oplus U),
 \end{cases}$$

mais,

$$\begin{aligned}\delta\ell(w_5) &= \ell D(w_5) \\ &= \ell(w_3 \otimes w_3 - a \otimes w_4 - w_4 \otimes a) \\ &= \beta(w_3) \cdot \beta(w_3) - a \cdot \beta(w_4) - \beta(w_4) \cdot a - 2\lambda a^3\end{aligned}$$

qui ne peut pas être un bord car $\delta(T(a) \cup (k \oplus U)) \subset (T(a) \cup (k \oplus U))$ et $|u| \geq 6$ si $u \in T^{\geq 2}(U)$.

D'où la contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. AVRAMOV, S. HALPERIN, Through the looking glass : a dictionary between rational homotopy theory and local algebra, Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, 1183 (1986), 1-27.
- [2] B. NDOMBOL, Sur la catégorie des algèbres de cochaînes, preprint.
- [3] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J. M. LEMAIRE, J. C. THOMAS, Mod p loop space homology, *Inventiones Math.*, 95 (1989), 247-262.
- [4] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, J. C. THOMAS, Gorenstein spaces, *Adv. in Math.*, 71 (1988), 92-112.
- [5] S. HALPERIN, J. M. LEMAIRE, Notions of category in differential algebra, Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, 1318 (1988), 138-154.
- [6] K. HESS, A proof of Ganéa's conjecture for rational spaces, Ph. D. thesis M.I.T. Cambridge (1988).
- [7] B. JESSUP, Rational Lusternik-Schnirelman category, fibrations and a conjecture of Ganéa, Ph. D. thesis Univ. of Toronto (1987).
- [8] E. IDRISSE, Un exemple où $Mcat$ est différent de $Acat$, C.R.A.S., Paris, t. 310, Série I (1990), 599-602.

Manuscrit reçu le 9 mai 1990,
révisé le 20 novembre 1990.

Elhassan IDRISSE,
Université des Sciences et Techniques
de Lille-Flandres-Artois
URA au CNRS D751
UFR de Mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).