

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE LELONG

Extension d'un théorème de Carleman

Annales de l'institut Fourier, tome 12 (1962), p. 627-641

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1962__12_627_0

© Annales de l'institut Fourier, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EXTENSION D'UN THÉORÈME DE CARLEMAN

par Pierre LELONG (Paris).

1. Introduction.

Soit $M_{(\alpha)}$, $0 < M_{(\alpha)} \leq +\infty$, une suite de nombres dépendant d'un indice multiple $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_k entiers positifs; on note $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. On se propose de donner d'abord des conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite des majorations :

$$(1) \quad |f(z_1, \dots, z_n)| \leq M_{(\alpha)} |z_1^{-\alpha_1} z_2^{-\alpha_2} \dots z_n^{-\alpha_n}|, \quad \alpha_k \geq 0$$

vérifiées par une fonction f analytique dans la région $\Gamma_n : x_k = \Re z_k > 0$, $1 \leq k \leq n$, entraîne $f \equiv 0$. On pose

$$z_k = x_k + iy_k;$$

l'arête de Γ_n est la variété A définie par $x_k = 0$, $1 \leq k \leq n$.

A la suite $M_{(\alpha)} = M_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$, on associera la fonction

$$(2) \quad T(r_1, \dots, r_n) = \sup_{(\alpha)} \frac{r_1^{\alpha_1} \dots r_n^{\alpha_n}}{M_{(\alpha)}}$$

le sup étant pris pour r_1, \dots, r_n donnés. Les majorations (1) équivalent au fait que $|f|$ soit borné dans Γ_n et que pour $y = (iy_k) \in A$, $f(y) = \limsup f(z)$, $z \in \Gamma_n$, $z \rightarrow y \in A$ vérifie la majoration :

$$(3) \quad \log |f(iy_1, \dots, iy_n)| \leq -\log T(|y_1|, \dots, |y_n|).$$

Rappelons que dans le cas $n = 1$, cette considération suffit

à donner la solution du problème. En effet la formule de Poisson appliquée au demi-plan Γ_1 donne, d'après (1) :

$$(4) \quad \log |f(x + iy)| \leq \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\log T(|\eta|)x \, d\eta}{x^2 + (y - \eta)^2}$$

et le résultat classique de T. Carleman en découle, cf. [1] et [4 a] : pour $n = 1$, une condition nécessaire et suffisante pour que les majorations (1) déterminent $f \equiv 0$ est la divergence de l'intégrale qui figure au second membre de (4); elle équivaut à la condition de divergence :

$$(5) \quad I_1 = \int_0^{\infty} (1 + r^2)^{-1} \log T(r) \, dr = +\infty$$

Notons que si l'on a $I_1 < \infty$, le second membre de (4) définit une fonction harmonique $g(x, y)$; si g' est sa conjuguée, une solution non nulle du problème est fournie par $f_T = e^{g + ig'}$.

Pour $n \geq 2$, et, par exemple, pour $n = 2$, il est clair que (1) entraîne encore sur Γ_2 :

$$(6) \quad \log |f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)| \\ \leq \pi^{-2} \int_A \frac{-\log T(|\eta_1|, |\eta_2|) x_1 x_2 \, d\eta_1 \, d\eta_2}{[x_1^2 + (y_1 - \eta_1)^2][x_2^2 + (y_2 - \eta_2)^2]}$$

et l'on voit que, pour n quelconque, la divergence de l'intégrale

$$(7) \quad I_n = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} (1 + r_1^2)^{-1} \dots (1 + r_n^2)^{-1} \log T(r_1, \dots, r_n) \, dr_1 \dots dr_n$$

entraîne que la seule solution de (1), analytique sur Γ_n , soit $f \equiv 0$. Cette condition *suffisante* de détermination est une condition nécessaire dans la famille des fonctions $V(z_1, \dots, z_n)$ harmoniques séparément des z_k sur Γ_n ; elle ne l'est pas ⁽¹⁾ dans la famille des fonctions plurisousharmoniques et, a fortiori, dans celle des fonctions $\log |f|$, f analytique, comme on le verra plus loin par un exemple.

On posera, pour $r_1 = r_2 = \dots = r_n = r$:

$$(8) \quad \theta(r) = T(r, \dots, r) = \sup_{(\alpha)} \frac{r^{|\alpha|}}{M_{(\alpha)}} = \sup_p \frac{r^p}{\mu_p}$$

et $\mu_p = \inf M_{(\alpha)}$ pour $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = p$. Le pro-

(1) L'erreur est commise dans [2] à partir de la page 282.

blème posé est alors résolu par l'énoncé suivant, que nous avons déjà donné dans la note [3 a]:

THÉORÈME 1. — *Pour que les majorations (1), où f est analytique dans Γ_n : $x_k = \Re z_k > 0$, $1 \leq k \leq n$, déterminent $f \equiv 0$, il faut et il suffit que soit divergente l'intégrale*

$$(9) \quad \mathfrak{J} = \int_0^\infty (1 + r^2)^{-1} \log \theta(r) dr.$$

On donnera ici une application du théorème à l'étude des classes dérivables de fonctions, en laissant de côté d'autres applications à portée qui concernent notamment le problème des moments à plusieurs variables.

2. Démonstration du théorème 1.

a) Montrons d'abord que $\mathfrak{J} = \infty$ entraîne $f \equiv 0$. Soit Γ'_n la partie de Γ_n définie par

$$x_n = \Re z_n > 0, \quad z_k = t_k z_n, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

les t_k étant réels et assujettis à vérifier $t_k \geq 1$. Considérons

$$\varphi(z_n) = f(t_1 z_n, \dots, t_{n-1} z_n, z_n)$$

qui est analytique dans le demi-plan $\Re z_n > 0$ et y vérifie pour tout (α) les inégalités:

$$|\varphi(z_n)| \leq M_{(\alpha)} t_1^{-\alpha_1} \dots t_{n-1}^{-\alpha_{n-1}} |z_n^{-|\alpha|}| \leq M_{(\alpha)} |z_n|^{-|\alpha|}.$$

Elles équivalent à la majoration:

$$|\varphi(z_n)| \leq \inf_p |z_n|^{-p} \left[\inf_{|\alpha|=p} M_\alpha \right] = \inf_p \mu_p |z_n|^{-p}.$$

Le théorème pour $n = 1$, appliqué à $\varphi(z_n)$ entraîne alors $\varphi(z_n) \equiv 0$, c'est-à-dire $f(z_1, \dots, z_n) = 0$ en tout point de Γ'_n . Soit P un point de coordonnées x_k^0 réelles positives, choisies de manière qu'on ait pour $1 \leq k \leq n-1$: $x_k^0 = t_k x_n^0$, avec $t_k \geq 1 + \lambda$, où $\lambda > 0$. Alors Γ'_n contient un voisinage de P dans l'espace R^n des coordonnées réelles. En effet si l'on choisit σ vérifiant $0 < \sigma < \frac{1}{2} \lambda x_n^0$, les points $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ pour lesquels on a

$$(10) \quad |x_k - x_k^0| < \sigma, \quad 1 \leq k \leq n.$$

appartiennent à Γ'_n ; la série de Taylor de f de centre P est donc nulle et l'on a $f \equiv 0$ dans Γ_n , ce qui établit la condition suffisante.

b) Dans l'autre sens, remarquons que $\mathfrak{J} < \infty$ assure l'existence d'une fonction $f_\theta(z) \not\equiv 0$, vérifiant dans Γ_1 les majorations

$$(11) \quad |f_\theta(z)| \leq \mu_p |z|^{-p} \quad \text{pour tout } p.$$

Il suffit alors de montrer l'énoncé suivant.

PROPOSITION 1. — *Si $f(z) \not\equiv 0$ est analytique pour $\Re z > 0$ et vérifie (11), alors il existe une constante $a > 0$ telle que*

$$(12) \quad f(z_1 \dots z_n) = af_\theta(z_1) f_\theta(z_2) \dots f_\theta(z_n)$$

est analytique dans Γ_n , et y vérifie (1) pour tout (α) , $\alpha_k \geq 0$.

Pour la démonstration, on est amené à considérer la régularisation convexe des suites $\log M_{(\alpha)}$, $\log \mu_p$. Dans l'espace R^{n+1} des coordonnées u_1, \dots, u_n, ν , considérons d'abord l'ensemble E de demi-droites définies par

$$u_1 = \alpha_1, \dots, u_n = \alpha_n, \quad \nu \geq \log M_{(\alpha)}$$

ceci pour tous les indices $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_k entier positif. Si l'on mène par l'origine $P_{(\alpha)}$ de l'une des demi-droites le plan de coefficients $(\log r_1, \dots, \log r_n, -1)$, son ordonnée à l'origine est

$$\nu_{(\alpha)} = \log M_{(\alpha)} - \sum_1^n \alpha_k \log r_k$$

et si l'on compare avec (2) on obtient, pour r_1, \dots, r_n donnés :

$$(13) \quad -\log T(r_1, \dots, r_n) = \inf_{(\alpha)} \nu_{(\alpha)}.$$

Il en résulte que si E^c est dans R^{n+1} l'enveloppe de convexité de E , $-\log T(r_1, \dots, r_n)$ est l'ordonnée à l'origine du plan tangent à E^c dont les coefficients de direction sont $(\log r_k, -1)$, ce plan laissant E^c dans le demi-espace déterminé par la demi-droite des ν positifs. Pour $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ donnés entiers positifs, E^c détermine une demi-droite $\nu \geq \log M_{(\alpha)}^c$ appartenant à E^c ; on a évidemment $M_{(\alpha)}^c \leq M_{(\alpha)}$: $M_{(\alpha)}^c$ sera dit la régularisée convexe de la suite $M_{(\alpha)}$.

Opérons, ce qui est classique, la même construction sur la suite μ_p à un seul indice : dans l'espace $R^2(u, \nu)$ on construit

l'ensemble e des demi-droites d'abscisses entières positives : $u = p$, $v \geq \log \mu_p$, pour tout $p \geq 0$, entier. Soit e^c l'enveloppe convexe de e ; pour $u = p$, soit $v \geq \log \mu_p^c$ la demi-droite déterminée sur e^c . On a $\mu_p^c \leq \mu_p$. On a alors :

PROPOSITION 2. — Soit $\mu_p = \min_{|\alpha|=p} M_{(\alpha)}$; on a entre les régularisées convexes μ_p^c , $M_{(\alpha)}^c$ des deux suites μ_p , $M_{(\alpha)}$ la relation

$$(14) \quad \mu_p^c = \min_{|\alpha|=p} M_{(\alpha)}^c$$

En effet si l'on considère l'espace $R^2(u, v)$ comme projection de l'espace $R^{n+1}(u_1, \dots, u_n, v)$, la projection s'écrivant

$$u = u_1 + u_2 \cdots + u_n, \quad v = v$$

la projection de E est e et la proposition 2 exprime le fait que les enveloppes de convexité \bar{E}^c et e^c se correspondent par la projection.

Achevons alors la démonstration de la proposition 1 : d'après le théorème 1 pour $n = 1$, il existe une fonction $f_\theta(z) \not\equiv 0$, analytique pour $\Re z > 0$, vérifiant (11) pour tout p ; elle vérifie alors les majorations équivalentes :

$$|f_\theta(z)| \leq \mu_p^c |z|^{-p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

La fonction définie sur les entiers $p > 0$ par

$$l(p) = \frac{1}{p} \log \mu_p^c, \quad \text{si } p \geq 1, \quad \text{et } l(0) = 0$$

est croissante à partir d'une certaine valeur p_0 , et $l(p) \rightarrow +\infty$ quand $p \rightarrow \infty$. Dans le cas contraire en effet, comme e^c est convexe, on aurait pour $l(p)$ une limite l_0 finie et $l(p) < l_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, pour $p > p_1$. Or on a

$$\log \theta(r) = \sup_p [p \log r - \log \mu_p^c] = \sup_p p [\log r - l(p)]$$

ce qui donnerait $\log \theta(r) = +\infty$ pour $\log r > l_0 + \varepsilon$, en contradiction avec la convergence de \int . Il existe donc une certaine valeur p_2 , telle qu'on ait pour tout entier $p > p_2$:

$$l(p) = \sup_{q \leq p} l(q)$$

Revenons à (12); on a :

$$|f(z_1, \dots, z_n)| \leq a \mu_{\alpha_1}^c \dots \mu_{\alpha_n}^c |z_1|^{-\alpha_1} \dots |z_n|^{-\alpha_n}$$

Mais pour $|\alpha| > p_2$, on a $\sum_1^n \alpha_k l(\alpha_k) \leq l(|\alpha|) \sum_1^n \alpha_k = |\alpha| l(|\alpha|)$.

D'où : $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\mu_{\alpha_1}^c \dots \mu_{\alpha_n}^c) (\mu_{|\alpha|}^c)^{-1} \leq 1$ pour $|\alpha| > p_2$;
 On a donc $b = \sup_{(\alpha)} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$. Choisissons $a = b^{-1}$;
 On a alors :

$$\log |f(z_1, \dots, z_n)| \leq \log \mu_{|\alpha|}^c - \sum \alpha_k \log |z_k|$$

Appliquons alors la proposition 2; il vient :

$$\log |f(z_1, \dots, z_n)| \leq \inf_{(\alpha)} [\log M_{(\alpha)}^c - \sum \alpha_k \log |z_k|]$$

où inf est pris pour tous les indices multiples $(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
 La proposition 1 et le théorème 1 sont alors établis.

3. Comparaison de $T(r, \dots, r_n)$ et de $\theta(r)$.

On a défini $\theta(r) = T(r, \dots, r)$; plus généralement on a

THÉORÈME 2. — Soit $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n , vérifiant $\lambda_k \geq a > 0$. On pose : $\theta_{\vec{\lambda}}(r) = T(\lambda_1 r, \dots, \lambda_n r)$.
 Alors on a

$$\theta(ar) \leq \theta_{\vec{\lambda}}(r) \leq \theta(r).$$

En effet on a simultanément :

$$\log \theta_{\vec{\lambda}}(r) = \sup_{(\alpha)} \left[|\alpha| \log r + \sum_1^n \alpha_k \log \lambda_k - \log M_{(\alpha)} \right] \leq \log \theta(r)$$

$$\log \theta_{\vec{\lambda}}(r) \geq \sup_{(\alpha)} [|\alpha| \log r + |\alpha| \log a - \log M_{(\alpha)}] = \log \theta(ar).$$

COROLLAIRE. — Toutes les fonctions

$$\theta_{\vec{\lambda}}(r) = T(\lambda_1 r, \dots, \lambda_n r)$$

où $\vec{\lambda}$ est un vecteur n'ayant aucune composante nulle, se comportent comme $\theta(r)$, en ce qui concerne la convergence ou la divergence de l'intégrale \mathcal{J} .

Comparaison des intégrales I_n et \mathcal{J} . — Contre-exemple pour $n \geq 2$. Nous allons construire pour $n = 2$ une suite $M_{p,q}$ telle que \mathcal{J} diverge, tandis que I_2 converge; on établira ainsi que la divergence de I_n n'est plus, pour $n \geq 2$, une condition nécessaire pour déterminer $f \equiv 0$ par le problème posé (1).

Remarquons tout d'abord que, si l'on compare les suites $M_{p,q}$ et $M'_{p,q} = (M_{p,q})^s$, $s > 0$, on a :

$$(15) \quad \log T'(r_1, r_2) = \sup_{p,q} [p \log r_1 + q \log r_2 - \log M'_{p,q}] \\ = s \log T(r_1^{1/s}, r_2^{1/s}).$$

D'autre part, considérons la suite particulière $m_n = n^n$ et la fonction associée $\theta_1(r)$; on a :

$$(16) \quad \log \theta_1(r) = \sup_n [n \log r - n \log n] \sim re^{-1}.$$

Définissons alors la suite $M_{p,q}$, de la manière suivante :

$M_{p,q} = f_1(p, q) + f_2(p, q)$, où l'on pose

a) $f_1(p, q) = (p + q)^{p+q}$ si $p = q$; $f_1(p, q) = +\infty$ si $p \neq q$;

b) $f_2(p, q) = +\infty$ si $p = q$; $f_2(p, q) = (p + q)^{2(p+q)}$ si $p \neq q$.

Soit $\mu_n = \inf_{p+q=n} M_{p,q}$. Posons $g_1(n) = n^n = \mu_n$ si n est pair et $g_1(n) = +\infty$ si n est impair. De même définissons

$$g_2(n) = n^{2n} = \mu_n$$

si n est impair et $g_2(n) = +\infty$ si n est pair. On a, en appliquant (15) :

$$(17) \quad \beta_1(r) = \sup_n \frac{r^n}{g_1(n)} = \sup_p \frac{r^{2p}}{(2p)^{2p}} = \theta_1^2\left(\frac{r}{2}\right),$$

$$(18) \quad \beta_2(r) = \sup_n \frac{r^n}{g_2(n)} \leq \sup_n \frac{r^n}{n^{2n}} = \theta_1^2(\sqrt{r}).$$

D'après (16) et (18) le rapport $\frac{\beta_2(r)}{\beta_1(r)}$ tend vers zéro quand r augmente indéfiniment et l'on a $\beta_1(r)$

$$\beta_1(r) \leq \theta(r) = \sup_n \frac{r^n}{\mu_n} \leq \beta_1(r) + \beta_2(r)$$

qui montre

$$\log \theta(r) \sim re^{-1}$$

et la divergence de \mathcal{J} . D'autre part on a

$$T(r_1, r_2) \leq \sup_{p,q} \frac{r_1^p r_2^q}{f_1(p, q)} + \sup_{p,q} \frac{r_1^p r_2^q}{f_2(p, q)},$$

$$T(r_1, r_2) \leq \sup_p \frac{(r_1 r_2)^p}{(2p)^{2p}} + \sup_{p,q} \frac{(r_1 + r_2)^{p+q}}{(p+q)^{2(p+q)}} \leq \theta_1^2\left(\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{2}\right) + \theta_1^2(\sqrt{r_1 + r_2})$$

ce qui, compte tenu de (16), montre qu'il existe une constante

$c > 0$, telle qu'on ait pour tout couple (r_1, r_2) , $r_1 > 0$, $r_2 > 0$:

$$\log T(r_1, r_2) \leq c[\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_1 r_2}]$$

et assure que l'intégrale I_2 est convergente. Ainsi donc

THÉORÈME 3. — *Il existe des suites $M_{(\alpha)}$, pour $n > 1$, qui rendent convergente l'intégrale I_n tandis qu'elles rendent divergente l'intégrale J .*

Remarque. — On a en même temps répondu à la question suivante : existe-t-il des fonctions plurisousharmoniques⁽²⁾ V , qui vérifient les majorations

$$(1)' \quad V(z_1, \dots, z_n) \leq \log M_{(\alpha)} - \sum_1^n \alpha_k \log |z_k|$$

dans Γ_n ? On obtient, comme conséquence de l'énoncé précédent :

COROLLAIRES. — I) *La divergence de l'intégrale J est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'existe aucune fonction plurisousharmonique vérifiant (1)' dans Γ_n .*

II) *Si $n \geq 2$, il existe sur l'arête A de Γ_n des fonctions continues*

$$\psi(\eta_1, \dots, \eta_n) = -\log T(|\eta_1|, \dots, |\eta_n|)$$

qui majorent sur $A^{(3)}$ une fonction séparément harmonique des z_k dans Γ_n , mais qui ne majorent aucune fonction plurisousharmonique bornée supérieurement dans Γ_n .

III) *Soit P le polycercle $|z_k| < 1$, d'arête A' : $z_k = e^{i\omega_k}$, $0 \leq \omega_k \leq 2\pi$. Il existe des fonctions continues $\varphi(\omega_1, \dots, \omega_n)$ sur A' , qui tendent vers $-\infty$ quand l'un au moins des ω_k tend vers 0 ou 2π , pour lesquelles l'intégrale sur A' a une valeur finie, et qui ne majorent sur A' aucune fonction plurisousharmonique sur P .*

4. Application aux classes de fonctions dérivables.

A la suite $M_{(\alpha)}$, $0 < M_{(\alpha)} \leq +\infty$, nous ferons correspondre une classe $C[M_{(\alpha)}]$ de fonctions dérivables.

⁽²⁾ On rappelle que la constante $-\infty$ n'est pas considérée comme appartenant à la classe des fonctions plurisousharmoniques.

⁽³⁾ On convient de dire que $V(z_1, \dots, z_n)$ définie sur Γ_n est majorée sur A par la fonction continue $\psi(\eta_1, \dots, \eta_n)$ si $\limsup V(z) \leq \psi(\eta)$ pour $z_k \rightarrow i\eta_k$, $z = (z_k) \in \Gamma$.

DÉFINITION. — On dira qu'une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ appartient sur un ensemble E à la classe $C[M_{(\alpha)}]$ si f est indéfiniment dérivable sur E , et si les dérivées successives

$$D^{(\alpha)}f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_n^{\alpha_n}}$$

vérifient pour tout (α) les majorations :

$$(19) \quad |D^{(\alpha)}f| \leq Ak^{|\alpha|} M_{(\alpha)}$$

les constantes A et k étant relatives à la fonction $f \in C[M_{(\alpha)}]$.

En admettant éventuellement la valeur $M_{(\alpha)} = +\infty$, on peut supposer que $M_{(\alpha)}$ est défini pour tous les indices (α) , $\alpha_k \geq 0$, α_k entiers. Le théorème 1 fournit alors une caractérisation des classes $C[M_{(\alpha)}]$ qui ne peuvent contenir de fonction à support compact non vide.

DÉFINITION. — La classe $C[M_{(\alpha)}]$ sera dite une classe de convergence ou de divergence selon que l'intégrale \int associée à $\{M_{(\alpha)}\}$ par (8) et (9) converge ou diverge.

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — 1° Si f appartient à une classe de divergence sur un compact G de R^n et s'annule ainsi que toutes ses dérivées sur la frontière de G , alors on a $f \equiv 0$ sur G .

2° Si $C[M_{(\alpha)}]$ est une classe de convergence, et G un compact de R^n d'intérieur $\overset{\circ}{G}$ non vide, il existe une fonction $f \not\equiv 0$ dans $\overset{\circ}{G}$, appartenant à $C[M_{(\alpha)}]$, et nulle en dehors de G .

Pour établir 1° opérons au besoin une translation, de manière que G soit dans la région des coordonnées x_k positives, ce qui ne modifie pas les hypothèses, et posons, \tilde{f} étant obtenu en prolongeant f par les valeurs nulles sur $R^n - G$:

$$(20) \quad F(z_1, \dots, z_n) = \mathcal{L}\tilde{f} = \int_{R^n} e^{-2\pi \sum z_k t_k} \tilde{f}(t_1, \dots, t_n) d\tau(t).$$

On désignera par B une borne supérieure du volume $\tau(G)$ du compact G .

On a alors, pour la transformée de Laplace $\mathcal{L}[D^\alpha \tilde{f}]$:

$$(21) \quad \mathcal{L}[D^{(\alpha)} \tilde{f}] = (-1)^{|\alpha|} (2\pi)^{|\alpha|} z_1^{\alpha_1}, \dots, z_n^{\alpha_n} F(z_1, \dots, z_n)$$

et l'hypothèse (19) donne, pour $\Re z_k \geq 0$:

$$(2\pi)^{|\alpha|} |z_1^{\alpha_1}, \dots, z_n^{\alpha_n}| |F(z_1, \dots, z_n)| \leq M_{(\alpha)} \int_G d\tau(t) \leq B M_{(\alpha)}$$

$$(22) \quad |F(z_1, \dots, z_n)| \leq B (2\pi)^{-|\alpha|} M_{(\alpha)} |z_1^{-\alpha_1}, \dots, z_n^{-\alpha_n}|.$$

La fonction F est une fonction entière de type exponentiel. D'après (22) la fonction

$$(23) \quad F_1(z_1, \dots, z_n) = B^{-1} F\left(\frac{z_1}{2\pi}, \dots, \frac{z_n}{2\pi}\right)$$

est analytique sur Γ_n , et vérifie sur Γ_n les hypothèses du théorème 1; il en résulte $F_1 \equiv 0$, $C[M_{(\alpha)}]$ étant une classe de divergence. On a donc $f \equiv 0$, ce qui établit 1°.

Pour établir 2°, le compact G étant donné, d'intérieur $\overset{\circ}{G}$ non vide, considérons un pavé

$$(24) \quad x_k^0 < x_k < x_k^0 + h, \quad h > 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

contenu dans $\overset{\circ}{G}$. D'après le résultat connu pour $n = 1$, il existe une fonction $f_0(x) \not\equiv 0$, indéfiniment dérivable sur $0 \leq x \leq 1$, dont toutes les dérivées s'annulent pour $x = 0$ et $x = 1$, et qui vérifie les majorations

$$(25) \quad |f_0^{(p)}(x)| \leq c_0 k^p \mu_p;$$

c_0 et k sont des constantes positives et $\mu_p = \inf_{|\alpha|=p} M_{(\alpha)}$ est la suite construite à partir de la suite $M_{(\alpha)}$ supposée donnée, $C[M_{(\alpha)}]$ étant une classe de convergence. A la suite μ_p , associons la suite μ_p^c , régularisée convexe. D'après un résultat connu (4), on a alors, pour tout p :

$$(26) \quad |f_0^{(p)}(x)| \leq c_1 k_1^p \mu_p^c$$

pour des constantes c_1, k_1 positives finies. Définissons alors

$$f_0(x_1, \dots, x_n) = f_0\left(\frac{x_1 - x_1^0}{h}\right) \times f_0\left(\frac{x_2 - x_2^0}{h}\right) \dots \times f_0\left(\frac{x_n - x_n^0}{h}\right).$$

D'après (26), on aura :

$$|D^{(\alpha)} f_0(x_2, \dots, x_n)| \leq h^{-|\alpha|} c_1^n k_1^{|\alpha|} \mu_{\alpha_1}^c \dots \mu_{\alpha_n}^c$$

On opère alors comme plus haut, en remarquant que la convexité du diagramme e^c entraîne à partir d'une certaine valeur la croissance de $l(p) = p^{-1} \log \mu_p^c$, ce qui permet d'écrire pour une certaine constante b , finie :

$$\mu_{\alpha_1}^c \cdot \mu_{\alpha_2}^c \dots \mu_{\alpha_n}^c \leq b \mu_{|\alpha|}^c.$$

(4) Cf. [4, b, théorème 8, p. 63].

On a donc

$$|D^{(\alpha)}f_0(x_1, \dots, x_n)| \leq b c_1^n (k_1 h^{-1})^{|\alpha|} \mu_{|\alpha|} \leq c_2 k_2^{|\alpha|} M_{(\alpha)}$$

où $k_2 = k_1 h^{-1}$ et c_2 sont des constantes indépendantes de l'indice (α) . Ainsi f_0 appartient à $C[M_{(\alpha)}]$, sans être identiquement nulle dans \bar{G} , ce qui établit 2° et achève la démonstration. Notons, en conséquence du théorème 4 :

COROLLAIRE. — Si f_1 et f_2 appartiennent dans un domaine D à une classe de divergence, et si l'on a $f_1 = f_2$ sur un voisinage de la frontière d'un ouvert Ω relativement compact dans D , $\bar{\Omega} \subset D$, alors f_1 et f_2 coïncident sur Ω .

Remarque. — On peut se demander si, $M_{(\alpha)}$ étant une classe de divergence, l'appartenance de f à $C[M_{(\alpha)}]$ dans un voisinage D de l'origine, entraîne nécessairement $f \equiv 0$, quand f et toutes ses dérivées s'annulent à l'origine. Il n'en est rien pour $n \geq 2$, on va le montrer par un exemple simple. On considère une fonction $f_1(x_1)$, indéfiniment dérivable, vérifiant pour $-1 \leq x_1 \leq 1$:

$$\left| \frac{\partial^p f_1}{\partial x_1^p} \right| \leq \mu_p$$

la suite μ_p déterminant une classe de divergence. D'autre part on considère une fonction $f_2(x_2) \not\equiv 0$, nulle ainsi que toutes ses dérivées à l'origine, par exemple $f_2(x_2) = \exp\left(-\frac{1}{x_2^2}\right)$ pour $x_2 \neq 0$, $f_2(0) = 0$. Alors

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$$

à toutes ses dérivées partielles $D^{p,q}f$ nulles à l'origine et d'autre part, en désignant par M le maximum de $|f_2|$ pour $-1 \leq x_2 < 1$, on a dans le carré $R: |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$:

$$|D^{p,0}f(x_1, x_2)| \leq M \mu_p.$$

Ainsi f appartient bien dans le carré R , à une classe $C[M_{(\alpha)}]$, pour laquelle on a

$$\inf_{r+s=p} M_{r,s} = \mu_p$$

donc à une classe de divergence et l'on a établi de ce fait :

THÉORÈME 5. — *Il existe, pour $n \geq 2$, des fonctions appartenant à une classe de divergence $C[M_{(\alpha)}]$ dans un voisinage de l'origine, s'annulant ainsi que toutes leurs dérivées à l'origine et non identiquement nulles.*

5. Cas d'une famille d'opérateurs différentiels.

Soit \mathcal{F} une famille de polynômes $P = P(z_1, \dots, z_n)$ homogènes; on désigne encore par \mathcal{F} la famille des polynômes de dérivation $P\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$. Pour généraliser le théorème 4, on utilisera la remarque suivante :

PROPOSITION 3. — *Soit $F(z_1, \dots, z_n)$ une fonction entière; si pour $t = (t_1, \dots, t_n)$ fixé, t_k réels, on a*

$$F(t_1 u, \dots, t_n u) = \varphi_t(u) \equiv 0,$$

et cela pour tous les points t d'un ensemble e de mesure positive dans R^n , alors on a $F \equiv 0$.

En effet $F \not\equiv 0$ entraîne que dans le développement

$$F = \sum_0^{\infty} u^s Q_s(t_1, \dots, t_n)$$

il y ait un premier polynôme soit Q_m non identiquement nul; alors $Q_m = 0$ définit un ensemble de R^n -mesure nulle ⁽⁵⁾ dans $R^n(t)$; on aboutit ainsi à une contradiction qui établit l'énoncé.

De là découle.

THÉORÈME 6. — *Soit \mathcal{F} une famille de polynômes homogènes; soit C_P une constante positive associée à $P \in \mathcal{F}$, de manière que si α est le degré de P , les polynômes $P' = C_P P$ engendrent une famille de fonctions plurisousharmoniques*

$$V_P(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\alpha} \log |P'(z_1, \dots, z_n)|.$$

⁽⁵⁾ Les infinis négatifs de la fonction plurisousharmonique $\log |Q_m|$ possèdent en effet cette propriété, cf. [3, (d)], théorème 6, où on établit la sommabilité locale des restrictions à l'espace réel R^n pour une classe plus générale que les fonctions plurisousharmoniques.

localement bornée supérieurement et n'admettant pas la fonction limite $-\infty$, dans C^n . Soit d'autre part une famille M_P , $0 < M_P \leq +\infty$ de constantes associées aux polynômes $P \in \mathcal{F}$; on pose

$$(27) \quad \theta_{\mathcal{F}}(r) = \sup_{P \in \mathcal{F}} \frac{r^\alpha}{C_P M_P}.$$

On dira qu'une fonction $f(x_1, \dots, x_n)$ appartient à la classe $C[M_P]$ sur un ensemble E si il existe des constantes k, A , dépendant de f , mais non de $P \in \mathcal{F}$, de manière que soient vérifiées sur E toutes les majorations

$$\left| P \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right| \leq A k^\alpha M_P.$$

Alors pour que la classe $C[M_P]$, $P \in \mathcal{F}$, ait la propriété de quasi-analyticité énoncée par le 1^o du théorème 4, il faut et il suffit que l'intégrale

$$(28) \quad \int_0^\infty (1+r^2)^{-1} \log \theta_{\mathcal{F}}(r) dr$$

soit divergente.

Pour la démonstration, remarquons que les fonctions $V'(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\alpha} \log |P(z_1, \dots, z_n)|$ sont des fonctions pluri-sousharmoniques dans C^n et, considérées comme fonctions R^{2n} -sousharmoniques, sont de masse bornée sur tout compact. L'aire $\sigma(R)$ de l'ensemble $P = 0$ dans la boule $\|z\| < R$ vérifie en effet

$$\sigma(R) < c(n) \alpha R^{2n-2}$$

d'après un résultat établi dans [3, (c)]. La masse relative à $\log |P|$ étant proportionnelle à σ , la masse relative à V' a une majoration de la forme $c'(n) R^{2n-2}$ dans une boule $\|z\| < R$. On peut alors déterminer les constantes C_P ; il suffit, par exemple, de déterminer C_P de manière que la moyenne $\lambda(V, 0,1)$ de V sur la sphère $\|z\| = 1$ s'annule, ce qui donne :

$$\log C_P = -\lambda [\log |P|, 0,1].$$

Les fonctions $V_P(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\alpha} \log |C_P P(z_1, \dots, z_n)|$ sont alors uniformément bornées supérieurement sur tout compact et n'admettent pas la fonction limite $-\infty$.

Le choix des constantes C_p étant fait, posons, comme dans [3, (d)] :

$$W(z_1, \dots, z_n) = \sup_{P \in \mathcal{F}} V_P(z_1, \dots, z_n)$$

$$W^*(z_1, \dots, z_n) = \text{rég. sup } W(z_1, \dots, z_n)$$

La fonction W^* est ⁽⁶⁾ plurisousharmonique dans C^n .

Généralisons alors le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 1 : soit $F(z_1, \dots, z_n)$ une fonction entière vérifiant sur Γ_n les majorations

$$(29) \quad |F(z_1, \dots, z_n)| \leq \frac{M_p}{|P(z_1, \dots, z)|}, \quad \text{pour } P \in \mathcal{F}.$$

On en déduit, en posant

$$M'_p = C_p M_p,$$

$$\log |F(z_1, \dots, z_n)| \leq - \sup_{P \in \mathcal{F}} [\log |P'(z_1, \dots, z_n)| - \log M'_p]$$

$$\log |F(z_1, \dots, z_n)| \leq - \sup [\alpha W(z_1, \dots, z_n) - \log M'_p].$$

Mais comme le premier membre est continu, on a aussi, en tout point $z \in \Gamma_n$:

$$\log |F(z)| \leq - \sup_{P \in \mathcal{F}} [\alpha W^*(z) - \log M'_p].$$

Soient t_k des nombres réels, positifs. On aura

$$\log |F(t_1 u, \dots, t_n u)| \leq - \sup [\alpha \log |u| + \alpha W^*(t_1, \dots, t_n) - \log M'_p]$$

l'homogénéité des polynômes se traduisant par

$$W^*(t_k u) = \log |u| + W^*(t_k)$$

Mais W^* étant plurisousharmonique dans C^n est localement sommable (5) sur le sous-espace réel R^n . Si donc on donne à t_1, \dots, t_n des valeurs réelles positives, il existe $L > -\infty$, tel qu'on ait $W^*(t_1, \dots, t_n) > L$ pour tous les $t = (t_k)$ d'un ensemble e de R^n -mesure positive dans R^n_+ , ($t_k \geq 0$). Fixons $t \in e$; alors on a :

$$\log |F(t_1 u, \dots, t_n u)| \leq - \sup_{P \in \mathcal{F}} [\alpha (\log |u| + L) - \log M'_p]$$

$$(30) \quad \log |F(t_1 u, \dots, t_n u)| \leq - \log \theta_{\mathcal{F}}(l|u|), \quad \text{pour } \Re_u \geq 0$$

(*) On désigne par *reg. sup. W* (régularisée supérieure) la plus petite majorante semi-continue supérieurement de W .

où l'on a posé $L = \log l$. Alors (29) entraîne, compte tenu de (28), qu'on ait $F(t_1u, \dots, t_nu) = 0$ pour $t \in e$, quel que soit u . La proposition 3 établit alors $F \equiv 0$.

Le théorème 6 en résulte : opérons comme dans la démonstration du théorème 4; soit f une fonction de classe $C[M_P]$ sur un compact G , nulle ainsi que ses dérivées sur la frontière de G . Soit \tilde{f} le prolongement de f , à valeurs nulles sur $R^n - G$. Alors $\mathcal{L}\tilde{f} = F$ est entière et la fonction F_1 qui s'en déduit par (23) vérifie (29) sur Γ_n ; on a donc $F \equiv 0$, ce qui entraîne $f \equiv 0$. Ainsi la condition suffisante est établie. La condition nécessaire résulte d'autre part directement du théorème 4.

COROLLAIRE. — *La divergence de l'intégrale J donnée par (28) est une condition nécessaire et suffisante pour que la classe $C[M_P]$, considérée dans un ouvert, ne contienne pas de fonction $f \neq 0$ à support compact.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. CARLEMAN, *Fonctions quasi-analytiques* (Gauthier-Villars), Paris, 1926.
- [2] S. KODAMA, *Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University*, t. 22, n° 5, 1939.
- [3] P. LELONG. a) Sur une propriété de quasi-analyticité des fonctions de plusieurs variables. *Comptes rendus. Ac. Sc. Paris*, t. 232, 1951, pp. 1178-1180.
 b) Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation, *Ann. E.N.S.*, t. 67, 1950, pp. 393-419.
 c) Sur l'aire des ensembles analytiques complexes. *Annales Acad. Scient. Fennicae. A*, 150/21, 1958.
 d) Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables réelles. *Annales Institut Fourier*, t. 11, 1961, pp. 515-562.
- [4] S. MANDELBROJT. a) *Séries de Fourier et classes quasi-analytiques* (Gauthier-Villars), Paris, 1935.
 b) Analytic functions, *Rice Institute Pamphlet*, vol. 29, 1942.