

JACQUES CHAUMAT

ANNE-MARIE CHOLLET

**Régularité höldérienne de l'opérateur $\bar{\partial}$ sur
le triangle de Hartogs**

Annales de l'institut Fourier, tome 41, n° 4 (1991), p. 867-882

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_4_867_0

© Annales de l'institut Fourier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RÉGULARITÉ HÖLDÉRIENNE DE L'OPÉRATEUR $\bar{\partial}$ SUR LE TRIANGLE DE HARTOGS

par J. CHAUMAT et A.-M. CHOLLET

Introduction.

Soit T , le triangle de Hartogs de \mathbf{C}^2 ,

$$T = \{z \in \mathbf{C}^2; |z_2| < |z_1| < 1\}.$$

Ce domaine pseudoconvexe célèbre jouit de propriétés très intéressantes. En effet, sa frontière est une sous-variété de classe C^1 par morceaux en dehors de 0 mais n'est pas une variété au voisinage de 0. Son adhérence \bar{T} n'a pas de base de voisinages de Stein. Plus précisément, toute fonction holomorphe dans un voisinage de \bar{T} se prolonge en une fonction holomorphe dans le polydisque unité de \mathbf{C}^2 , $\mathbb{P} = \{z \in \mathbf{C}^2; |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. On a même beaucoup mieux : toute fonction de $A^\infty(\bar{T})$, la classe des fonctions indéfiniment dérivables sur \bar{T} et holomorphes dans T , se prolonge en une fonction holomorphe dans \mathbb{P} . On en tire alors que, si ζ est un point de $\mathbb{P} \setminus \bar{T}$, il n'existe pas de couple (h_1, h_2) de fonctions de $A^\infty(\bar{T})$, solution de l'équation

$$(*) \quad h_1(z)(\zeta_1 - z_1) + h_2(z)(\zeta_2 - z_2) = 1$$

pour tout z de T .

On déduit de là, par un argument classique [4] et [5], que, si on note $\alpha(z)$ la $(0, 1)$ forme différentielle réelle analytique et $\bar{\partial}$ -fermée dans

un voisinage de \bar{T} , définie par

$$\alpha(z) = (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) d\bar{z}_2 + (\bar{z}_2 - \bar{\zeta}_2) d\bar{z}_1 |z - \zeta|^{-4},$$

l'équation $\bar{\partial}u = \alpha$ n'a pas de solution u dans $C^\infty(\bar{T})$.

Cet exemple montre l'importance de l'hypothèse de s - H convexité introduite dans [1] et [2]. Elle assure, pour un compact K de \mathbb{C}^n , l'existence d'une bonne base de voisinages de Stein et permet de résoudre l'équation

$$(**) \quad \bar{\partial}u = f$$

dans $C^\infty(K)$ et dans les classes ultradifférentiables sur K à l'aide d'une formule intégrale. En effet, sous cette hypothèse, on peut trouver, pour chaque ζ proche de K , un couple de fonctions (h_1, h_2) holomorphes en z dans un voisinage V_ζ de K , suffisamment régulières en ζ et vérifiant l'équation (*). On sait l'importance de l'existence d'un tel couple encore appelé section du fibré de Cauchy-Leray lorsque l'on souhaite construire un noyau intégral pour résoudre (**).

On montre ici que, en l'absence de base de voisinages de Stein et à la différence du cas C^∞ , l'on peut résoudre l'équation (**) dans les classes höldériennes $C^{p,\alpha}(\bar{T})$, p entier, $p \geq 1$, et α , réel, $0 < \alpha < 1$. On exhibe tout d'abord, pour chaque p entier, un couple (h_1, h_2) , solution de l'équation (*). Contrairement à la situation des compacts s - H convexes, les fonctions h_1 et h_2 sont holomorphes seulement dans T et d'une régularité dépendant de p sur \bar{T} . On construit ensuite, comme dans le travail des auteurs [1] déjà cité, un opérateur intégral dépendant de p résolvant l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans les classes correspondantes $C^{p,\alpha}(\bar{T})$.

1. Définitions et notations.

Soit $T = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_2| < |z_1| < 1\}$, le triangle de Hartogs.

Ici, $C^{p,\alpha}(\bar{T})$ désigne l'espace des fonctions ou des formes différentielles f de classe C^p dans T telles que, pour tout multi-indice β de longueur $|\beta| \leq p$, on ait

$$\sup_{x, y \in T} \frac{|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$$

et on note $\|f\|_{C^{p,\alpha}(\bar{T})}$ la norme associée.

Dans le cas de \mathbb{C}^2 on simplifie la notation en écrivant $C^{p,\alpha}$ au lieu de $C^{p,\alpha}(\mathbb{C}^2)$.

On note

$$\begin{aligned} H &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_2| < |z_1|\} \\ H^c &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1| < |z_2|\} \\ \partial H &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1| = |z_2|\}. \end{aligned}$$

2. Construction d'une section du fibré de Cauchy-Leray sur $H \times H^c$.

Soit $(z, \zeta) \in H \times H^c$; on considère l'équation

$$(1) \quad h_1(z, \zeta)(\zeta_1 - z_1) + h_2(z, \zeta)(\zeta_2 - z_2) = 1.$$

On se propose de trouver h_1 et h_2 , holomorphes en z dans H , pour ζ fixé dans H^c , solutions de cette équation. Un tel couple définit une section du fibré de Cauchy-Leray sur $H \times H^c$. On a

$$(2) \quad \zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1 = \zeta_2(\zeta_1 - z_1) - \zeta_1(\zeta_2 - z_2)$$

et donc, un premier couple est donné par l'identité

$$(3) \quad \frac{\zeta_2}{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1} (\zeta_1 - z_1) - \frac{\zeta_1}{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1} (\zeta_2 - z_2) = 1,$$

puisque, pour (z, ζ) dans $H \times H^c$, on a $\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1 \neq 0$.

Mais lorsque z_1 et z_2 tendent vers 0, ces solutions ne sont pas bornées. On cherche donc des solutions plus régulières.

Puisque ζ appartient à H^c , on a $\zeta_2 \neq 0$ et donc, d'après (3), pour tout ℓ entier, $\ell \geq 1$, on a :

$$\frac{\zeta_2}{(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)} \left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^\ell (\zeta_1 - z_1) - \frac{\zeta_1}{(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)} \left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^\ell (\zeta_2 - z_2) = \left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^\ell$$

dans $H \times H^c$.

On peut réécrire cette égalité sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{\zeta_2}{(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)} \left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^\ell (\zeta_1 - z_1) \\ &+ \left(\left(\frac{1}{\zeta_2}\right)^\ell (\zeta_2^{\ell-1} + \zeta_2^{\ell-2} z_2 + \dots + z_2^{\ell-1}) - \frac{\zeta_1}{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1} \left(\frac{z_2}{\zeta_2}\right)^\ell \right) (\zeta_2 - z_2) = 1. \end{aligned}$$

Si on pose, pour tout ℓ entier, $\ell \geq 1$,

$$(4) \quad h_1(z, \zeta) = \frac{\zeta_2}{(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)} \left(\frac{z_2}{\zeta_2} \right)^\ell$$

$$(5) \quad h_2(z, \zeta) = \left(\frac{1}{\zeta_2} \right)^\ell (\zeta_2^{\ell-1} + \zeta_2^{\ell-2} z_2 + \dots + z_2^{\ell-1}) - \frac{\zeta_1}{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1} \left(\frac{z_2}{\zeta_2} \right)^\ell$$

on a, dans $H \times H^c$,

$$(6) \quad h_1(z, \zeta)(\zeta_1 - z_1) + h_2(z, \zeta)(\zeta_2 - z_2) = 1.$$

Pour ζ fixé, ζ dans H^c , lorsque z tend vers 0, z dans H , on a

$$\frac{z_2^\ell}{\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1} = z_2^{\ell-1} \left(\zeta_1 - \zeta_2 \frac{z_1}{z_2} \right)^{-1}.$$

Puisque l'on a $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| \geq 1$, on obtient $\left| \zeta_2 \frac{z_1}{z_2} - \zeta_1 \right| \geq |\zeta_2| - |\zeta_1|$, et donc, si $\ell > 1$, on a

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \neq 0} h_1(z, \zeta) = 0.$$

En fait, la fonction h_1 s'étend en une fonction de classe $C^{\ell-2}$ sur \bar{T} dont toutes les dérivées d'ordre $(\ell-1)$ sont bornées; ainsi, si $\ell = 1$, la fonction h_1 est simplement bornée.

3. Estimations des dérivées en z .

Soit $\ell > 1$ et (β_1, β_2) un multi-indice vérifiant $\beta = \beta_1 + \beta_2 < \ell$, on a

$$\frac{\partial^{\beta_1}}{\partial z_1^{\beta_1}} h_1 = z_2^\ell \frac{\beta_1!}{(\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)^{1+\beta_1}} \zeta_2^{-\ell+1+\beta_1}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2}}{\partial z_1^{\beta_1} \partial z_2^{\beta_2}} h_1 \\ &= \beta_1! \zeta_2^{\beta_1-\ell+1} \sum_{j=0}^{\beta_2} C_{\beta_2}^j \frac{\ell!}{(\ell-\beta_2+j)!} z_2^{\ell-\beta_2+j} (-1)^j \frac{(\beta_1+j)! \zeta_1^j}{\beta_1! (\zeta_1 z_2 - \zeta_2 z_1)^{1+\beta_1+j}}. \end{aligned}$$

Il existe donc une constante, D_0 , $D_0 > 1$, ne dépendant que de ℓ , telle

que l'on ait

$$(7) \quad \left| \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2}}{\partial z_1^{\beta_1} \partial z_2^{\beta_2}} h_1(z, \zeta) \right| \leq D_0 \frac{|z_2|^{\ell - (\beta + 1)}}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{\beta + 1} |\zeta_2|^\ell}$$

$$\left| \frac{\partial^{\beta_1 + \beta_2}}{\partial z_1^{\beta_1} \partial z_2^{\beta_2}} h_2(z, \zeta) \right| \leq D_0 \sum_{\beta_2 < s \leq \ell} \frac{|z_2|^{s - (\beta_2 + 1)}}{|\zeta_2|^s} + \frac{|z_2|^{\ell - (\beta + 1)}}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{\beta + 1} |\zeta_2|^\ell}.$$

4. Construction d'une section du fibré de Cauchy-Leray sur $T \times (C^2 \setminus \bar{T})$.

On note

$$(8) \quad E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; x > 1, y - x < \frac{1}{2}(x - 1)\}$$

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; x > 1, \frac{1}{2}(x - 1) \leq y - x \leq x - 1\}$$

$$E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; x > 1, x - 1 < y - x\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; x \leq 1, x < y\}$$

$$E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2; x < 1, y < x < 1\}.$$

Soit g une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} , positive et vérifiant $g(t) = 1$ pour $t \leq 1/2$ et $g(t) = 0$ pour $t \geq 1$.

On définit alors, dans $\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{E}_0$, f par

$$(9) \quad \begin{aligned} f(x, y) &= 0 && \text{si } (x, y) \in E_3 \\ f(x, y) &= 1 && \text{si } (x, y) \in E_1 \\ f(x, y) &= g\left(\frac{y-x}{x-1}\right) && \text{si } (x, y) \in E_2. \end{aligned}$$

La fonction f est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}_+^2 \setminus \bar{E}_0$ et il existe une constante $D(\alpha_1 + \alpha_2)$ telle que l'on ait

$$(10) \quad \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} f(x, y) \right| \leq D(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{1}{(|x-1| + |y-1|)^{\alpha_1 + \alpha_2}}.$$

En effet, là où les dérivées de g ne sont pas nulles, elles sont uniformément bornées et on a $|x-1| \approx |y-1|$.

On note, pour $i = 0, 1, 2, 3$,

$$E'_i = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; (|z_1|, |z_2|) \in E_i\}.$$

On a

$$\mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}} = \bigcup_{i=1,2,3} E'_i.$$

On définit alors, pour $(z, \zeta) \in \mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}}$,

$$(11) \quad \begin{aligned} s_1(z, \zeta) &= h_1(z, \zeta)[1 - f(|\zeta_1|, |\zeta_2|)] + \frac{1}{(\zeta_1 - z_1)} f(|\zeta_1|, |\zeta_2|) \\ s_2(z, \zeta) &= h_2(z, \zeta)[1 - f(|\zeta_1|, |\zeta_2|)]. \end{aligned}$$

Il importe de remarquer que les fonctions h_1 et h_2 ne sont pas définies si ζ appartient à $H \setminus \bar{\mathbf{T}}$. Mais, si ζ appartient à $H \setminus \bar{\mathbf{T}}$, on a $f = 1$. De là s_1 et s_2 sont bien définies et ont la même régularité que h_1 et h_2 sur $\mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}}$.

On a

$$\begin{aligned} s_1(z, \zeta) &= \frac{1}{z_1 - \zeta_1} \text{ dans } E'_1, & s_2(z, \zeta) &= 0 \text{ dans } E'_1 \\ s_1(z, \zeta) &= h_1(z, \zeta) \text{ dans } E'_3, & s_2(z, \zeta) &= h_2(z, \zeta) \text{ dans } E'_3 \end{aligned}$$

et donc, pour tout $(z, \zeta) \in \mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}}$,

$$s_1(z, \zeta)(\zeta_1 - z_1) + s_2(z, \zeta)(\zeta_2 - z_2) = 1.$$

5. Estimations de la distance à \mathbf{T} d'un point ζ de $\mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}}$.

Remarque. — Il existe une constante D_1 , $D_1 > 1$, telle que l'on ait

$$(12) \quad \left. \begin{aligned} |\zeta_1| - 1 &\leq d(\zeta, \mathbf{T}) \leq D_1(|\zeta_1| - 1) && \text{pour tout } \zeta \in E'_1, \\ D_1^{-1}(|\zeta_1| - 1) &\leq d(\zeta, \mathbf{T}) \leq D_1(|\zeta_1| - 1) \\ D_1^{-1}(|\zeta_2| - |\zeta_1|) &\leq d(\zeta, \mathbf{T}) \leq D_1(|\zeta_2| - |\zeta_1|) \end{aligned} \right\} \text{pour tout } \zeta \in E'_2,$$

$$D_1^{-1}(|\zeta_2| - |\zeta_1|) \leq d(\zeta, \mathbf{T}) \leq D_1(|\zeta_2| - |\zeta_1|) \quad \text{pour tout } \zeta \in E'_3.$$

Ici $d(\zeta, \mathbf{T})$ désigne la distance de ζ à \mathbf{T} dans \mathbf{C}^2 ; on peut remarquer que c'est aussi la distance de $(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$ à E_0 dans \mathbb{R}_+^2 .

6. Notations.

On note, comme dans [1] et [3], pour tout (z, ζ) de $\mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}}$ et pour tout λ de $[0, 1]$

$$\begin{aligned}\omega(\zeta) &= d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \\ \omega'(z, \zeta) &= (\zeta_1 - \bar{z}_1)(d\zeta_2 - d\bar{z}_2) - (\zeta_2 - \bar{z}_2)(d\zeta_1 - d\bar{z}_1) \\ \eta_j(z, \zeta, \lambda) &= (1 - \lambda)s_j(z, \zeta) + \lambda \frac{\zeta_j - \bar{z}_j}{|\zeta - z|^2}, j = 1, 2, \\ |\zeta - z|^2 &= \sum_{j=1}^2 |\zeta_j - z_j|^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(z, \zeta, \lambda) &= \frac{1}{(2i\pi)^2} [\eta_1(z, \zeta, \lambda)(\bar{\partial}_\zeta + \bar{\partial}_z + d_\lambda)\eta_2(z, \zeta, \lambda) \\ &\quad - \eta_2(z, \zeta, \lambda)(\bar{\partial}_\zeta + \bar{\partial}_z + d_\lambda)\eta_1(z, \zeta, \lambda)].\end{aligned}$$

Pour (z, ζ, λ) dans $\mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}} \times [0, 1]$, on a

$$\eta_1(z, \zeta, \lambda)(\zeta_1 - z_1) + \eta_2(z, \zeta, \lambda)(\zeta_2 - z_2) = 1$$

et donc

$$(13) \quad (\bar{\partial}_\zeta + \bar{\partial}_z + d_\lambda)(\bar{\theta} \wedge \omega) = 0.$$

On a

$$\bar{\theta}(z, \zeta, \lambda) \wedge \omega(\zeta)|_{\lambda=0} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \frac{\omega'(z, \zeta) \wedge \omega(\zeta)}{\sum_{j=1}^2 |\zeta_j - z_j|^2}.$$

7. Formule intégrale pour résoudre $\bar{\partial}u = f$ dans le triangle de Hartogs.

PROPOSITION 1. — Soient p un entier, $p \geq 1$, α un réel, $0 < \alpha < 1$, et v une $(0, 1)$ forme différentielle de classe $C^{p, \alpha}$ dans \mathbf{C}^2 , à support compact dans la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 vérifiant $\bar{\partial}v = 0$ sur \mathbf{T} .

La fonction définie pour z dans \mathbf{T} par

$$(14) \quad u(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2 \setminus \mathbf{T}; |\zeta| \leq 2\} \times [0,1]} \bar{\partial}v(\zeta) \wedge (\eta_1 d_\lambda \eta_2 - \eta_2 d_\lambda \eta_1) \wedge \omega(\zeta) \\ + \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2; |\zeta| \leq 2\}} \frac{v(\zeta) \wedge \omega'(z, \zeta) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^2}$$

vérifie dans \mathbf{T} l'équation $\bar{\partial}u = v$.

Preuve. — Par hypothèse sur v , il existe une constante D_2 , $D_2 > 1$, telle que l'on ait

$$(15) \quad |\bar{\partial}v(w)| \leq D_2 d(w, \mathbf{T})^{p-1+\alpha} \|v\|_{\mathcal{C}^{p,\alpha}}.$$

On considère alors la forme différentielle γ définie sur $\mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}} \times [0,1]$ par

$$\gamma(z, \zeta, \lambda) = \bar{\partial}v(\zeta) \wedge \bar{\theta}(z, \zeta, \lambda) \wedge \omega(\zeta).$$

On a donc, en utilisant (13),

$$(d_\zeta + d_\lambda)\gamma = -\bar{\partial}_z(\bar{\partial}v(\zeta) \wedge \bar{\theta}(z, \zeta, \lambda) \wedge \omega(\zeta)).$$

On remarque que $\bar{\partial}v(\zeta) \wedge \omega(\zeta)$ est de type 4 en $(\zeta, \bar{\zeta})$; en conséquence

$$\gamma = \bar{\partial}v(\zeta) \wedge \frac{1}{(2i\pi)^2} [\eta_1(\bar{\partial}_z + d_\lambda)\eta_2 - \eta_2(\bar{\partial}_z + d_\lambda)\eta_1] \wedge \omega(\zeta)$$

et

$$(d_\zeta + d_\lambda)\gamma = d_\lambda\gamma.$$

On constate donc que, dans γ et $(d_\zeta + d_\lambda)\gamma$, n'interviennent pas de dérivations de η_1 et η_2 donc de s_1 et s_2 par rapport aux variables $(\zeta, \bar{\zeta})$. En conséquence, si on note $\delta(z, \zeta, \lambda)$ un coefficient d'une des formes γ ou $(d_\zeta + d_\lambda)\gamma$, pour tout sous-ensemble compact K de \mathbf{T} , il existe une constante $D(K, v)$, $D(K, v) \geq 1$, telle que l'on ait, pour tout (z, ζ, λ) dans $K \times \mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}} \times [0,1]$,

$$(16) \quad |\delta(z, \zeta, \lambda)| \leq D(K, v) |\zeta_2|^{-\ell} d(\zeta, \mathbf{T})^{p-1+\alpha}.$$

Puisque $\bar{\partial}v$ est nulle sur \mathbf{T} , on peut prolonger γ par 0 sur $\mathbf{T} \times \mathbf{T} \setminus \{0,0\} \times [0,1]$. On obtient alors une forme, notée encore γ , continue sur $\mathbf{T} \times \mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\} \times [0,1]$ vérifiant

$$(17) \quad (d_\zeta + d_\lambda)\gamma = d_\lambda\gamma = -\bar{\partial}_z\gamma.$$

Soit ε un réel, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Pour z fixé dans \mathbf{T} , on applique la formule de Stokes à γ sur $\{\zeta \in \mathbf{C}^2; \varepsilon \leq |\zeta| \leq 2\} \times [0, 1]$. On obtient

$$(18) \quad -\bar{\partial}_z \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2; \varepsilon \leq |\zeta| \leq 2\} \times [0, 1]} \gamma = \int_{\partial\{\{\zeta \in \mathbf{C}^2; \varepsilon \leq |\zeta| \leq 2\} \times [0, 1]\}} \gamma.$$

La forme γ est de type 4 en $(\zeta, \bar{\zeta})$; donc, dans l'intégrale figurant au deuxième membre de (18), la seule partie de la frontière donnant une contribution non nulle est $\{\zeta \in \mathbf{C}^2; \varepsilon \leq |\zeta| \leq 2\} \times \partial[0, 1]$.

On a, d'après (16), pour tout λ de $[0, 1]$,

$$(19) \quad \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2; |\zeta| \leq \varepsilon\}} |\delta(z, \zeta, \lambda)| dm(\zeta) \leq D(K, v) \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2; |\zeta| \leq \varepsilon\} \cap H^c} |\zeta_2|^{-\ell} d(\zeta, \mathbf{T})^{p-1+\alpha} dm(\zeta)$$

où m désigne la mesure de Lebesgue dans \mathbf{C}^2 .

On remarque que, pour $\zeta \in H^c$, $|\zeta_2| \geq d(\zeta, \mathbf{T})$ et $|\zeta_2| \geq \frac{|\zeta_1| + |\zeta_2|}{2}$

donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2; |\zeta| \leq \varepsilon\}} |\delta(z, \zeta, \lambda)| dm(\zeta) = 0$$

dès que l'on a

$$(20) \quad p + \alpha + 3 > \ell.$$

On supposera (20) vérifié dans toute la suite.

On peut donc passer à la limite lorsque ε tend vers 0 dans l'égalité (18) et on obtient

$$(21) \quad -\bar{\partial}_z \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2; |\zeta| \leq 2\} \times [0, 1]} \gamma = \int_{\partial\{\{\zeta \in \mathbf{C}^2; |\zeta| \leq 2\} \times [0, 1]\}} \gamma.$$

On peut alors conclure comme dans [1] que la fonction $u(z)$ définie pour z dans \mathbf{T} par (14) vérifie dans \mathbf{T} l'équation $\bar{\partial}u = v$. Ceci achève la preuve de la proposition.

8. Estimations de la solution u dans \bar{T} .

On note $I_1(z)$ et $I_2(z)$ respectivement la première et la deuxième intégrale figurant au second membre de (14). Puisque v est de classe $C^{p,\alpha}$, la fonction $I_2(z)$ est de classe $C^{p+1,\alpha}$; on se propose maintenant d'étudier la régularité de $I_1(z)$.

Après intégration en λ , si on note

$$v(\zeta) = v_1(\zeta) d\bar{\zeta}_1 + v_2(\zeta) d\bar{\zeta}_2,$$

il existe une constante D_3 telle que l'on ait, pour tout z de \mathbf{T} ,

$$(22) \quad I_1(z) = D_3 \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}}; |\zeta| \leq 2\}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} v_1 \right) \times \frac{s_1(z, \zeta)(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) - s_2(z, \zeta)(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)}{|\zeta - z|^2} dm(\zeta).$$

On a donc à estimer, si D_z^β est une dérivée quelconque de longueur β en z ,

$$D_z^\beta \frac{s_j(z, \zeta)(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)}{|\zeta - z|^2} \quad \text{pour } j = 1, 2 \quad k = 1, 2 \quad j \neq k.$$

On peut remarquer ici que, pour z fixé dans \mathbf{T} , dans l'intégration par rapport à ζ dans $\mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}} \cap \{|\zeta| < 10\}$, la singularité de chacune des fonctions $s_i(z, \zeta)$, $i = 1, 2$, est la même que celle de chacune de leurs dérivées par rapport à z , c'est-à-dire du type $|\zeta_2|^{-\ell}$. On conclut aisément, comme plus haut, que, p étant fixé, $d(\zeta, \mathbf{T})^{p-1+\alpha} |\zeta_2|^{-\ell}$ est intégrable dans $\{\zeta \in \mathbf{T}^c; |\zeta| < 10\}$ dès que l'on a $p + \alpha + 3 > \ell$ et donc que la fonction $I_1(z)$ est de classe C^∞ dans l'ouvert \mathbf{T} .

PROPOSITION 2. — Pour $\ell = p + 2$, la fonction $u(z)$ est de classe $C^{p,\alpha}$ dans $\bar{\mathbf{T}}$.

Preuve. — On doit vérifier que $I_1(z)$ est de classe $C^{p,\alpha}$ dans $\bar{\mathbf{T}}$. Il suffit pour cela d'établir pour une dérivée quelconque d'ordre $p + 1$ de $I_1(z)$, en un point z de \mathbf{T} , que l'on a

$$(23) \quad |D_z^{p+1} I_1(z)| \leq D_4 d(z, \mathbf{C}^2 \setminus \bar{\mathbf{T}})^{-1+\alpha} \|v\|_{C^{p,\alpha}}.$$

Ce résultat est bien connu pour un domaine D à bord de classe C^1 par morceaux. En effet la preuve de cette propriété est locale. Elle nécessite qu'il existe, pour δ assez petit et tout couple de points z et

z' de D vérifiant $d(z, \partial D) < \delta$, $d(z', \partial D) < \delta$ et $|z - z'| < \delta/2$, un chemin dans D joignant z à z' ayant de bonnes propriétés (Appendice I, proposition 2, [3]). Bien que ∂T ne soit pas de classe C^1 par morceaux au voisinage de l'origine on peut s'assurer de l'existence d'un tel chemin, pour z et z' dans T voisins de l'origine.

On a, à partir de (11) et des estimations de h_1 et h_2 données en (7),

$$\begin{aligned}
 (24) \quad & \left| D_z^{p+1} \frac{s_j(z, \zeta)(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)}{|\zeta - z|^2} \right| \\
 & \leq D_5 \left(f(|\zeta_1|, |\zeta_2|) \sum_{k=0}^{p+1} \frac{1}{|z_1 - \zeta_1|^{k+1} |\zeta - z|^{p+2-k}} \right. \\
 & \quad + (1 - f(|\zeta_1|, |\zeta_2|)) \sum_{k=0}^{p+1} \frac{|z_2|^{\ell - (k+1)}}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{k+1} |\zeta_2|^\ell |\zeta - z|^{p+2-k}} \\
 & \quad \left. + (1 - f(|\zeta_1|, |\zeta_2|)) \sum_{k=0}^{p+1} \sum_{k < s \leq \ell} \frac{|z_2|^{s - (k+1)}}{|\zeta_2|^s |\zeta - z|^{p+2-k}} \right).
 \end{aligned}$$

On déduit de (15), de (22) et de (24) qu'il existe une constante D_6 telle que l'on ait,

$$\begin{aligned}
 (25) \quad & |D_z^{p+1} I_1(z)| \\
 & \leq D_6 \|v\|_{C^{p, \alpha}} \left(\sum_{k=0}^{p+1} \int_{\{\zeta \in E'_1 \cup E'_2; |\zeta| < 10\}} \frac{(|\zeta_1| - 1)^{p-1+\alpha}}{|z_1 - \zeta_1|^{k+1} |\zeta - z|^{p+2-k}} dm(\zeta) \right. \\
 & \quad + \sum_{k=0}^{p+1} \int_{\{\zeta \in E'_2 \cup E'_3; |\zeta| \leq 10\}} \frac{(|\zeta_2| - |\zeta_1|)^{p-1+\alpha} |z_2|^{\ell - (k+1)}}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{k+1} |\zeta_2|^\ell |\zeta - z|^{p+2-k}} dm(\zeta) \\
 & \quad \left. + \sum_{k=0}^{p+1} \sum_{k < s \leq \ell} \int_{\{\zeta \in E'_2 \cup E'_3; |\zeta| < 10\}} \frac{(|\zeta_2| - |\zeta_1|)^{p-1+\alpha} |z_2|^{s - (k+1)}}{|\zeta_2|^s |\zeta - z|^{p+2-k}} dm(\zeta) \right).
 \end{aligned}$$

On note

$$(26) \quad I_3(z, k) = \int_{\{\zeta \in E'_1 \cup E'_2; |\zeta| < 10\}} \frac{(|\zeta_1| - 1)^{p-1+\alpha}}{|z_1 - \zeta_1|^{k+1} |\zeta - z|^{p+2-k}} dm(\zeta).$$

Puisque z est dans T et ζ dans $E'_1 \cup E'_2$, on a $0 \leq |\zeta_1| - 1 \leq |z_1 - \zeta_1|$ et donc

$$I_3(z, k) \leq \int_{\{\zeta \in E'_1 \cup E'_2; |\zeta| < 10\}} \frac{(|\zeta_1| - 1)^\alpha}{|z_1 - \zeta_1|^3 |\zeta - z|} dm(\zeta).$$

Après intégration en ζ_2 , il existe une constante D_7 telle que l'on ait

$$I_3(z, k) < D_7 \int_{1 < |\zeta_1| < 10} \frac{(|\zeta_1| - 1)^\alpha}{|z_1 - \zeta_1|^3} dm(\zeta_1).$$

On note $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$.

Si l'on a $|z_1| \leq 1/2$, alors clairement, $I_3(z, k)$ est bornée.

Si l'on a $|z_1| > 1/2$, on note $\zeta_1 = re^{i(\theta + \theta_1)}$ et on obtient

$$I_3(z, k) \leq D_8 \int_{1 < r < 10, -\pi \leq \theta \leq \pi} \frac{(r-1)^\alpha r dr d\theta}{||z_1 - re^{i\theta}|^3}.$$

On utilise maintenant pour $|z_1| > 1/2$ le fait qu'il existe une constante D_9 telle que l'on ait

$$||z_1 - re^{i\theta}| \geq D_9(r - |z_1| + |\theta|)$$

ce qui conduit à

$$I_3(z, k) \leq D_{10} \int_{1 < r < 10, -\pi \leq \theta \leq \pi} \frac{(r-1)^\alpha r dr d\theta}{|(r - |z_1|) + |\theta||^3}.$$

On intègre maintenant en θ et on a

$$I_3(z, k) \leq D_{11} \int_{1 < r < 10} \frac{(r-1)^\alpha r dr}{((r-1) + 1 - |z_1|)^2}.$$

On intègre ensuite en r et on a

$$(27) \quad I_3(z, k) \leq D_{12}(1 - |z_1|)^{\alpha-1} \leq D_{13}d(z, C^2 \setminus \bar{T})^{\alpha-1}.$$

On considère maintenant

$$(28) \quad I_4(z, k) = \int_{\{\zeta \in E_2 \cup E_3; |\zeta| < 10\}} \frac{(|\zeta_2| - |\zeta_1|)^{p-1+\alpha} |z_2|^{\ell-(k+1)}}{\left|1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1}\right|^{k+1} |\zeta_2|^\ell |\zeta - z|^{p+2-k}} dm(\zeta).$$

On a, en utilisant l'hypothèse $\ell = p + 2$ et $0 \leq k \leq p + 1$,

$$|z_2|^{\ell-(k+1)} = |z_2|^{p+1-k} \leq \sum_{t=0}^{p+1-k} C_{p+1-k}^t |\zeta_2|^t |\zeta_2 - z_2|^{p+1-k-t}$$

et donc,

$$\frac{|z_2|^{p+1-k}}{|\zeta|^{p+2} |\zeta - z|^{p+2-k}} \leq \sum_{t=0}^{p+1-k} \frac{C_t^{p+1-k}}{|\zeta_2|^{p+2-t} |\zeta - z|^{t+1}}.$$

On a aussi,

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right| &= \frac{|\zeta_2 z_1 - \zeta_1 z_2|}{|\zeta_2 z_1|} = \frac{|z_1(\zeta_2 - z_2) + z_2(z_1 - \zeta_1)|}{|\zeta_2 z_1|} \\ &\leq \frac{|z_1|(|\zeta_2 - z_2| + |z_1 - \zeta_1|)}{|\zeta_2 z_1|} \leq \frac{(|\zeta_2 - z_2| + |z_1 - \zeta_1|)}{|\zeta_2|}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout k , $0 \leq k \leq p + 1$, et tout t , $0 \leq t \leq p + 1 - k$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{k+1} |\zeta_2|^{p+2-t} |\zeta - z|^{t+1}} &\leq \frac{1}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{k+1+t} |\zeta_2|^{p+2} |\zeta - z|} \\ &\leq \frac{D_{14}}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{p+2} |\zeta_2|^{p+2} |\zeta - z|} \end{aligned}$$

et de là,

$$\frac{|z_2|^{p+1-k}}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{k+1} |\zeta_2|^{p+2} |\zeta - z|^{p+2-k}} \leq \frac{D_{15}}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{p+2} |\zeta_2|^{p+2} |\zeta - z|}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} I_4(z, k) &\leq D_{15} \int_{\{\zeta \in E_2 \cup E_3; |\zeta| < 10\}} \frac{(|\zeta_2| - |\zeta_1|)^{p-1+\alpha}}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{p+2} |\zeta_2|^{p+2} |\zeta - z|} dm(\zeta) \\ &\leq D_{15} \int_{\{\zeta \in E_2 \cup E_3; |\zeta| < 10\}} \frac{\left(1 - \left| \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \right| \right)^{p-1+\alpha}}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{p+2} |\zeta_2|^{3-\alpha} |\zeta - z|} dm(\zeta). \end{aligned}$$

Il existe donc une constante D_{16} telle que l'on ait, pour tout z de \mathbb{T} et pour tout k , $0 \leq k \leq p + 1$,

$$I_4(z, k) \leq D_{16} \int_{\{\zeta \in \mathbb{C}^2; |\zeta_1| < |\zeta_2|, |\zeta| < 10\}} \frac{1}{\left| 1 - \frac{\zeta_1 z_2}{\zeta_2 z_1} \right|^{3-\alpha} |\zeta_2|^{3-\alpha} |\zeta - z|} dm(\zeta)$$

puisque l'on a

$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| < 1.$$

On pose $\zeta_1 = \theta \zeta_2$; on a $|\theta| < 1$ et $dm(\zeta_1, \zeta_2) = |\zeta_2|^2 dm(\theta, \zeta_2)$. On déduit de là

$$\begin{aligned}
 I_4(z, k) &\leq D_{16} \int_{\{|\theta| < 1; |\zeta_2| \leq 10\}} \frac{|\zeta_2|^2}{\left|1 - \theta \frac{z_2}{z_1}\right|^{3-\alpha} |\zeta_2|^{3-\alpha} |\zeta_2 - z_2|} dm(\theta, \zeta_2) \\
 &\leq D_{16} \int_{\{|\theta| < 1\}} \frac{1}{\left|1 - \theta \frac{z_2}{z_1}\right|^{3-\alpha}} dm(\theta) \int_{\{|\zeta_2|; |\zeta_2| < 10\}} \frac{1}{|\zeta_2|^{1-\alpha} |\zeta_2 - z_2|} dm(\zeta_2).
 \end{aligned}$$

L'intégrale en ζ_2 converge et est bornée indépendamment de z . Ceci conduit à

$$I_4(z, k) \leq D_{17} \int_{\{|\theta| < 1\}} \frac{1}{\left|1 - \theta \frac{z_2}{z_1}\right|^{3-\alpha}} dm(\theta).$$

On pose $\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = a$, on a $0 < a < 1$.

Si l'on $a < 1/2$, l'intégrale en θ est bornée indépendamment de z .

Si l'on $a > 1/2$, on pose $\psi = 1 - \theta \frac{z_2}{z_1}$ et on obtient

$$\begin{aligned}
 (29) \quad I_4(z, k) &\leq D_{18} \int_{\{|\psi; 1-a \leq |\psi| \leq 2\}} \frac{1}{|\psi|^{3-\alpha}} dm(\psi) = D_{19} \int_{1-a}^2 \frac{r}{r^{3-\alpha}} dr \\
 &\leq D_{20} (1-a)^{\alpha-1} = D_{20} \left(1 - \left|\frac{z_2}{z_1}\right|\right)^{\alpha-1} = D_{20} |z_1|^{1-\alpha} (|z_1| - |z_2|)^{\alpha-1} \\
 &\leq D_{20} d(z, \mathbf{C}^2 \setminus \mathbf{T})^{\alpha-1}.
 \end{aligned}$$

On considère maintenant, pour $0 \leq k \leq p + 1$ et $k \leq s \leq p + 2$,

$$(30) \quad I_5(z, s, k) = \int_{\{\zeta \in E_2 \cup E_3; |\zeta| < 10\}} \frac{(|\zeta_2| - |\zeta_1|)^{p-1+\alpha} |z_2|^{s-(k+1)}}{|\zeta_2|^s |\zeta - z|^{p+2-k}} dm(\zeta).$$

En utilisant un calcul analogue à celui mené pour estimer $I_4(z, k)$, on a

$$I_5(z, s, k) \leq \sum_{t=0}^{s-(k+1)} C_{s-(k+1)}^t \int_{\{\zeta \in \mathbf{C}^2; |\zeta_1| < |\zeta_2|, |\zeta| < 10\}} \frac{(|\zeta_2| - |\zeta_1|)^{p-1+\alpha}}{|\zeta_2|^{s-t} |\zeta - z|^{p+3-s+t}} dm(\zeta).$$

En remarquant que l'on a

$$\left| |\zeta_2| - |\zeta_1| \right| \leq |\zeta - z| \quad \text{et} \quad |\zeta_2| \geq |\zeta_2| - |\zeta_1|$$

et que,

$$\text{si } \zeta \in \{|\zeta| < 10; |\zeta_1| < |\zeta_2|\} \quad \text{on a} \quad 2|\zeta_2| > |\zeta_1| + |\zeta_2| > |\zeta_2|$$

on conclut que les intégrales apparaissant dans $I_5(z, s, k)$ sont majorées par l'une ou l'autre des intégrales suivantes

$$\int_{\{|\zeta| < 10\}} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta|^{3-\alpha} |\zeta - z|}, \quad \int_{\{|\zeta| < 10\}} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta|^{2-\alpha} |\zeta - z|^2}, \quad \int_{\{|\zeta| < 10\}} \frac{dm(\zeta)}{|\zeta|^{1-\alpha} |\zeta - z|^3}.$$

Puisque ces trois intégrales sont uniformément bornées pour z dans \mathbf{T} on obtient

$$(31) \quad I_5(z, s, k) \leq D_{21}.$$

Les estimations (25), (27), (29) et (31) conduisent à (23) ce qui achève la preuve de la proposition.

9. Régularité de l'opérateur $\bar{\partial}$ dans les classes höldériennes.

THÉORÈME. — Soit f une $(0, 1)$ forme, $\bar{\partial}$ -fermée sur \mathbf{T} , de classe $C^{p, \alpha}$ sur \mathbf{T} avec p entier, $p \geq 1$ et α réel, $0 < \alpha < 1$. Alors, il existe une fonction u de classe $C^{p, \alpha}$ sur \mathbf{T} vérifiant

$$\bar{\partial}u = f \quad \text{sur } \mathbf{T}$$

et

$$\|u\|_{C^{p, \alpha}(\mathbf{T})} \leq D_{22} \|f\|_{C^{p, \alpha}(\mathbf{T})},$$

avec D_{22} une constante qui dépend de p et de α .

De plus cette solution est donnée par un opérateur linéaire.

Preuve. — Soit p un entier, $p \geq 1$ et α un réel, $0 < \alpha < 1$. On sait [6] qu'il existe un opérateur E , dépendant de p , de $C^{p, \alpha}(\mathbf{T})$ dans $C^{p, \alpha}$ tel que l'on ait, pour toute fonction g de $C^{p, \alpha}(\mathbf{T})$,

$$D_z^\ell E(g) = D_z^\ell g \quad \text{sur } \mathbf{T}, \quad \text{pour toute dérivation } D_z^\ell \text{ de longueur } \ell, \ell \leq p,$$

$$E(g) \text{ est à support compact dans la boule } B(0, 2),$$

$$\|E(g)\|_{C^{p, \alpha}} \leq D_{22} \|g\|_{C^{p, \alpha}(\mathbf{T})},$$

avec une constante D_{22} qui ne dépend que de p et de α .

Le théorème s'en déduit en utilisant les propositions 1 et 2 avec $v = Ef$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. CHAUMAT et A.-M. CHOLLET, Noyaux pour résoudre l'équation $\bar{\partial}$ dans des classes ultradifférentiables sur des compacts irréguliers de C^n . Several complex variables, Proc. Mittag-Leffler Inst. 1987/1988, Math. Notes 38, Princeton Univ. Press, à paraître.
- [2] A. DUFRESNOY, Sur l'opérateur d'' et les fonctions différentiables au sens de Whitney, Ann. Inst. Fourier, 29-1 (1979), 229-238.
- [3] G. M. HENKIN et J. LEITERER, Theory of functions on complex manifolds, Monographs in Mathematics, Birkhäuser Verlag, 79 (1984).
- [4] L. HORMANDER, Generators for some rings of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 273-292.
- [5] N. ØVRELID, Generators of the maximal ideals of $A(\bar{D})$, Pacific J. Math., 39 (1971), 219-223.
- [6] E. M. STEIN, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Mathematical Series, Princeton Univ. Press, 1970.

Manuscrit reçu le 17 avril 1991.

J. CHAUMAT et A.-M. CHOLLET,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.