Ann. Inst. Fourier, Grenoble
12 (1962), 624-626.

SUR LE THÉORÈME DE FATOU GÉNÉRALISÉ

par **Linda LUMER-NAÏM** (Grenoble).

---

1. L'objet de la présente note est de donner une nouvelle démonstration du théorème de Fatou généralisé, obtenu initialement par J. L. Doob [3] par des méthodes probabilistes, puis redémontré ultérieurement par cet auteur [4] avec l'usage seul de la théorie du potentiel et des fonctions surharmoniques. La démonstration donnée ici est plus ou moins basée sur la même idée que celle de Doob [4], mais présente sur cette dernière une simplification considérable, car elle évite l'intermédiaire compliqué de certaines notions auxiliaires introduites par Doob, et s'obtient au contraire directement à partir des principes fondamentaux, pour lesquels nous renvoyons essentiellement à [6].

2. Rappelons seulement ici que tout espace de Green Ω peut être muni d'une frontière de Martin Δ qui le compactifie selon $\hat{\Omega} = \Omega \cup \Delta$, de telle sorte que toute fonction h harmonique > 0 dans Ω admet une représentation intégrale unique à l'aide d'une mesure $\geqslant 0$ sur Δ — la mesure canonique associée à h — et d'un noyau généralisant le noyau de Poisson ([5], [1]). Un ensemble de Δ est dit h-négligeable s'il est de mesure nulle pour la mesure associée à h.

Pour une fonction dans Ω, la pseudo-limite en un point-frontière minimal x est par définition la limite selon le filtré formé par les ensembles de complémentaire effilé en x, qui est la trace sur Ω du filtre des voisinages de x dans une topologie $\mathcal{T}$ sur $\hat{\Omega}$, plus fine que la topologie de Martin, et appelée topologie fine.

Dans toute la suite, les limites selon $\mathcal{T}$ seront affectées de cet indice; Ω sera un espace de Green, Δ sa frontière de Martin, et h une fonction harmonique > 0 fixée dans Ω.

3. Le théorème de Fatou généralisé.

Lemme. — *Soit v une fonction surharmonique > 0 dans Ω. Les points minimaux où* $\limsup_{\mathfrak{G}} \frac{v}{h} = +\infty$ *forment un ensemble h-négligeable.*

Dire que $\limsup_{\mathfrak{G}} \frac{v}{h} = +\infty$ en x minimal équivaut à dire que, pour tout entier $n > 0$, l'ensemble E_n des points de Ω où $\frac{v}{h} > n$ est non effilé en x. Donc, si e_n désigne l'ensemble des points de non effilement de E_n, et e l'ensemble des points minimaux où $\limsup_{\mathfrak{G}} \frac{v}{h} = +\infty$, on a $e = \bigcap_n e_n$, et, quel que soit n, l'inégalité $h_e \leqslant h_{e_n}$ entre les h-mesures harmoniques de ces ensembles (mesurables).

Mais, d'après [6], coroll. du th. 20, h_{e_n} est égale à la plus grande minorante harmonique de $\mathcal{E}_h^{\Omega - E_n}$ (extrémale de h sur $\Omega - E_n$), et comme $v > nh$ dans E_n, on a $v \geqslant n\mathcal{E}_h^{\Omega - E_n}$ partout dans Ω, d'où $h_{e_n} \leqslant \frac{1}{n} v$, donc $h_{e_n} \underset{n \to \infty}{\to} 0$, et $h_e = 0$.

Théorème 1. — *Soit f une fonction réelle sur Δ, h-résolutive et de solution $\mathfrak{D}_{f,h}$. Le quotient $\frac{1}{h}\mathfrak{D}_{f,h}$ admet à la frontière une pseudo-limite finie égale à f, sauf sur un ensemble h-négligeable.*

Considérons une fonction g sur Δ, égale à $\limsup_{\mathfrak{G}} \frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f,h}$ aux points minimaux. Toute fonction v surharmonique dans Ω, telle que $\frac{v}{h}$ soit bornée inférieurement et que $\liminf \frac{v}{h} \geqslant f$ à la frontière, majore $\mathfrak{D}_{f,h}$, de sorte que, aux points minimaux de Δ,

$$\limsup_{\mathfrak{G}} \frac{v}{h} \geqslant \limsup_{\mathfrak{G}} \frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f,h} = g,$$

et en particulier

$$\limsup_{\mathfrak{G}} \frac{v}{h} > g(x) - \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0 \text{ donné,}$$

en tout point minimal x où $g(x)$ est fini.

Cette dernière inégalité entraîne que l'ensemble E_x^v des points de Ω où $\frac{v}{h} > g(x) - \varepsilon$ est non effilé en x, et l'on a

$$\liminf_{y \to x,\, y \in E_x} \frac{v(y)}{h(y)} \geqslant g(x) - \varepsilon.$$

Aux points minimaux où $g = -\infty$, on a certainement $\liminf_{\mathfrak{C}} \frac{v}{h} \geqslant g - \varepsilon$, puisque $\frac{v}{h}$ est bornée inférieurement, et le lemme ci-dessus montre que les points minimaux où $g = +\infty$ forment un ensemble h-négligeable $\left(\limsup_{\mathfrak{C}} \frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f^+,h} \text{ y vaut } +\infty\right)$.

D'après [6], th. 23, on a donc

$$v \geqslant \overline{\mathfrak{D}}_{(g-\varepsilon),h} = \overline{\mathfrak{D}}_{g,h} - \varepsilon h,$$

puis, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire,

$$v \geqslant \overline{\mathfrak{D}}_{g,h},$$

et finalement

$$\mathfrak{D}_{f,h} \geqslant \overline{\mathfrak{D}}_{g,h}.$$

En introduisant g' sur Δ, égale à $\liminf_{\mathfrak{C}} \frac{1}{h} \mathfrak{D}_{f,h}$ aux points minimaux, on montre de façon analogue que

$$\mathfrak{D}_{f,h} \leqslant \underline{\mathfrak{D}}_{g',h}$$

d'où il résulte que g et g' sont toutes deux h-résolutives, avec solutions $\mathfrak{D}_{g,h} = \mathfrak{D}_{g',h} = \mathfrak{D}_{f,h}$, de sorte que $g = g' = f$ fini, presque partout au sens de la mesure canonique associée à h.

Théorème 2. — *(Théorème de Fatou généralisé). Pour toute fonction v surharmonique > 0 dans Ω, $\frac{v}{h}$ admet à la frontière une pseudo-limite finie, sauf sur un ensemble h-négligeable.*

Car v est dans Ω la somme d'un potentiel de Green d'une mesure $\geqslant 0$, d'une fonction harmonique $\geqslant 0$ dont le quotient par h admet presque partout à la frontière une pseudo-limite nulle, de même que pour le potentiel ([6], th. 24 et 21), et d'une solution $\mathfrak{D}_{f,h}$ de problème de Dirichlet.

Corollaire. — *Etant donnée f réelle sur Δ, $\underline{\mathfrak{D}}_{f,h}$ est aussi l'enveloppe supérieure des fonctions u dans Ω qui, sont soushar-*

moniques ou $-\infty$, *et satisfont chacune aux conditions :* $\frac{u}{h}$ *bornée supérieurement, et* $\liminf\limits_{\mathcal{C}} \frac{u}{h} \leqslant f$ *en chaque point minimal.*

Car $\liminf\limits_{\mathcal{C}} \frac{u}{h} = \limsup\limits_{\mathcal{C}} \frac{u}{h}$ presque partout, et ce corollaire reste aussi valable si l'on suppose seulement que, pour chaque x minimal, il existe un ensemble non effilé en x sur lequel $\liminf \frac{u}{h} \leqslant f(x)$, (ou même un filtre non effilé en x, [2], selon lequel $\liminf \frac{u}{h} \leqslant f(x)$).

4. Extension.

Le théorème 2 reste valable si l'on suppose seulement v surhamonique > 0 dans un ouvert partiel de Ω (en particulier au voisinage d'un point-frontière). De façon précise :

THÉORÈME 3. — *Soit* ω *un ouvert de* Ω, *de frontière* $\overset{*}{\omega}$ *dans* $\hat{\Omega}$. *Aux points minimaux de* $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$ *où* $\Omega - \omega$ *est effilé,* $\frac{v}{h}$ *admet une pseudo-limite finie, sauf sur un ensemble h-négligeable.*

On peut d'abord supposer ω domaine, et lui appliquer le th. 2 pour sa frontière de Martin Δ^{ω}, puis utiliser la correspondance existant entre les points minimaux de $\overset{*}{\omega} \cap \Delta$ où $\Omega - \omega$ est effilé et certains points minimaux de Δ^{ω} ([6], th. 15), d'après laquelle les points exceptionnels forment aussi un ensemble h-négligeable sur Δ ([6], lemme 6).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BRELOT, Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin. *J. Math.*, 35, 1956, pp. 297-335.
[2] M. BRELOT, Sur l'allure à la frontière des fonctions sousharmoniques ou holomorphes. *Ann. Acad. Sc. Fennicae*, 1958, série A.
[3] J. L. DOOB, Conditionnal Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions. *Bull. Soc. Math. France*, 85, 1957, pp. 431-458.
[4] J. L. DOOB, A non probabilistic proof of the relative Fatou theorem. *Ann. Institut Fourier*, 9, 1959, pp. 293-300.
[5] R. S. MARTIN, Minimal positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49, 1941, pp. 137-172.
[6] L. NAÏM, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel. *Ann. Institut Fourier*, 7, 1957, pp. 183-281.