ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ABDELLAH ELKINANI

Fonctions harmoniques opérant sur les algèbres de Banach involutives

Annales de l'institut Fourier, tome 41, n° 2 (1991), p. 493-509

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_2_493_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 2 (1991), 493-509.

FONCTIONS HARMONIQUES OPÉRANT SUR LES ALGÈBRES DE BANACH INVOLUTIVES

par Abdellah ELKINANI

Introduction.

Dans [8], Tao Zhiguang a établi les résultats de Ky Fan [3], sur les fonctions analytiques de contractions propres, pour les fonctions holomorphes sur le disque unité et à valeurs dans $L(H)$. Ensuite, il a obtenu une autre extension pour les contractions normales. Pour établir ses résultats, Tao Zhiguang a utilisé la résolution spectrale de l'identité pour un opérateur. Cette dernière propriété n'existe pas dans les algèbres hermitiennes du fait que les fonctions continues n'opèrent pas dans ces dernières [2].

Dans cet article, nous établissons que les algèbres hermitiennes constituent le cadre naturel des résultats de [8]. Pour ce faire, nous introduisons un calcul fonctionnel pour les fonctions harmoniques sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans une algèbre de Banach involutive, ce qui est une extension de [1]. Une fois ce calcul défini, nous passons aux applications. Ainsi nous obtenons dans les algèbres hermitiennes les analogues du théorème 3.1, du lemme de Schwarz et du théorème du Pick de [8]. Enfin, nous considérons un élément normal de l'algèbre et prouvons les analogues des résultats précédents.

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à Monsieur le Professeur M. Oudadess pour son aide précieuse.

Mots-clés : Algèbre hermitienne - Élément positif - Calcul fonctionnel harmonique - Élément normal.

Classification A.M.S. : 46K99 - 46H30.

1. Préliminaires.

Soit A une algèbre de Banach complexe munie d'une involution $x \to x^*$. Pour $a \in A$, on définit la partie réelle de a notée $\operatorname{Re} a$, et la partie imaginaire de a notée $\operatorname{Im} a$ par : $\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}(a+a^*)$; $\operatorname{Im} a = \frac{1}{2i}(a-a^*)$.

Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{C}$ et f une fonction, de deux variables réelles x et y, définie sur Ω et à valeurs dans A. On dit que f est harmonique si elle est deux fois continûment différentiable et satisfait à la condition :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

On désigne par $h(\Omega,A)$ l'ensemble des fonctions harmoniques sur Ω et à valeurs dans A et $H(\Omega,A)$ celles des fonctions holomorphes et à valeurs dans A.

Une fonction f de $h(\Omega,A)$ est dite hermitienne si $f(Z) = f(Z)^*$, pour tout Z dans Ω, et on désigne par $\operatorname{Re} f$ (resp. $\operatorname{Im} f$) la partie réelle de f (resp. la partie imaginaire de f) définie par $\operatorname{Re} f(Z) = \operatorname{Re}(f(Z))$ (resp. $\operatorname{Im} f(Z) = \operatorname{Im}(f(Z))$) pour tout $Z \in \Omega$.

Rappelons qu'on désigne par $h(\Omega)$ (resp. $H(\Omega)$) l'ensemble des fonctions harmoniques (resp. holomorphes) sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Une fonction f définie sur Ω, à valeurs dans A, est dite faiblement harmonique si elle est de classe $C^{(2)}$ sur Ω et vérifie : $\Phi \circ f \in h(\Omega)$; pour tout $\Phi \in A'$ le dual topologique de A.

En utilisant le fait que A' sépare les points de A, on montre qu'une fonction de classe $C^{(2)}$ sur Ω, à valeurs dans A, est faiblement harmonique si, et seulement si, elle est harmonique. Du fait que les éléments de $H(\Omega,A)$ vérifient les conditions de Cauchy, on vérifie que $H(\Omega,A) \subset h(\Omega,A)$.

Le lemme suivant est de démonstration classique.

LEMME 1. — *Soit A une algèbre de Banach complexe à involution continue et $f \in h(\Omega,A)$ une fonction hermitienne. Alors f est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe sur Ω et à valeurs dans A.*

Rappelons qu'une algèbre de Banach involutive est hermitienne si pour tout élément hermitien son spectre est réel [5]. Pour deux éléments hermitiens h et k de A, nous noterons $h \geqslant k$, si $h - k$ est positif i.e., $\mathrm{Sp}\,(h-k) \subset \mathbb{R}_+$. Si de plus $h - k$ est inversible, on écrira $h > k$.

Dans toute la suite, Z est un abus de notation pour Ze où $Z \in \mathbb{C}$ et e est l'unité de A, et $|x|$ désignera la quantité $\rho(x^*x)^{1/2}$, pour $x \in A$, où ρ désigne le rayon spectral. Dans [5], V. Pták a montré le résultat suivant : Si A est hermitienne, alors $|\cdot|$ est une semi-norme d'algèbre sur A telle que $\rho(x) \leqslant |x|$, pour tout $x \in A$.

On rappelle le résultat, de Shirali-Ford [7], suivant :

(2) $\qquad A$ hermitienne $\Rightarrow x^*x \geqslant 0, \qquad$ pour tout $x \in A$.

2. Définitions et lemmes.

Une façon naturelle de définir un calcul fonctionnel harmonique est d'utiliser la formule de Poisson.

DÉFINITION 1. — *Soit A une algèbre de Banach complexe à involution continue, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $Z_0 \in \Omega$ tel que $\overline{D(Z_0,R)} \subset \Omega\,(R>0)$, $x \in A$ avec $\mathrm{Sp}\,x \subset D(Z_0,R)$ et $f \in h(\Omega,A)$. On pose, alors :*

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{|Z-Z_0|=R} f(Z)\,\mathrm{Re}\,[(Z+x-2Z_0)(Z-x)^{-1}]\,\frac{|dZ|}{R}.$$

Remarque 1. — i) Si $f \in h(\Omega)$, l'expression de $f(x)$ coïncide avec celle donnée dans [1].

ii) Si f et $g \in h(\Omega,A)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et x est un élément de A vérifiant les conditions de la définition 1, alors :

a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

b) $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

Remarque 2. — Si $f \in H(\Omega,A)$, l'expression de $f(x)$ coïncide avec celle donnée par le calcul fonctionnel holomorphe classique :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(Z)(Z-x)^{-1}\,dZ,$$

où Γ est un contour fermé contenu dans Ω et contenant $\mathrm{Sp}\,x$ dans son intérieur.

Voici encore quelques lemmes techniques :

LEMME 2 [6]. — *Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne. h et k deux éléments hermitiens de A.*

1. *Si $h \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ alors $h + k \geqslant 0$.*

2. *Si $h > 0$, $k \geqslant 0$ alors $h + k > 0$.*

LEMME 3. — *Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne et soit $x \in A$. Alors :*

1. $|x| < 1 \Leftrightarrow e - x^*x > 0$,

2. $|x| \leqslant 1 \Leftrightarrow e - x^*x \geqslant 0$.

Preuve. — 1) Supposons que $|x| < 1$. Il est clair que $e - x^*x$ est hermitien et inversible dans A car $\rho(x^*x) = |x|^2 < 1$. Ensuite, on a

$$\mathrm{Sp}\,(e - x^*x) = \{1 - \lambda : \lambda \in \mathrm{Sp}\,x^*x\}. \tag{4}$$

Par ailleurs, d'après (2), $\mathrm{Sp}\,x^*x \subset [0,r]$ où $r = |x|^2 < 1$. D'où $\beta > 0$ pour tout $\beta \in \mathrm{Sp}\,(e - x^*x)$. Réciproquement, par (4), on obtient $1 - \lambda > 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,x^*x$. Par suite $\max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,x^*x} \lambda < 1$. D'où $|x| < 1$.

2) La preuve se fait de la même manière que 1.

LEMME 4. — *Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne et soit x un élément hermitien de A. Alors*

$$x \geqslant 0 \Leftrightarrow \big||x| - x\big| \leqslant |x|.$$

Preuve. — L'équivalence est triviale pour $x \in \mathrm{Radical}\,(A)$ puisque alors $\mathrm{Sp}\,x = \{0\}$. Supposons $x \notin \mathrm{Radical}\,(A)$. Alors, par homothétie, $|x| = 1$. Si $x \geqslant 0$ et $|x| = 1$, alors :

$$\mathrm{Sp}\,(e - x) = \{1 - \lambda : \lambda \in \mathrm{Sp}\,x\} \subset [0,1].$$

Il s'ensuit que $|e - x| \leqslant 1$. Si maintenant x est un élément hermitien de A tel que $|e - x| \leqslant 1$, on a $1 - \lambda \leqslant 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,x$. D'où $\lambda \geqslant 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,x$ et alors $x \geqslant 0$.

Remarque 3. — Le lemme précédent montre que l'ensemble P des éléments positifs de A est fermé pour $|\cdot|$. Si de plus l'involution de A

est continue, alors P est fermé pour la norme $\|\cdot\|$ car, dans ce cas,

$$\exists \alpha > 0 \,; \quad |x| \leqslant \alpha \|x\|, \qquad \text{pour tout } x \in A.$$

Nous établissons ensuite le résultat suivant qui est une extension d'un résultat de Fuglede, Putnam et Rosenblum [6] sur les opérateurs.

LEMME 5. — *Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne semi-simple, x un élément de A et y un élément normal de A tels que $xy = yx$. Alors $xy^* = y^*x$.*

Preuve. — Remarquons tout d'abord que si a et b sont deux éléments de A tels que $b = a - a^*$, alors $c = \exp b = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} b^n$ est un élément unitaire de A, i.e., $cc^* = e$ car $c^* = \exp b^*$, du fait que $*$ est continue vu que l'algèbre est semi-simple, et $\exp b^* = \exp - b = c^{-1}$. Ensuite, pour tout élément c unitaire de A, on a $|c| = 1$.

Soit maintenant x un élément de A et y un élément normal de A tels que $xy = yx$. Alors, par induction sur n, on a $xy^n = y^n x$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. D'où $x(\exp y) = (\exp y)x$. Et par conséquent $x = \exp(-y)\, x \exp(y)$. Soit $u = \exp(y^* - y)$. Comme y est normal, on a : $(\exp y^*), x\,(\exp - y^*) = uxu^*$. Par ailleurs, $|u| = |u^*| = 1$, d'où

$$(5) \qquad |(\exp y^*)\, x \exp - y^*| \leqslant |x|.$$

Soit f définie sur $\mathbb{C}$, et à valeurs dans A, par :

$$f(\lambda) = \exp(\lambda y^*)\, x \exp(-\lambda y^*), \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

D'après (5), $|f(\lambda)| \leqslant |x|$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ car l'hypothèse du lemme est valable aussi pour $\bar{\lambda} x$ et $\bar{\lambda} y$. Finalement, f est une fonction entière bornée à valeurs dans $(A, |\cdot|)$ qui est une algèbre normée car A est semi-simple. Il s'ensuit, d'après le théorème de Liouville [6], que

$$f(\lambda) = f(0) = x, \qquad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}.$$

D'où

$\exp(\lambda y^*) \cdot x = x \cdot \exp(\lambda y^*)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Et par conséquent $y^* x = x y^*$.

LEMME 6. — *Soit A une algèbre de Banach unitaire hermitienne, K un compact de $\mathbb{C}$ et soit f une application continue sur K et à valeurs dans A. Si en tout point Z de K, $f(Z) > 0$, il existe un nombre fixe* $\delta > 0$ tel que, pour tout Z de K, $f(Z) \geqslant \delta$.

Preuve. — Soit g l'application définie sur K par : $g(Z) = \rho(f(Z)^{-1})$. Il est clair que g est semi-continue supérieurement sur K. Par suite, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que l'on ait: pour tout $Z \in K$, $\rho(f(Z)^{-1}) = g(Z) \leqslant \frac{1}{\delta}\cdot$ D'où $\rho(f(Z)) \geqslant \delta$ pour tout $Z \in K$.

3. Applications.

La technique utilisée dans [8] est basée sur la résolution spectrale de l'identité pour un opérateur. Cette dernière propriété n'existe pas, au sens de [8], dans les algèbres hermitiennes. Dans cette section, nous étendons les résultats de [8] aux algèbres de Banach hermitiennes en utilisant le calcul fonctionnel défini précédemment.

Dans toute la suite, A désignera une algèbre de Banach hermitienne à involution continue ; $D = \{Z : |Z| < 1\}$ étant le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. On considère :

$$N_A(D) = \{f \in H(D,A) : f(Z)f(W) = f(W)f(Z) \text{ et } f(Z)f(Z)^* = f(Z)^*f(Z) \quad \text{pour tous } Z,\ W \in D\}$$
$$B_A(D) = \{f \in N_A(D) : |f(Z)| < 1, \forall Z \in D\}$$
$$P_A(D) = \{g \in N_A(D) : \operatorname{Re} g(Z) > 0, \forall Z \in D\}.$$

Comme première application du calcul fonctionnel harmonique, on a le :

THÉORÈME 1. — *Soit $x \in A$ tel que $|x| < 1$. Alors*

1. $|f(x)| < 1$, $\forall f \in B_A(D)$ *tel que* $xf(Z) = f(Z)x$, $\forall Z \in D$.

2. $\operatorname{Re} g(x) > 0$, $\forall g \in P_A(D)$ *tel que* $xg(Z) = g(Z)x$, $\forall Z \in D$.

Preuve. — Montrons tout d'abord que les deux assertions du théorème sont équivalentes.

Quitte à remplacer A par $A/\operatorname{Rad} A$, ce qui ne change pas le spectre, on peut supposer que A est semi-simple.

$1/ \Rightarrow 2/$. — Soit $g \in P_A(D)$. Alors $g(Z) + e$ est inversible, pour tout $Z \in D$. En effet, si B désigne la sous-algèbre pleine involutive fermée engendrée par $g(D)$, il est clair que B est hermitienne. De plus, d'après le lemme 5, B est commutative et l'on a :

$$\mathrm{Sp}_B\,(g(Z)+e) = \{\chi(g(Z))+1, \chi \in M(B)\},$$

où $M(B)$ désigne l'ensemble des caractères non nuls de B. D'où $o \notin \mathrm{Sp}_B(g(Z)+e)$.

On considère la fonction f définie, sur D, par :

$$f(Z) = (g(Z)-e)(g(Z)+e)^{-1}.$$

Il est clair que $f \in N_A(D)$. De plus

$$g(Z) = (e+f(Z))(e-f(Z))^{-1}, \qquad \text{pour tout } Z \in D.$$

Et par suite

$$\mathrm{Re}\, g\,(Z) = (e-f(Z)^*)^{-1}(e-f(Z)^*f(Z))(e-f(Z))^{-1}, \qquad Z \in D.$$

D'où

$$e - f(Z)^*f(Z) = (e-f(Z)^*)\,\mathrm{Re}\, g\,(Z)(e-f(Z)), \qquad Z \in D.$$

Par ailleurs, il existe un élément hermitien $a(Z)$, pour tout $Z \in D$, tel que $a(Z)^2 = \mathrm{Re}\, g\,(Z)$.

Ensuite, d'après (2), $e - f(Z)^*f(Z) \geqslant 0$, pour tout $Z \in D$. De plus, $e - f(Z)^*f(Z)$ est inversible comme produit d'éléments inversible. D'où $e - f(Z)^*f(Z) > 0$. Par conséquent, d'après le lemme 3, $|f(Z)| < 1$ i.e., $f \in B_A(D)$. Et puisque $xg(Z) = g(Z)x$ pour $Z \in D$, on a $xf(Z) = f(Z)x$ pour tout $Z \in D$, d'où $|f(x)| < 1$. Ensuite, d'après le lemme 3, $e - f(x)^*f(x) > 0$, et soit $b(x)$ l'élément hermitien tel que $e - f(x)^*f(x) = b(x)^2$.

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\, g\,(x) &= (e-f(x)^*)^{-1}(e-f(x)^*f(x))(e-f(x))^{-1}\\ &= (e-f(x)^*)^{-1}b(x)b(x)(e-f(x))^{-1} > 0.\end{aligned}$$

$2/ \Rightarrow 1/$. — Soit $f \in B_A(D)$. On considère la fonction g définie, sur D, par $g(Z) = (e+f(Z))(e-f(Z))^{-1}$.

Alors $g \in N_A(D)$ et l'on a :

$$\mathrm{Re}\, g\,(Z) = (e-f(Z)^*)^{-1}(e-f(Z)^*f(Z))(e-f(Z))^{-1}.$$

Et par le même calcul que précédemment, on a :

$$\mathrm{Re}\, g\,(Z) > 0 \qquad \text{pour tout } Z \in D, \text{ i.e., } g \in P_A(D).$$

De plus, si $xf(Z) = f(Z)x$, on a aussi $xg(Z) = g(Z)x$. D'où $\operatorname{Re} g(x) > 0$. Il en résulte que

$$e - f(x)^*f(x) = (e - f(x)^*) \operatorname{Re} g(x)(e - f(x) > 0.$$

D'où, d'après le lemme 3, $|f(x)| < 1$.

Montrons maintenant 2.

Soit $g \in P_A(D)$. Alors $\operatorname{Re} g \in h(D,A)$. Soit $x \in A$, $|x| < 1$ tel que $xg(Z) = g(Z)x$, pour tout $Z \in D$. Alors, d'après le lemme 5, $x \operatorname{Re} g(Z) = \operatorname{Re} g(Z)x$, pour tout $Z \in D$. Soit r et r' tels que $|x| < r < r' < 1$, il est clair que $\operatorname{Sp} x \subset D(0,r)$ et, d'après le lemme 6, il existe $\delta > 0$ tel que $\operatorname{Re} g(Z) \geqslant \delta$, pour tout $Z \in D(0,r')$. Soit la fonction h définie par :

$$h(Z) = \operatorname{Re} g(Z) - \delta, \qquad Z \in D(0,r').$$

Ensuite, d'après la définition 1, on a :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|Z|=r} h(Z) \operatorname{Re} [(Z+x)(Z-x)^{-1}] \frac{|dZ|}{r}. \tag{6}$$

Pour tout $Z \in C(0,r)$, $xg(Z) = g(Z)x$. D'où, d'après le lemme 5, $xg(Z)^* = g(Z)^*x$, pour tout $Z \in C(0,r)$. Par suite $h(Z)$ et $\operatorname{Re} [(Z+x)(Z-x)^{-1}]$ sont deux éléments hermitiens qui commutent entre eux. De plus $h(Z) > 0$ sur $C(0,r)$ et pour tout $Z \in C(0,r)$ on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} [(Z+x)(Z-x)^{-1}] &= \frac{1}{2}[(Z+x)(Z-x)^{-1} + (\bar{Z}-x^*)^{-1}(\bar{Z}+x^*)] \\
&= \frac{1}{2}(\bar{Z}-x^*)^{-1}\{(\bar{Z}-x^*)(Z+x) \\
&\quad + (\bar{Z}+x^*)(Z-x)\}(Z-x)^{-1} \\
&= (\bar{Z}-x^*)^{-1}(r^2 - x^*x)(Z-x)^{-1}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit, d'après le lemme 3 et (2), que

$$\operatorname{Re} [(Z+x)(Z-x)^{-1}] \geqslant 0.$$

D'où $h(Z) \operatorname{Re} [(Z+x)(Z-x)^{-1}] \geqslant 0$ pour tout $Z \in C(0,r)$.

Par ailleurs, l'intégrale de droite dans (6) est la limite des sommes de la forme :

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} h(re^{i\theta_k}) \operatorname{Re} [(re^{i\theta_k}+x)(re^{i\theta_k}-x)^{-1}](\theta_{k+1} - \theta_k)$$

où $\theta_k \in [0,2\pi]$ pour tout $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ et

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = 2\pi .$$

Il est clair, d'après le lemme 2, que $h_n(x) \geqslant 0$ pour tout n et par la remarque 3, $h(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) \geqslant 0$.

Finalement, puisque $h(x) = \operatorname{Re} g(x) - \delta$, on a $\operatorname{Sp}\operatorname{Re} g(x) \subset [\delta, +\infty[$.

Remarque 4. — Dans le théorème 1, x n'est pas nécessairement normal.

Comme dans [8], on montre que le théorème 1 est équivalent à l'extension, du théorème de von Neumann, suivante.

THÉORÈME 2. — *Soit U un voisinage de $\bar{D}$ et $f \in N_A(U)$ tel que $|f(Z)| \leqslant 1$, pour tout $Z \in \bar{D}$ et soit $x \in A$ qui commute avec $f(Z)$ pour tout $Z \in U$, tel que $|x| \leqslant 1$. Alors $|f(x)| \leqslant 1$.*

Preuve. — Montrons tout d'abord que le théorème 2 se déduit du théorème 1.

En excluant le cas trivial où f est une constante, on a $|f(Z)| < 1$ sur D d'après le principe du maximum pour les fonctions analytiques vectorielles ([4], p. 100). Ensuite soit $r \in [0,1[$. Alors $|rx| < 1$ d'où $|f(rx)| < 1$ d'après le théorème 1. Soit maintenant $\alpha > 0$ tel que f est dans $N_A(U_\alpha)$ avec $U_\alpha = D(0,1+2\alpha)$. Quand $r \to 1$, $f(rZ) \to f(Z)$ uniformément sur $D(0,1+\alpha)$. De plus $\operatorname{Sp} x$ est contenu dans $D(0,1+\alpha)$. Et par la continuité du calcul holomorphe, $f(rx) \to f(x)$ uniformément pour la norme $\|\ \|$, d'où $f(rx)$ converge vers $f(x)$ pour $|\cdot|$ car $|\cdot|$ est moins fine que $\|\cdot\|$ sur A. Ainsi $|f(x)| \leqslant 1$. Réciproquement, le théorème 1 se déduit du théorème 2 du fait que du théorème 2 découle le résultat suivant qui implique clairement le théorème 1.

THÉORÈME 3. — *Soit $f \in N_A(D)$. Pour $0 < r < 1$, on pose*

$$M(r) = \max\{|f(Z)| : |Z| = r\}.$$

Alors

$$M(r) = \max\{|f(x)| : |x| \leqslant r \text{ et } xf(Z) = f(Z)x \text{ pour tout } Z \in D\}.$$

Preuve. — Quitte à remplacer A par $A/\operatorname{Rad} A$, ce qui ne change par le spectre, on peut supposer que A est semi-simple.

Montrons tout d'abord que si $M(r) = 0$, alors

$$\max\{|f(x)| : |x| \leqslant r \text{ et } xf(Z) = f(Z)x \text{ pour tout } Z \in D\} = 0.$$

Si $M(r) = 0$, alors $f(Z) = 0$ pour tout $|Z| = r$. Ensuite, d'après le principe du maximum ([4], p. 100), $|f(Z)| = 0$ pour tout $Z \in \overline{D(0,r)}$. Par ailleurs, d'après [5], Radical $(A) = \{y : |y| = 0\}$. D'où $f(Z) = 0$ pour tout $Z \in D(0,r)$. Par conséquent $f(Z) = 0$ pour tout $Z \in D$. D'où, d'après la définition 1, $f(x) = 0$ pour tout $|x| \leqslant r$.

Soit maintenant r fixé tel que $0 < r < 1$ et $M(r) > 0$. Alors la fonction g définie, sur $D\left(0, \frac{1}{r}\right)$, par :

$$g(Z) = \frac{f(rZ)}{M(r)}$$

est holomorphe sur $D\left(0, \frac{1}{r}\right)$ et par conséquent $|g(Z)| \leqslant 1$ sur $\overline{D}$ car pour tout $Z \in C(0,1)$, on a $|f(rZ)| \leqslant M(r)$. Ensuite, d'après le théorème 2, $|g(x)| \leqslant 1$ pour tout x tel que $|x| \leqslant 1$ et $xf(Z) = f(Z)x$ pour tout $Z \in D$. Ainsi $|f(rx)| \leqslant M(r)$. Finalement, si $|Z_0| = r$ et $|f(Z_0)| = M(r)$, alors $|Z_0 e| = |Z_0|\,|e| = |Z_0| = r$ et l'on a alors $|Z_0 e| = |Z_0|\,|e| = |Z_0| = r$ et l'on a :

$$|f(Z_0 e)| = |f(Z_0) \cdot e| = |f(Z_0)| = M(r).$$

D'où le résultat.

Remarque 5. — Nous obtenons également les résultats analogues à (2), (3) et (4) du théorème 3.4 de [8] et l'analogue du théorème 3.5 [8].

Soit f et g deux fonctions définies sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ et à valeurs dans A. On dit que f et g commutent si :

$$f(Z)g(W) = g(W)f(Z), \quad \forall Z,\ W \in \Omega.$$

Si $x \in A$, on dit que x commute avec f si $xf(Z) = f(Z)x$, $\forall Z \in \Omega$.

THÉORÈME 4 (Analogue du lemme de Schwarz). — *Soit x un élément de A tel que $|x| < 1$, f, g deux éléments de $H(D,A)$ et $h \in N_A(D)$ tel que $f = g \cdot h$, avec $|h(Z)| \leqslant 1$ sur D et $|h(Z)| \not\equiv 1$ si h n'est pas une fonction constante.*

(1) *Si x commute avec h, alors,*

$$g(x)g(x)^* \geqslant f(x)f(x)^*, \tag{7}$$

$$|g(x)| \geqslant |f(x)|. \tag{8}$$

Si h n'est pas de la forme $h(Z) = y$, y est un élément normal de A avec $|y| = 1$, l'inégalité (7) est stricte si, et seulement si, $g(x)g(x)^* > 0$.

(2) *Si x commute avec h et si h et g commutent, alors*

$$g(x)^* g(x) \geqslant f(x)^* f(x) \tag{9}$$

en plus de (7) et (8).

L'inégalité (9) est stricte si, et seulement si, $g(x)^* g(x) > 0$ et h n'est pas de la forme $h(Z) = y$ avec $|y| = 1$.

(3) *Si l'égalité est réalisée dans (8), alors $g(x) \in$ Radical (A) ou $h(Z) = y$ avec $|y| = 1$.*

Si $g(x) \in$ Radical (A) ou $h(x) = y$ avec y unitaire, alors l'égalité est réalisée dans (8).

Remarque 6. — L'élément x n'est pas nécessairement normal et f n'est pas nécéssairement un élément de $N_A(D)$.

Preuve. — Soit $x \in A$ tel que $|x| < 1$ et soit f et g deux éléments de $H(D, A)$ tels que $f = g \cdot h$ avec $h \in N_A(D)$. Alors :

$$g(x)g(x)^* - f(x)f(x)^* = g(x)(e - h(x)h(x)^*)g(x)^*.$$

Par ailleurs,

$$e - h(x)h(x)^* \geqslant 1 - |h(x)|^2.$$

D'où, pour $n > 0$, $(e - h(x)h(x)^*) - (1 - |h(x)|^2) + \dfrac{1}{n} > 0$, et soit $b_n(x)$ l'élément hermitien de A tel que

$$(e - h(x)h(x)^*) - (1 - |h(x)|^2) + \frac{1}{n} = (b_n(x))^2.$$

Ensuite, d'après (2), pour tout $n > 0$,

$$g(x)(b_n(x))^2 g(x)^* \geqslant 0.$$

Il s'ensuit, d'après la remarque 3, que

$$g(x) \lim_{n \to +\infty} (b_n(x))^2 g(x)^* \geqslant 0 .$$

D'où :

$$g(x)(e - h(x)h(x)^*)g(x)^* \geqslant (1 - |h(x)|^2) g(x) g(x)^* .$$

Par conséquent,

$$g(x)g(x)^* - f(x)f(x)^* \geqslant (1 - |h(x)|^2) g(x) g(x)^* .$$

Ainsi, si $h(Z) = y$ sur D avec $|y| = 1$, alors $h(x) = y$ et l'on a: $1 - |h(x)|^2 = 1 - |y|^2 = 0$.

Soit maintenant h une fonction qui n'est pas constante telle que $|y| = 1$. Alors, d'après le principe du maximum ([4], p. 100), $|h(Z)| < 1$ sur D et l'on a $|h(x)| < 1$ d'après le théorème 1. Ensuite $1 - |h(x)|^2 > 0$. D'où

$$g(x)g(x)^* \geqslant f(x)f(x)^*,$$

et

$$|g(x)| \geqslant |f(x)| .$$

Par ailleurs, (7) est stricte si, et seulement si, $g(x)g(x)^* > 0$ car $1 - |h(x)|^2 > 0$.

(2) Elle se fait de la même manière que (1).

(3) On suppose que l'égalité est réalisée dans (8). Si $|g(x)| \neq 0$ i.e., $g(x) \notin$ Radical (A), alors $h(Z) = y$, $|y| = 1$ car sinon, on aurait $|h(x)| < 1$ et par conséquent $|f(x)| < |g(x)|$.

Finalement, si $g(x) \in$ Radical (A), alors $|g(x)| = 0$ et $|f(x)| = 0$. De même si $h(Z) = y$ avec y unitaire, on a l'égalité dans (8).

Remarque 7. — Nous obtenons comme conséquence, du théorème 4, les analogues des corollaires 4.1.1 et 4.1.2 de [8] dans les algèbres hermitiennes.

THÉORÈME 5 (Analogue du théorème du Pick). — *Soit un élément x de A tel que $|x| < 1$ et $f \in B_A(D)$. Soit de plus y un élément normal de A tel que $|y| < 1$, f commute avec x et y, et x commute avec y. Alors*

$$\begin{aligned}(10)\quad & (e - x^* y)^{-1}(x^* - y^*)(x - y)(e - y^* x)^{-1} \\ & \geqslant (e - f(x)^* f(y))^{-1}(f(x)^* - f(y)^*)(f(x) - f(y))(e - f(y)^* f(x))^{-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(11)\quad & (x - y)(e - y^* x)^{-1}(e - x^* y)^{-1}(x^* - y^*) \\ & \geqslant (f(x) - f(y))(e - f(y)^* f(x))^{-1}(e - f(x)^* f(y))^{-1}((f(x)^* - f(y)^*),\end{aligned}$$

$$(12)\quad |(x - y)(e - y^* x)^{-1}| \geqslant |(f(x) - f(y))(e - f((y)^* f(x))^{-1}| .$$

Remarque 8. – x n'est pas nécessairement normal.

Preuve. – Quitte à remplacer A par $A/\mathrm{Rad}\,A$, ce qui ne change pas le spectre, on peut supposer que A est semi-simple.

Ensuite on considère la fonction μ_y définie, sur D, par :

$$\mu_y(Z) = (Z+y)(e+y^*Z)^{-1}.$$

D'après le lemme 3, $|\mu_y(Z)| < 1$ sur D.

Soit maintenant F définie sur D par :

$$F(Z) = f(\mu_y(Z)),$$

et soit K_2 un ensemble compact de D. Alors,

$$\max\{|\mu_y(Z)| : Z \in K_2\} = r < 1.$$

Par conséquent, $\mathrm{Sp}\,(\mu_y(Z)) \subset K_1 = \{w : |w| \leqslant r\}$, pour tout $Z \in K_2$.

Ensuite, de la même manière que dans le lemme 2.4 de [8], on montre que $F \in H(D,A)$. De plus, $\mu_y(Z)$, pour tout $Z \in D$, commute avec f car y commute avec $f(Z)$, pour tout $Z \in D$. Il s'ensuit alors,

$$|f(\mu_y(Z))| < 1, \qquad \text{pour tout } Z \in D,$$

i.e.,

$$|F(Z)| < 1, \qquad \text{pour tout } Z \in D. \tag{13}$$

Par suite, la fonction g définie, sur D, par :

$$g(Z) = \{F(Z) - f(y)\}\{e - f(y)^* F(Z)\}^{-1} \tag{14}$$

est un élément de $H(D,A)$ tel que $g(0) = 0$ car $F(0) = f(y)$.

Soit maintenant $f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$, $Z \in D$ et les a_n dans A. Alors on a :

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \tag{15}$$

et

$$F(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\{\mu_y(Z)\}^n, \qquad Z \in D. \tag{16}$$

Ensuite, du fait que $f \in N_A(D)$ et y est un élément normal qui commute avec $f(Z)$, pour tout $Z \in D$, tel que $|y| < 1$, on déduit que $F \in N_A(D)$,

$F(Z)f(y) = f(y)F(Z)$ et $F(Z)f(y)^* = f(y)^*F(Z)$ pour tout $Z \in D$. Il en résulte que $g \in N_A(D)$ et, d'après le lemme 3, $|g(Z)| < 1$. On pose $C = (x-y)(e-y^*x)^{-1}$. Le lemme 3 montre que $|C| < 1$ et par application de (15) et (16), on vérifie que C commute avec $f(y)$, $f(y)^*$ et F. D'où C et g commutent en appliquant (14). On a, d'après le théorème 4,

$$C^*C \geqslant g(C)^*g(C), \tag{17}$$

$$CC^* \geqslant g(C)g(C)^*, \tag{18}$$

$$|C| \geqslant |g(C)|. \tag{19}$$

Montrons que (17)-(19) sont exactement (10)-(12).

On a : $\mu_y(C) = (C+y)(e+y^*C)^{-1}$.

Or

$$\begin{aligned}\mu_y(C) &= \{(x-y)(e-y^*x)^{-1}+y\}\{e+y^*(x-y)(e-y^*x)^{-1}\}^{-1}\\ &= \{x-y+y(e-y^*x)\}\{e-y^*x+y^*(x-y)\}^{-1}\\ &= x.\end{aligned}$$

D'où $F(C) = f(\mu_y(C)) = f(x)$. Et par suite $|F(C)| < 1$ car $|f(x)| < 1$ et C commute avec F, $f(y)$ et $f(y)^*$.

$$\begin{aligned}g(C) &= \{F(C) - f(y)\}\{e-f(y)^*F(C)\}^{-1}\\ &= \{f(x) - f(y)\}\{e-f(y)^*f(x)\}^{-1}.\end{aligned} \tag{20}$$

Finalement, en combinant (16), (20) avec (17)-(19), on obtient (10)-(12).

Comme conséquence, on a le :

COROLLAIRE. — *Soit* $f \in H(D,\mathbb{C})$ *tel que* $|f(Z)| < 1$ *sur* D, *et* $x \in A$ *tel que* $|x| < 1$. *Si* y *est un élément normal commutant avec* x *tel que* $|y| < 1$, *alors on a* (10), (11) *et* (12).

Dans toute la suite, nous désignerons par x un élément normal de A et f un élément de $H(D,A)$ qui commute avec x. On a alors le :

THÉORÈME 6. — *Soit* x *un élément normal de* A *tel que* $|x| < 1$. *Alors :*

1) $\operatorname{Re} g(x) > 0$ pour tout $g \in H(D,A)$ *tel que* $\operatorname{Re} g(Z) > 0$ et $xg(Z) = g(Z)x$ *pour tout* $Z \in D$.

2) $|f(x)| < 1$ *pour tout* $f \in H(D,A)$ *tel que* $|f(Z)| < 1$ *et* $xf(Z) = f(Z)x$ *pour tout* $Z \in D$.

Preuve. — 1) Soit r et r' tels que $|x| < r < r' < 1$. Alors $\operatorname{Sp} x \subset D(0,r)$ et par la définition 1, on a

$$\operatorname{Re} g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{|Z|=r} \operatorname{Re} g(Z) \operatorname{Re}\,[(Z+x)(Z-x)^{-1}]\frac{|dZ|}{r}.$$

Ensuite, pour tout $Z \in \overline{D(0,r)}$, $xg(Z) = g(Z)x$. D'où, d'après le lemme 5, $xg(Z)^* = g(Z)^*x$, pour tout $Z \in D(0,r)$. Par conséquent $\operatorname{Re} g(Z) \operatorname{Re}\,[(Z+x)(Z-x)^{-1}]$ est un élément hermitien de A. De plus, on a $\operatorname{Re} g(Z) \operatorname{Re}\,[(Z+x)(Z-x)^{-1}] > 0$ pour tout Z tel que $|Z| = r$.

Soit maintenant h définie, sur $\overline{D(0,r)}$, par

$$h(Z) = \operatorname{Re} g(Z).$$

Par hypothèse $h(Z) > 0$ pour $Z \in \overline{D(0,r)}$. Ensuite, d'après le lemme 6, il existe $\delta > 0$ tel que $h(Z) \geqslant \delta$ pour tout $Z \in \overline{D(0,r)}$. Enfin, par le même calcul que dans le théorème 1, on montre que $h(x) \geqslant \delta$. D'où le résultat.

2) Soit $f \in H(D,A)$ tel que $|f(Z)| < 1$ et x commute avec $f(Z)$ pour tout $Z \in D$. On considère la fonction g définie, sur D, par

$$g(Z) = (e+f(Z))(e-f(Z))^{-1}.$$

On montre facilement que $\operatorname{Re} g(Z) > 0$ pour tout $Z \in D$. Et comme x commute avec $f(Z)$, il en est de même que de x et de $g(Z)$ pour tout $Z \in D$. Par ailleurs

$$2 \operatorname{Re} g(Z) = (e-f(Z)^*)^{-1}(e-f(Z)^*f(Z))(e-f(Z))^{-1} > 0, \quad \forall Z \in D.$$

Ensuite, par 1), $\operatorname{Re} g(x) > 0$. D'où

$$e - f(x)^*f(x) = (e-f(x)^*) \operatorname{Re} g(x)(e-f(x)) > 0.$$

Enfin, d'après le lemme 3, $|f(x)| < 1$.

En appliquant le théorème précédent et les preuves de la première section, on montre les théorèmes suivants :

THÉORÈME 7. — *Soit $\delta > 0$ et $U = \{Z : |Z| < 1 + 2\delta\}$. Soit $f \in H(U,A)$ tel que $|f(Z)| \leqslant 1$ pour tout $Z \in U$ et soit x un élément normal de A qui commute avec f tel que $|x| \leqslant 1$. Alors $|f(x)| \leqslant 1$.*

THÉORÈME 8. — *Soit* $f \in H(D, A)$. *Pour* $0 < r < 1$, *on pose*

$$M(r) = \max \{ |f(Z)| \, ; \, |Z| = r \}.$$

Alors

$$M(r) = \max \{ |f(x)| \, ; \, |x| \leqslant r \text{ et } xf(Z) = f(Z)x \text{ pour tout } Z \in D \}.$$

THÉORÈME 9. — *Soit* $f = g \cdot h$ *avec* g, $h \in H(D, A)$ *tel que* $|h(Z)| \leqslant 1$ *pour tout* $Z \in D$ *et* $|h(Z)| \not\equiv 1$ *si* h *n'est pas une fonction constante. Soit* x *un élément normal de* A *tel que* $|x| < 1$.

1) *Si* x *commute avec* h, *alors*

$$g(x)g(x)^* \geqslant f(x)f(x)^* \tag{21}$$

$$|g(x)| \geqslant |f(x)|. \tag{22}$$

Si h *n'est pas de la forme* $h(Z) = y$, y *un élément normal de* A *avec* $|y| = 1$, *l'inégalité* (21) *est stricte si, et seulement si,* $g(x)g(x)^* > 0$.

2) *Si* x *commute avec* h *et* g, *et si*

$$h(Z)g(w) = g(w)h(Z), \qquad h(Z)^* g(w) = g(w)h(Z)^*, \quad \forall Z, w \in D$$

alors on a :

$$g(x)^* g(x) \geqslant f(x)^* f(x) \tag{23}$$

en plus de (21) *et* (22).

L'inégalité est stricte dans (23) si, et seulement si, $g(x)^* g(x) > 0$ et h n'est pas de la forme $h(Z) = y$ avec $|y| = 1$.

3) *Si l'égalité est réalisée dans* (22), *alors* $g(x) \in \text{Radical}\,(A)$ *ou* $h(Z) = y$ *avec* $|y| = 1$; *si* $|g(x)| = 0$ *ou* $h(Z) = a$ *avec* a *unitaire, alors on a l'égalité dans* (22).

Remarque. — Nous obtenons comme conséquence, du théorème 9, les analogues des corollaires 6.7.1 et 6.7.2 de [8] dans les algèbres hermitiennes.