ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PATRICK IGLESIAS
GILLES LACHAUD

Espaces différentiables singuliers et corps de nombres algébriques

Annales de l'institut Fourier, tome 40, n° 3 (1990), p. 723-737
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_3_723_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 1 (1990), 723-737

ESPACES DIFFÉRENTIABLES SINGULIERS ET CORPS DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par P. IGLESIAS et G. LACHAUD

à Claude Godbillon

1. Introduction.

Nous proposons de mettre en évidence certaines propriétés arithmétiques des *feuilletages linéaires irrationnels* de codimension 1 des tores $\mathbf{T}^n$, $n \geq 2$. Un *feuilletage linéaire* de codimension 1 du tore $\mathbf{T}^n$ est le feuilletage caractéristique d'une 1-forme w, invariante sous l'action de $\mathbf{T}^n$. On note h la feuille passant par l'élément neutre, c'est un sous-groupe de $\mathbf{T}^n$ de dimension $n-1$ dont la composante neutre de son relevé dans $\mathbf{R}^n$, qui est le revêtement universel de $\mathbf{T}^n$, est un hyperplan que l'on note H. On note $\mathbf{T}_H$ l'espace quotient $\mathbf{T}^n/h = \mathbf{R}^n/[\mathbf{Z}^n + H]$. La nature de $\mathbf{T}_H$ dépend évidemment de celle de h : on définit la *rationalité* de H comme la dimension k de l'espace vectoriel engendré par le sous-groupe discret $H \cap \mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$. On dira que H est *totalement rationnel* si $k = n-1$ et *totalement irrationnel* si $k = 0$.

Dans le cas totalement rationnel le quotient $\mathbf{T}^n/h$ est difféomorphe au tore $\mathbf{T}$, dans le cas contraire l'étude de la structure transverse se ramène immédiatement à celle d'un feuilletage totalement irrationnel (quitte à

Mots-clés : Feuilletages – Espaces différentiables – Corps de nombres.
Classification A.M.S. : 53C12 – 57R55 – 12F05.

descendre sur un tore de dimension plus petite). Nous entendons par *structure transverse* d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété V la *structure différentiable* de l'espace quotient $Q = V/\mathcal{F}$ au sens de Chen-Souriau [4], [11].

Le cas qui nous intéresse est donc celui des feuilletages linéaires complètement irrationnels de codimension 1, c'est-à-dire ceux pour lesquels

$$H \cap \mathbf{Z}^n = \{0\} .$$

Puisque chaque feuille est dense dans $\mathbf{T}^n$, le quotient $\mathbf{T}_H$ hérite de la topologie grossière et l'espace $\mathbf{T}_H$ muni de la structure différentiable quotient n'est pas une variété, on dit parfois que c'est un *espace singulier*.

Dans le cas $n = 2$, l'hyperplan H est une droite caractérisée par sa pente irrationnelle α (on pose $\mathbf{T}_\alpha = \mathbf{T}_H$). Des travaux précédents [5], [7] ont mis en évidence des liens entre certains invariants différentiables des tores $\mathbf{T}_\alpha$ et des propriétés arithmétiques du nombre α; en particulier le groupe des composantes connexes du groupe des difféomorphismes de $\mathbf{T}_\alpha$ est égal à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, sauf si α est algébrique de degré 2 auquel cas il est égal à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$. Pour les tores de plus grande dimension, certains aspects algébriques de ces feuilletages avait été remarqués par d'autres auteurs (*cf.* par exemple [6]). Nous essayons, dans ce travail, de dégager l'essentiel de ces propriétés dans le cas $n \geq 3$.

Nous montrons tout d'abord que les tores irrationnels $\mathbf{T}_H$ sont classés, à difféomorphisme près, par les orbites de l'hyperplan H sous l'action du groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$:

(1) $\quad \mathbf{T}_H \simeq \mathbf{T}_{H'}$ si et seulement si $MH = H'$ avec $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$.

Le revêtement universel $\widetilde{\mathbf{T}}_H$ de $\mathbf{T}_H$ est difféomorphe à $\mathbf{R}$, et le premier groupe d'homotopie de $\mathbf{T}_H$ (au sens des espaces différentiables) s'injecte dans $\mathbf{R}$ comme le sous-groupe :

$$w(\mathbf{Z}^n) = \mathbf{Z} + w_2\mathbf{Z} + \cdots + w_n\mathbf{Z} \subset \mathbf{R} \tag{2}$$

où $w = (1, w_2, \ldots, w_n)$ est un *covecteur directeur* de H, c'est-à-dire une forme linéaire dont H est le noyau. Autrement dit :

$$\widetilde{\mathbf{T}}_H \simeq \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \pi_1(\mathbf{T}_H) \simeq \mathbf{Z} + w_2\mathbf{Z} + \cdots + w_n\mathbf{Z} . \tag{3}$$

Nous montrons ensuite qu'il existe un plus grand corps de nombres algébriques K inclus dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel

$$V = w(\mathbf{Q}^n) = \mathbf{Q} + w_2\mathbf{Q} + \cdots + w_n\mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \tag{4}$$

tel que $KV = V$, nous l'appelons le *corps caractéristique* de H. Nous montrons que le groupe des composantes connexes de $\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)$ est isomorphe au groupe des unités $\mathcal{O}_H^\times$ d'un ordre $\mathcal{O}_H$ de ce corps. Le théorème des unités de Dirichlet donne la structure du groupe $\mathcal{O}_H^\times$: si r_1 désigne le nombre de plongements réels de K et r_2 celui de ses plongements complexes (non réels) alors :

$$\mathcal{O}_H^\times \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^{r_1+r_2-1} \; ; \tag{5}$$

par suite

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^{r_1+r_2-1} \; . \tag{6}$$

Il ne fait aucun doute que l'étude des invariants différentiables des espaces quotients des feuilletages linéaires de codimension plus grande feront apparaître des propriétés arithmétiques et des constructions algébriques au moins analogues sinon plus fines. Nous commentons dans la remarque 3.9, à partir de l'exemple du tore $\mathbf{T}_H$, les relations entre la méthode des espaces différentiables et la théorie plus traditionnelle des feuilletages.

Pour démontrer ces résultats nous allons utiliser quelques constructions arithmétiques que nous allons exposer maintenant.

2. Arithmétique des hyperplans irrationnels.

Dans ce paragraphe, $\mathbf{F}$ est un corps de caractéristique nulle, $E = \mathbf{F}^n$, et $\mathbf{k}$ est un sous-corps de $\mathbf{F}$. Soit H un hyperplan de E; on pose :

$$\mathcal{A}_H(\mathbf{k}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{k}) | MH \subset H\}, \tag{7}$$

où $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$ désigne la k-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{k}$; puisque $\mathcal{A}_H(\mathbf{k})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}(n, \mathbf{k})$, son degré est compris entre 1 et n^2. Soit w une forme linéaire telle que $H = \ker(w)$, nous dirons que w est un *covecteur directeur* de H (w est défini à un scalaire près). Pour tout $M \in \mathcal{A}_H(\mathbf{k})$ il existe un scalaire $\chi(M)$ tel que :

$$wM = \chi(M)w \; . \tag{8}$$

En effet, on a $\ker(w) \subset \ker(wM)$ et on sait de façon générale que si A et C sont deux matrices telles que $\ker(A) \subset \ker(C)$ il existe une matrice B telle que $C = BA$. On a ainsi défini un caractère $\chi : \mathcal{A}_H(\mathbf{k}) \to \mathbf{F}$ que nous appellerons le *poids* de l'hyperplan H. Le noyau de χ est un idéal bilatère de $\mathcal{A}_H(\mathbf{k})$, d'où la suite exacte de $\mathbf{k}$-algèbres :

$$0 \leq \ker(\chi) \longrightarrow \mathcal{A}_H(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathrm{Im}(\chi) \longrightarrow 0 \; . \tag{9}$$

PROPOSITION 2.1. — *L'algèbre $K = \mathrm{Im}(\chi)$ est un corps; c'est une extention de degré fini* [1] *de* $\mathbf{k}$.

Démonstration. — La $\mathbf{k}$-algèbre K est de degré fini sur $\mathbf{k}$; elle est commutative et c'est un anneau d'intégrité, puisque $K \subset \mathbf{F}$; c'est donc un corps [2], et par suite une extension de degré fini de $\mathbf{k}$. □

Avec les notations précédentes nous dirons que K est le *corps caractéristique* de H.

Quitte à permuter les coordonnées de E et à diviser w par un élément de $\mathbf{F}$, on peut choisir sa première coordonnée égale à 1, de telle sorte que $w = (1, w_2, \ldots, w_n)$. Nous notons :

$$V = w(\mathbf{k}^n) = \mathbf{k} + w_2\mathbf{k} + \cdots + w_n\mathbf{k} \tag{10}$$

le $\mathbf{k}$-sous-espace vectoriel de $\mathbf{F}$ engendré par $1, w_2, \ldots, w_n$. Compte tenu de ces notations, on a :

PROPOSITION 2.2. — *Le corps caractéristique de H est le plus grand corps K contenu dans V tel que $KV \subset V$. L'espace V est un espace vectoriel sur K; si $S = (1, x_2, \ldots, x_m)$ est une base de V sur K, et si on note W le $\mathbf{k}$-sous-espace de V engendré par S, on a :*

$$V \simeq K \otimes_{\mathbf{k}} W \quad et \quad \dim_k(V) = [K : \mathbf{k}] \dim_K(V) \ . \tag{11}$$

Démonstration. — Pour $M \in \mathcal{A}_H(\mathbf{k})$ la relation $wM = \chi(M)w$ implique $w(M_i) = \chi(M)\omega_i$ où M_i est l'image par M du i-ème vecteur de la base canonique de E; puisque $M_i \in \mathbf{k}^n$ on a $\chi(M)w_i \in V$ pour $1 \leq i \leq n$, et par suite $KV \subset V$. Si K' est un sous-corps tel que $K'V \subset V$ et si $\lambda \in K'$, l'application $v \mapsto \lambda v$ est linéaire; d'autre part l'application linéaire $w \restriction \mathbf{k}^n$ est un isomorphisme de $\mathbf{k}^n$ dans V, par suite il existe une matrice $M \in \mathcal{M}(n, \mathbf{k})$ qui représente cette application dans la base $(1, w_2, \ldots, w_n)$ de V, on a alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}^n & \xrightarrow{w} & V \\ \downarrow{\scriptstyle M} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ \mathbf{k}^n & \xrightarrow{w} & V \end{array} \tag{12}$$

Ceci montre que $wM = \lambda w$, donc $\lambda = \chi(M) \in K$, ce qui prouve la première assertion. Puisque $KV \subset V$ l'espace V est un espace vectoriel sur K; les assertions suivantes sont immédiates. □

---

[1] Rappelons que toute extension de degré fini d'un corps est algébrique.

PROPOSITION 2.3. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $H \cap \mathbf{k}^n = \{0\}$;

2. *le poids* $\chi : \mathcal{A}_H(\mathbf{k}) \to \mathbf{F}$ *est injectif;*

3. *l'algèbre* $\mathcal{A}_H(\mathbf{k})$ *est isomorphe à* K.

Démonstration. — $1 \Rightarrow 2$: si $M \in \mathcal{A}_H(\mathbf{k})$, on a $\chi(M) = 0$ si et seulement si $M_i \in H \cap \mathbf{k}^n$ pour $1 \leq i \leq n$ (M_i est l'image par M du i-ème vecteur de la base canonique). $2 \Rightarrow 1$: supposons l'assertion 1 fausse, et soit $x \in H \cap \mathbf{k}^n$, $x \neq 0$; en complétant par des colonnes de zéros on obtient une matrice non nulle dans le noyau de χ. L'assertion $2 \Rightarrow 3$ découle de la proposition 2.1. $3 \Rightarrow 2$: puisque $\mathcal{A}_H(\mathbf{k})$ est un corps, $\ker(\chi) = 0$ ou $\ker(\chi) = \mathcal{A}_H(\mathbf{k})$, mais cette dernière égalité est impossible puisque $\chi(\mathbf{1}_n) = 1$. □

Considérons une extension quelconque K de degré fini d de $\mathbf{k}$, et $B = (w_1, \ldots, w_n)$ une base du $\mathbf{k}$-espace vectoriel sous-jacent à K, on choisit $w_1 = 1$. Pour $x \in K$ on note $\mu(x)$ l'homomorphisme $y \mapsto xy$ de K; c'est un automorphisme si $x \neq 0$. La représentation linéaire μ s'appelle la *représentation régulière* de K. On pose :

$$\mu_B : x \mapsto \widehat{B}^{-1} \mu(x) \widehat{B} \tag{13}$$

où $\widehat{B}$ est le $\mathbf{k}$-isomorphisme de $\mathbf{k}^d$ sur K défini par la base B. Ce qui définit une représentation linéaire $\mu_B : K \to \mathcal{M}(d, \mathbf{k})$: on l'appelle la *représentation régulière* de la $\mathbf{k}$-algèbre K dans la base B. Toutes ces représentations sont irréductibles et équivalentes entre elles; elles définissent l'unique classe de représentations irréductibles de la $\mathbf{k}$-algèbre K, autrement dit la classe des $\mathbf{k}$-espaces vectoriels qui sont des K-espaces vectoriels de dimension 1.

Supposons les conditions équivalentes de la proposition 2.3 satisfaites, en particulier l'homomorphisme χ de $\mathcal{A}_H(\mathbf{k})$ dans K est un isomorphisme et $\mathcal{A}_H(\mathbf{k})$ est un corps. On note :

$$\rho_H : K \longrightarrow \mathcal{A}_H(\mathbf{k}) \tag{14}$$

l'isomorphisme inverse : c'est une représentation de degré n de la $\mathbf{k}$-algèbre K. Si $\lambda \in K$, on a par construction $\omega \rho_H(\lambda) = \lambda w$.

PROPOSITION 2.4. — *Supposons $H \cap \mathbf{k}^n = \{0\}$. Il existe un automorphisme $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{k})$ tel que :*

$$P^{-1}\rho_H(\lambda)P = \begin{pmatrix} \mu(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu(\lambda) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu(\lambda) \end{pmatrix} \tag{15}$$

où le membre de droite est un tableau carré de côté m, avec $m = \dim_K(V)$, et où la représentation μ est la représentation régulière de la $\mathbf{k}$-algèbre K. On a

$$n = [K : \mathbf{k}] \cdot \dim_K(V) \tag{16}$$

en particulier, si n est premier et si $K \neq \mathbf{k}$, on a $K = V$.

Démonstration. — Soit $B = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ une base du $\mathbf{k}$-espace vectoriel sous-jacent à K, avec $\alpha_1 = 1$. Soit $(1, x_2, \dots, x_m)$ une base de V sur K comme dans la proposition 2.1; alors la famille

$$(w'_1 \leq w'_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_d, x_2\alpha_1, \dots, x_2\alpha_d, \dots, x_m\alpha_1, \dots, x_m\alpha_d)$$

est une base de V sur $\mathbf{k}$; la matrice $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{k})$ transformant la base $(w_1, \dots, w_n)$ en la base $(w'_1, \dots, w'_n)$ répond à notre affirmation; en effet notons w' le vecteur de $\mathbf{F}^n$ de coordonnées $(w'_1, \dots, w'_n)$ et posons $\rho'_H(\lambda) = P^{-1}\rho_H(\lambda)P$; on a $w'\rho'_H(\lambda) = \lambda w'$. Les nombres $(1, x_2, \dots, x_m)$ étant linéairement indépendants sur K, la matrice $\rho'_H(\lambda)$ a bien la forme annoncée en notant μ la représentation régulière de la $\mathbf{k}$-algèbre K associée à la base B. Les assertions suivantes se déduisent de la première. □

Exemple 2.5. — On prend $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $\mathbf{k} = \mathbf{Q}$ et $E = \mathbf{R}^4$; on considère l'hyperplan de covecteur directeur $w = (1, \sqrt{2}, \varpi, \varpi\sqrt{2})$, où ϖ est un nombre transcendant sur $\mathbf{Q}$. L'espace V est engendré par ϖ et $\sqrt{2}$; il est contenu dans le corps $L = \mathbf{Q}(\varpi, \sqrt{2})$. Le plus grand sous-corps K tel que $KV \subset V$ est $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$: il y a donc un isomorphisme de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ sur $\mathcal{A}_H(\mathbf{Q})$, et le corps caractéristique de H est égal à $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Pour a et b dans $\mathbf{Q}$ posons

$$\rho_H(a + b\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 2b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 2b & a \end{pmatrix}. \tag{17}$$

On vérifie que $\rho_H(a + b\sqrt{2}) \in \mathcal{A}_H(\mathbf{Q})$, $\mathcal{A}_H(\mathbf{Q})$ est l'image de la représentation ρ_H.

Remarque 2.6. — Réciproquement, si K est une extension de $\mathbf{k}$ de degré divisant n, et si $\mathbf{F}$ est de degré de transcendance infini sur $\mathbf{k}$ il existe un hyperplan $H \subset \mathbf{F}^n$ tel que l'on ait un isomorphisme de $\mathbf{k}$-algèbre $\rho : K \to \mathcal{A}_H(\mathbf{k})$. En effet, posons $m = n/[K : \mathbf{k}]$; choisissons m nombres $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de $\mathbf{F}$ avec $x_1 = 1$ linéairement indépendants sur K; considérons le covecteur de $\mathbf{F}^n$ de coordonnées

$$w = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d, x_2\alpha_1, \ldots, x_2\alpha_d, \ldots, x_m\alpha_1, \ldots, x_m\alpha_d)$$

où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est une base du $\mathbf{k}$-espace vectoriel K et soit H l'hyperplan de E de covecteur directeur w; en reprenant le raisonnement de la proposition 2.4 on obtient le résultat.

Nous considérons maintenant le cas $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $\mathbf{k} = \mathbf{Q}$. Nous dirons qu'un hyperplan H de $\mathbf{R}^n$ est *irrationnel* si

$$H \cap \mathbf{Z}^n = \{0\} \ . \tag{18}$$

Rappelons d'autre part [1] qu'un *ordre* $\mathcal{O}$ d'un corps de nombres algébriques $K \subset \mathbf{R}$ est un sous-anneau de K qui est un $\mathbf{Z}$-module de rang égal à $[K : \mathbf{Q}]$.

THÉORÈME 2.7. — *Soit H un hyperplan irrationnel de $\mathbf{R}^n$; le poids χ associé à H définit un isomorphisme de $\mathcal{A}_H(\mathbf{Q})$ sur le corps caractéristique K de H qui est un corps de nombres algébriques. L'anneau*

$$\mathcal{A}_H(\mathbf{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) | MH \subset H\}$$

est l'image réciproque par χ d'un ordre $\mathcal{O}_H$ de K. Le groupe

$$\mathcal{A}_H(\mathbf{Z})^* = \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{Z}) | MH = H\}$$

est l'image réciproque par χ du groupe $\mathcal{O}_H^\times$ des unités de l'ordre $\mathcal{O}_H$.

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition 2.1. Notons $P_M(x) = \det(M - x\mathbf{1}_n)$ le polynôme caractéristique d'une matrice $M = \rho_H(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$, et q_M son polynôme minimal. Si $M \in \mathcal{A}_H(\mathbf{Q})$, on a $P_M(x) = q_M(x)^m$ en vertu de la proposition 2.4. Si $M \in \mathcal{A}_H(\mathbf{Z})$, le polynôme P_M est unitaire et à coefficients entiers; il en va donc de même du polynôme minimal $q_M(x)$, qui est lui aussi celui de λ; le nombre λ est donc un entier algébrique, ce qui prouve la deuxième assertion, si on remarque que $\mathbf{Q}\mathcal{A}_H(\mathbf{Z}) = \mathcal{A}_H(\mathbf{Q})$; la troisième s'en déduit immédiatement. □

COROLLAIRE 2.8. — *Soient r_1 et r_2, les nombres respectifs des plongements réels et complexes de $\mathbf{K}$ de telle sorte que $[K : \mathbf{Q}] = r_1 + 2r_2$, le groupe $\mathcal{O}_H^\times$ des unités de l'ordre $\mathcal{O}_H$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^{r_1+r_2-1}$.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement du théorème des unités de Dirichlet (*cf.* par exemple [1]). □

3. Géométrie des tores irrationnels.

Nous nous plaçons ici dans la catégorie des espaces différentiables dont on trouvera une présentation dans [9] et [7] et nous renvoyons à [10] pour une étude comparative entre les différents types de structures sur les espaces de feuilles.

Nous utilisons les notations de la section 2 pour $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $\mathbf{k} = \mathbf{Q}$. Comme nous l'avons noté, tout hyperplan irrationnel H de $\mathbf{R}^n$ (formule (18)) est naturellement associé par dualité à un covecteur directeur w dont la première coordonnée peut être choisie égale à 1 :

$$x \in H \iff w(x) = 0 \ , \quad w = (1, w_2, \ldots, w_n) \ . \tag{19}$$

Nous posons :

$$V_{\mathbf{Z}} = w(\mathbf{Z}^n) \ . \tag{20}$$

La restriction à H de la projection $\mathbf{R}^n \to \mathbf{T}^n$ est une *induction* au sens de la théorie des espaces différentiables, ce qui signifie que l'image réciproque de la structure différentiable de $\mathbf{T}^n$ coïncide avec celle de H. D'autre part l'hyperplan H définit naturellement un feuilletage dont le quotient est noté $\mathbf{T}_H$: c'est le feuilletage caractéristique de l'image sur $\mathbf{T}^n$ de la forme différentielle :

$$w(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\zeta_j}{2i\pi z_j} \ , \tag{21}$$

avec $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{T}^n$ et $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in T_z(\mathbf{T}^n)$. Le tore irrationnel $\mathbf{T}_H$ est muni de la *structure différentiable quotient.* Cet espace est *totalement singulier* au sens suivant : la structure induite sur $\mathbf{T}_H - \{\tau\}$, où τ est un point quelconque de $\mathbf{T}_H$, est discrète. On a, compte tenu des notations précédentes :

PROPOSITION 3.1. — *Soit $H \subset \mathbf{R}^n$ un hyperplan irrationnel de covecteur directeur w. Le tore irrationnel $\mathbf{T}_H = \mathbf{T}^n/H$ est difféomorphe au quotient de $\mathbf{R}$ par $V_{\mathbf{Z}}$.*

Démonstration. — On a :

$$\mathbf{T}_H = [\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n]/H = \mathbf{R}^n/[\mathbf{Z}^n \oplus H] = [\mathbf{R}^n/H]/\mathbf{Z}^n \ .$$

Or l'application w définit un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n/H$ dans $\mathbf{R}$. Cette construction est résumée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{T}^n & \longrightarrow & \mathbf{T}_H \end{array} . \tag{22}$$

L'action de $\mathbf{Z}^n$ sur $\mathbf{R}$, qui est l'image par w de l'action naturelle de $\mathbf{Z}^n$ sur $\mathbf{R}^n$, est donnée par la formule :

$$(r,x) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{R} \Longrightarrow r(x) = x + w(r) . \tag{23}$$

On en déduit que $\mathbf{T}_H$ est difféomorphe au quotient de $\mathbf{R}$ par $V_{\mathbf{Z}}$. □

On a le diagramme de groupes différentiables suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n/H & \longrightarrow & \mathbf{T}_H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & V_{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}/V_{\mathbf{Z}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes. On déduit de la proposition précédente :

COROLLAIRE 3.2. — *La droite* $\mathbf{R}$ *est un revêtement universel du tore* $\mathbf{T}_H$ *dans lequel* $\pi_1(\mathbf{T}_H)$ *est représenté par le groupe* $V_{\mathbf{Z}}$. *Tous les autres groupes d'homotopie sont nuls.*

Démonstration. — Le tore irrationnel $\mathbf{T}_H$ étant difféomorphe au quotient de $\mathbf{R}$ par le sous-groupe $V_{\mathbf{Z}}$, c'est un espace homogène. La projection d'un groupe différentiable sur un espace homogène est toujours une fibration micro-triviale au sens des fibrés différentiables (voir [8]). Puisque la fibre type, c'est-à-dire $V_{\mathbf{Z}}$, est différentiablement discrète, la projection $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{T}_H$ est un revêtement au sens des espaces différentiables. L'espace total du revêtement, c'est-à-dire $\mathbf{R}$, étant simplement connexe, ce revêtement est universel en vertu du théorème d'existence et d'unicité (à isomorphisme près) des revêtements universels des espaces différentiables. Les groupes d'homotopie de $\mathbf{T}_H$:

$$\pi_1(\mathbf{T}_H) \simeq V_{\mathbf{Z}} \text{ et } \pi_k(\mathbf{T}_H) = 0 \text{ pour } k \geq 2 \tag{24}$$

s'obtiennent grâce à la suite exacte d'homotopie de la fibration $\mathbf{R} \to \mathbf{T}_H$. □

Notons que tout autre revêtement de $\mathbf{T}_H$ est un quotient du revêtement universel $\mathbf{R}$ par un sous-groupe quelconque du premier groupe d'homotopie $V_{\mathbf{Z}}$. On déduit également de cette proposition que la dimension différentiable de $\mathbf{T}_H$ est égale à 1, puisque la famille réduite à la projection du revêtement universel est génératrice de la structure différentiable [9] :

$$\dim(\mathbf{T}_H) = 1 \ . \tag{25}$$

Considérons maintenant deux hyperplans irrationnels H et H' ; nous notons de façon similaire à la section précédente :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{HH'}(\mathbf{Z}) &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z}) | MH \subset H'\} \\ \mathcal{A}_{HH'}(\mathbf{Z})^* &= \{M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{Z}) | MH = H'\} \ . \end{aligned} \tag{26}$$

PROPOSITION 3.3. — *Soient H et H' deux hyperplans irrationnels. L'ensemble des composantes connexes de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}_H, \mathbf{T}_{H'})$ est en bijection avec $\mathcal{A}_{HH'}(\mathbf{Z})$; chaque composante est difféomorphe à $\mathbf{T}_{H'}$. Le groupe des composantes connexes de $\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H, \mathbf{T}_{H'})$ est isomorphe à $\mathcal{A}_{HH'}(\mathbf{Z})^*$; chaque composante est isomorphe à $\mathbf{T}_H$. En particulier, les tores irrationnels sont classés, à difféomorphisme près, par les orbites du groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ agissant sur la grassmannienne des hyperplans irrationnels.*

Démonstration. — Considérons une application différentiable f : $\mathbf{T}_H \longrightarrow \mathbf{T}_{H'}$; d'après le théorème de monodromie elle se relève en une application $\tilde{f}$ définie sur le revêtement universel $\widetilde{\mathbf{T}}_H$ de $\mathbf{T}_H$ à valeur dans le revêtement universel $\widetilde{\mathbf{T}}_{H'}$ de $\mathbf{T}_{H'}$. Il existe alors un homomorphisme h de $\pi_1(\mathbf{T}_H)$ dans $\pi_1(\mathbf{T}_{H'})$ tel que :

$$(a, x) \in \pi_1(\mathbf{T}_H) \times \widetilde{\mathbf{T}}_H \Longrightarrow \tilde{f}(a \cdot x) = h(a) \cdot \tilde{f}(x) \ . \tag{27}$$

On a noté multiplicativement l'action du π_1 sur le revêtement. En identifiant les deux revêtements à $\mathbf{R}$ et le π_1 des deux tores irrationnels $\mathbf{T}_H$ et $\mathbf{T}_{H'}$ aux sous-groupes $V_{\mathbf{Z}}$ et $V'_{\mathbf{Z}}$, l'homomorphisme h est représenté par une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, et on a la formule :

$$(r, x) \in \mathbf{Z}^n \times \mathbf{R} \Longrightarrow \tilde{f}(x + w(r)) = \tilde{f}(x) + w'(Mr) \ . \tag{28}$$

Grâce à la densité de $V_{\mathbf{Z}}$ dans $\mathbf{R}$ et à la différentiabilité de $\tilde{f}$ on déduit que $\tilde{f}$ est une fonction affine; par suite il existe deux réels λ et t tels que :

$$\tilde{f}(x) = \lambda x + t \ . \tag{29}$$

En reportant (29) dans (28) on voit que la matrice M et le réel λ sont reliés par la formule suivante :

$$w'M = \lambda w \tag{30}$$

ce qui revient à dire que $MH \subset H'$. Réciproquement toute application affine $\tilde{f} : x \longmapsto \lambda x + t$ où λ vérifie l'équation (30) pour une matrice

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ se projette en une application $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}_H, \mathbf{T}_{H'})$. Puisque H est irrationnel, l'application :

$$\chi : M \longmapsto \lambda \tag{31}$$

ainsi définie est injective par le même raisonnement que dans la proposition 2.3. On vérifie immédiatement que deux applications $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ associées aux valeurs (λ, t) et (λ', t') se projettent sur la même application $f : \mathbf{T}_H \longrightarrow \mathbf{T}_{H'}$ si et seulement si $\lambda = \lambda'$ et si t et t' se projettent sur le même élément de $\mathbf{T}_{H'}$. On en déduit que :

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}_H, \mathbf{T}_{H'}) \simeq \mathcal{A}_{HH'}(\mathbf{Z}) \times \mathbf{T}_{H'}\ . \tag{32}$$

On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbf{T}_{H'} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}_H, \mathbf{T}_{H'}) \longrightarrow \mathcal{A}_{HH'}(\mathbf{Z}) \longrightarrow 0\ . \tag{33}$$

Enfin puisque $\mathcal{A}_{HH'}(\mathbf{Z})$ est une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, qui est évidemment discret, c'est encore un espace différentiable discret : il s'identifie à l'espace des composantes connexes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}_H, \mathbf{T}_{H'})$. Supposons enfin que f soit un difféomorphisme. La matrice M qui représente ce difféomorphisme au niveau des groupes d'homotopie est alors un isomorphisme et $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$. On a :

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)) \simeq \mathcal{A}_H(\mathbf{Z})^*\ . \tag{34}$$

La suite exacte (33) devient :

$$0 \leq \mathbf{T}_H \longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H) \longrightarrow \mathcal{A}_H(\mathbf{Z})^*\ . \tag{35}$$

Dans ce cas le groupe $\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)$ est une extension du groupe connexe $\mathbf{T}_H$ par le groupe discret $\mathcal{A}_H(\mathbf{Z})^*$. □

La composante connexe de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}_H, \mathbf{T}_{H'})$ associé à l'endomorphisme nul est constituée des applications constantes.

Soit $\mathbf{K}$ le corps caractéristique de H défini dans le paragraphe 2.

THÉORÈME 3.4. — *Le groupe des composantes connexes de* $\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)$, *groupe des difféomorphismes du tore irrationnel* $\mathbf{T}_H$, *est isomorphe au groupe des unités d'un ordre* $\mathcal{O}_H$ *du corps caractéristique* K *de* H, *et on a :*

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)) \simeq \mathcal{O}_H^\times\ . \tag{36}$$

Par conséquent :

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^{r_1+r_2-1} \tag{37}$$

où r_1 (resp. r_2) désignent le nombre de plongements réels (resp. complexes) de $\mathbf{K}$. *Chaque composante est difféomorphe au tore* $\mathbf{T}_H$.

Démonstration. — Ceci est une conséquence du théorème 2.7 et de la proposition précédente 3.3, grâce à l'isomorphisme (34). □

Exemple 3.5. — Considérons le cas $n = 2$; on a $V = \mathbf{Q} + \alpha\mathbf{Q}$, avec $w = (1, \alpha)$. Ou bien α est quadratique auquel cas $K = V$ sinon $K = \mathbf{Q}$. Dans le premier cas, le polynôme caractéristique de K, de degré deux, possède deux racines réelles, donc $r_1 = 2$ et $r_2 = 0$, le groupe des composantes de $\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)$ est alors isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}$. Dans le second cas, on a $r_1 = 1$ et $r_2 = 0$, le groupe en question est réduit à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Ce résultat avait été trouvé par une méthode directe utilisant la décomposition en fraction continue des irrationnels [5].

Remarque 3.6. — Comme nous l'avons dit, le degré d de K divise n; si n est un nombre premier, alors ou bien K est un corps de degré n et $K = V$, ou bien K est réduit à $\mathbf{Q}$. Pour $n = 2$, c'est l'alternative de l'exemple précédent.

Exemple 3.7. — Considérons le cas $n = 4$, c'est-à-dire $\mathbf{T}_H = \mathbf{T}^4/H$, le degré d du corps caractéristique K de H peut valoir 1, c'est le cas trivial, mais aussi 2 ou bien encore 4. Le cas $d = 2$ est illustré par l'exemple 2.5 $w = (1, \sqrt{2}, \varpi, \varpi\sqrt{2})$, on a $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ et $V = w(\mathbf{Q}^4)$ est de dimension 2 sur $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Dans le troisième cas, il existe un nombre algébrique θ, de degré 4, tel que $K = \mathbf{Q}(\theta)$. Le polynôme caractéristique de θ a au moins une racine réelle (par hypothèse) donc ou bien $r_1 = 2$ et $r_2 = 1$, auquel cas $\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^2$; ou bien $r_1 = 4$ et $r_2 = 0$ (puisque $4 = r_1 + 2r_2$), auquel cas $\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^3$.

Exemple 3.8. — Considérons le cas $n = 3$, c'est-à-dire $\mathbf{T}_H = \mathbf{T}^3/H$; s'il n'est pas trivial le corps caractéristique est nécessairement de degré 3. Mais dans ce cas deux situations peuvent se produire : le polynôme caractéristique de $\mathbf{K}$ peut avoir une seule racine réelle, auquel cas

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}\ , \tag{38}$$

ou bien il a trois racines réelles et alors

$$\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)) \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^2\ . \tag{39}$$

La première situation est illustrée par l'hyperplan H de covecteur directeur :

$$w = (1 \ \ \rho \ \ \rho^2) \quad \text{avec} \quad \rho = \sqrt[3]{2}\ , \tag{40}$$

ici $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ et le polynôme caractéristique de ρ est :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\ , \tag{41}$$

l'ordre $\mathcal{O}_H$ est l'anneau des entiers algébriques de K et le groupe des unités $\mathcal{O}_H^\times$ de K est engendré par :

$$\chi(M) = \sqrt[3]{2} - 1 \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

La deuxième situation est illustrée par l'hyperplan H de covecteur directeur :

$$w = (1 \quad \rho \quad \rho^2) \quad \text{avec} \quad \rho = 2\cos(\frac{2\pi}{9}) \tag{43}$$

le corps caractéristique K de H est alors $\mathbf{Q}(2\cos(\frac{2\pi}{9}))$; le polynôme caractéristique de ρ est :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 1\ . \tag{44}$$

L'ordre $\mathcal{O}_H$ est l'anneau des entiers algébriques de K et le groupe des unités $\mathcal{O}_H^\times$ de K est engendré par :

$$\chi(M) = \rho = 2\cos(\frac{2\pi}{9}) \quad \text{et} \quad \chi(M') = \frac{1}{1-\rho} = 2 - \rho - \rho^2 \tag{45}$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Ces exemples illustrent clairement la différence qualitative entre ces feuilletages “algébriques” mis en évidence par l'étude du $\pi_0(\mathrm{Diff}(\cdot))$ de l'espace des feuilles.

Remarque 3.9. — Considérons une variété feuilletée $(X, \mathcal{F})$ où X est une variété, support du feuilletage, et où $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ une certaine partition de X [3]; un morphisme (application feuilletée) de $(X, \mathcal{F})$ vers une autre variété feuilletée $(X', \mathcal{F}')$ est une application différentiable f de X vers X' telle que $f(a) \subset b \in \mathcal{F}'$ pour tout $a \in \mathcal{F}$. Il existe une foncteur naturel de la catégorie des variétés feuilletées vers la catégorie des espaces différentiables qui associe, à tout objet $(X, \mathcal{F})$, l'espace différentiable quotient $Q = X/\mathcal{F}$, et à tout morphisme $f : (X, \mathcal{F}) \to (X', \mathcal{F}')$ la projection $\tilde{f} : Q \to Q'$. Par image réciproque, chaque invariant de la catégorie des espaces différentiables est associé à un invariant de la catégorie des feuilletages, et donc la structure différentiable est *a priori* plus faible. Mais il existe des invariants de la structure quotient qui sont aussi des invariants du feuilletage : c'est notamment le cas du groupe des composantes de $\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)$. Il y a un homomorphisme naturel $p : \mathrm{Aut}(X, \mathcal{F}) \to \mathrm{Diff}(Q)$. L'image de cet homomorphisme est un invariant du feuilletage, en particulier le groupe de ses composantes connexes. Si le co-noyau est nul, par exemple lorsque X est le revêtement universel de Q, le groupe des composantes de $\mathrm{Diff}(Q)$ est un invariant du feuilletage, c'est ce qui se passe pour le feuilletage $\mathbf{R} \to \mathbf{T}_H$. Dans ce cas particulier $\pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H))$ est aussi un invariant du feuilletage $\mathbf{T}^n \to \mathbf{T}_H$: on peut montrer en effet que la projection $\mathbf{T}^n \to \mathbf{T}_H$, qui est une fibration micro-triviale au sens des espaces différentiables, est associée au sens de l'association des fibrés au revêtement $\mathbf{R} \to \mathbf{T}_H$, et que tout automorphisme du revêtement induit un automorphisme du feuilletage.

Remarque 3.10. — Considérons le "pseudo-tore" $\mathbf{U} = \mathbf{R}/\mathbf{Q}$, c'est aussi le quotient du tore $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ par le sous-groupe $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ isomorphe au sous-groupe des racines de l'unité, il est muni de la structure d'espace différentiable quotient correspondante. Soit H un hyperplan irrationnel, il s'induit dans $\mathbf{U}^n$ par restriction de la projection $\mathbf{R}^n \to \mathbf{U}^n$. Le quotient $\mathbf{U}_H = \mathbf{U}^n/H$, est encore un espace différentiable de dimension 1, difféomorphe au quotient de $\mathbf{R}$ par $V = w(\mathbf{Q}^n)$. Le revêtement universel de $\mathbf{U}_H$ est donc $\mathbf{R}$ et son premier groupe d'homotopie est :

$$\pi_1(\mathbf{U}_H) \simeq w(\mathbf{Q}^n) \ . \tag{47}$$

On peut vérifier ensuite que l'ensemble des composantes connexes de l'espace des applications différentiables $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{U}_H)$ est isomorphe à l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Q})$ tels que $MH \subset H$, c'est-à-dire au corps caractéristique K de H; le groupe des composantes de $\mathrm{Diff}(\mathbf{U}_H)$ est isomorphe au groupe $K^\times$ des éléments inversibles de K. Le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_H^\times & \longrightarrow & \mathcal{O}_H \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^\times & \longrightarrow & K \end{array} \tag{48}$$

devient dans sa version géométrique :

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{T}_H)) & \longrightarrow & \pi_0(\mathcal{C}^\infty(\mathbf{T}_H)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_0(\mathrm{Diff}(\mathbf{U}_H)) & \longrightarrow & \pi_0(\mathcal{C}^\infty(\mathbf{U}_H)) \end{array} . \tag{49}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Z.I. BOREVITCH et I.R. CHAFAREVITCH, Théorie des nombres, Monographies Internationales de mathématiques Modernes, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[2] N. BOURKAKI, Algèbre, Eléments de mathématiques, Masson, Paris, 1981.

[3] N. BOURBAKI, Variétés différentielles et analytiques, Eléments de mathématiques, Diffusion CCLS, Paris, 1982.

[4] K.T. CHEN, Iterated path integral, Bull. of Am. Math. Soc., 83(5) (1977), 831–879.

[5] P. DONATO et P. IGLESIAS, Cohomologie des formes dans les espaces difféologiques, Prétirage CPT87/P.86, CPT-CNRS, Luminy, F–Marseille, 1986.

[6] E. GHYS, Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un, Comment. Math. Helvetici, 58 (1983), 543–572.

[7] P. IGLESIAS, Fibrés difféologiques et homotopie, Thèse de doctorat d'état, Université de Provence, F–Marseille, 1985.

[8] P. IGLESIAS, Difféologie d'espace singulier et petits diviseurs, C.R. Acad. Sc., 302 (1986), 519–522.

[9] P. IGLESIAS, Introduction à la géométrie des espaces différentiables, Prétirage CPT-88/P.2451, CPT-CNRS, Luminy, F–Marseille, 1987.

[10] J. PRADINES, Variétés d'orbites, Publication du département de mathématiques, 2, Université Claude Bernard, F–Lyon, 1987.

[11] J.M. SOURIAU, Groupes différentiels, Lecture notes in mathematics, 836 (1981), 91–128.

Manuscrit reçu le 14 avril 1990.

P. IGLESIAS,
Centre de Physique Théorique
C.N.R.S. Luminy Case 907
F–13288 Marseille Cedex 9 (France)

&

G. LACHAUD,
Equipe "Arithmétique et Théorie de l'Information"
C.I.R.M. Luminy Case 916
F–13288 Marseille Cedex 9 (France).