Ann. Inst. Fourier, Grenoble
12 (1962), 293-298.

CAPACITABILITÉ DES ENSEMBLES SOUSLINIENS EN THEORIE DU POTENTIEL

par **B. FUGLEDE** (Copenhague).

Dans un travail récent M. Choquet [4] a défini et étudié la notion de *capacité abstraite* sur un ensemble E par rapport à un ensemble $\mathcal{H}$ de parties de E, stable par réunion finie et intersection dénombrable, et tel que $\emptyset \in \mathcal{H}$. Pour une telle capacité, tout ensemble $\mathcal{H}$-souslinien (en particulier tout ensemble $\mathcal{H}$-borélien) est capacitable. Ce théorème de Choquet s'applique en théorie du potentiel. Nous allons indiquer ici une telle application.

Soit E un espace localement compact et parfaitement normal [1]. Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées et par $\mathcal{G}$ l'ensemble des parties ouvertes de E. Grâce à l'hypothèse $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\sigma$ (ou, ce qui revient au même $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}_\delta$), les diverses définitions classiques de la notion de sous-ensemble borélien de E sont identiques. En particulier, il y a identité entre la notion d'ensemble $\mathcal{F}$-borélien et celle d'ensemble $\mathcal{G}$-borélien; nous les appelons ensembles *boréliens*. Nous référons à Choquet [3] pour la définition d'ensemble *souslinien* (i.e. $\mathcal{F}$-souslinien).

Considérons maintenant un noyau positif $k = k(x, y) \geqq 0$ sur E, i.e., une application semi-continue inférieurement de

[1] Un espace topologique est appelé *parfaitement normal* s'il est normal et si tout ensemble ouvert peut se représenter comme réunion dénombrable d'ensembles fermés; voir Bourbaki [1, § 4, exerc. 7]. La notion d'espace parfaitement normal est une extension propre de la notion d'espace métrisable, même au cas d'un espace compact; voir Bourbaki [1, § 2, exerc. 13].

$E \times E$ dans $\overline{R}_+ = [0, +\infty]$. Nous supposons qu'il s'agit d'un noyau *consistant* au sens de [5, p. 167]. Un noyau $k \geqq 0$ est dit consistant s'il satisfait aux conditions suivantes :

1) k est symétrique : $k(x, y) = k(y, x)$.

2) k est de type positif. Cela signifie que l'intégrale d'énergie

$$||\mu||^2 = \int_E \int_E k(x, y)\, d\mu(x) d\mu(y)$$

est $\geqq 0$ pour toute mesure de Radon réelle μ sur E telle que l'intégrale double est bien définie.

3) Si un filtre de Cauchy pour la structure uniforme *forte* (2) sur l'espace $\mathcal{E}$ des mesures *positives* d'énergie finie converge *vaguement* (3) vers une mesure $\mu_0 \in \mathcal{E}$, alors ce filtre converge fortement vers μ_0.

Ayant donné un noyau k de type positif, on définit la *capacité* $\gamma(K)$ d'un ensemble compact $K \subset E$ par

$$\gamma(K) = \sup_\mu \left(2\int d\mu - ||\mu||^2\right),$$

ou μ parcourt l'ensemble des mesures positives d'énergie finie portées par K. Il est bien connu que γ est une capacité au sens de Choquet [2], définie sur l'ensemble des parties compactes de E. Puis la capacité intérieure $\gamma_*(A)$ et la capacité extérieure $\gamma^*(A)$ d'un ensemble quelconque $A \subset E$ se définissent par

$$\gamma_*(A) = \sup_{K \subset A} \gamma(K), \qquad \gamma^*(A) = \inf_{G \supset A} \gamma_*(G),$$

où K et G désignent des ensembles respectivement compacts et ouverts.

Définition. On dit qu'un ensemble $A \subset E$ est *σ-fini* s'il existe une suite d'ensembles $X_n \subset E$ tels que $\gamma^*(X_n) < +\infty$ et $A \subset \bigcup X_n$. D'après la définition de γ^*, on peut supposer que les

(2) La structure uniforme *forte* sur $\mathcal{E}$ est définie par l'écart $(\mu, \nu) \to ||\mu - \nu||$ déduit de l'intégrale d'énergie ci-dessus. Pour que la topologie forte soit séparée, il faut et il suffit que le noyau k satisfasse au principe d'énergie.

(3) La structure uniforme *vague* sur $\mathcal{E}$ est définie par l'ensemble des écarts

$$(\mu, \nu) \to \left|\int f d\mu - \int f d\nu\right|,$$

où f parcourt l'espace des fonctions continues sur E à valeurs réelles et à support compact dans E. La topologie vague est séparée.

X_n sont ouverts. En vertu de l'hypothèse $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_\sigma$ on peut prendre pour X_n également des ensembles fermés (de capacité extérieure finie), autrement dit des éléments de l'ensemble $\mathcal{H}$ défini ci-dessous.

THÉORÈME [4]. — *Soit $k = k(x, y) \geq 0$ un noyau consistant sur un espace localement compact et parfaitement normal* E. *Tout ensemble souslinien et σ-fini* $A \subset E$ *est capacitable pour la capacité γ définie ci-dessus*: $\gamma_*(A) = \gamma^*(A)$.

Démonstration. — Désignons par $\mathcal{H}$ l'ensemble des parties *fermées* $H \subset E$ telles que $\gamma^*(H) < +\infty$. Sous les hypothèses du théorème, les résultats suivants ont été obtenus dans un travail antérieur [5, lemme 4.2.2, lemme 4.2.1 et théorème 4.4] :

a) Tout ensemble $H \in \mathcal{H}$ est γ-capacitable.

b) Pour toute suite *décroissante* (H_n) d'éléments de $\mathcal{H}$, on a

$$\gamma^*(\bigcap H_n) = \lim \gamma^*(H_n).$$

c) Pour toute suite *croissante* (X_n) de parties de E, on a

$$\gamma^*(\bigcup X_n) = \lim \gamma^*(X_n).$$

En vertu de *b*) et *c*), la fonction croissante d'ensemble $f = \gamma^*$ est une *capacité abstraite* sur $(E, \mathcal{H})$ au sens de Choquet [4, définition 1]. Grâce à *a*), tout ensemble $(f, \mathcal{H})$-capacitable est γ-capacitable [5]. D'après le théorème de Choquet [4, théorème 1] rappelé au début de la note présente, tout ensemble $\mathcal{H}$-souslinien est $(f, \mathcal{H})$-capacitable et par suite γ-capacitable. Il nous reste seulement à observer qu'il y a identité entre la notion d'ensemble $\mathcal{H}$-souslinien et celle d'ensemble souslinien

(4) Pour les ensembles *boréliens* σ-finis, ce théorème a été énoncé dans un travail antérieur [5, théorème 4.5]. La démonstration actuelle est plus directe que la démonstration originelle (non publiée) de l'auteur.

(5) Pour tout $A \subset E$, on définit $f_*(A) = \sup f(H)$, ou H parcourt l'ensemble des parties de A appartenant à $\mathcal{H}$. Comme

$$f(H) = \gamma^*(H) = \gamma_*(H) \leq \gamma_*(A),$$

on a toujours

$$f_*(A) \leq \gamma_*(A).$$

Si A est $(f, \mathcal{H})$-capacitable, on obtient

$$\gamma^*(A) = f(A) = f_*(A) \leq \gamma_*(A),$$

d'où $\gamma^*(A) = \gamma_*(A)$, i.e. A est γ-capacitable. Voir aussi la remarque à la fin du travail.

(i.e. $\mathcal{F}$-souslinien) et σ-fini. Cela découle du lemme élémentaire suivant.

LEMME. — *Soit* E *un ensemble et* $\mathcal{F}$ *une partie de* $\mathfrak{P}(E)$, *stable par intersection dénombrable. Soit* $\mathcal{H}$ *une partie héréditaire de* $\mathcal{F}$. *Alors il y a identité entre la notion d'ensemble* $\mathcal{H}$-*souslinien et la notion d'ensemble* $\mathcal{F}$-*souslinien contenu dans la réunion d'une suite d'éléments de* $\mathcal{H}$.

Nous référons à Choquet [3] pour la terminologie et les notations employées dans la démonstration de ce lemme. Soit d'abord $A \subset E$ un ensemble $\mathcal{H}$-souslinien, et soit (H_s) un système déterminant sur $\mathcal{H}$ (a fortiori sur $\mathcal{F}$) de noyau A. On a, en particulier, $A \subset \bigcup H_n$. D'autre part, soit A un ensemble $\mathcal{F}$-souslinien contenu dans la réunion d'une suite d'éléments $H_n \in \mathcal{H}$. Comme $A = \bigcup (A \cap H_n)$, il suffit de montrer que $A \cap H$ est $\mathcal{H}$-souslinien si A est $\mathcal{F}$-souslinien et $H \in \mathcal{H}$. Moyennant un système déterminant (F_s) sur $\mathcal{F}$, A se représente comme

$$A = \bigcup_{\sigma} F_{\sigma}, \qquad F_{\sigma} = \bigcap_{s} F_{s},$$

donc

$$A \cap H = \bigcup_{\sigma} (F_{\sigma} \cap H), \qquad F_{\sigma} \cap H = \bigcap_{s} (F_{s} \cap H).$$

Comme $F_s \in \mathcal{F}$, $H \in \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$, et $\mathcal{F}$ est supposé multiplicatif, on obtient $F_s \cap H \in \mathcal{F}$. Vu que $\mathcal{H}$ est supposé héréditaire dans $\mathcal{F}$, il résulte que $F_s \cap H \in \mathcal{H}$. Évidemment, l'application

$$s \rightarrow H_s = F_s \cap H$$

est un système déterminant sur $\mathcal{H}$; et $A \cap H$ est le noyau de ce système, donc un ensemble $\mathcal{H}$-souslinien.

Remarque. Revenons dans le cadre du théorème ci-dessus. En ce qui concerne la relation entre la capacité γ et la capacité abstraite $f = \gamma^*$ par rapport à l'ensemble $\mathcal{H}$ des parties fermées H de E telles que $\gamma^*(H) < +\infty$, nous avons vu ([5]) sous les hypothèses du théorème que $f_*(A) \leq \gamma_*(A)$ pour tout $A \subset E$. Si $k(x, x) > 0$ pour tout $x \in E$, on a $\gamma(K) < +\infty$ ([6]) pour

([6]) Voir [5, § 2.1].

tout compact $K \subset E$, et par suite

$$f_*(A) = \gamma_*(A) \qquad \text{pour tout} \qquad A \subset E.$$

En fait, l'inégalité $\gamma_*(A) \leqq f_*(A)$ découle de la relation suivante pour un compact $K \subset A$:

$$\gamma(K) = \gamma^*(K) = f(K) \leqq f_*(A),$$

valable puisque $K \in \mathcal{H}$ par l'hypothèse additionnelle. L'identité $f_* = \gamma_*$ signifie que $(f, \mathcal{H})$-capacitabilité équivaut à γ-capacitabilité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki. *Utilisation des nombres réels en topologie générale*, Paris, Hermann, 1958.

[2] G. Choquet. Theory of Capacities, *Annales Institut Fourier*, V (1953-54), pp. 131-295.

[3] G. Choquet. Ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens. Cas général et cas métrique, *Annales Institut Fourier*, IX (1959), pp. 75-81.

[4] G. Choquet. Forme abstraite du théorème de capacitabilité, *Annales Institut Fourier*, IX (1959), pp. 83-89.

[5] B. Fuglede. On the Theory of Potentials in Locally Compact Spaces, *Acta Mathematica*, 103 (1960), pp. 139-215.