

GUY WALLET

**Surstabilité pour une équation différentielle
analytique en dimension un**

Annales de l'institut Fourier, tome 40, n° 3 (1990), p. 557-595

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_3_557_0

© Annales de l'institut Fourier, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SURSTABILITÉ POUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ANALYTIQUE EN DIMENSION UN

par Guy WALLET

1. Introduction.

1.1. Lorsque l'état stationnaire d'un système différentiel perd sa stabilité de manière dynamique, un phénomène de retard à la bifurcation peut se produire ([13], [15], [16], [18], [19], [22]). Les solutions du système pour lesquelles la bifurcation est retardée sont en fait des exemples des solutions remarquables des champs de vecteurs lents-rapides que l'on appelle les canards ([4], [8], [11], [14], [21], [23]). La théorie des canards, ou cette interprétation récente en terme de retard à la bifurcation, présente deux types de phénomènes relativement différents quant à leur durée de vie dans l'espace d'un paramètre de contrôle. D'une part, les canards « fugaces » des systèmes planaires réels qui n'existent dans les familles à un paramètre que pour des plages très étroites de valeurs du paramètre. Un exemple trivial de cette situation est donné par l'équation différentielle suivante C_a sur \mathbb{R} , où ε est un petit paramètre strictement positif :

$$(1) \quad \varepsilon \frac{d\xi}{dt} = t\xi + \varepsilon a$$

qui ne possède des canards que pour des valeurs de a exponentiellement petites relativement à ε . D'autre part, les canards « robustes » qui apparaissent dans les systèmes analytiques à dynamique rapide oscillante. Voici un

Mots-clés : Asymptotique - Canard - Non standard - Perturbation - singulière - Somme.

Classification A.M.S. : 26E55 - 34A20 - 34D15 - 34E15.

exemple simple d'une telle équation différentielle dans \mathbb{C} , avec toujours ε pour petit paramètre strictement positif :

$$(2) \quad \varepsilon \frac{dz}{dt} = (t + i)z + \varepsilon a.$$

Pour ce dernier système, des canards existent pour toute valeur de a limitée.

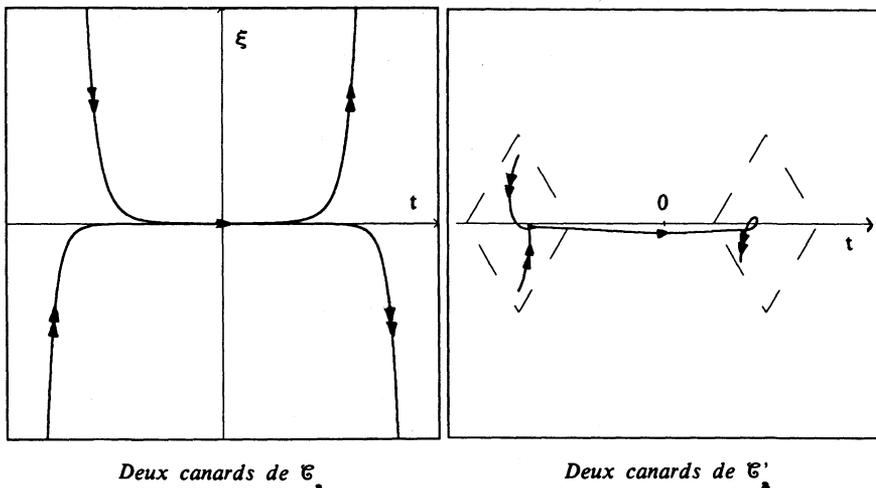


Figure 1

Les méthodes d'étude sont elles-mêmes radicalement différentes, puisque la «chasse aux canards fugaces» se fait à l'aide d'arguments topologiques, alors que la «chasse aux canards robustes» est le fruit de l'analyse asymptotique.

Le premier objectif de ce travail est de jeter un pont entre ces deux aspects en abordant le domaine des canards «fugaces» avec l'aide des outils de l'analyse habituellement réservés au domaine des canards «robustes». Il est ainsi apporté une explication nouvelle à cette étrange fugacité au moyen de résultats généraux, valables en partie pour les systèmes complexes et pour les système dynamiques discrets, avec la restriction cependant que les objets étudiés soient analytiques. Un bénéfice inattendu de cette nouvelle approche est la découverte d'une classe de solutions remarquables des systèmes étudiés qui est distincte de la classe des canards bien qu'en rapport étroit avec cette dernière. Les éléments de cette nouvelle classe sont appelés solutions surstables. Il est probable que les théories des séries divergentes actuellement développées ([5], [6], [7], [12], [17]) pourront un jour apporter

le même type d'explication. Mais c'est aussi un but de cet article que de dégager une méthode dont l'idée directrice est simple et naturelle. Il s'agit d'une généralisation de techniques utilisées par A.I. Neishtadt [18] qui reposent sur des estimations asymptotiques liées à l'analyticité. Enfin, cette approche est peut-être une nouvelle piste dans l'étude des très nombreux cas où, pour le moment, l'existence même des canards est problématique, que l'on pense par exemple aux systèmes lents-rapides à surface lente étudiés par E. Benoit ([1], [2]).

1.2. Ce travail se distingue cependant de celui de Neishtadt par le fait que l'on se restreint au cas des systèmes planaires. Ce choix permet dans un premier temps de mieux dégager les principes de la méthode; il est clair que cette dernière possède des généralisations en dimension supérieure. Une autre différence importante avec l'approche de Neishtadt consiste en l'utilisation systématique de l'analyse non standard. Il ne s'agit pas d'un simple retour aux sources de la découverte originale des canards, mais du choix raisonné pour le langage qui me semble le plus adapté à l'étude asymptotique d'un problème à petit paramètre. L'outil non standard offre dans ce type de problème un gain incontestable de concision et de simplicité qui n'est absolument pas incompatible avec l'utilisation de l'analyse fine «classique». De plus, le concept de problème à petit paramètre tel qu'il se dégage de la mécanique ou de la physique n'est pas en général un problème de passage à la limite, et en ce sens là, l'analyse non standard fournit un modèle mathématique plus fidèle. Enfin, il est relativement facile de déduire des résultats non standard de «traductions» en terme d'analyse classique.

2. Petit lexique d'asymptotique non standard.

Le cadre choisi est celui de la théorie I.S.T. de E. Nelson ([10], [20]), qui se traduit par l'utilisation du terme «standard» pour qualifier les objets habituels (par exemple les données d'un problème de nature asymptotique), et qui permet l'usage rigoureux des infinitésimaux. *Dans tout cet article, \mathbb{K} désigne l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} ou l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .* Il est commode d'introduire les notions et notations suivantes dans les relations asymptotiques (n et m représentent des nombres entiers standard positifs et ε un élément de \mathbb{K} infiniment petit non nul) :

2.1. le symbole \emptyset représente un nombre réel positif infiniment petit non spécifié.

2.2. On dit que des éléments x et y de \mathbf{K}^n sont *infiniment proches* et on note $x \simeq y$ lorsque $\|x - y\| = \emptyset$.

2.3. Etant donné des nombres réels x et y , la notation $x \ll y$ signifie que $x < y$ et que x et y ne sont pas infiniment proches.

2.4. Le symbole \mathcal{L} représente un nombre positif limité (c'est-à-dire non infiniment grand) non spécifié.

2.5. Etant donné α dans \mathbf{K} , x et y de \mathbf{K}^n , on dit que x est dans la α -galaxie de y lorsque $\|x - y\| = |\alpha|\mathcal{L}$.

2.6. Etant donné une fonction f à valeurs dans \mathbf{K}^n , on dit que f est *exponentiellement petite relativement à ε* lorsqu'il existe un nombre réel c strictement positif et non infiniment petit tel que, pour tout x dans le domaine de définition de f , on ait :

$$\|f(x)\| \leq \exp\left(-\frac{c}{|\varepsilon|}\right).$$

2.7. Etant donné un élément x de \mathbf{K}^n , l'*ombre* de x si elle existe est l'unique élément standard 0x de \mathbf{K}^n tel que $x \simeq {}^0x$. En fait, un tel x admet une ombre si et seulement s'il est limité. Dans un ouvert standard Ω de \mathbf{K}^n , les points qui n'admettent pas d'ombre dans Ω sont les points à l'infini de Ω .

2.8. Etant donné un ouvert standard Ω de \mathbf{K}^n et une application de Ω dans \mathbf{K}^m , l'*ombre* de f si elle existe est l'unique application standard 0f de Ω dans \mathbf{K}^m telle que $f(x) \simeq {}^0f(x)$ pour tout x dans Ω qui admet une ombre dans Ω . Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et que f est analytique, il résulte de la formule de Cauchy que 0f est aussi analytique.

2.9. Un élément a de \mathbf{K}^n est dit *développable en ε -ombre* lorsqu'il existe une suite standard (a_i) dans \mathbf{K}^n telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ standard :

$$\left\| a - \sum_{i=0}^k \varepsilon^i a_i \right\| = |\varepsilon|^k \emptyset.$$

On note cette propriété $a \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i a_i$ et on remarque que lorsqu'elle est vérifiée, a possède alors une ombre 0a qui coïncide avec a_0 . Si φ est une fonction C^∞ standard définie sur un voisinage de 0 dans \mathbf{K} et à valeurs dans \mathbf{K}^n , le nombre $b = \varphi(\varepsilon)$ est développable en ε -ombre de développement :

$$b \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}.$$

2.10. Etant donné un ouvert standard Ω de \mathbf{K}^n et une application f de Ω dans \mathbf{K}^m , on dit que f est *développable en ε -ombre* s'il existe une suite standard (f_i) d'applications de Ω dans \mathbf{K}^n telle que, pour tout $x \in \Omega$ admettant une ombre dans Ω et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\| f(x) - \sum_{i=0}^k \varepsilon^i f_i(x) \right\| = |\varepsilon|^k \emptyset.$$

On note cette propriété :

$$f \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i$$

et on remarque que lorsqu'elle est vérifiée, f possède alors une ombre 0f qui coïncide avec f_0 . Dans tout cet article, pour toute fonction f développable en ε -ombre, la notation f_k désigne le terme d'ordre k de la suite f_i nécessairement unique telle que $f \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i$. Lorsque f est analytique et que $\mathbf{K} = \mathbb{C}$, les fonctions f_i sont elles-mêmes analytiques. Enfin, si $f(x) = g(x, \varepsilon)$ avec g de classe C^∞ et standard, alors f est développable en ε -ombre de développement :

$$f \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^i}{i!} \frac{\partial^i g}{\partial \varepsilon^i} (\cdot, 0).$$

Cependant, l'analyse asymptotique fournit de nombreux exemples d'applications développables en ε -ombres pour lesquelles la dépendance vis-à-vis du petit paramètre ε est moins régulière. Un bon exemple est donné par la fonction obtenue par sommation au plus petit terme d'une série entière divergente.

2.11. Sous les hypothèses de (2.10), on dit que f est *régulièrement développable en ε -ombre* lorsque f est de classe C^∞ et que pour chaque

$k \in \mathbb{N}$ standard, $d^{(k)}f$ est elle-même développable en ε -ombre. Alors, l'opérateur de différentiation $d^{(k)}$ commute avec le symbole \sim :

$$f \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i \Rightarrow d^{(k)}(f) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i d^{(k)}(f_i).$$

Il résulte des inégalités de Cauchy que, si f est une fonction analytique développable en ε -ombre sur une boule $B(a, R)$ dans \mathbb{C}^n avec $R \gg 0$, alors f est régulièrement développable en ε -ombre dans toute boule $B(a, r)$ telle que $0 \ll r \ll R$.

3. Canards, faux-canards et solutions surstables.

3.1. Dans tout cet article, on considère une famille d'équations différentielles (\mathcal{E}_α)

$$(3) \quad \varepsilon \frac{d\xi}{d\mu} = f(\xi, \mu, \alpha)$$

où ε est un élément de \mathbb{K} infiniment petit et non nul fixé une fois pour toute et f une application analytique, développable en ε -ombre, définie sur un voisinage ouvert standard d'un point standard (ξ_0, μ_0, α_0) dans \mathbb{K}^3 . On se donne aussi une fonction φ analytique standard à valeurs dans \mathbb{K} et définie sur un voisinage ouvert J de μ_0 dans \mathbb{K} . On suppose que φ et l'ombre f_0 de f vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(\mu_0) &= \xi_0 \\ \forall \mu \in J \quad f_0(\varphi(\mu), \mu, \alpha_0) &= 0 \\ \frac{\partial f_0}{\partial \xi}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0) \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0) + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi \partial \mu}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0) &\neq 0. \end{aligned}$$

Pour tout standard $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, la variété lente de (\mathcal{E}_α) pour $\alpha \simeq \alpha_1$ est l'ensemble analytique

$$\mathcal{C}_{\alpha_1} = \{(\xi, \mu) \in \mathbb{C}^2 / f_0(\xi, \mu, \alpha_1) = 0\}.$$

D'après les hypothèses précédentes, la variété lente pour $\alpha \simeq \alpha_0$ est donc singulière en (ξ_0, μ_0) , mais elle est localement la réunion de deux

branches régulières qui se coupent transversalement en ce point. L'une de ces branches est l'ensemble

$$(4) \quad \mathcal{B}_\varphi = \{(\xi, \mu) \in \mathbb{C}^2 / \xi = \varphi(\mu)\}.$$

Génériquement, la variété lente \mathcal{C}_α subit, dans le cas réel, une bifurcation lorsque α traverse la valeur α_0 selon la scénario illustré par la figure 2 (la variété lente apparaît où se concentrent les trajectoires).

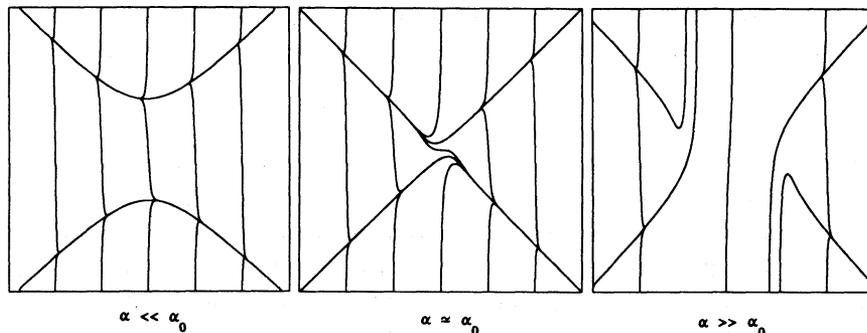


Figure 2

Le problème de perturbation singulière que l'on se pose est d'étudier les solutions de (\mathcal{E}_α) proches de la variété lente, et plus particulièrement les solutions dont l'ombre est la fonction φ . Ce problème est relié à celui du *retard à la bifurcation*. En effet, si on introduit le « temps lent » $m = \mu/\varepsilon$, on obtient une famille d'équations différentielles

$$\frac{d\xi}{dm} = f(\xi, m\varepsilon, \alpha)$$

qui, pour $\alpha \simeq \alpha_0$ et pour $m\varepsilon \simeq \mu$ (avec μ fixé), est une perturbation régulière du champ de vecteurs \mathcal{V}_μ

$$(5) \quad \frac{d\xi}{dm} = f_0(\xi, \mu, \alpha_0).$$

Le point $\xi = \varphi(\mu)$ est un point singulier de \mathcal{V}_μ , et d'après les hypothèses précédentes, le point $\mu = \mu_0$ est une *valeur de bifurcation* pour la stabilité de $\varphi(\mu)$. Puisque la valeur propre de la partie linéaire de \mathcal{V}_μ (c'est-à-dire $\frac{\partial f_0}{\partial \xi}(\varphi(\mu), \mu, \alpha_0)$) s'annule en μ_0 , il s'agit d'une bifurcation non oscillante. C'est cette propriété qui constitue la différence essentielle avec le cas étudié par Neishtadt.

3.2. Remarque. — En général, on s'intéresse à une équation (\mathcal{E}_α) pour laquelle la fonction f du second membre est obtenue à l'aide d'une fonction g standard, analytique, définie au voisinage de $(\xi_0, \mu_0, \alpha_0, 0)$ dans \mathbb{K}^4 de sorte que :

$$f(\xi, \mu, \alpha) = g(\xi, \mu, \alpha, \varepsilon)$$

pour tout (ξ, μ, α) dans le domaine de f . Notre étude pourrait être présentée dans ce contexte simplifié avec donc une dépendance vis-à-vis de ε très régulière, c'est-à-dire analytique. Et dans ce cas, la fonction f_0 qui intervient dans les hypothèses du sous-paragraphe 3.1 est la fonction

$$(\xi, \mu, \alpha) \mapsto g(\xi, \mu, \alpha, 0).$$

Mais il se trouve que, même en partant de cette situation, notre théorie produit des fonctions qui, bien que développables en ε -ombre, peuvent être très irrégulières relativement à ε , par exemple non continues (les théorèmes 5.4.1 et 6.2 illustrent cette possibilité). De plus la démonstration de la propriété « tous les canards sont surstables » repose sur l'utilisation du théorème 5.4.1 dans le cas où cette fonction f est seulement développable en ε -ombre. Ces raisons expliquent le cadre général dans lequel nous nous sommes placés. La classe des objets ε -développables constitue en quelque sorte une clôture naturelle pour notre problème.

3.3. Quelques rappels sur les canards.

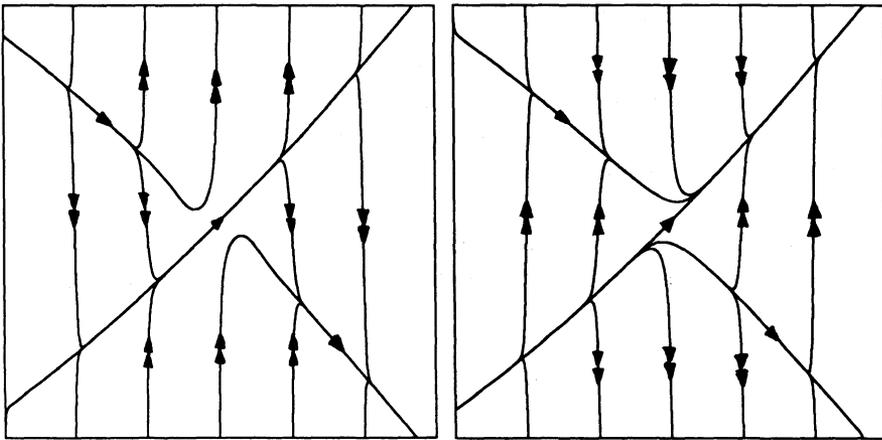
On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que la condition de signe suivante est vérifiée :

$$(6) \quad \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0) \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0) + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi \partial \mu}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0) \right) > 0.$$

Alors, pour μ assez proche mais inférieur à μ_0 , le point singulier $\varphi(\mu)$ du champ de vecteurs \mathcal{V}_μ (3.1 (5)) est attractif, et l'ensemble correspondant des points $(\varphi(\mu), \mu)$ constitue la partie attractive de la branche \mathcal{B}_φ (3.1 (4)). De même, pour μ assez proche mais supérieur à μ_0 , le point singulier de \mathcal{V}_μ est répulsif, et l'ensemble correspondant des points $(\varphi(\mu), \mu)$ constitue la partie répulsive de \mathcal{B}_φ . S'il existe une valeur $\alpha_* \simeq \alpha_0$ et une solution γ_* de \mathcal{E}_{α_*} , définie sur un voisinage standard I de μ_0 de sorte que

$$\forall \mu \in I \quad \gamma_*(\mu) \simeq \varphi(\mu)$$

on dit que α_* est une valeur à canards et que γ_* est un canard de $(\mathcal{E}_\alpha, \varphi)$. On dit aussi que $(\mathcal{E}_\alpha, \varphi)$ présente un retard à la bifurcation pour la valeur



Un canard

Un faux-canard

Figure 3

α_* du paramètre. Ainsi, un canard longe successivement la partie attractive puis la partie répulsive de \mathcal{B}_φ .

Sous des hypothèses de généricité, on démontre ([4],[11]) l'existence de valeurs à canards et de canards. De plus, on a les bonnes propriétés suivantes :

1. valeurs à canards et canards sont développables en ε -ombre;
2. les valeurs à canards sont exponentiellement proches entre elles;
3. les canards sont exponentiellement proches entre eux.

Si on a la condition de signe opposée

$$\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi} (\xi_0, \mu_0, \alpha_0) \frac{d\varphi}{dy} (\mu_0) + \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi \partial \mu} (\xi_0, \mu_0, \alpha_0) \right) < 0$$

il ne peut pas y avoir de canard, au moins le long de la branche \mathcal{B}_φ . S'il existe une valeur $\alpha_\# \simeq \alpha_0$ et une solution $\gamma_\#$ de $\mathcal{E}_{\alpha_\#}$, définie sur un voisinage standard I de μ_0 de sorte que

$$\forall \mu \in I \quad \gamma_\#(\mu) \simeq \varphi(\mu)$$

on dit que $\alpha_\#$ est une valeur à faux-canards et que $\gamma_\#$ est un faux-canard. Ainsi, un faux-canard longe d'abord la partie répulsive de \mathcal{B}_φ et ensuite la partie attractive. Malgré la symétrie des définitions, les faux-canards dans leur ensemble ne possèdent aucune des bonnes propriétés qui fait l'intérêt des canards (voir par exemple les figures 4 et 9).

3.4. Les solutions surstables.

Les conditions de signe qui permettent de distinguer les canards des faux-canards n'ont de sens que pour des équations différentielles avec un petit paramètre réel et un « temps » μ réel. Dans le cas complexe, il est naturel de poser la définition suivante.

3.4.1 DÉFINITION. — *On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. S'il existe une valeur $\alpha_* \simeq \alpha_0$ et une solution Γ_* de \mathcal{E}_{α_*} , définie sur un voisinage standard K de μ_0 dans \mathbb{C} de sorte que*

$$\forall \mu \in K \quad \Gamma_*(\mu) \simeq \varphi(\mu)$$

on dit que α_ est une valeur de surstabilité et que Γ_* est une solution surstable de $(\mathcal{E}_{\alpha_*}, \varphi)$.*

Cette définition, qui semble simplement généraliser dans le cas complexe la propriété asymptotique des canards et des faux-canards, permet en retour de définir une nouvelle famille de solutions dans le cas réel.

3.4.2 DÉFINITION. — *On suppose maintenant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. S'il existe une valeur $\alpha_* \simeq \alpha_0$ et une solution Γ_* de \mathcal{E}_{α_*} définie sur un voisinage standard K de μ_0 dans \mathbb{R} , qui se prolonge dans le domaine complexe en une solution surstable d'un prolongement analytique complexe de $(\mathcal{E}_{\alpha_*}, \varphi)$, on dit que α_* est une valeur de surstabilité et que Γ_* est une solution surstable de $(\mathcal{E}_{\alpha_*}, \varphi)$.*

Ce qui caractérise une solution surstable Γ_* dans le domaine réel est donc l'existence d'un prolongement holomorphe de Γ_* proche d'un prolongement holomorphe de la fonction analytique φ .

3.5. Canards, faux-canards et solutions surstables : première comparaison.

La définition des solutions surstables fait apparaître une différence notoire entre le cas complexe et le cas réel. En particulier, étant donné $\alpha_* \simeq \alpha_0$ et une solution Φ de \mathcal{E}_{α_*} définie sur un voisinage standard W de μ_0 dans \mathbb{R} et vérifiant :

$$\forall y \in W \quad \Phi(y) \simeq \varphi(y)$$

il n'est pas vrai en général que Φ soit une solution surstable.

Pour s'en convaincre, il suffit de considérer la famille (C_a) du (1.1 (1)) mais avec un petit paramètre ε négatif

$$\varepsilon \frac{d\xi}{d\mu} = \mu\xi + \varepsilon a.$$

La branche \mathcal{B}_φ est alors l'axe $O\mu$ avec pour partie attractive l'ensemble $\{\mu > 0\}$ et pour partie répulsive l'ensemble $\{\mu < 0\}$. Pour $a = 0$, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions Φ_λ données par

$$\forall \mu \in \mathbb{R} \quad \Phi_\lambda(\mu) = \lambda \exp\left(\frac{\mu^2}{2\varepsilon}\right).$$

Lorsque $\lambda \simeq 0$, on a

$$\forall \mu \in \mathbb{R} \quad \Phi_\lambda(\mu) \simeq 0.$$

Mais une telle solution n'est surstable que si λ est exponentiellement petit relativement à ε .

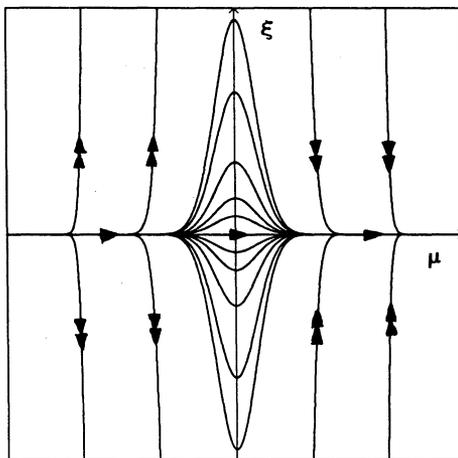


Figure 4

Le choix d'un ε négatif fait que les Φ_λ pour $\lambda \simeq 0$ sont des faux-canards et la figure 4 illustre en partie ce qui a été dit (3.3) sur l'aspect peu intéressant de la classe des faux-canards (la définition des faux-canards n'est pas assez contraignante pour donner l'analogue des bonnes propriétés des canards). Mais parmi les faux-canards, ceux qui sont surstables sont tout-à-fait remarquables; sur l'exemple précédent, il apparaît qu'ils possèdent justement deux des bonnes propriétés déjà citées :

ils sont exponentiellement proches entre eux et possèdent un développement en ε -ombre (le développement nul).

En ce sens, la notion de solution surstable est plus générale que celle de canard puisqu'elle englobe à la fois des canards et des faux-canards. De plus, on démontrera que, dans notre situation, tout canard est une solution surstable.

4. Un premier changement de variable.

4.1. On effectue le changement de variable et de paramètre

$$\begin{cases} z = \xi - \varphi(\mu) \\ \zeta = \mu - \mu_0 \\ a = (\alpha - \alpha_0)/\varepsilon \end{cases}$$

L'équation \mathcal{E}_α se transforme alors en l'équation différentielle \mathcal{S}_a suivante :

$$\varepsilon \frac{dz}{d\zeta} = M(z, \zeta, a) + L(\zeta, a) + P(a)$$

avec

$$M(z, \zeta, a) = f(\varphi(\mu_0 + \zeta), \mu_0 + \zeta, \alpha_0 + \varepsilon a) - f(\varphi(\mu_0 + \zeta), \mu_0 + \zeta, \alpha_0 + \varepsilon a)$$

$$L(\zeta, a) = f(\varphi(\mu_0 + \zeta), \mu_0 + \zeta, \alpha_0 + \varepsilon a) - f(\varphi(\mu_0), \mu_0, \alpha_0 + \varepsilon a) - \varepsilon \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0 + \zeta) + \varepsilon \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0)$$

$$P(a) = f(\varphi(\mu_0), \mu_0, \alpha_0 + \varepsilon a) - \varepsilon \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0).$$

$$\text{Puisque } M(z, \zeta, a) = z \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi}(\varphi(\mu_0 + \zeta) + tz, \mu_0 + \zeta, \alpha_0 + \varepsilon a) dt,$$

il est clair que

$$M(z, \zeta, a; \varepsilon) = z \frac{\partial f_0}{\partial \xi}(\varphi(\mu_0 + \zeta), \mu_0 + \zeta, \alpha_0) + z^2 \widehat{F}(z, \zeta, a) + \varepsilon z \widetilde{F}(z, \zeta, a)$$

avec \widehat{F} analytique standard, \widetilde{F} analytique et régulièrement développable en ε -ombre. De même, il existe une fonction g analytique et développable

en ε -ombre, telle que

$$f(\varphi(\mu), \mu, \alpha_0 + \varepsilon a) = \varepsilon g(\mu, a).$$

Donc il existe une fonction \tilde{L} analytique régulièrement développable en ε -ombre telle que

$$L(\zeta, a) = \varepsilon \zeta \tilde{L}(\zeta, a).$$

Enfin, la fonction P est clairement analytique et régulièrement développable en ε -ombre. Puisque :

$$f(\varphi(\mu_0), \mu_0, \alpha_0 + \varepsilon a) = \varepsilon a \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} (\varphi(\mu_0), \mu_0, \alpha_0 + t\varepsilon a) dt$$

on peut écrire :

$$P(a) = \varepsilon \hat{P}(a)$$

avec \hat{P} analytique et régulièrement développable en ε -ombre. Le terme d'ordre 0 du développement de \hat{P} est :

$$\hat{P}_0(a) = a \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} (x_0, y_0, \alpha_0) + f_1(x_0, y_0, \alpha_0) - \frac{d\varphi}{dy} (y_0).$$

On peut systématiser les propriétés de l'équation obtenue en introduisant la notion suivante.

4.2. DÉFINITION. — Une équation préparée (S_a) est une famille à un paramètre $a \in \mathbf{K}$ d'équations différentielles du type suivant :

$$(7) \quad \varepsilon \frac{dz}{d\zeta} = A(\zeta)z + F(z, \zeta, a) + L(\zeta, a) + P(a)$$

avec : $\varepsilon \in \mathbf{K} - \{0\}$ et $\varepsilon \simeq 0$. De plus, on suppose qu'il existe un standard $a_0 \in \mathbf{K}$ et des nombres réels standard strictement positifs r et ρ tels que :

(i) La fonction A est définie sur le domaine $|\zeta| < r$ et elle s'écrit $A(\zeta) = \zeta \hat{A}(\zeta)$ avec \hat{A} analytique standard telle que $\hat{A}(0)$ soit non nul.

(ii) La fonction F est définie sur le domaine

$$|z| < r, \quad |\zeta| < r, \quad |a - a_0| < \rho$$

et $F(z, \zeta, a) = z^2 \hat{F}(z, \zeta, a) + \varepsilon z \tilde{F}(z, \zeta, a)$ avec \hat{F} analytique standard et \tilde{F} régulièrement développable en ε -ombre.

(iii) La fonction L est définie sur le domaine $|\zeta| < r$, $|a - a_0| < \rho$ avec $L(\zeta, a) = \varepsilon \zeta \tilde{L}(\zeta, a)$ et \tilde{L} est analytique régulièrement développable en ε -ombre.

(iv) La fonction P est définie sur le domaine $|a - a_0| < \rho$ et elle s'écrit $P(a) = \varepsilon \hat{P}(a)$ avec \hat{P} régulièrement développable en ε -ombre.

Pour une telle équation préparée, on convient de dire que $A(\zeta)z$ est le terme quasi-linéaire, que $F(z, \zeta, a)$ est le terme lié, que $L(\zeta, a)$ est le terme libre, et que $P(a)$ est le terme perturbatif.

4.3. Le changement de variable du (4.1) a transformé la famille (\mathcal{E}_α) en une équation préparée, et l'image de la branche \mathcal{B}_φ est l'axe $\{z = 0\}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il est donc naturel de dire que a_* est une valeur de surstabilité de l'équation préparée (\mathcal{S}_a) , lorsque $|a_* - a_0| \ll \rho$ et que l'équation \mathcal{S}_{a_*} possède une solution Ψ_* (appelée solution surstable), définie sur un voisinage standard V de 0 dans \mathbb{K} , et telle que

$$\forall \zeta \in V \quad \Psi_*(\zeta) \simeq 0.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que a_* est une valeur de surstabilité de l'équation préparée (\mathcal{S}_a) , lorsque a_* est une valeur de surstabilité d'un prolongement analytique complexe de l'équation \mathcal{S}_{a_*} .

4.4. Remarque. — Si le terme libre et le terme perturbatif sont nuls pour une valeur $a_\#$ du paramètre, l'équation $\mathcal{S}_{a_\#}$ possède la fonction nulle comme solution remarquable. Cette dernière est clairement une solution surstable, ce qui exprime que $a_\#$ est une valeur de surstabilité. Cette constatation banale est importante pour la compréhension de ce qui suit : c'est en essayant de se rapprocher de cette situation triviale que l'on espère obtenir des résultats sur l'existence de la surstabilité.

5. Propriétés remarquables des solutions surstables.

5.1. Approche formelle de la surstabilité.

Il peut être intéressant dans un premier temps de chercher à déterminer des objets formels correspondant aux valeurs de surstabilité et aux solutions surstables de $(\mathcal{E}_\alpha, \varphi)$. Dans tout ce paragraphe, ε sera considéré comme une indéterminée.

5.1.1. DÉFINITION. — On considère des séries formelles :

$$\hat{\alpha}_* = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \alpha_n^* \quad \text{et} \quad \hat{\Gamma}_* = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \Gamma_n^*$$

où (α_n^*) est une suite standard dans \mathbb{K} telle que $\alpha_0^* = \alpha_0$ et (Γ_n^*) une suite standard de fonctions analytiques définies sur un voisinage standard de μ_0 dans \mathbb{K} telle que $\Gamma_0^* = \varphi$. On dit que $\hat{\alpha}_*$ est une valeur de surstabilité formelle de solution surstable formelle associée $\hat{\Gamma}_*$ pour $(\mathcal{E}_\alpha, \varphi)$, lorsque $\hat{\Gamma}_*$ est solution formelle de l'équation obtenue en substituant $\hat{\alpha}_*$ à α dans l'expression de \mathcal{E}_α .

On peut alors énoncer un résultat d'existence et d'unicité pour ces objets formels, sous une hypothèse de transversalité qui porte sur l'ombre f_0 (2.8 et 2.10) de la fonction f second membre de l'équation \mathcal{E}_α (3.1 (3)).

5.1.2. THÉORÈME. — Si $\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0)$ n'est pas nul, il existe une unique valeur de surstabilité formelle $\hat{\alpha}_* = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \alpha_n^*$ et une unique solution surstable formelle associée $\hat{\Gamma}_* = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n \Gamma_n^*$. De plus, le couple $(\hat{\alpha}_*, \hat{\Gamma}_*)$ est produit par un algorithme dont voici les principales étapes :

(i) Effectuer le changement de variable :

$$\begin{cases} z_0 = \xi - \varphi(\mu) \\ \zeta = \mu - \mu_0 \\ a_0 = (\alpha - \alpha_0)/\varepsilon \end{cases}$$

afin de se ramener à une équation préparée :

$$(\mathcal{S}_{a_0}^0) \quad \varepsilon \frac{dz_0}{d\zeta} = \zeta \hat{A}(\zeta) z_0 + F_0(z_0, \zeta, a_0) + \varepsilon \zeta \tilde{L}_0(\zeta, a_0) + \varepsilon \hat{P}_0(a_0)$$

pour laquelle il existe $p_0 \in \mathbb{K}$ standard non nul, $q_0 \in \mathbb{K}$ standard, et une fonction standard $\tilde{L}_{0,0}(\zeta, a_0)$ tels que :

$$\begin{aligned} \hat{P}_0(a_0) &= a_0 p_0 + q_0 + \varepsilon(\dots) \\ \tilde{L}_0(\zeta, a_0) &= \tilde{L}_{0,0}(\zeta, a_0) + \varepsilon(\dots). \end{aligned}$$

(ii) Poser :

$$\begin{cases} \alpha_1^* = -q_0/p_0 \\ a_1 = (a_0 - \alpha_1^*)/\varepsilon \\ \varphi_1(\zeta) = -\tilde{L}_{0,0}(\zeta, \alpha_1^*)/\hat{A}(\zeta) \quad \text{et} \quad \Gamma_1^*(\mu) = \varphi_1(\mu - \mu_0) \end{cases}$$

puis effectuer le changement de variable : $z = z_1 + \varepsilon\varphi_1(\zeta)$ dans l'équation $(S_{a_0}^0)$ pour obtenir une équation :

$$(S_{a_1}^1) \quad \varepsilon \frac{dz_1}{d\zeta} = \zeta \widehat{A}(\zeta) z_1 + F_1(z_1, \zeta, a_1) + \varepsilon^2 \zeta \widetilde{L}_1(\zeta, a_1) + \varepsilon^2 \widehat{P}_1(a_1)$$

pour laquelle il existe $q_1 \in \mathbb{K}$ standard et une fonction standard $\widetilde{L}_{1,0}(\zeta, a_1)$ tels que :

$$\begin{aligned} \widehat{P}_1(a_1) &= a_1 p_0 + q_1 + \varepsilon(\dots) \\ \widetilde{L}_1(\zeta, a_1) &= \widetilde{L}_{1,0}(\zeta, a_1) + \varepsilon(\dots). \end{aligned}$$

(iii) Itérer la deuxième étape.

5.1.3. L'existence et l'unicité de $(\widehat{\alpha}_*, \widehat{\Gamma}_*)$ découle de l'existence de cet algorithme dans lequel on remarque que l'on choisit ce couple de sorte que le changement de variable $z = \mathfrak{z} + \widehat{\Gamma}_*$ conduise à une équation différentielle dont le second membre possède \mathfrak{z} comme facteur. En dernière analyse, tout repose sur le caractère non nul du nombre standard p_0 qui n'est autre que $\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}(\zeta_0, \mu_0, \alpha_0)$. Les expressions générales des différents termes de ces développements sont relativement complexes. A titre d'exemple, voici la forme générale des termes d'ordre 1 d'une valeur de surstabilité formelle α_* et d'une solution surstable formelle $\widehat{\Gamma}_*$ pour cette valeur du paramètre :

$$\alpha_1^* = \frac{\frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0) - f_1(\xi_0, \mu_0, \alpha_0)}{\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0)}$$

$$\Gamma_1^*(\mu) = \frac{\frac{f_1(\xi_0, \mu_0, \alpha_0) - \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0)}{\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0)} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}(\varphi(\mu), \mu, \alpha_0) - \frac{\partial f_0}{\partial \alpha}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0) \right) + \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0) - \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu)}{\frac{\partial f_0}{\partial \xi}(\varphi(\mu), \mu, \alpha_0)}.$$

Dans chaque cas particulier, les calculs sont généralement plus faciles à mener. Par exemple, pour l'équation \mathcal{G}_α

$$\varepsilon \frac{d\xi}{d\mu} = (\xi - \ln(\mu))(\mu - 1) + \alpha\mu$$

avec comme fonction φ la fonction logarithme et $(\xi_0, \mu_0) = (0, 1)$, on obtient les développements suivants à l'ordre 3 pour la valeur de surstabilité

formelle et la solution formelle associée :

$$\hat{\alpha}_* = \varepsilon + \varepsilon^2 + 3\varepsilon^3 + \varepsilon^4(\dots)$$

$$\hat{\Gamma}_*(\mu) = \ln(\mu) - \varepsilon \frac{1 + \mu}{\mu} - \varepsilon^2 \frac{1 + \mu + \mu^2}{\mu^2} - \varepsilon^3 \frac{2 + 3\mu + 3\mu^2 + 3\mu^3}{\mu^3} + \varepsilon^4(\dots).$$

Se pose alors la question de savoir si ces développements constituent de bonnes approximations d'une véritable valeur de surstabilité et d'une véritable solution surstable. L'expérimentation graphique suivante suggère que cela doit être le cas.

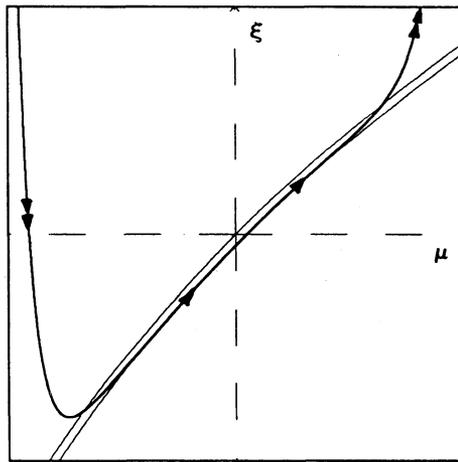


Figure 5

Cette figure est obtenue en prenant pour valeur de α le développement à l'ordre 3 précédent avec $\varepsilon = 1/100$. En trait continu sont représentés, d'une part la branche $\{\xi = \ln(\mu)\}$ de la variété lente, d'autre part le développement à l'ordre 3 des solutions surstables et enfin une solution de \mathcal{G}_α .

5.2. Un résultat partiel d'existence des solutions surstables.

Voici un premier résultat relatif à l'existence de valeurs de surstabilités lorsque l'on est dans une situation proche du cas trivial pour lequel $z = 0$ est solution (remarque 4.4.).

5.2.1. THÉORÈME. — *On considère une équation préparée (S_α) (4.2) dont le terme libre est exponentiellement petit relativement à ε . Alors :*

(i) Si le terme perturbatif $P(a_{\#})$ est exponentiellement petit relativement à ε pour une valeur $a_{\#}$ du paramètre, le nombre $a_{\#}$ est une valeur de surstabilité.

(ii) Dans le cas réel ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$), si $a_{\#}$ est une valeur à canards, le nombre $P(a_{\#})$ est exponentiellement petit relativement à ε .

La clause restrictive $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ du (ii) est essentielle à la technique de la démonstration utilisée, et on ne sait pas si ce résultat reste vrai dans le cas complexe.

Démonstration du théorème 5.2.1 :

(i) On se place dans le cas complexe et on considère le changement de variable obtenu en posant

$$z = \exp\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)$$

(il s'agit en fait d'une variante de la loupe de Benoit ([3], [4], [21], [23])); ce résultat est aussi à rapprocher du théorème de stabilité par micro-perturbation de [6]). Ce changement de variable «comprime» l'ensemble

$$\{z \in \mathbf{C}^*/|z| \leq 1 \text{ et } |z| \text{ non infiniment petit}\}$$

sur l'ensemble suivant (où e_0 désigne $\frac{\bar{\varepsilon}}{|\varepsilon|}$)

$$\{w \in \mathbf{C}/\operatorname{Re}(e_0 w) = -|\varepsilon|\mathcal{L}\}.$$

Il mérite cependant le nom de loupe puisqu'il «étire» l'ensemble

$$\{z \in \mathbf{C}^*/|z| > 0 \text{ et } |z| \simeq 0\}$$

sur tout l'ensemble

$$\{w \in \mathbf{C}/\operatorname{Re}(e_0 w)/|\varepsilon| \simeq -\infty\}.$$

Par ce changement de variables, l'équation $\mathcal{S}_{a_{\#}}$ se transforme en la nouvelle équation $\mathcal{I}_{a_{\#}}$

$$\frac{dw}{d\zeta} = A(\zeta) + H(w, \zeta)$$

avec, puisque $L(\zeta, a_{\#})$ et $P(a_{\#})$ sont exponentiellement petits

$$|H(w, \zeta)| \simeq 0$$

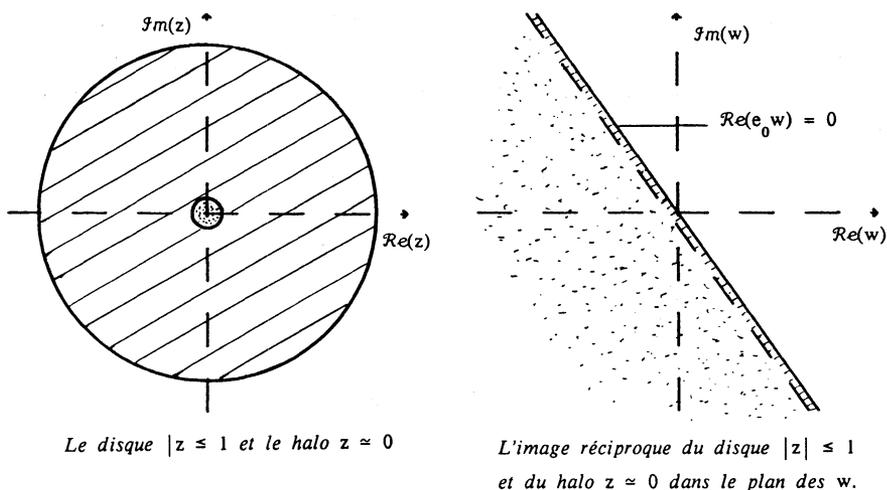


Figure 6

dans un domaine du type suivant

$$D = \{-c < \operatorname{Re}(e_0 w) < 0 \text{ et } \operatorname{Re}(e_0 w)/|\varepsilon| \text{ infiniment grand}\}$$

où c désigne une constante standard strictement positive. D'après le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle holomorphe, cette équation possède une solution $\psi(\zeta)$ définie sur un voisinage standard W de 0 dans \mathbb{C} et à valeurs dans un disque de centre w_0 et de rayon $\frac{c}{4}$, où w_0 est choisi de sorte que :

$$\operatorname{Re}(e_0 w) = \frac{c}{2}.$$

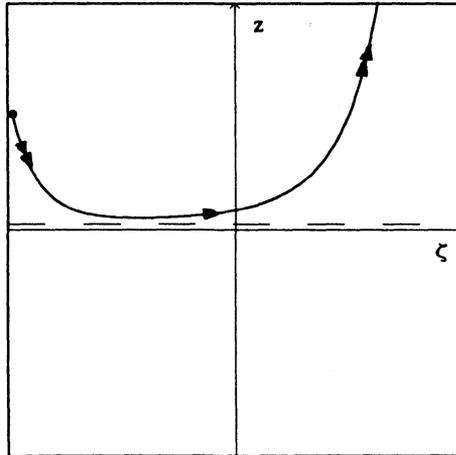
Dans les variables initiales, on obtient une solution $\Psi(\zeta)$ qui vérifie la relation :

$$\forall \zeta \in W \quad \Psi(\zeta) \simeq 0$$

ce qui exprime que Ψ est une solution surstable.

(ii) La démonstration qui suit est en rapport avec celle du résultat de J.L. Callot ([4], [23]), selon lequel «les canards ont la vie brève». On suppose que $P(a_{\#})$ n'est pas exponentiellement petit relativement à ε . En particulier $P(a_{\#})$ n'est pas nul et puisque maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut supposer que $P(a_{\#})$ et ε sont strictement positifs. La région du plan des (z, ζ) tel que $z \geq \varepsilon P(a_{\#})$ est alors un piège à trajectoire car, sur la courbe

$z = \varepsilon P(a_{\#})$, le champ de vecteurs associé à $\mathcal{S}_{a_{\#}}$ a une expression (Z, ε) avec $Z = P(a_{\#})(1 + \mathcal{O})$. On considère une solution de $\mathcal{S}_{a_{\#}}$ de condition initiale $z_0 \gg 0$ et $\zeta_0 \ll 0$. Cette solution est telle que $z(0)$ n'est pas exponentiellement petit relativement à ε .



La trajectoire de (z_0, ζ_0) et le piège à trajectoires.

Figure 7

Si on suppose qu'il existe $b \gg 0$ tel que :

$$\forall \zeta \in [0, b] \quad z(\zeta) \simeq 0,$$

on en déduit que :

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta) \geq \frac{1}{\varepsilon} [\zeta \hat{A}(\zeta) + \mathcal{O}] z(\zeta)$$

et donc que :

$$z(\zeta) \geq z(0) \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\int_0^\zeta u \hat{A}(u) du + \mathcal{O} \right) \right]$$

ce qui est impossible car $\left(\int_0^\zeta u \hat{A}(u) du + \mathcal{O} \right)$ est appréciable positif pour $\zeta \gg 0$ suffisamment petit. Donc la solution considérée ne présente pas de retard à la bifurcation. Des arguments classiques utilisés dans l'étude des canards impliquent alors qu'aucune solution ne présente un retard à la bifurcation.

5.3. Proximité des solutions surstables.

Le théorème qui suit permet de s'assurer que les solutions surstables sont exponentiellement proches.

5.3.1. THÉORÈME. — Soit α_* une valeur de surstabilité de $(\mathcal{E}_{\alpha_*}, \varphi)$, soit Φ_1 et Φ_2 des solutions de \mathcal{E}_{α_*} définies sur un même disque $D(\mu_0, R)$ dans \mathbf{K} avec $R \gg 0$. On suppose que Φ_1 est surstable. Alors :

(i) Si Φ_2 est surstable, la fonction $\Phi_1 - \Phi_2$ est exponentiellement petite relativement à ε sur le disque $D(\mu_0, r)$ pour tout nombre réel r tel que $0 \ll r \ll R$.

(ii) Si $\Phi_1(\mu_0) - \Phi_2(\mu_0)$ est exponentiellement petit relativement à ε il existe un nombre réel r avec $0 \ll r \ll R$ tel que la restriction de Φ_2 à $D(\mu_0, r)$ soit surstable.

Démonstration. — (i) On peut supposer que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Dans l'équation \mathcal{E}_{α_*} on effectue le changement de variable

$$u = \xi - \Phi_1(\mu)$$

ce qui donne une nouvelle équation de la forme suivante :

$$\varepsilon \frac{du}{d\mu} = u \frac{\partial f_0}{\partial \xi} (\varphi(\mu), \mu, \alpha_0) + G(u, \mu)$$

avec l'estimation $|G(u, \mu)| \leq u\mathcal{O} + u^2\mathcal{L}$ valable pour u limité et μ dans $D(\mu_0, R)$. L'image de Φ_2 est une solution de cette dernière équation, non nulle mais infiniment petite sur $D(\mu_0, R)$, et on peut l'étudier sous la loupe de Benoit $u = \exp\left(\frac{w}{\varepsilon}\right)$. Avec cette nouvelle variable w , on obtient une équation \mathcal{F} de la forme suivante

$$\frac{dw}{d\mu} = \frac{\partial f_0}{\partial \xi} (\varphi(\mu), \mu, \alpha_0) + H(w, \mu)$$

avec l'estimation $H(w, \mu) \simeq 0$ valable pour $\exp\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) \simeq 0$ et μ dans $D(\mu_0, R)$. Supposons qu'il existe $\mu_1 \in \mathbf{K}$ tel que $|\mu_1 - \mu_0| \ll R$ et que $\Phi_2(\mu_1) - \Phi_1(\mu_1)$ ne soit pas exponentiellement petit relativement à ε . Alors, «l'image» de Φ_2 dans la variable w est une solution Ψ_2 de l'équation \mathcal{F} qui, pour $\mu \in D(\mu_0, r)$ reste dans le domaine $\exp\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) \simeq 0$ mais est telle

que : $\operatorname{Re}\left(\Psi_2(\mu_1) \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon}\right) \simeq 0$. Donc Ψ_2 est une fonction holomorphe qui est une petite perturbation de la fonction holomorphe standard primitive de $\frac{\partial f_0}{\partial \xi}(\varphi(\mu), \mu, \alpha_0)$. Puisque cette dernière est une application ouverte standard dont l'image atteint la droite réelle $\operatorname{Re}(w + \varepsilon) = 0$ en un point standard de $D(\mu_0, R)$, on en déduit que Ψ_2 sort du domaine $\exp\left(\frac{w}{\varepsilon}\right) \simeq 0$, d'où une contradiction.

(ii) Avec les notations précédentes, Φ_2 est représentée après l'introduction de la variable w , par une solution de l'équation différentielle \mathcal{F} vérifiant une condition initiale nettement située dans le demi-plan $\{\operatorname{Re}(w\bar{\varepsilon}/\varepsilon) \leq 0\}$. Le résultat en découle.

5.4. Résultats principaux sur l'existence de la surstabilité.

Voici maintenant deux énoncés relatifs à l'existence des valeurs de surstabilité et des valeurs à canards, ainsi que quelques corollaires. Ces théorèmes seront démontrés dans la dernière partie de cette étude, comme conséquences d'un théorème de sommation. On remarquera que la condition d'existence des valeurs de surstabilité est exactement la même que dans le cadre formel.

5.4.1. THÉORÈME. — Si $\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0)$ n'est pas nul, $(\mathcal{E}_\alpha, \varphi)$ possède une valeur de surstabilité α_* développable en ε -ombre pour laquelle il existe une solution surstable elle-même développable en ε -ombre. De plus, tout $\alpha_\#$ exponentiellement proche de α_* dans \mathbb{K} est aussi une valeur de surstabilité pour laquelle il existe une solution surstable développable en ε -ombre. Enfin, dans le cas réel, si la condition de signe (3.3 (6)) est satisfaite, toute valeur à canards qui appartient à la ε -galaxie de α_0 est nécessairement exponentiellement proche de α_* relativement à ε .

5.4.2. THÉORÈME. — Dans le cas réel, si la condition de signe (3.3 (6)) est satisfaite et si :

$$\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0) = 0 \quad \text{et} \quad f_1(\xi_0, \mu_0, \alpha_0) \neq \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0)$$

alors, il n'existe pas de valeurs à canards pour $(\mathcal{E}_\alpha, \varphi)$ dans la ε -galaxie de α_0 .

(Voir (2.5) pour la définition de la ε -galaxie.)

5.4.3. On rappelle que f_0 et f_1 sont les deux premiers coefficients du développement en ε -ombre de f . Dans le cas où la fonction f s'écrit $f(\xi, \mu, \alpha) = g(\xi, \mu, \alpha, \varepsilon)$ avec g standard et analytique, la condition du théorème (5.4.2) devient :

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0, 0) \neq \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0).$$

On considère maintenant le cas d'une équation différentielle \mathcal{E} sans paramètre de contrôle

$$\varepsilon \frac{d\xi}{d\mu} = h(\xi, \mu, \varepsilon)$$

où h est une fonction standard, analytique, à valeurs réelles, définie sur un voisinage standard dans \mathbb{R}^3 d'un point standard de coordonnées $(\xi_0, \mu_0, 0)$. Comme précédemment, le paramètre ε a une valeur réelle fixée infiniment petite non nulle, et on suppose qu'il existe une fonction standard analytique φ , définie sur un voisinage standard de μ_0 , de sorte que, pour tout μ dans ce voisinage, on ait

$$\begin{aligned} \varphi(\mu_0) &= \xi_0 \\ h(\varphi(\mu), \mu, 0) &= 0 \end{aligned}$$

avec
$$\frac{\partial h}{\partial \xi}(\mu_0, \mu_0, 0) = 0$$

et
$$\frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}(\xi_0, \mu_0, 0) \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0) + \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \mu}(\xi_0, \mu_0, 0) \right) > 0.$$

On peut alors exhiber une première obstruction à l'existence d'un canard pour \mathcal{E} .

5.4.4. COROLLAIRE. — Si : $\frac{\partial h}{\partial \varepsilon}(\xi_0, \mu_0, 0) \neq \frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0)$, l'équation \mathcal{E} ne possède pas de canard. En particulier, c'est le cas lorsque h ne dépend pas de ε et que $\frac{d\varphi}{d\mu}(\mu_0) \neq 0$.

5.5. Surstabilité des canards.

On se place dans le cas réel sous les hypothèses de (3.1) avec la condition de signe (3.3 (6)), et on considère un nombre $\alpha_{\#}$ infiniment proche de α_0 .

5.5.1. THÉORÈME. — Si $\alpha_{\#}$ est une valeur à canards développable en ε -ombre de $(\mathcal{E}_{\alpha}, \varphi)$, alors $\alpha_{\#}$ est aussi une valeur de surstabilité. De plus, une solution de $\mathcal{E}_{\alpha_{\#}}$ est un canard si et seulement si elle est surstable.

Démonstration. — On considère la nouvelle famille d'équations différentielles (\mathcal{F}_{β})

$$\varepsilon \frac{d\xi}{d\mu} = F(\xi, \mu, \beta)$$

avec

$$F(\xi, \mu, \beta) = f(\xi, \mu, \alpha_{\#}) + \beta.$$

Il est clair que F possède les propriétés de f exposées dans (3.1) (avec la même fonction φ et en remplaçant α_0 par $\beta_0 = 0$). De plus, puisque

$$\frac{\partial F_0}{\partial \beta}(\xi_0, \mu_0, 0) \neq 0$$

le théorème 5.4.1 nous assure que la famille (\mathcal{F}_{β}) possède une valeur de surstabilité β_* développable en ε -ombre. Mais la condition de signe (3.3 (6)) atteste que les solutions surstables de \mathcal{F}_{β_*} sont aussi des canards. Ainsi β_* et 0 sont des valeurs à canards pour (\mathcal{F}_{β}) ; donc elles sont exponentiellement proches relativement à ε . Il en découle que 0 est aussi une valeur de surstabilité pour (\mathcal{F}_{β}) , et que $\alpha_{\#}$ est une valeur de surstabilité pour (\mathcal{E}_{α}) . On conclut en remarquant que toute solution surstable de $\mathcal{E}_{\alpha_{\#}}$ est un canard, et que tous les canards de cette équation sont exponentiellement proches.

5.6. Remarque sur le cas générique.

On sait (voir (3.1)) que la variété lente \mathcal{C}_{α_0} est réunion de deux branches régulières transverses en (ξ_0, μ_0) , dont l'une est \mathcal{B}_{φ} . Génériquement, il existe une fonction analytique standard ψ définie sur un voisinage standard de μ_0 telle que la seconde branche soit aussi de la forme

$$\mathcal{B}_{\psi} = \{(\xi, \mu) \in \mathbb{C}^2 / \xi = \psi(\mu)\}$$

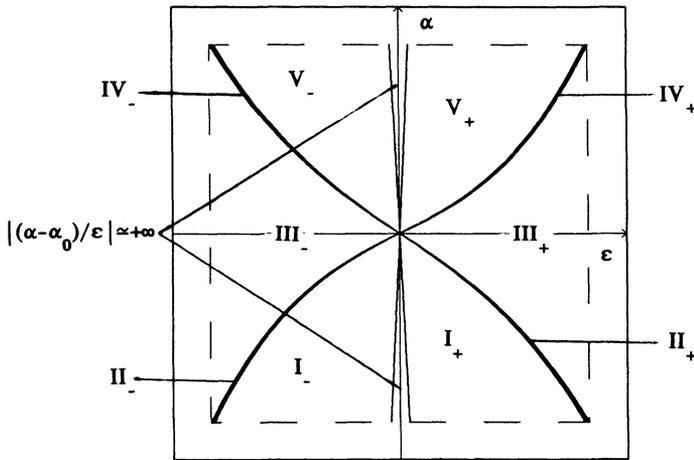
et de sorte que les conditions du (3.1) soient satisfaites en remplaçant φ par ψ . Il apparaît que le phénomène de surstabilité peut aussi se présenter le long de \mathcal{B}_{ψ} . De manière plus précise, si la condition

$$\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}(\xi_0, \mu_0, \alpha_0) \neq 0$$

est vérifiée, on peut appliquer le théorème 5.4.1 successivement à $(\mathcal{E}_\alpha, \varphi)$ et à $(\mathcal{E}_\alpha, \varphi)$. Il en résulte l'existence dans la ε -galaxie de α_0 dans \mathbb{K} (ε est fixé), de deux ensembles exponentiellement étroits et disjoints, l'un S_φ contenant des valeurs de surstabilité pour $(\mathcal{E}_\alpha, \varphi)$ l'autre S_ψ des valeurs de surstabilité pour $(\mathcal{E}_\alpha, \varphi)$. Dans le cas réel et pour un signe fixé de ε , l'un de ces ensembles correspond aux valeurs à canards, l'autre aux valeurs à faux-canards surstables. Si de plus la fonction f s'écrit $f(\xi, \mu, \alpha) = g(\xi, \mu, \alpha, \varepsilon)$ avec g standard et analytique, on peut faire varier ε et considérer dans le complémentaire de l'ensemble

$$\{(\varepsilon, \alpha) \in \mathbb{R}^2 / \varepsilon = 0 \text{ et } |(\alpha - \alpha_0)/\varepsilon| \simeq +\infty\}$$

dans le halo $\{(\varepsilon, \alpha) \in \mathbb{R}^2 / \varepsilon \simeq 0 \text{ et } \alpha \simeq \alpha_0\}$, les dix régions suivantes :



Le halo $\varepsilon \simeq 0$ et $\alpha \simeq \alpha_0$

Figure 8

Et on peut compléter le scénario de bifurcation de la figure 2 de la manière indiquée dans la figure 9. Dans cette dernière, la notation $a = b_{\text{exp}}$ signifie que a est exponentiellement proche de b relativement à ε , et la notation $a <_{\text{exp}} b$ signifie que $a < b$ mais que a n'est pas exponentiellement proche de b .

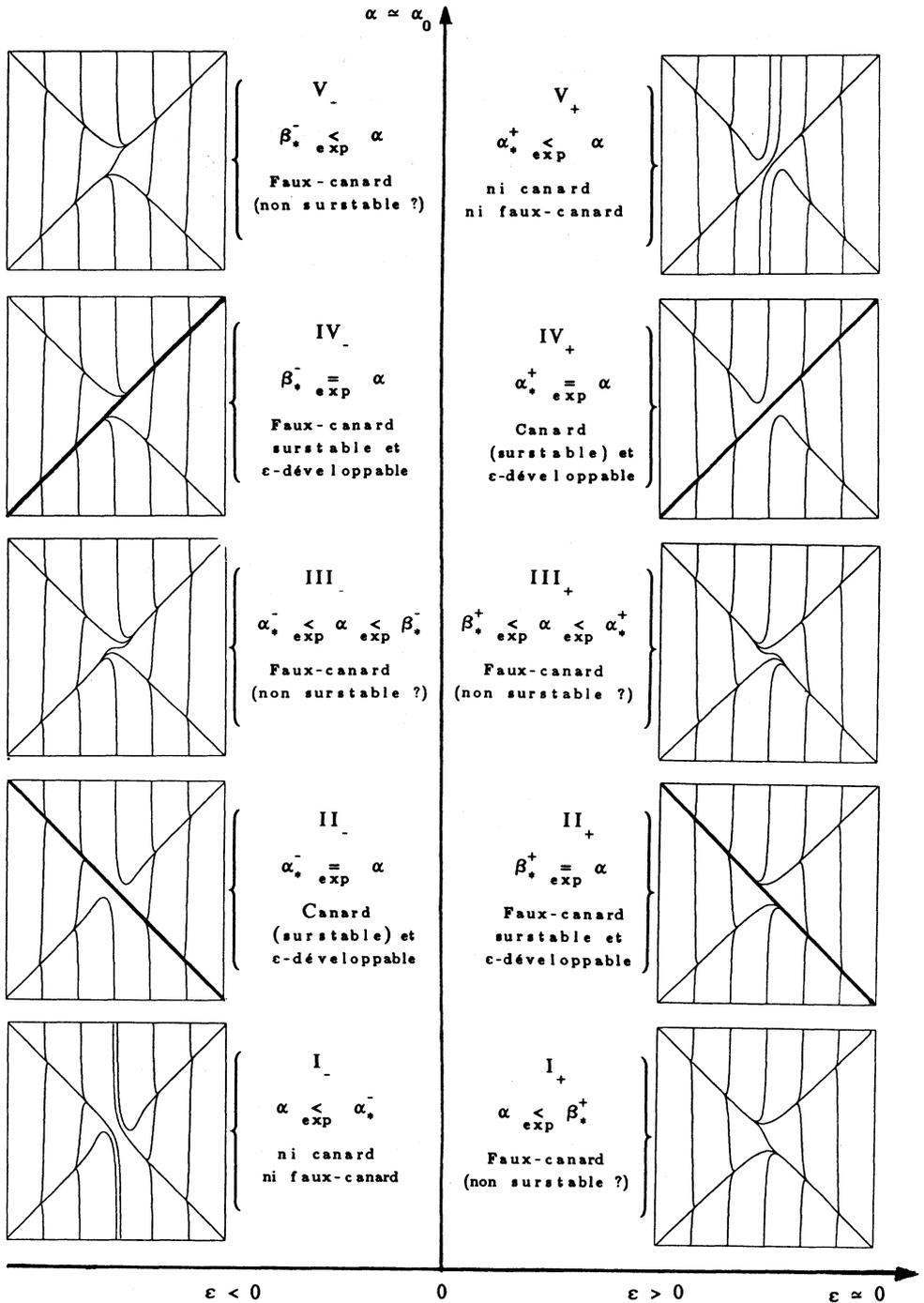


Figure 9

6. Un théorème de sommation.

6.1. On considère une équation préparée (\mathcal{S}_a) (voir (4.2) pour la signification des notations) avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\varepsilon \frac{dz}{d\zeta} = A(\zeta)z + F(z, \zeta, a) + L(\zeta, a) + P(a).$$

De plus, on suppose que sur le domaine

$$|z| < r, \quad |\zeta| < r, \quad |a - a_0| < \rho$$

les conditions suivantes sont vérifiées.

(i) La fonction \widehat{A} est de module minoré par une constante réelle β_0 strictement positive et non infiniment petite.

(ii) Les fonctions \widehat{F} , \widetilde{F} et \widetilde{L} ont un module majoré par une constante limitée.

Le problème que l'on se pose est de trouver un changement de variable $z = \mathfrak{z} + S(\zeta, a)$ avec S infiniment petit tel que l'équation différentielle obtenue dans ces nouvelles variables possède un terme libre nul ou «suffisamment petit» et un terme perturbatif «proche» du précédent. Pour tout triplet (r, s, t) de nombres réels positifs, on note $\mathfrak{D}(r, s, t)$ indifféremment chacun des ensembles suivants :

$$\begin{aligned} &\{(z, \zeta, a) \in \mathbb{C}^3; |z| < r, |\zeta| < s, |a - a_0| < t\} \\ &\{(\zeta, a) \in \mathbb{C}^2; |\zeta| < s, |a - a_0| < t\} \\ &\{a \in \mathbb{C}; |a - a_0| < t\}. \end{aligned}$$

A priori, l'équation préparée (\mathcal{S}_a) est définie au moins sur $\mathfrak{D}(r, r, \rho)$.

6.2. THÉORÈME. — Soit r_0 et ρ_0 des nombres réels standard tels que $0 < r_0 < r$ et $0 < \rho_0 < \rho$. Il existe un changement de variable $z = \mathfrak{z} + S(\zeta, a)$ tel que, pour $(\mathfrak{z}, \zeta, a) \in \mathfrak{D}(r_0, r_0, \rho_0)$, l'équation différentielle (\mathcal{S}_a) soit transformée en l'équation préparée suivante :

$$(\mathfrak{S}^a) \quad \varepsilon \frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta} = A(\zeta)\mathfrak{z} + \mathfrak{F}(\mathfrak{z}, \zeta, a) + \mathfrak{L}(\zeta, a) + \mathfrak{P}(a)$$

de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(i) La fonction S est analytique, infiniment petite et régulièrement développable en ε -ombre.

(ii) $\mathfrak{F}(\mathfrak{z}, \zeta, a) = F(\mathfrak{z} + S(\zeta, a), \zeta, a) - F(S(\zeta, a), \zeta, a)$.

(iii) *La fonction \mathcal{L} est analytique et exponentiellement petite relativement à ε .*

(iv) *La fonction \mathcal{P} est analytique, régulièrement développable en ε -ombre. De plus, si on note $\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i \mathfrak{P}_i(a)$ le développement en ε -ombre de*

\mathfrak{P} et $\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon^i P_i(a)$ le développement en ε -ombre de P , on a : $\mathfrak{P}_0(a) = 0$ et $\mathfrak{P}_1(a) = P_1(a)$.

(v) *De plus, si (S_a) est le prolongement analytique naturel complexe d'une équation analytique réelle, les résultats précédents sont valables dans le domaine réel.*

6.3. Remarques.

6.3.1. Sous les hypothèses du point (V) du théorème, le changement de variables $z = \mathfrak{z} + S(\zeta, a)$ est lui-même réel analytique, mais la technique de la démonstration, et en particulier les estimations qui y sont utilisées nécessitent de travailler dans le champ complexe.

6.3.2. On verra dans le paragraphe 8 qu'il est possible de choisir une valeur a_* pour le paramètre a de sorte que le développement en ε -ombre de $S(\zeta, a_*)$ soit celui d'une solution surstable. C'est en ce sens que le théorème 6.2 est un théorème de sommation (de la série formelle $\hat{\Gamma}_*$ du Théorème 5.1).

7. Démonstration du théorème de sommation.

7.1. Le principe de la démonstration sur un exemple.

On considère l'équation suivante :

$$\varepsilon \frac{dz}{d\zeta} = \zeta z + z^2 - \underline{2\varepsilon\zeta^2} + \varepsilon a$$

dans l'expression de laquelle on a souligné le terme libre. Pour éliminer le terme libre, il suffit d'effectuer le changement de variables

$$z = z_1 + 2\varepsilon\zeta$$

ce qui donne la nouvelle équation

$$\varepsilon \frac{dz_1}{d\zeta} = \zeta z_1 + z_1^2 + 4\varepsilon \zeta z_1 + \underline{4\varepsilon^2 \zeta^2} + \varepsilon a - 2\varepsilon^2$$

pour laquelle on peut à nouveau refaire l'opération précédente afin d'obtenir

$$\varepsilon \frac{dz_2}{d\zeta} = \zeta z_2 + (4\varepsilon \zeta - 8\varepsilon^2 \zeta) z_2 + \underline{16\varepsilon^3 (\varepsilon - 1) \zeta^2} + \varepsilon a - 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3$$

et ainsi de suite... Le terme libre ne disparaît pas mais l'évolution de son ordre de grandeur est le résultat de deux processus contradictoires : chaque changement de variable augmente simultanément l'exposant de ε et la taille des constantes. Puisque ε est infiniment petit, l'ordre de grandeur du terme libre commence par diminuer, mais cette évolution favorable peut être contrecarrée à long terme par l'autre phénomène.

L'idée de la démonstration est donc d'effectuer successivement un grand nombre de changements de variables, chacun de ces derniers consistant en une petite translation sur la variable rapide choisie de manière à simplifier le terme libre. Il n'y a aucune raison pour que la somme de ces translations converge et de plus, le domaine sur lequel est défini l'équation différentielle diminue peu à peu. Il faut donc par des estimations soigneuses contrôler la taille des objets de manière à arrêter le processus au moment opportun. Cette technique évoque bien entendu le procédé de sommation au plus petit terme de H. Poincaré, et elle pourrait s'appeler «sommation de la Neishtadt», en référence à l'article [18]. De manière plus précise, la méthode de Neishtadt consiste dans le cas oscillant à utiliser le terme quasi-linéaire $A(\zeta)z$ comme un «pivot» afin de simplifier au maximum les termes indépendants de z dans l'expression de l'équation. Ceci est possible car dans ce cas la fonction $A(\zeta)$ est localement inversible. Dans notre cas, il n'en est pas de même car $A(\zeta)$ s'annule en 0. On peut cependant utiliser ce «pivot singulier» pour simplifier dans l'expression du champ les termes indépendants de z qui présentent la même singularité que le pivot, c'est-à-dire le terme libre.

7.3. La démonstration proprement dite.

7.3.1. Le premier changement de variable.

On introduit une nouvelle variable z_1 en posant

$$z = z_1 + U_0(\zeta, a).$$

La fonction U_0 est choisie de manière à éliminer le terme libre $L(\zeta, a, \varepsilon)$

$$U_0(\zeta, a, \varepsilon) = -\frac{\varepsilon \tilde{L}(\zeta, a)}{\hat{A}(\zeta)}.$$

L'équation différentielle (S_a) se transforme en l'équation (S_1)

$$(S_1) \quad \varepsilon \frac{dz_1}{d\zeta} = A(\zeta)z_1 + F_1(z_1, \zeta, a) + L_1(\zeta, a) + P_1(a)$$

avec

$$F_1(z_1, \zeta, a) = F(z_1 + U_0(\zeta, a), \zeta, a) - F(U_0(\zeta, a), \zeta, a)$$

$$L_1(\zeta, a) = F(U_0(\zeta, a), \zeta, a) - F(U_0(0, a), 0, a) - \varepsilon \frac{\partial U_0}{\partial \zeta}(\zeta, a)$$

$$+ \varepsilon \frac{\partial U_0}{\partial \zeta}(0, a)$$

$$P_1(a) = P(a) + F(U_0(0, a), 0, a) - \varepsilon \frac{\partial U_0}{\partial \zeta}(0, a).$$

7.3.2. Premières estimations.

Pour $(u + v, \zeta, a)$ et (v, ζ, a) dans $\mathfrak{D}(r, r, \rho)$, on a la relation asymptotique

$$|F(u + v, \zeta, a) - F(v, \zeta, a)| \leq |u|^2 \mathcal{L} + |u||v| \mathcal{L} + |u| \varepsilon | \mathcal{L}.$$

En particulier, pour $u \simeq 0$ et $v \simeq 0$ on obtient

$$|F(u + v, \zeta, a) - F(v, \zeta, a)| = |u| \mathcal{O}$$

et $|F(u, \zeta, a)| = |u| \mathcal{O}.$

On sait que $|\hat{A}(\zeta)| \geq \beta_0$ avec $\beta_0 \gg 0$. De même il existe une constante standard $\gamma_0 > 0$ telle que $|\tilde{L}(\zeta, a)| \leq \gamma_0$. De cela on déduit, en posant $k_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}$, que dans $\mathfrak{D}(r, r, \rho)$

$$|U_0(\zeta, a)| \leq k_0 |\varepsilon|.$$

Cela implique en particulier que (S_1) est défini pour $|z_1| < r - k_0 |\varepsilon|$. Soit une constante standard $k > 0$ non encore déterminée. D'après les inégalités de Cauchy, sur le domaine restreint $\mathfrak{D}(r - k_0 |\varepsilon|, r - k |\varepsilon|, \rho)$ on a l'estimation

$$\left| \frac{\partial U_0}{\partial \zeta}(\zeta, a) \right| \leq \frac{k_0}{k}.$$

Ce qui précède implique que dans $\mathfrak{D}(r - k_0|\varepsilon|, r - k|\varepsilon|, \rho)$ on a

$$|L_1(\zeta, a)| \leq k_0|\varepsilon|(\varnothing + 2/k) \leq \frac{3k_0|\varepsilon|}{k}.$$

Puisque $L_1(0, a) = 0$, il existe une fonction analytique $\widehat{L}_1(\zeta, a)$ telle que $L_1(\zeta, a) = \zeta\widehat{L}_1(\zeta, a)$. Dans $\mathfrak{D}(r - k_0|\varepsilon|, r - k|\varepsilon|, \rho)$ on a, d'après le principe du maximum

$$|\widehat{L}_1(\zeta, a)| \leq \frac{3k_0|\varepsilon|}{k(r - k)|\varepsilon|} \leq \frac{3k_0|\varepsilon|}{kr_0}.$$

En procédant de manière analogue, on obtient dans le même domaine

$$|P_1(a) - P(a)| \leq k_0|\varepsilon|(\varnothing + 1/k) \leq \frac{2k_0|\varepsilon|}{k}.$$

Il est temps maintenant de choisir k de manière à obtenir des relations se prêtant à un raisonnement par récurrence. Le choix de :

$$k = \frac{6}{r_0\beta_0}$$

conduit, en posant $Q_1(a) = P_1(a) - P(a)$, aux inégalités suivantes :

$$|L_1(\zeta, a)| \leq \frac{r_0\gamma_0|\varepsilon|}{2}$$

$$|\widehat{L}_1(\zeta, a)| \leq \frac{\gamma_0|\varepsilon|}{2}$$

$$|Q_1(a)| \leq \frac{r_0\gamma_0|\varepsilon|}{3}$$

valables pour le système différentiel (\mathcal{S}_1) défini sur le domaine $\mathfrak{D}(r - k_0|\varepsilon|, r - k|\varepsilon|, \rho)$.

7.3.3. La propriété de récurrence.

Pour tout nombre entier positif j , on pose :

$$s_j = r - \sum_{i=1}^j \frac{k_0|\varepsilon|}{2^{i-1}} \quad \text{et} \quad t_j = r - jk|\varepsilon|$$

et on se propose de démontrer par récurrence la propriété suivante :

Soit un nombre entier j tel que $t_j \gg r_0$. Il existe une suite de fonctions $(U_i(\zeta, a))_{i < j}$ définies sur $\mathfrak{D}(s_j, t_j, \rho)$ telles que :

$$(i) \quad |U_i(\zeta, a)| \leq \frac{k_0 |\varepsilon|}{2^i}.$$

(ii) Le changement de variable $z = z_j + \sum_{i=0}^{j-1} U_i(\zeta, a)$ transforme l'équation différentielle (S_a) en l'équation (S_j) suivante :

$$(S_j) \quad \varepsilon \frac{dz_j}{d\zeta} = A(\zeta)z_j + F_j(z_j, \zeta, a) + L_j(\zeta, a) + P_j(a)$$

avec F_j , L_j et P_j des fonctions analytiques définies sur $\mathfrak{D}(s_j, t_j, \rho)$ telles que :

$$F_j(z_j, \zeta, a) = F\left(z_j + \sum_{i=0}^{j-1} U_i(\zeta, a), \zeta, a\right) - F\left(\sum_{i=0}^{j-1} U_i(\zeta, a), \zeta, a\right)$$

$$|L_j(\zeta, a)| \leq \frac{r_0 \gamma_0 |\varepsilon|}{2^j}$$

$L_j(\zeta, a) = \zeta \widehat{L}_j(\zeta, a)$ avec $\widehat{L}_j(\zeta, a)$ analytique

$$|\widehat{L}_j(\zeta, a)| \leq \frac{\gamma_0 |\varepsilon|}{2^j}$$

$P_j(a) = P(a) + \sum_{i=1}^j Q_i(a)$ avec les Q_i analytiques tels que :

$$|Q_i(a)| \leq \frac{r_0 \gamma_0 |\varepsilon|}{3 \times 2^{i-1}}.$$

(iii) Si $(S)^a$ est le prolongement analytique naturel complexe d'une équation analytique réelle, il en est de même pour les U_i et pour (S_j) .

D'après (7.3.1) et (7.3.2) cette propriété est vraie pour $j = 1$.

7.3.4. Le passage de j à $j + 1$.

On effectue le changement de variable $z_j = z_{j+1} + U_j(\zeta, a)$ avec

$$U_j(\zeta, a) = -\frac{\widehat{L}_j(\zeta, a)}{\widehat{A}(\zeta)}.$$

On obtient alors la nouvelle équation

$$(\mathcal{S}_{j+1}) \quad \varepsilon \frac{dz_{j+1}}{d\zeta} = A(\zeta)z_{j+1} + F_{j+1}(z_{j+1}, \zeta, a) + L_{j+1}(\zeta, a) + P_{j+1}(a)$$

avec

$$F_{j+1}(z_{j+1}, \zeta, a) = F \left(z_{j+1} + \sum_{i=0}^j U_i(\zeta, a), \zeta, a \right) - F \left(\sum_{i=0}^j U_i(\zeta, a), \zeta, a \right)$$

$$\begin{aligned} L_{j+1}(\zeta, a) &= F \left(\sum_{i=0}^j U_i(\zeta, a), \zeta, a \right) - F \left(\sum_{i=0}^{j-1} U_i(\zeta, a), \zeta, a \right) \\ &\quad - F \left(\sum_{i=0}^j U_i(0, a), 0, a \right) + F \left(\sum_{i=0}^{j-1} U_i(0, a), 0, a \right) \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial U_j}{\partial \zeta}(\zeta, a) + \varepsilon \frac{\partial U_j}{\partial \zeta}(0, a). \end{aligned}$$

$$P_{j+1}(a) = P_j(a) + Q_{j+1}(a)$$

$$\begin{aligned} Q_{j+1}(a) &= F \left(\sum_{i=0}^j U_i(0, a), 0, a \right) - F \left(\sum_{i=0}^{j-1} U_i(0, a), 0, a \right) \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial U_j}{\partial \zeta}(0, a). \end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, des calculs analogues à ceux de (7.3.2) conduisent sans difficulté aux inégalités attendues.

7.3.5. Jusqu'où pousser la récurrence ?

Pour satisfaire les points (ii), et (iii) du théorème, il suffit d'effectuer j_0 changements de variable du type précédent, où j_0 est tel que :

$$\begin{cases} 2^{-j_0} = e^{-d/|\varepsilon|} \text{ avec } d \gg 0 \\ |r - j_0 k \varepsilon| \gg r_0. \end{cases}$$

Le nombre j_0 doit donc vérifier la double inégalité :

$$0 \ll j_0 |\varepsilon| \ll \frac{r - r_0}{k}.$$

Le choix d'un tel nombre est toujours possible puisque $|\varepsilon|$ est infiniment petit non nul et que $(r - r_0)/k$ est standard strictement positif.

On pose alors $S_j(\zeta, a) = \sum_{i=0}^{j-1} U_i(\zeta, a)$ et $S(\zeta, a) = S_{j_0}(\zeta, a)$. La fonction S est le résultat de notre procédé de sommation appliqué à la série de terme général U_i .

7.3.6. Nouvelles estimations.

Pour terminer la démonstration, il faut se livrer à de nouvelles estimations asymptotiques qui vont permettre d'obtenir le caractère ε -développable des objets introduits.

(i) Pour $(z, \zeta, a) \in \mathfrak{D}(r_0, r_0, \rho)$ et $j \leq j_0$, on a

$$|S_j(\zeta, a)| = |\varepsilon| \mathcal{L}$$

d'après (i) de la propriété de récurrence (7.3.3).

(ii) Pour $(z, \zeta, a) \in \mathfrak{D}(r_0, r_0, \rho)$ et $j \leq j_0$, on a

$$|F(z + S_j(\zeta, a), \zeta, a) - F(S_j(\zeta, a), \zeta, a)| \leq |z|^2 \mathcal{L} + |\varepsilon| |z| \mathcal{L}$$

d'après la première égalité de (7.3.2).

(iii) Pour $(z, \zeta, a) \in \mathfrak{D}(r_0, r_0, \rho)$ et n un nombre entier standard, on a

$$|U_n(\zeta, a)| = |\varepsilon|^{n+1} \mathcal{L}.$$

Ceci découle d'une récurrence externe basée sur l'implication

$$|U_j(\zeta, a)| = |\varepsilon|^{j+1} \mathcal{L} \Rightarrow \left(\frac{\partial U_j}{\partial \zeta}(\zeta, a) = |\varepsilon|^{j+1} \mathcal{L} \quad \text{et} \quad |L_{j+1}(\zeta, a)| = |\varepsilon|^{j+2} \mathcal{L} \right)$$

valable sur $\mathfrak{D}(r_0, r_0, \rho)$ pour tout entier standard j . Cette implication repose sur le fait que, pour j standard, U_j est une fonction analytique régulièrement développable en ε -ombre dans l'expression de laquelle ε^{j+1} est en facteur, ainsi que sur la calcul de L_{j+1} dans (7.3.4) et sur (ii).

7.3.7. La fonction S est régulièrement développable en ε -ombre.

Pour tout nombre entier n standard, la fonction U_n est régulièrement développable en ε -ombre sur $\mathfrak{D}(r_0, r_0, \rho)$. Ainsi, pour un tel n , S_n est aussi régulièrement développable en ε -ombre. Pour montrer que S est développable en ε -ombre, il suffit de vérifier que, pour tout n standard, on a sur $\mathfrak{D}(r_0, r_0, \rho)$:

$$\left| \sum_{i=n}^{j_0-1} U_i(\zeta, a) \right| = |\varepsilon|^{n+1} \mathcal{L}.$$

Or, le système différentiel (\mathcal{S}_n) est l'analogue du système (\mathcal{S}) , avec pour différence que maintenant ε^{n+1} est en facteur du terme libre L . On peut donc appliquer l'analogue de la récurrence (7.3.3) à (\mathcal{S}_n) pour obtenir de nouvelles estimations pour $0 \leq j \leq j_0 - n - 1$ valables sur $\mathfrak{D}(r_0, r_0, \rho)$

$$|U_{n+j}(\zeta, a)| \leq \frac{b|\varepsilon|^{n+1}}{2^j}$$

avec b standard indépendant de j . D'où le résultat

$$\left| \sum_{i=n+1}^{j_0-1} U_i(\zeta, a) \right| = |\varepsilon|^{n+1} \mathcal{L}.$$

Les inégalités de Cauchy donnent la même estimation pour toute dérivée partielle d'ordre standard sur tout domaine $\mathfrak{D}(r_1, r_1, \rho_1)$ avec $0 \ll r_1 \ll r_0$ et $0 \ll \rho_1 \ll \rho_0$. Ce dernier argument prouve en fait que S est régulièrement développable en ε -ombre sur $\mathfrak{D}(r_1, r_1, \rho_1)$. Donc, quitte à se donner une marge de sécurité dès le début de la démonstration, on obtient que S est régulièrement développable en ε -ombre sur $\mathfrak{D}(r_0, r_0, \rho)$.

7.3.8. Etude finale de la fonction \mathfrak{P} .

En fait la fonction \mathfrak{P} a pour expression :

$$\mathfrak{P}(a) = P_{j_0}(a) = P(a) + F(S(0, a), 0, a) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} S(0, a).$$

Ce qui précède prouve le caractère régulièrement développable de \mathfrak{P} . De plus, dans le développement de \mathfrak{P} , les termes de degré inférieur ou égal à un en ε ne peuvent provenir que de $P(a)$.

8. Démonstration

des théorèmes 5.4.1 et 5.4.2 : une explication de la fugacité.

8.1. D'après (4.1), on est ramené à la recherche des valeurs de surstabilité d'une équation préparée (\mathcal{S}_a) (voir (4.2)). Le théorème de sommation (6.2) prouve l'existence d'un changement de variable $z = \zeta + S(\zeta, a)$ avec S analytique et infiniment petite qui transforme (\mathcal{S}_a) en

l'équation (\mathfrak{S}_a) suivante :

$$\varepsilon \frac{d\mathfrak{z}}{d\zeta} = A(\zeta)\mathfrak{z} + \mathfrak{F}(\mathfrak{z}, \zeta, a) + \mathfrak{L}(\zeta, a) + \mathfrak{P}(a)$$

avec les propriétés énoncées dans ce théorème. En particulier, on a

$$A(\zeta) = \frac{\partial f_0}{\partial x} (\varphi(y_0 + \zeta), y_0 + \zeta, \alpha_0),$$

et il existe une constante $c > 0$ non infiniment petite telle que

$$|\mathfrak{L}(\zeta, a)| \leq e^{-c/|\varepsilon|}.$$

De plus, il résulte du même théorème et des estimations (7.3.6) que, pour \mathfrak{z} infiniment petit

$$|\mathfrak{F}(\mathfrak{z}, \zeta, a)| = |\mathfrak{z}|\mathcal{O}.$$

Toujours d'après le théorème (6.2) et les calculs précédents, \mathfrak{P} est une fonction régulièrement développable en ε -ombre de développement $\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon^i \mathfrak{P}_i(a)$ avec

$$\mathfrak{P}_1(a) = \widehat{P}_0(a) = a \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} (x_0, y_0, \alpha_0) + f_1(x_0, y_0, \alpha_0) - \frac{d\varphi}{dy} (y_0).$$

On peut donc écrire $\mathfrak{P}(a) = \varepsilon \widehat{\mathfrak{P}}(a)$ et la fonction $\widehat{\mathfrak{P}}$ est régulièrement développable en ε -ombre avec \mathfrak{P}_1 pour première approximation.

8.2. Si $\frac{\partial f_0}{\partial \alpha} (x_0, y_0, \alpha_0) \neq 0$, on peut considérer le nombre standard a_1 tel que $\mathfrak{P}_1(a_1) = 0$; de plus, on a :

$$\frac{d\mathfrak{P}_1}{da} (a_1) \neq 0.$$

La fonction $\widehat{\mathfrak{P}}$ vérifie alors les hypothèses de la version perturbée du théorème d'inversion locale [9] :

Soit ψ une application régulièrement développable en ε -ombre définie sur un ouvert standard Ω de \mathbb{K}^n (avec n standard) et à valeurs dans \mathbb{K}^n . Soit x_0 un point standard de Ω en lequel la différentielle de l'ombre ψ_0 de ψ est un isomorphisme. Alors, ψ est une bijection du halo de x_0 sur le halo de $\psi_0(x_0)$ et ψ^{-1} est régulièrement développable en ε -ombre (le halo d'un point est l'ensemble des points qui lui sont infiniment proches).

Ce théorème permet d'affirmer l'existence d'un unique nombre $a_{\#}$ infiniment proche de a_1 et développable en ε -ombre tel que $\widehat{\mathfrak{P}}(a_{\#})$ soit nul. D'après le théorème 5.2.1, $a_{\#}$ est une valeur de surstabilité. De plus, dans le cas réel avec la condition de signe (3.3 (6)), toute autre valeur à canards a_* est telle que $\widehat{\mathfrak{P}}(a_*)$ soit exponentiellement petit relativement à ε . La fin du théorème 5.4.1 découle du lemme suivant, qui est une conséquence simple du théorème des accroissements finis.

LEMME. — Soit G une fonction régulièrement développable en ε -ombre, à valeurs dans \mathbf{K} et définie au moins sur l'ensemble des $a \in \mathbf{K}$ qui sont limités. On suppose qu'il existe $a_1 \in \mathbf{K}$ limité tel que $G(a_1) = 0$. Alors :

(i) Pour tout a exponentiellement proche de a_1 relativement à ε , $G(a)$ est exponentiellement petit relativement à ε .

(ii) Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et que $\frac{dG_0}{da}$ est appréciable en tout point limité, si $G(a)$ est exponentiellement petit en un point limité a , alors a est exponentiellement proche de a_1 relativement à ε .

8.3. Si $\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}(x_0, y_0, \alpha_0) = 0$ et $f_1(x_0, y_0, \alpha_0) \neq \frac{d\varphi}{dy}(y_0)$, pour tout a limité, le nombre standard $\mathfrak{P}_1(a)$ est non nul et *a fortiori*, $\mathfrak{P}(a)$ n'est pas exponentiellement petit relativement à ε . Le théorème 5.4.2 découle alors du théorème 5.2.1.

8.4. L'explication de la fugacité est donc là : le théorème de sommation permet de rendre exponentiellement petit le terme libre de l'équation préparée; il reste à rendre à son tour exponentiellement petit le terme perturbatif $\mathfrak{P}(a)$. Ceci est obtenu en prenant le paramètre a dans un voisinage exponentiellement étroit d'un zéro de la fonction analytique \mathfrak{P} .

Je remercie le referee contacté par les Annales de l'Institut Fourier à propos de cet article. Ses remarques ont permis d'en améliorer substantiellement la forme ainsi que le nombre et la qualité des illustrations graphiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BENOIT, Systèmes lents-rapides de \mathbf{R}^3 et leurs canards, in III^e Rencontre de Géométrie du Schnepfenried, Astérisque, 109-110, tome 2 (1983), 159-191.
- [2] E. BENOIT, Canards et enlacements, in M. Diener et G. Wallet Editeurs, Mathématiques Finitaires et Analyse Non Standard, tome 2, Publications de l'Université Paris 7, (1989), 91-104.
- [3] E. BENOIT, Equations différentielles : relation entrée-sortie, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 293 (1981), 293-296.
- [4] E. BENOIT, J.L. CALLOT, F. DIENER et M. DIENER, Chasse au canard, Collectanea Mathematica, 32, 1-3, (1981), 37-119.
- [5] B. CANDELPERGHER, « Valeurs à canards » pour l'équation : $\varepsilon z'(t) = t(z(t) - f(t)) + a(\varepsilon)$, preprint (Nice), 1990.
- [6] B. CANDELPERGHER, F. DIENER et M. DIENER, Retard à la bifurcation : du local au global, à paraître dans les actes du Colloque : « Bifurcation et orbites périodiques des champs de vecteurs du plan », Luminy, septembre 1989.
- [7] B. CANDELPERGHER, J.C. NORMAS et F. PHAM, Approche de la résurgence, (livre à paraître).
- [8] P. CARTIER, Perturbations singulières des équations différentielles et analyse non-standard, Séminaire Bourbaki 34^e année, n^o 580 (1981-82), 21-44.
- [9] A. DELCROIX, Propriétés asymptotiques des champs de vecteurs lents-rapides, Thèse, Poitiers, 1989.
- [10] F. DIENER et G. REEB, Analyse Non Standard, Hermann, Collection Enseignement des Sciences, Paris, 1989.
- [11] M. DIENER, Etude générique des canards, Thèse, Strasbourg, 1983.
- [12] J. ECALLE, Les fonctions résurgentes (en 3 volumes), Publications Mathématiques de l'Université d'Orsay.
- [13] T. ERNEUX et P. MANDEL, Imperfect bifurcation with a slowly-varying control parameter, S.I.A.M. Appl. Math., Vol. 46, n^o 1, February 1986, 1-15.
- [14] A. FRUCHARD, Canards discrets, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 307 (1988), 41-46.
- [15] A. FRUCHARD, Retard à la bifurcation dans des systèmes dynamiques discrets, Série du Séminaire Non Standard de Paris 7, 89/1 (1989), 1-8.
- [16] C. LOBRY et G. WALLET, La traversée de l'axe imaginaire n'a pas toujours lieu là où l'on croit l'observer, in M. Diener et G. Wallet Editeurs, Mathématiques Finitaires et Analyse Non Standard, Tome 2, Publications de l'Université Paris 7, (1989), 45-51.
- [17] J. MARTINET et J.P. RAMIS, Théorie de Galois différentielle et resommation, in E. Tournier Editeur, Computer Algebra and Differential Equations, Academic Press, 1989.
- [18] A.I. NEISHTADT, Persistence of stability loss for dynamical bifurcations I, Differential'nye Uravneniya, 23, n^o 12 (1987), 2060-2067.
- [19] A.I. NEISHTADT, Persistence of stability loss for dynamical bifurcations II, Differential'nye Uravneniya, 24, n^o 2 (1988), 226-233.
- [20] E. NELSON, Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis, Bulletin A.M.S., 83, n^o 6 (1977), 1165-1198.

- [21] G. WALLET, Entrée-sortie dans un tourbillon, *Ann. Inst. Fourier*, 36-4 (1986), 157-184.
- [22] G. WALLET, Dérive lente du champ de Lienard, in M. Diener et G. Wallet Editeurs, *Mathématiques Finitaires et Analyse Non Standard*, tome 2, Publications de l'Université Paris 7, (1989), 45-51.
- [23] A.K. ZVONKIN and M.A. SHUBIN, Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations, *Russian Math. Surveys* 39, n° 2 (1984), 69-131.

Manuscrit reçu le 26 février 1990,
révisé le 28 juin 1990.

Guy WALLET,
Université de Poitiers
Laboratoire de Mathématiques
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers.