ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANÇOIS PARREAU

Ergodicité et pureté des produits de Riesz

Annales de l'institut Fourier, tome 40, nº 2 (1990), p. 391-405

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_2_391_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 2 (1990), 391-405.

ERGODICITÉ ET PURETÉ DES PRODUITS DE RIESZ

par François PARREAU

1. Introduction.

1.1. On déduit dans cet article l'ergodicité des produits de Riesz sur le tore sous une condition de lacunarité pour les fréquences, et on montre que cette condition est la meilleure possible de ce point de vue. Parallèlement, on discute pour ces mesures la propriété de pureté étudiée dans [7] ; ceci fournit l'exemple annoncé dans [7] de mesures pures non ergodiques. D'autre part l'intérêt pour les propriétés ergodiques des produits de Riesz s'est trouvé accru par la mise en évidence que les produits de Riesz sont les mesures spectrales pour une classe d'exemples de systèmes dynamiques non singuliers et la méthode développée ici permet d'établir une propriété remarquable de ces systèmes dans les cas où le produit de Riesz est ergodique ([5]).

On montre ici l'ergodicité sans connaître d'abord un groupe dénombrable de translations par rapport auquel la mesure a des propriétés particulières ; on fait appel à une propriété mutuelle des produits de Riesz qu'on avait déjà comparé à l'ergodicité dans [6], et aux propriétés des mesures concentrées sur le « groupe de quasi-invariance » d'une autre mesure ([1], [5]).

Cet article tire profit de ma collaboration avec B. Host ; les propositions 1 et 2 sont des résultats de [6] et la proposition 3 est un résultat commun.

Mots-clés : Produits de Riesz - Mesure ergodique - Lacunarité.
Classification A.M.S. : 43A05 - 42A55 - 28Dxx.

1.2. $\mathbf{T}$ est identifié à $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$; pour $x \in \mathbf{T}$, on note $\|x\| = |1-e^{ix}|$. $M(\mathbf{T})$ désigne l'espace des mesures boréliennes complexes sur $\mathbf{T}$; la transformée de Fourier d'une mesure μ de $M(\mathbf{T})$ en $n \in \mathbf{Z}$ est notée $\hat{\mu}(n) = \int e^{-inx}\, d\mu(x)$ et la mesure de Dirac en un point x de $\mathbf{T}$ est notée $\delta(x)$. Pour deux mesures positives de $M(\mathbf{T})$, l'équivalence $\mu \approx \nu$ signifie $\mu \ll \nu$ et $\nu \ll \mu$.

Une mesure positive μ de $M(\mathbf{T})$ est *ergodique* (cf. [3], [4]) s'il existe un sous-groupe dénombrable D de $\mathbf{T}$ tel que, pour tout borélien E de $\mathbf{T}$ invariant par les translations de D, $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E^c) = 0$. Selon [7], on dira que μ est *pure* si, pour tous boréliens E, F avec $\mu(E) > 0$ et $\mu(F) > 0$, il existe $x \in \mathbf{T}$ tel que $\mu((E-x)\cap F) > 0$; il est équivalent de dire que, si $\mu(E) > 0$, μ est portée par une réunion dénombrable de translatés de E.

On note $\mu = \prod_{j\geq 1} (1+\mathrm{Re}\, a_j e^{in_jt})$ le produit de Riesz de coefficients a_j basé sur la suite dissociée $(n_j)_{j\geq 1}$. Rappelons que (n_j) est dissociée si tout entier n admet au plus une décomposition $n = \Sigma\varepsilon_j n_j$, où $\varepsilon_j = -1$, 0 ou 1 pour tout j et $\varepsilon_j = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices ; les coefficients a_j sont des complexes de module $\leqslant 1$ (voir [2], [3], [4], [9] ; on donnera au § 3 la construction de produits de Riesz généralisés). Dans [2], G. Brown avait montré que μ est ergodique si n_{j+1} est un multiple de n_j pour tout j (en fait sous une condition un peu plus large) et que par contre, avec $n_j = 3^j - 1$ pour tout j et des coefficients constants, μ n'est pas ergodique. Il conjecturait qu'une condition arithmétique est nécessaire pour l'ergodicité. Le théorème 1 prouve que non, mais pour construire des contre-exemples (théorème 2), la suite (n_j) ne doit ni avoir de bonnes propriétés arithmétiques, ni être très lacunaire.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mu = \prod_{j\geq 1} (1+\mathrm{Re}\, a_j\, e^{in_jt})$ *un produit de Riesz sur* $\mathbf{T}$.

(a) *Si* $\sum_{j\geq 1} |a_j|^2(n_j/n_{j+1})^2 < +\infty$, μ *est ergodique.*

(b) *Si* $\sum_{j\geq 1} |a_j|^2(n_j/n_{j+1})^4 < +\infty$ *et* $\limsup_{j\to\infty} |a_j| < 1$, μ *est une mesure pure.*

THÉORÈME 2. — *Soit* $\mu = \prod_{j\geq 1} (1+\mathrm{Re}\, a_j\, e^{in_jt})$ *un produit de Riesz sur* $\mathbf{T}$. *Pour tout* $j \geqslant 1$, *on suppose que* $n_{j+1} = m_jn_j + 1$, *où* m_j *est un entier* $\geqslant 1$, *et on note* $a'_j = \mathrm{Min}\,(|a_j|, m_j|a_{j+1}|)$.

(a) *Si* $\sum_{j\geqslant 1} a_j'^2/m_j^2 = +\infty$, μ *est étranger à tous ses translatés, et* μ *n'est pas ergodique.*

(b) *Si* $\sum_{j\geqslant 1} a_j'^2/m_j^4 = +\infty$, μ *est concentré sur un ensemble borélien* E *de* $\mathbf{T}$ *tel que* $\mu(E+x) = 0$ *pour tout* $x \neq 0$, *et* μ *n'est pas une mesure pure.*

COROLLAIRE. — *Il existe une mesure continue pure* μ sur $\mathbf{T}$ *qui est étrangère à toutes ses translatées, et n'est donc pas ergodique.*

2. Quelques remarques sur l'ergodicité et la pureté.

On donne d'abord ici un résultat qui précise la relation entre les notions d'ergodicité et de pureté, puis des lemmes qui seront utilisés pour démontrer l'ergodicité ou la pureté des produits de Riesz. Pour deux mesures positives μ et ν de $M(\mathbf{T})$, l'équivalence $\mu \approx \nu$ signifie $\mu \ll \nu$ et $\nu \ll \mu$, et $\mu \not\perp \nu$ signifie que μ et ν ne sont pas étrangères. On notera

$$A(\mu) = \{x \in \mathbf{T}\,;\, \delta(x) * \mu \not\perp \mu\}$$

et

$$H(\mu) = \{x \in \mathbf{T}\,;\, \delta(x) * \mu \approx \mu\}.$$

$H(\mu)$ est le « *groupe de quasi-invariance* » de μ étudié dans [1] et [5]. C'est un sous-groupe borélien du tore. $A(\mu)$ est aussi un ensemble borélien ([3], 8.3.3.).

2.1. Il serait plus naturel de ne définir l'ergodicité d'une mesure μ de $M(\mathbf{T})$ par rapport à un sous-groupe dénombrable D de $\mathbf{T}$ que lorsque les translations de D laissent μ quasi-invariante (c'est-à-dire $D \subset H(\mu)$). Cependant, comme on peut associer à toute mesure une mesure quasi-invariante par les translations de D ayant essentiellement les mêmes propriétés et que les exemples les plus simples, fournis par les convolutions infinies de probabilités discrètes, n'ont pas cette propriété de quasi-invariance, la définition donnée ici est devenue classique en analyse harmonique des mesures (cf. [3] et [4]). Il s'agit alors d'une propriété de pureté par rapport à certaines classes de boréliens du tore.

En fait, nous montrons dans [6] que l'ergodicité peut être caractérisée sans référence à un sous-groupe dénombrable et est équivalente à une propriété de pureté par rapport aux translations que l'on peut comparer à la pureté au sens de [7] :

PROPOSITION 1 ([6]). — *Soit* μ *une mesure positive de* $M(\mathbf{T})$; μ *est ergodique si et seulement si, quelles que soient les mesures* $0 < \nu \ll \mu$ *et* $0 < \nu' \ll \mu$, *il existe une translatée de* ν *qui n'est pas étrangère à* ν'.

On donne ici une démonstration moins abstraite que celle de [6] et permettant de déterminer des groupes dénombrables par rapport auxquels μ est ergodique lorsque la condition est vérifiée. Notons $L(\mu)$ le sous-espace des mesures complexes absolument continues par rapport à μ. A tout $x \in A(\mu)$ correspond l'opérateur T_x de $L(\mu)$, tel que, pour $\nu \in L(\mu)$, $T_x\nu$ est la partie absolument continue de $\delta(x) * \nu$ dans sa décomposition de Lebesgue par rapport à μ. Cela permet de définir une topologie sur $A(\mu)$ par la topologie simple-forte des opérateurs sur $L(\mu)$ et, comme $L(\mu)$ est séparable, cette topologie est métrisable et séparable. Plus précisément, étant donnée une suite $(\nu_n)_{n\geqslant 1}$ dense dans $\{\nu \in M(\mathbf{T}) ; 0 \leqslant \nu \ll \mu\}$, on définit la topologie forte de $A(\mu)$ par la distance

$$d(x,y) = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} \| T_x\nu_n - T_y\nu_n \| .$$

Supposons que μ vérifie la propriété de l'énoncé. Soit A une partie dénombrable dense de $A(\mu)$ et soit D le sous-groupe engendré par A. Si $0 < \nu \ll \mu$ et $0 < \nu' \ll \mu$, on trouve par densité un $x \in A$ avec $\delta(x) * \nu \not\perp \nu'$. Si E est un ensemble D-invariant, il en résulte que l'une des mesures $\nu = 1_E\,\mu$ et $\nu' = \mu - \nu$ doit être nulle, donc que μ est ergodique par rapport à D.

Inversement, s'il existe deux mesures $0 < \nu$, $\nu' \ll \mu$ avec $\delta(x) * \nu \perp \nu'$ pour tout x, pour tout sous-groupe dénombrable D de $\mathbf{T}$, on trouve un borélien E tel que ν' soit concentrée sur E et $\delta(x) * \nu(E) = \nu(E-x) = 0$ pour tout $x \in D$; alors, ν' est concentrée sur le borélien D-invariant $F = \bigcup_{x\in D} (E-x)$ et $\nu(F) = 0$; μ n'est donc pas ergodique par rapport à D.

Il résulte de la proposition que, si μ est étrangère à toutes ses translatées, μ n'est pas ergodique (sauf si μ est une mesure de Dirac). G. Brown et W. Moran avaient déjà remarqué ([2], Prop. 8) que, si μ est ergodique par rapport au sous-groupe dénombrable D, μ reste ergodique par rapport au groupe $D \cap H$, où H désigne le sous-groupe engendré par $A(\mu)$. On a montré plus précisément ici que, si μ est ergodique, elle est ergodique par rapport à tout sous-groupe dénombrable dont l'intersection avec $A(\mu)$ est dense pour la topologie forte.

De même, il est immédiat qu'une mesure positive continue μ de $M(\mathbf{T})$ qui est concentrée sur un borélien E tel que $\mu(E+x) = 0$ pour tout $x \neq 0$ n'est pas une mesure pure : si E' et F sont deux boréliens disjoints contenus dans E (et de mesure>0), $\mu((E'+x)\cap F) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{T}$.

2.2. Lemme 1. — *Soit μ une mesure positive de $M(\mathbf{T})$; si il existe une mesure positive σ concentrée sur $H(\mu)$ et telle que $\mu \ll \sigma * \nu$ pour toute mesure $0 < \nu \ll \mu$, μ est ergodique.*

Avec les notations précédentes, pour toute mesure $0 < \nu \ll \mu$, $T_x\nu = \delta(x) * \nu$ pour tout $x \in H(\mu)$, et pour tout borélien E, $x \to \nu(E-x) = \delta(x) * \nu(E)$ est continue sur $H(\mu)$ pour la topologie forte. Si D est un sous-groupe dénombrable dense dans $H(\mu)$ pour cette topologie et E un borélien D-invariant, $\nu(E-x)$ est constante sur $H(\mu)$, donc $\sigma * \nu(E) = \int \nu(E-x)\, d\sigma(x) = \nu(E)\|\sigma\|$. Avec l'hypothèse $\mu \ll \sigma * \nu$, on a soit $\mu(E) = 0$, soit $\nu(E) > 0$ pour toute mesure $0 < \nu \ll \mu$ et μ est alors concentrée sur E. μ est donc ergodique par rapport à D.

Lemme 2. — *Soit μ une mesure positive de $M(\mathbf{T})$; si il existe une mesure positive σ telle que $\mu \ll \sigma * \nu$ pour toute mesure $0 < \nu \ll \mu$, μ est une mesure pure.*

Si E et F sont deux boréliens avec $\mu(E) > 0$ et $\mu(F) > 0$, si $\nu = 1_F\,\mu$,

$$\int \mu((E-x)\cap F)\, d\sigma(x) = \int \nu(E-x)\, d\sigma(x) = \sigma * \nu(E) > 0,$$

donc $\mu((E-x)\cap F)$ n'est pas identiquement nul.

Remarque. — Ce lemme est la partie facile du théorème 1 de [7], où nous montrons que la condition est aussi nécessaire : si μ est pure, il existe une mesure positve σ avec la propriété de l'énoncé (voir [7] pour une interprétation en termes de « L-idéaux » de l'algèbre $M(\mathbf{T})$).

3. Produits de Riesz.

La mesure auxiliaire nécessaire pour appliquer les lemmes 1 ou 2 sera un produit de Riesz généralisé au sens de [4] (chap. 5). On dit qu'une suite $(I_j)_{j\geqslant 1}$ d'ensembles finis de $\mathbf{Z}$ est dissociée si un entier s'écrit au plus d'une manière comme une somme finie Σk_j avec $k_j \in I_j$ pour tout j ; alors, étant donné, pour tout $j \geqslant 1$, un polynôme trigonométrique positif $R_j(t) = \sum_{k \in I_j} c_{j,k}\, e^{ikt}$, avec $\int R_j(t)\, dt = c_{j,0} = 1$, le produit de Riesz généralisé

$$\mu = \prod_{j\geqslant 1} R_j$$

est défini, de même qu'un produit de Riesz ordinaire, comme la limite vague dans $M(\mathbf{T})$ des mesures absolument continues $(R_1 \cdots R_J)\lambda$, où λ est la mesure de Lebesgue normalisée. La dissociation entraîne que toutes les fréquences obtenues dans le développement des produits finis sont distinctes, d'où un calcul explicite de leurs transformées de Fourier et la convergence.

On obtient

$$\hat{\mu}(k) = \prod c_{j,k_j}$$

si k s'écrit comme une somme finie $\sum_{j=1}^{J} k_j$ avec $k_j \in I_j$ pour tout j et $\hat{\mu}(k) = 0$ sinon.

La mesure μ est toujours une mesure de probabilité continue ([4]). Lorsque $n_j \in I_j$, avec $R_j(t) = 1 + \operatorname{Re} a_j e^{in_jt} = 1 + \frac{a_j}{2} e^{in_jt} + \frac{\bar{a}_j}{2} e^{-in_jt}$ pour tout j, on a le produit de Riesz ordinaire comme cas particulier.

Il est immédiat que le produit de convolution de deux produits de Riesz généralisés $\mu = \Pi R_j$ et $\sigma = \Pi S_j$ basés sur la même suite dissociée (I_j) est le produit de Riesz $\Pi(R_j * S_j)$. Si μ est le produit de Riesz ordinaire ci-dessus, $\sigma * \mu$ est le produit de Riesz ordinaire basé sur la même suite (n_j) et de coefficients $a_j\hat{S}_j(n_j)$. La proposition suivante montre que l'hypothèse du lemme 2 est vérifiée dès que $\sigma * \mu \approx \mu$, et que l'hypothèse du lemme 1 l'est dès que σ est concentré sur $H(\mu)$ (ce qui implique aussi $\sigma * \mu \approx \mu$).

PROPOSITION 2. — *« Insécabilité des produits de Riesz ». Soient* μ *et* σ *deux produits de Riesz généralisés sur* $\mathbf{T}$. *Pour toute mesure* $0 < \nu \ll \mu$, *la mesure* $\sigma * \nu$ *est équivalente à* $\sigma * \mu$.

Ce résultat est prouvé dans [6] pour des produits de Riesz ordinaires et le cas général se démontre sans modification. On peut aussi se référer à la démonstration publiée dans [4] (chap. 4.2.3) pour le cas particulier $\sigma = \mu$ (on notera que, avec $\sigma = \prod_{j\geqslant 1} S_j$, tout produit $\sigma_n = \prod_{j>n} S_j$ est équivalent à σ, car c'est une mesure continue, $\sigma = (S_1 \cdots S_n)\sigma_n$, et le polynôme trigonométrique $S_1 \cdots S_n$ n'admet qu'un nombre fini de zéros : la restriction $\sigma \approx \sigma_n$ donnée dans [4] n'est nécessaire que pour d'autres groupes que $\mathbf{T}$).

LEMME 3. — *Soient* $\mu = \prod_{j\geqslant 1} (1+\operatorname{Re} a_j e^{in_jt})$ *et* $\nu = \prod_{j\geqslant 1} (1+\operatorname{Re} b_j e^{in_jt})$ *deux produits de Riesz basés sur la même suite dissociée.*

(a) *Si* $\sum_{j\geqslant 1} |a_j - b_j|^2 = +\infty$, μ *et* ν *sont étrangers.*

(b) *Si* $\sum_{j\geqslant 1} |a_j - b_j|^2 < +\infty$ *et* $\limsup_{j\to\infty} |a_j| < 1$, μ *et* ν *sont équivalents.*

(c) $H(\mu) = \left\{ x \in \mathbf{T} \,;\, \sum_{j\geqslant 1} |a_j|^2 \|n_j x\|^2 \leqslant +\infty \right\} = A(\mu)$.

(a) et (b) sont des résultats classiques, dus principalement à J. Peyrière et à G. Brown et W. Moran (voir [3], chap. 7) ; la restriction $\limsup_{j\to\infty} |a_j| < 1$ dans (b) peut être affaiblie, mais non supprimée ; (voir les résultats récents de S. J. Kilmer et S. Saeki [9]). En fait, si $|a_j| = |b_j|$ pour tout j et $\sum_{j\geqslant 1} |a_j - b_j|^2 < +\infty$, μ et ν sont équivalents ; ce résultat apparemment nouveau sera démontré au § 6 (corollaire 1). Or, pour $x \in \mathbf{T}$, le translaté $\delta(x) * \mu$ de μ est le produit de Riesz $\Pi(1+\operatorname{Re} a_j e^{in_j(t-x)})$, basé sur (n_j) et de coefficients $a_j e^{in_jx}$ de mêmes modules que les a_j. On a donc $\delta(x) * \mu \approx \mu$ ou $\delta(x) * \mu \perp \mu$ selon la convergence de la série $\sum_{j\geqslant 1} |a_j|^2 |1 - e^{-in_jx}|^2$.

4. Démonstration du théorème 1.

Soit $\mu = \Pi(1+\mathrm{Re}\, a_j e^{in_jt})$. On va construire une suite dissociée $(I_j)_{j\geqslant 1}$, avec $n_j \in I_j$ pour tout j, de sorte que μ pourra aussi être considéré comme un produit de Riesz généralisé basé sur (I_j), et un autre produit de Riesz généralisé σ basé sur (I_j) de façon à pouvoir appliquer les lemmes.

Sous l'une ou l'autre des hypothèses de l'énoncé, on pourra supposer $\frac{n_{j+1}}{n_j} \geqslant 2$ pour tout j, quitte à supprimer les termes pour une sous-suite d'indices telle que $\Sigma|a_j|^2 < +\infty$ et donc à remplacer μ par une mesure équivalente. Soient, pour $j \geqslant 1$, m_j la partie entière de $\frac{n_{j+1}}{2n_j}$ et $I_j = \{mn_j\,;\,|m|<m_j\}$; le fait que cette suite de progressions arithmétiques est dissociée résulte de $\sum_{k<j} 2(m_k-1)n_k < n_j$ pour tout j. Une suite $(P_m)_{m\geqslant 1}$ de polynômes trigonométriques positifs $P_m(t) = \sum_{|k|<m} c_{m,k}e^{ikt}$, avec $c_{m,0} = 1$ pour tout m, définit le produit de Riesz généralisé

$$\sigma = \prod_{j\geqslant 1} P_{m_j}(n_jt)$$

basé sur (I_j). Alors $\sigma * \mu$ est le produit de Riesz ordinaire $\Pi\, 1 + \mathrm{Re}\,(a_j c_{m_j,1}e^{in_jt})$ basé sur (n_j) et de coefficients $b_j = a_j c_{m_j,1}$.

Soit, pour $m \geqslant 1$,

$$P_m(t) = \frac{2}{m+1}\left|\sum_{k=1}^{m} \sin\frac{k\pi}{m+1}\, e^{ikt}\right|^2 ;$$

le développement donne bien $c_{m,0} = \frac{2}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \sin^2\frac{k\pi}{m+1} = 1$, et

$$c_{m,1} = \frac{2}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \sin\frac{k\pi}{m+1}\sin\frac{(k+1)\pi}{m+1} = \cos\frac{\pi}{m+1},$$

d'où

$$1 - c_{m_j,1} = 1 - \cos\frac{\pi}{m_j+1} \leqslant \frac{\pi^2}{2(m_j+1)^2} \leqslant 2\pi^2\left(\frac{n_j}{n_{j+1}}\right)^2.$$

Sous l'hypothèse $\sum_{j\geqslant 1} |a_j|^2(n_j/n_{j+1})^4 < +\infty$, on a

$$\sum_{j\geqslant 1} |a_j-b_j|^2 = \sum_{j\geqslant 1} |a_j(1-c_{m_j,1})|^2 < +\infty\,;$$

avec de plus $\limsup_{j\to\infty} |a_j| < 1$, $\sigma * \mu$ et μ sont équivalentes d'après le lemme 3 (b) et μ est pure d'après la proposition 2 et le lemme 2.

Sous l'hypothèse $\sum_{j\geqslant 1} |a_j|^2(n_j/n_{j+1})^2 < +\infty$, on obtient

$$\sum_{j\geqslant 1} |a_j|^2|1-c_{m_j,1}| < +\infty\,;$$

or, comme $1 - \cos n_jx = \frac{1}{2}\|n_jx\|^2$,

$$\begin{aligned}\int \sum_{j\geqslant 1} |a_j|^2\|n_jx\|^2\,d\sigma(x) &= 2\sum_{j\geqslant 1}|a_j|^2\int(1-\cos n_jt)\,d\sigma(t)\\ &= 2\sum_{j\geqslant 1}|a_j|^2(1-\operatorname{Re}\hat{\sigma}(n_j)) \leqslant 2\sum_{j\geqslant 1}|a_j|^2|1-c_{m_j,1}|\,;\end{aligned}$$

donc $\sum_{j\geqslant 1} |a_j|^2\|n_jx\|^2 < +\infty$ σ-presque partout ; σ est concentrée sur $H(\mu)$, ce qui entraîne aussi $\sigma * \mu \approx \mu$, et d'après la proposition 2 et le lemme 1, μ est ergodique.

Remarque. — Les polynômes P_m ont été choisis de façon que $|1-c_{m,1}|$ soit minimal avec les conditions données (P_m doit être positif, de fréquences dans $]-m,m[$, avec $c_{m,0}=1$). On aurait pu choisir toute suite (P_m) avec ces conditions et $1 - c_{m,1} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)\cdot$ On peut de même améliorer les résultats de [9] en utilisant pour les démonstrations une telle suite de polynômes au lieu des noyaux de Fejer habituels.

5. Démonstration du théorème 2.

Avec les notations de l'énoncé, pour tout $x\in\mathbf{T}$ et tout $j\geqslant 1$, $n_{j+1}x = m_jn_jx + x$, donc

$$m_j\|n_jx\| + \|n_{j+1}x\| \geqslant \|x\|,$$

$$|a_j|^2\|n_jx\|^2 + |a_{j+1}|^2\|n_{j+1}x\|^2 \geqslant a_j'^2\left(\|n_jx\|^2+\frac{1}{m_j^2}\|n_{j+1}x\|^2\right) \geqslant \frac{1}{2}\frac{a_j'^2}{m_j^2}\|x\|^2.$$

Si $\sum_{j\geqslant 1} (a'_j/m_j)^2 = +\infty$, on trouve

$$2\sum_{j\geqslant 1} |a_j|^2\|n_jx\|^2 \geqslant \sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{2}(a'_j/m_j)^2\|x\|^2 = +\infty$$

pour tout $x \neq 0$, donc $H(\mu) = \{0\}$, ce qui prouve (a).

LEMME 4. — *Si $\sum_{j\geqslant 1} (a'^2_j/m_j^4) = +\infty$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une suite finie de coefficients $(c_j)_{1\leqslant j\leqslant J}$ telle que $c_j a_j \geqslant 0$ pour tout j,*

$$\sum_{j=1}^{J} |c_j|^2 < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{J} c_j a_j\|n_jx\|^2 \geqslant \|x\|^2 \qquad \textit{pour tout } x\in \mathbf{T}.$$

Sous l'hypothèse donnée, on peut trouver une suite finie de coefficients $c'_j \geqslant 0 (1\leqslant j\leqslant J-1)$ tels que $\Sigma(c'_j a'_j/m_j^2)\geqslant 4$ et $\Sigma c'^2_j < \varepsilon/4$. On choisit ensuite les c_j de module $c'_{j-1} + c'_j$ (sauf $|c_1| = c'_1$ et $|c_J| = c'_{J-1}$) et de sorte que $c_j a_j$ soit réel $\geqslant 0$. Alors

$$c_j a_j\|n_jx\|^2 + c_{j+1}a_{j+1}\|n_{j+1}x\|^2 \geqslant c'_j a'_j\left(\|n_jx\|^2 + \frac{1}{m_j^2}\|n_{j+1}x\|^2\right) \geqslant \frac{c'_j a'_j}{2m_j^2}\|x\|^2$$

et

$$\sum_{j=1}^{J} c_j a_j\|n_jx\|^2 \geqslant \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{J}\frac{c'_j a'_j}{m_j^2}\|x\|^2 \geqslant \|x\|^2.$$

Reprenons maintenant la démonstration de singularité mutuelle des produits de Riesz (voir [3], chap. 7.2). Pour tout $k \geqslant 1$, soit $(c_{k,j})$ une suite finie de coefficients vérifiant les conditions du lemme avec $\varepsilon = 1/k^4$, et soit

$$f_k(t) = \sum_j c_{k,j}\left(e^{-in_jt} - \frac{1}{2}a_j\right).$$

Les fonctions $e^{-in_jt} - \frac{1}{2}a_j$ étant orthogonales dans $L^2(\mu)$ et de norme $\leqslant 1$ (cela résulte d'un calcul simple et classique), on a $\|f_k\|_{L^2(\mu)} \leqslant \left(\sum_j |c_{k,j}|^2\right)^{1/2} < 1/k^2$, d'où

$$f_k(t) \to 0 \quad \mu - p.p.(t);$$

autrement dit, μ est concentrée sur le borélien $E = \{t; f_k(t)\to 0\}$; on va montrer $\mu(E+x) = 0$ pour tout $x \neq 0$.

Soit $x \in \mathbf{T}$; on a de même

$$\sum_j c_{k,j} e^{in_j x}\left(e^{in_j t} - \frac{1}{2} a_j\right) \to 0 \quad \mu - p.p.(t),$$

soit

$$f_k(t-x) + \frac{1}{2} \sum_j c_{k,j} a_j (1 - e^{in_j x}) \to 0 \quad \mu - p.p.(t).$$

Si $t \in E + x$, $f_k(t-x)$ tend vers 0 donc $\mu(E+x)$ ne peut être > 0 que si le second terme tend vers 0. Or, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_j c_{k,j} a_j (1 - e^{in_j x})\right) = \sum_j c_{k,j} a_j (1 - \cos n_j x) \geqslant \frac{1}{2} \sum_j c_{k,j} a_j \| n_j x \|^2 \leqslant \frac{1}{2} \| x \|^2$$

et on trouve bien $\mu(E+x) = 0$ pour tout $x \neq 0$.

Remarque. — Nous ne savons pas si un produit de Riesz est ergodique dès que son groupe de quasi-invariance est infini.

6. Équivalence et ergodicité de produits de Riesz généralisés.

Bien qu'on ne puisse pas espérer des résultats aussi complets pour les produits de Riesz généralisés, on peut donner quelques conditions d'équivalence ou d'ergodicité. Ces résultats sont utiles pour des constructions où les produits de Riesz ordinaires ne peuvent pas être utilisés (voir [8]). La proposition suivante donne un résultat intéressant même pour les produits de Riesz ordinaires.

PROPOSITION 3. — *Soit $(I_j)_{j \geqslant 1} = (K_j - K_j)_{j \geqslant 1}$ une suite dissociée et soient, pour $j \geqslant 1$,*

$$R_j(t) = \sum_{k \in K_j} c_{j,k} e^{ik_t} \qquad et \qquad S_j(t) = \sum_{k \in K_j} d_{j,k} e^{ik_t},$$

avec

$$\sum_{k \in K_j} |c_{j,k}|^2 = \sum_{k \in K_j} |d_{j,k}|^2 = 1.$$

Si

$$\sum_{j \geqslant 1} \sum_{k \in K_j} |c_{j,k} - d_{j,k}|^2 < +\infty,$$

les produits de Riesz généralisés $\rho = \prod_{j \geqslant 1} |R_j|^2$ *et* $\sigma = \prod_{j \geqslant 1} |S_j|^2$ *basés sur* (I_j) *sont équivalents.*

Il suffit de montrer $\sigma \ll \rho$ sous la condition donnée. Pour $p \geqslant 1$, soit $f_p = \prod_{j=1}^{p} (S_j/R_j)$; ρ étant une mesure continue, $|f_p|^2\rho$ est bien défini et égal au produit de Riesz

$$\tau_p = \prod_{j=1}^{p} |S_j|^2 \prod_{j>p} |R_j|^2 .$$

Lorsque p tend vers l'infini, (τ_p) converge vaguement vers σ et on obtiendra $\sigma \ll \rho$ si on montre que $(|f_p|^2)$ converge dans $L^1(\rho)$. Il suffit pour cela de montrer que $|f_p|$ converge dans $L^2(\rho)$. Soient $p \geqslant 1$ et $q \geqslant p$;

$$\int (|f_q|-|f_p|)^2\, d\rho = 2 - 2\int |f_p f_q|\, d\rho \leqslant 2 - 2\left|\int \bar{f}_p f_q\, d\rho\right| .$$

La mesure $(\bar{f}_p f_q)\rho$ s'écrit comme un produit de Riesz :

$$(\bar{f}_p f_q)\rho = \prod_{j=1}^{p} |S_j|^2 \prod_{j=p+1}^{q} S_j \bar{R}_j \prod_{j>q} |R_j|^2 ;$$

chacun des polynômes a ses fréquences dans $K_j - K_j = I_j$, et on calcule la transformée de Fourier des produits finis comme pour un produit de polynômes positifs basés sur des ensembles dissociés ; la modification d'un nombre fini de termes ne change rien à la convergence. En particulier, l'intégrale de la mesure est le produit des coefficients constants :

$$\int \bar{f}_p\, f_q\, d\rho = \prod_{j=p+1}^{q} \left(\sum_{k \in K_j} d_{j,k}\, \bar{c}_{j,k} \right) .$$

Pour tout j, comme $\sum_{k \in K_j} |c_{j,k}|^2 = \sum_{k \in K_j} |d_{j,k}|^2 = 1$, on a

$$1 - \mathrm{Re}\left(\sum_{k \in K_j} d_{j,k}\, \bar{c}_{j,k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k \in K_j} |c_{j,k} - d_{j,k}|^2$$

et $\left| \sum_{k \in K_j} d_{j,k}\, \bar{c}_{j,k} \right| \leqslant 1$, d'où

$$\begin{aligned} 1 - \prod_{j=p+1}^{q} \left| \sum_{k \in K_j} d_{j,k} \bar{c}_{j,k} \right| &\leqslant \sum_{j=p+1}^{q} \left(1 - \left| \sum_{k \in K_j} d_{j,k} \bar{c}_{j,k} \right| \right) \\ &\leqslant \frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^{q} \sum_{k \in K_j} |c_{j,k} - d_{j,k}|^2 . \end{aligned}$$

On a donc

$$\int (|f_q|-|f_p|)^2\,d\rho \leqslant 2 - 2\left|\int \bar{f}_p f_q\,d\rho\right| \leqslant \sum_{j=p+1}^{q} \sum_{k\in K_j} |c_{j,k}-d_{j,k}|^2,$$

et d'après l'hypothèse, $(|f_p|)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\rho)$.

COROLLAIRE 1. — *Si* $|a_j| = |b_j|$ *pour tout* $j \geqslant 1$ *et* $\sum_{j\geqslant 1} |a_j-b_j|^2 < +\infty$, *les produits de Riesz* $\prod_{j\geqslant 1} (1+\mathrm{Re}\, a_j\, e^{in_jt})$ *et* $\prod_{j\geqslant 1} (1+\mathrm{Re}\, b_j\, e^{in_jt})$ *sont équivalents.*

$1 + \mathrm{Re}\, a_j e^{in_jt}$ s'écrit $|c_j+c'_j e^{in_jt}|^2$, si $|c_j|^2 + |c_j|^2 = 1$ et $c_jc'_j = \frac{1}{2}a_j$; on peut choisir c_j réel positif et supérieur ou égal à $|c'_j|$, donc à $2^{-1/2}$. On écrit de même $1 + \mathrm{Re}\, b_je^{in_jt} = |d_j+d'_je^{in_jt}|^2$ avec $d_j \geqslant |d'_j|$. Alors $c_j = d_j$ et la condition de la proposition se réduit à

$$\sum_{j\geqslant 1} |c'_j-d'_j|^2 = \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{4c_j^2}|a_j-b_j|^2 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{j\geqslant 1} |a_j-b_j|^2 < +\infty.$$

Remarque. — Pour les produits de Riesz ordinaires, dans le cas où les coefficients n'ont pas même module, on ne trouve pas de condition meilleure que celle donnée dans [3], mais le calcul est plus simple.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $(I_j)_{j\geqslant 1}$ *une suite dissociée de progressions arithmétiques* $I_j = \{kn_j\,;\,|k|<k_j\}$ *dans* $\mathbf{Z}$ *et* ρ *un produit de Riesz généralisé basé sur* (I_j).

(a) $H(\rho)$ *contient le groupe* $\left\{x\in\mathbf{T}\,;\,\sum_{j\geqslant 1} k_j^2\,\|n_jx\|^2<+\infty\right\}$.

(b) *Si* $\sum_{j\geqslant 1} (k_jn_j/n_{j+1})^2 < +\infty$, ρ *est ergodique.*

Pour $j \geqslant 1$, soit $K_j = \{kn_j;\, 0\leqslant k<k_j\}$; tout polynôme trigonométrique positif à fréquences dans I_j est le carré du module d'un polynôme à fréquences dans K_j. ρ s'écrit donc $\prod_{j\geqslant 1} |R_j|^2$, où pour tout j

$$R_j(t) = \sum_{k=0}^{k_j-1} c_{j,k}e^{ikn_jt} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{k=0}^{k_j-1} |c_{j,k}|^2 = 1.$$

Pour tout $x \in \mathbf{T}$, $\delta(x) * \rho$ est alors le produit de Riesz $\prod_{j \geqslant 1} |R_j(t-x)|^2$, et

$$R_j(t-x) = \sum_{k=0}^{k_j-1} c_{j,k} e^{-ikn_jx} e^{ikn_jt}.$$

D'après la proposition, on a l'équivalence $\delta(x) * \rho \approx \rho$ si

$$\sum_{j \geqslant 1} \sum_{k=0}^{k_j-1} |c_{j,k}|^2 \, |1 - e^{-ikn_jx}|^2 < +\infty.$$

On a, pour tous $j \geqslant 1$ et $0 \leqslant k < k_j$, $\|kn_jx\| \leqslant k_j \|n_jx\|$ et, comme $\sum_{k=0}^{k_j-1} |c_{j,k}|^2 = 1$, la condition $\sum_{j \geqslant 1} k_j^2 \|n_jx\|^2 < +\infty$ assure la convergence de la série ci-dessus. Ceci prouve (a).

On démontre (b) de même que le théorème 1 (a) (§ 4). Avec le même choix des entiers m_j et des polynômes P_m, on obtient un produit de Riesz généralisé $\sigma = \prod_{j \geqslant 1} P_{m_j}(n_jt)$, basé sur une suite dissociée de progressions arithmétiques contenant les I_j, et tel que

$$\int \sum_{j \geqslant 1} k_j^2 \|n_jx\|^2 \, d\sigma(x) = 2 \sum_{j \geqslant 1} k_j^2 (1 - \operatorname{Re} \hat{\sigma}(n_j))$$
$$\leqslant C \sum_{j \geqslant 1} \frac{k_j^2}{(m_j+1)^2} \leqslant 4C \sum_{j \geqslant 1} \frac{(k_jn_j)^2}{n_j^2+1},$$

où C est une constante. σ est donc concentrée sur $H(\rho)$ et on conclut en appliquant la proposition 2 et le lemme 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Aaronson and M. Nadkarni, L^∞-eigenvalues and L^2-spectrum of non-singular transformations, Proc. London Math. Soc., (3), 55 (1987), 538-570.

[2] G. Brown, Riesz products and generalized characters, Proc. London Math. Soc., (3) (30) (1975), 209-233.

[3] C. C. Graham and O. C. McGehee, Essays in commutative Harmonic Analysis, Springer-Verlag, New York, 1979.

[4] B. Host, J.-F. Méla et F. Parreau, Analyse harmonique des mesures, Astérisque, 135-136 (1986).

[5] B. Host, J.-F. Méla and F. Parreau, Non singular transformations and spectral analysis of measures, à paraître (prépublication Dép. Math. Info. Univ. Paris-Nord, n° 90-5).

[6] B. Host et F. Parreau, Orthogonalité et propriétés spectrales dans les algèbres de convolution de mesures, Prépublication Math. Univ. Paris-Nord, n° 58 (1985).

[7] B. Host et F. Parreau, Sur une notion de pureté pour les mesures, C.R. Acad. Sci., Paris, t. 306, I (1988), 409-412.

[8] F. Parreau, Measures with real spectra, Inventiones Math., 98 (1989), 311-330.

[9] S. J. Kilmer and S. Saeki, On Riesz product measures : mutual absolute continuity and singularity, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 38-2 (1988), 63-93.

Manuscrit reçu le 31 mars 1989.

François Parreau,
Université de Paris-Nord
C.S.P.
Département de Mathématiques
et Informatique
Avenue J.-B. Clément
93430 Villetaneuse.