ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JOSEPH KLEIN

Espaces variationnels et mécanique

Annales de l'institut Fourier, tome 12 (1962), p. 1-124

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1962__12__1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
12 (1962), 1-124.

ESPACES VARIATIONNELS ET MÉCANIQUE

par **Joseph Klein** (Grenoble).

INTRODUCTION

Ce travail est une contribution à l'étude des systèmes dynamiques non conservatifs, la force généralisée dépendant à la fois des paramètres de position et de vitesse. Notre but est de généraliser le principe d'Hamilton et de représenter géométriquement les trajectoires comme géodésiques d'espaces appropriés.

Continuant les travaux d'E. Cartan, A. Lichnerowicz puis F. Gallissot ont montré qu'on pouvait placer à la base de la dynamique des systèmes une 2-forme ayant pour système associé le système des équations de Lagrange du mouvement. Cette 2-forme est définie sur l'espace fibré des directions tangentes à l'espace-temps de configuration. Nous avons pu lui donner une forme indépendante du repérage de l'espace et du temps grâce à l'introduction d'un tenseur antisymétrique, le *tenseur force* que nous substituons au vecteur force. Ce tenseur, nous l'avons déduit du vecteur force afin de rester dans le cadre de la Mécanique classique; mais c'est la démarche contraire qui devrait être faite, le tenseur force permettant de caractériser plus complètement l'état dynamique d'un système de corpuscules; le vecteur force classique est alors défini comme produit contracté du tenseur force et du vecteur vitesse.

Pour étendre le principe d'Hamilton aux systèmes non conservatifs il a fallu généraliser le calcul variationnel classique; pour interpréter géométriquement les trajectoires il a fallu généraliser les espaces de Finsler; ces généralisations font intervenir un tenseur antisymétrique d'ordre deux qui en Mécanique Analytique s'interprète comme le tenseur force du système dynamique considéré.

La 1re partie de ce travail est consacrée à la Géométrie différentielle; la plupart des résultats indiqués s'interprètent immédiatement en Mécanique Analytique à laquelle est consacrée plus particulièrement la 2e partie.

Dans le chapitre I on étudie les systèmes différentiels $A(\omega)$, $E(\omega)$, $C(\omega)$ respectivement appelés systèmes associé, extrémal et caractéristique d'une forme différentielle ω de classe C^∞ définie sur une variété différentiable V_n. On se donne ensuite sur V_n un champ de vecteurs X de classe C^∞; les trajectoires du champ X étant définies par le système différentiel $S(X)$ on étudie les formes fondamentales attachées à $S(X)$:

1) les formes ω invariantes c'est-à-dire telles que

$$\theta(X)\omega = 0;$$

2) les formes ω définissant une relation intégrale d'invariance :

$$i(X)\omega = 0;$$

3) les formes ω définissant un invariant intégral relatif :

$$i(X)\, d\omega = 0;$$

4) les formes ω définissant un invariant intégral absolu :

$$i(X)\omega = 0, \qquad i(X)\, d\omega = 0.$$

Dans le chapitre II on étudie les formes restreintes définies sur l'espace $\mathfrak{V}$ des vecteurs y non nuls tangents à V_n ou sur W espace des directions tangentes à V_n, formes dont les coefficients sont homogènes par rapport aux composantes de y (formes $\dot{h}$ dans la suite).

On définit sur ces formes l'opérateur $\dot{d}$ tel que

$$\dot{d}\omega = dx^\alpha \wedge \partial_{\dot{\alpha}}\omega \qquad \text{où} \qquad \partial_{\dot{\alpha}}\omega = \frac{\partial\omega}{\partial y^\alpha}$$

les x^α étant les coordonnées d'un point x de V_n, les y^α les composantes sur le repère naturel d'un vecteur y de l'espace tangent T_x à V_n.

On étudie en particulier l'Algèbre différentielle H des formes semi-basiques et l'on montre qu'une forme ω $\dot{d}$ fermée est la $\dot{d}$ différentielle de la forme $\frac{1}{p+k} i(y)\omega$ où p est le degré de ω les coefficients de ω étant $\dot{h}k$.

Le chapitre III est consacré au calcul variationnel classique. On montre qu'une 1-forme semi-basique de W admet des extrémales basiques si et seulement si elle est $\dot{d}$ fermée. On étudie ensuite les propriétés des vecteurs et formes d'Euler et on établit les conditions de Helmholtz exprimant qu'une 2-forme est la forme d'Euler d'une fonction $L(x, y)$. Le chapitre se termine par des considérations sur les géodésiques d'un espace de Finsler en liaison avec le calcul variationnel.

Dans le chapitre IV on étudie des généralisations du calcul variationnel classique.

Une première généralisation est basée sur la considération de chemins S-voisins d'un chemin basique de W, chemins définis par la donnée sur W d'un tenseur restreint antisymétrique $S_{\alpha\beta}$. Pour interpréter géométriquement les *S-extrémales* d'une fonction L on introduit un espace de Finsler généralisé ou espace *S-Finslérien*; un tel espace ne diffère d'un espace de Finsler que par la convention E d'E. Cartan : la torsion riemannienne $S^{\alpha}_{\beta\gamma}$ n'est plus nulle mais définie par le tenseur $S_{\alpha\beta}$.

Une deuxième généralisation est due à M. Lichnerowicz et basée elle aussi sur la considération de chemins particuliers voisins d'un chemin donné; on définit des fonctions et formes non holonomes ainsi que leurs différentielles extérieures.

Les espaces variationnels de M. Lichnerowicz (espaces $\mathfrak{L}$) sont des espaces définis par les mêmes conventions que les espaces de Finsler à partir d'une fonction non holonome L.

Dans la 2e partie consacrée plus spécialement à la *Mécanique Analytique* des systèmes dynamiques non conservatifs on considère le temps comme une $n+1$ ème variable; au lieu du vecteur force généralisée X on considère le tenseur force S, défini par :

$$S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta = \dot{d}(-X_\alpha\, dx^\alpha).$$

Ce tenseur définit avec le lagrangien L un espace S-Finslérien ou un espace $\mathfrak{L}$ dont les géodésiques sont les trajectoires du système dynamique. On montre ensuite que le système des équations du mouvement est le système associé de la 2-forme

$$\Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \qquad \text{avec} \qquad l_\alpha = \partial_{\dot\alpha} L.$$

Cette 2-forme joue un rôle fondamental dans la suite. L'existence de Ω entraîne le *théorème* généralisant un théorème de E. Cartan : la différence des circulations du vecteur vitesse $\vec{l}$ le long de 2 1-cycles C_0 et C_1 entourant un même tube de trajectoires $\mathfrak{T}$ est égal au flux à travers la 2-chaîne de $\mathfrak{T}$ de bord $C_0 - C_1$, du tenseur force $S_{\alpha\beta}$.

On étudie ensuite dans quels cas la forme Ω est fermée sur W (existence d'un potentiel vecteur global) ou admet un facteur intégrant (existence simultanée d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire).

A la forme Ω correspond la matrice antisymétrique $\begin{pmatrix} S & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ S étant la matrice $(S_{\alpha\beta})$, I la matrice unité d'ordre $n + 1$; d'où une écriture matricielle particulièrement commode des équations canoniques.

La forme Ω définit sur $\mathfrak{V}$ une structure d'espace presque symplectique ou une structure d'espace de Lee; on en déduit en particulier les conditions que doit vérifier le tenseur force pour que Ω admette un facteur intégrant.

Le chapitre VII est consacré aux systèmes dynamiques à liaisons non holonomes ; on y introduit la notion de tenseur des liaisons et on étudie en particulier les liaisons parfaites, au sens de Delassus, caractérisées par la condition dite des travaux virtuels généralisée. Les trajectoires s'interprètent comme géodésiques d'espaces S-Finslériens ou d'espaces $\mathfrak{L}$. Une généralisation du théorème de Meusnier montre que les trajectoires d'un système dynamique à liaisons parfaites non holonomes du 1er ordre sont caractérisées par le principe de moindre courbure ; on montre son équivalence avec le principe de Gauss-Appell et l'on en déduit les équations d'Appell dans le formalisme homogène.

Le dernier chapitre est relatif à quelques problèmes sur les systèmes dynamiques où la notion de tenseur force s'impose particulièrement. Un changement de repère introduit de façon immédiate un tenseur antisymétrique : le tenseur force centrifuge.

Des systèmes dynamiques à liaisons d'Appell ou à liaisons gyroscopiques sont caractérisés par un tenseur antisymétrique du 2e ordre. Les systèmes dynamiques non conservatifs, admettant une intégrale de Painlevé H = Cte indépendante du temps, tels que la force généralisée dans l'espace de configuration V_n ait des composantes de la forme

$$Q_k = S_{km} x'^m, \quad \text{avec} \quad S_{km} = - S_{mk},$$

satisfont à une généralisation du principe de Maupertuis permettant de déterminer les trajectoires indépendamment de l'horaire de parcours.

Ce chapitre se termine par des applications en Relativité Générale.

Au vecteur densité de force K_α on associe de façon naturelle un tenseur force $s_{\alpha\beta}$, tel que le système différentiel des lignes de courant soit le système associé de la 2-forme :

$$\Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} s_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Les lignes de courant sont les géodésiques d'un espace S-riemannien défini par les formes de torsion

$$\Sigma^\gamma = \left(\frac{1}{2} s_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta\right) l^\gamma.$$

Les cas, Ω fermée ou admettant un facteur intégrant, sont relatifs aux schémas classiques; les considérations des chapitres précédents donnent alors de suite, entre autres, les résultats maintenant classiques en Relativité Générale et relatifs aux lignes de courant de fluides parfaits chargés.

Ce travail a vu le jour grâce à M. A. Lichnerowicz. Qu'il trouve ici, avec toute l'admiration que je lui porte, l'expression de ma très profonde reconnaissance.

Je tiens également à exprimer ma respectueuse gratitude
à M. J. Pérès qui a bien voulu présenter mes premiers résultats à l'Académie des Sciences;
à M. J. Favard pour l'intérêt bienveillant qu'il a porté à mon travail et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le Jury;
à Mme Y. Bruhat qui a bien voulu me guider pour ma 2e thèse.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE
GÉOMÉTRIE VARIATIONNELLE GÉNÉRALISÉE

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATIONS MÉCANIQUES

PREMIÈRE PARTIE

GÉOMÉTRIE VARIATIONNELLE GÉNÉRALISÉE

CHAPITRE I

Rappels sur les variétés différentiables.

1. Soit V_n une variété différentiable à n dimensions, de classe C^∞ et X un champ de vecteurs différentiable défini sur V_n. Ce champ engendre un groupe local de transformations locales de V_n par intégration du système différentiel :

$$\frac{dx(u)}{du} = X_{x(u)}. \tag{1. 1}$$

La solution de ce système issue du point $x(0) = x$ sera notée [1]

$$x(u) = \exp(uX)x.$$

L'application différentiable $\exp(uX)$ admet une application linéaire tangente, notée $\exp(uX)'$, de l'espace vectoriel T_x tangent en x sur l'espace vectoriel $T_{x(u)}$ tangent en $x(u)$ à V_n; par image réciproque on en déduit une application linéaire, notée $\exp(uX)^*$, de l'espace dual $T^*_{x(u)}$ de $T_{x(u)}$ sur l'espace dual T^*_x de T_x.

Soit ω une p-forme de V_n. On appelle transformée infinitésimale de ω par X, ou dérivée de Lie de ω par X la p-forme $\theta(X)\omega$ définie par :

$$[\theta(X)\omega]_x = \lim_{u \to 0} \frac{\exp(uX)^*\omega_{x(u)} - \omega_x}{u}.$$

Désignons par $i(X)\omega$ le produit intérieur de ω par X.

[1] A. Lichnerowicz [5], p. 15.

Nous avons la formule fondamentale ([2]) :

$$\theta(X)\omega = di(X)\omega + i(X)\,d\omega. \tag{1. 2}$$

Soit Y un second champ de vecteurs, différentiable, défini sur V_n. Nous posons :

$$\theta(X)Y = [X, Y] \tag{1. 3}$$

et nous rappelons les formules :

$$\theta[X, Y]\omega = \theta(X)\theta(Y)\omega - \theta(Y)\theta(X)\omega, \tag{1. 4}$$
$$i[X, Y]\omega = \theta(X)i(Y)\omega - i(Y)\theta(X)\omega, \tag{1. 5}$$
$$i(Y)i(X)\,d\omega = \theta(X)i(Y)\omega - \theta(Y)i(X)\omega - i[X, Y]\omega. \tag{1. 6}$$

Dans la suite nous serons parfois amenés à distinguer :

$$i(X)\omega = 0 \qquad \text{et} \qquad i(X)\omega \equiv 0.$$

La première relation est une équation différentielle extérieure : une solution de cette équation est un $(p-1)$ vecteur $Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_{p-1}$, où $Y_1, \ldots, Y_{p-1}$ sont des vecteurs indépendants de T_x tels que l'on ait l'égalité numérique :

$$i(X \wedge Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_{p-1})\omega = 0. \tag{1. 7}$$

La seconde relation $i(X)\omega = 0$ exprime que l'égalité (1. 7) est vérifiée quels que soient les vecteurs $Y_1, \ldots, Y_{p-1}$ de T_x c'est-à-dire que le point x considéré est un zéro de la forme $i(X)\omega$.

A. — Systèmes différentiels remarquables attachés à une forme extérieure.

2. — Système associé d'une forme extérieure.

On appelle *direction associée* de ω en x, une direction définie par un vecteur X tel que :

$$i(X)\omega \equiv 0$$

en ce point x; cette identité définit bien une direction car :

$$i(\lambda X) = \lambda i(X) \qquad \text{quel que soit le scalaire } \lambda.$$

Le système différentiel linéaire correspondant, obtenu en remplaçant dans les équations définissant les directions asso-

([2]) H. Cartan [1].

ciées de ω en tout point x de V_n, X par dx est appelé le système associé $A(\omega)$ de ω. On l'obtient en égalant à 0 toutes les dérivées d'ordre $p - 1$ de la forme ω.

Exemples : 1) Soit une 1-forme

$$\omega = a_i(x)\, dx^i.$$
$$i(X)\omega = a_i X^i = 0$$

définit en tout point ordinaire x de ω, une variété plane à $n - 1$ dimensions de l'espace vectoriel tangent en x à V_n. Dans ce cas il y a une infinité de directions associées dites orthogonales à la forme ω.

2) Soit une 2-forme

$$\omega = \frac{1}{2} a_{ij} dx^i \wedge dx^j$$
$$i(X)\omega = \frac{1}{2} a_{ij}(X^i\, dx^j - X^j\, dx^i) \equiv 0$$

entraîne :

$$a_{ij} X^i = 0.$$

Si n est impair, ce système est de rang $n - 1$ au plus et on obtient en tout point de V_n au moins une direction associée.

Si n est pair et si le système est de rang n, il n'existe pas de direction associée en un point ordinaire de V_n.

Si le système est de rang $2p < n$, il y a une infinité de directions associées formant une variété plane de T_x à $n - 2p$ dimensions.

Une direction X associée de la 2-forme ω est caractérisée par la propriété : le flux du tenseur a_{ij} à travers tout 2-plan de T_x contenant X est nul.

3. — Système extrémal d'une forme différentielle extérieure.

Soit W une chaîne différentiable locale de V_n de dimension p, X un champ de vecteurs différentiable et ω une p-forme de V_n. La transformation ponctuelle $\exp(uX)$ où u est fixé, transforme les points de W en des points d'une chaîne notée

$$W(u) = \exp(uX)W.$$

Considérons l'intégrale $I = \int_W \omega$.

La dérivée de Lie de I par X est par définition le scalaire :

$$\theta(X) \int_W \omega = \lim_{u \to 0} \frac{1}{u} \left[\int_{W(u)} \omega_{x(u)} - \int_W \omega \right].$$

Faisons dans la première intégrale du second membre le changement de variables transformant les coordonnées de $x(u)$ en celles de x.

Nous avons alors :

$$\int_{W(u)} \omega_{x(u)} = \int_W \exp (uX)^* \omega_{x(u)}$$

d'où

$$\theta(X) \int_W \omega = \int_W \lim_{u \to 0} \frac{1}{u} [\exp (uX)^* \omega_{x(u)} - \omega_x] = \int_W \theta(X) \omega.$$

Appliquons la formule (1. 2) ; nous obtenons :

$$\theta(X) \int_W \omega = \int_W di\,(X) \omega + \int_W i(X)\, d\omega$$

et, d'après la formule de Stokes, en désignant par ∂W le bord de W :

$$(3.\ 1) \qquad \theta(X) \int_W \omega = \int_{\partial W} i(X) \omega + \int_W i(X)\, d\omega.$$

Supposons maintenant la chaîne W fermée et cherchons à déterminer le champ de vecteurs X de façon que, quel que soit W, l'on ait :

$$\theta(X) \int_W \omega = 0.$$

Désignons par Y_1, Y_2, ..., Y_p, p champs de vecteurs locaux tangents à V_n. Pour que

$$\theta(X) \int_W \omega = \int_W i(X)\, d\omega = 0$$

il faut et il suffit que :

$$i(Y_1 \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_p) i(X)\, d\omega = 0$$

quels que soient Y_1, ..., Y_p, c'est-à-dire que :

$$(3.\ 2) \qquad i(X)\, d\omega \equiv 0.$$

Par définition une direction X vérifiant l'identité précédente est une *direction extrémale* de ω ; une telle direction n'est autre qu'une direction associée de $d\omega$.

Le système différentiel linéaire correspondant est par définition le *système extrémal* de ω, noté $E(\omega)$.

4. — Système caractéristique d'une forme différentielle.

Soit X un champ de vecteurs non nuls sur V_n. Le champ X définit un champ de directions que nous désignerons encore par X.

Un champ de directions X est par définition un champ caractéristique de la p-forme ω sur un ouvert U de V_n si en tout point x de U :

$$i(X)\omega \equiv 0 \tag{4. 1}$$

et

$$i(X)d\omega \equiv \lambda\omega \tag{4. 2}$$

λ étant une fonction numérique de x.

L'identité (4. 2) peut être remplacée par :

$$\theta(X)\omega \equiv \lambda\omega. \tag{4. 3}$$

Celle-ci montre que, étant donnée une variété intégrale W de l'équation

$$\omega = 0$$

la variété engendrée par les trajectoires d'un champ caractéristique rencontrant W est aussi une variété intégrale de cette équation.

Il est immédiat que la définition d'un champ caractéristique donnée plus haut peut être remplacée par la suivante :

$$i(X)\omega \equiv 0$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} i(X)i(Y)d\omega \equiv 0 \quad \text{pour tout Y tel que} \\ i(Y)\omega \equiv 0. \end{array}\right. \tag{4. 4}$$

D'après la formule (1. 6) l'identité (4. 4) est équivalente à :

$$\left\{\begin{array}{l} i[X, Y]\omega = 0 \quad \text{pour tout Y tel que} \\ i(Y)\omega = 0. \end{array}\right.$$

Le système différentiel linéaire correspondant à la définition de X en tout $x \in V_n$ est par définition le système caractéristique $C(\omega)$ de la forme ω.

Si ω est une 1-forme, le système caractéristique comprend l'équation $\omega = 0$, et le système différentiel obtenu en écrivant que les équations extérieures :

$$i(Y)\, d\omega = 0 \qquad \text{et} \qquad i(Y)\omega = 0$$

admettent les mêmes solutions en Y.

5. — **Intégrabilité des systèmes A(ω), E(ω), C(ω).**

Par définition un système différentiel linéaire est dit complètement intégrable sur un domaine D de V_n si X et Y étant deux champs de directions intégrales sur D, le crochet [X, Y] est aussi un champ de directions intégrales sur D.

1° *Système associé* A(ω).

Par hypothèse $i(X)\omega \equiv 0$ et $i(Y)\omega \equiv 0$.

Il en résulte d'après la formule (1. 6) que

$$i[X, Y]\omega = i(X)i(Y)\, d\omega.$$

En général le système associé n'est donc pas complètement intégrable.

Il l'est si $d\omega = 0$ et aussi lorsque ω admet en tout x de D une direction associée unique.

2° *Système extrémal* E(ω).

Par hypothèse $i(X)\, d\omega \equiv 0$ et $i(Y)\, d\omega \equiv 0$.

La formule (1. 6) entraîne alors que :

$$i[X, Y]\, d\omega = i(X)i(Y)d\,(d\omega) \equiv 0.$$

Le système extrémal de ω est donc complètement intégrable.

3° *Système caractéristique* C(ω).

Sa complète intégrabilité découle directement de sa définition.

B. — Formes remarquables attachées à un système différentiel S(X).

6. Soit V_{n+1} une variété différentiable à $n+1$ dimensions, de classe C^∞. Soit X un champ de vecteurs non nuls défini sur un domaine D_{n+1} de V_{n+1} et T'^*_x le sous-espace vectoriel de T^*_x orthogonal à X.

Soient $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}$ un système de coordonnées locales du point x d'un ouvert U de D_{n+1}, $X^1, X^2, \ldots, X^{n+1}$ les composantes du vecteur X sur le repère naturel associé. Le système différentiel S(X) des trajectoires du groupe local défini sur U par X est alors :

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \cdots = \frac{dx^{n+1}}{X^{n+1}}. \tag{6. 1}$$

Pour un D_{n+1} convenable, la relation exprimant que deux points x et x' sont sur une même trajectoire de $S(X)$ est une relation d'équivalence R définie sur ce domaine. D_{n+1} est alors fibré et sa base $I_n = D_{n+1}/R$ peut être identifiée à l'espace des intégrales premières de $S(X)$.

Désignons par p la projection de D_{n+1} sur sa base; à tout point x de D_{n+1} correspond le point $y = px$ de I_n.

Les intégrales premières de $S(X)$ sont les fonctions $f(x)$ solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\theta(X)f = i(X)\, df = 0.$$

Localement df est une forme fermée qui au point x est orthogonale à X; n intégrales premières indépendantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ représentent un système de coordonnées locales pour le point $y = px$; un système de coordonnées locales du point x adapté à la structure d'espace fibré de D_{n+1} est alors : $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et x^{n+1} en supposant que $x^{n+1} = C$ n'est pas une intégrale première de $S(X)$.

Définitions. — 1° Une forme ω est dite *invariante* pour $S(X)$ si

$$\theta(X)\omega \equiv 0.$$

2° Une forme ω est dite *semi-basique* pour l'espace D_{n+1} fibré par X ou définit *une relation intégrale d'invariance* pour le système différentiel $S(X)$ si

$$i(X)\omega \equiv 0.$$

3° Une forme ω définit *un invariant intégral relatif* pour $S(X)$ si

$$i(X)\, d\omega \equiv 0.$$

4° Une forme ω est dite *basique* pour l'espace D_{n+1} fibré par X ou définit *un invariant intégral absolu* pour $S(X)$ si

$$i(X)\omega \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad i(X)\, d\omega \equiv 0$$

ou les deux conditions équivalentes :

$$i(X)\omega \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad \theta(X)\omega \equiv 0.$$

7. — Notion de relation intégrale d'invariance (3).

Dire que la p-forme ω définit une relation intégrale d'invariance pour S(X) caractérisée par $i(X)\omega = 0$, revient à dire qu'en tout point x d'un domaine D_{n+1} de V_{n+1}, X est une direction associée de ω.

L'identité $i(X)\omega \equiv 0$ exprime que ω appartient localement à l'espace vectoriel des $p^{\text{ième}}$-puissances extérieures de T'^*_x : $\wedge^p(T'^*_x)$ dont une base est $df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \ldots \wedge df_{i_p}$; $f_1, f_2, \ldots, f_n$ étant n intégrales premières indépendantes de S(X). Nous pouvons donc écrire ω de la façon suivante :

$$\omega = \frac{1}{p\,!} a^{i_1 i_2 \ldots i_p} df_{i_1} \wedge df_{i_2} \wedge \ldots \wedge df_{i_p}, \tag{7. 1}$$

les coefficients étant des fonctions des variables

$$x^\alpha, \qquad \text{avec} \qquad \alpha = 1, \ldots, n + 1.$$

Justifions maintenant l'expression : relation intégrale d'invariance; pour cela considérons une chaîne W_0 fermée ou non, à $p - 1$ dimensions du domaine D de V_{n+1}. Désignons par W_1 la chaîne $W_1 = \exp(uX)W_0$ lieu des points $x_1 = \exp(uX)x_0$ où x_0 est un point arbitraire de W_0, le paramètre u ayant une valeur fixe convenable.

Pour une chaîne W_0 et un paramètre u convenables désignons par « tube de trajectoires » $\mathcal{T}$ la chaîne à p dimensions du domaine D engendrée par les trajectoires des différents points de W_0 limitées à W_0 et W_1. La variété portant $\mathcal{T}$ admet une représentation paramétrique de la forme :

$$x^\alpha = f^\alpha(u, v^1, \ldots, v^{p-1}) \tag{7. 2}$$

d'où $\qquad dx^\alpha = X^\alpha\, du + Y_1^\alpha\, dv^1 + \cdots + Y_{p-1}^\alpha\, dv^{p-1}$

les $Y_1, \ldots, Y_{p-1}$ étant $p - 1$ vecteurs tangents à $\mathcal{T}$.

Supposons maintenant que ω est une p-forme définie sur le domaine D de V_{n+1} auquel appartient $\mathcal{T}$.

L'intégrale $I = \int_{\mathcal{T}} \omega$ se ramène alors à l'intégrale multiple :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Delta_p} i(X \wedge Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_{p-1})\omega\, du\, dv^1 \ldots dv^{p-1} \\ &= \int_{\Delta_p} i(Y_{p-1}) i(Y_{p-2}) \ldots i(X)\omega\, du\, dv^1 \ldots dv^{p-1} \end{aligned}$$

(3) A. Lichnerowicz [1], pp. 1-8.

Δ_p étant le domaine de R^p ayant pour image $\mathcal{T}$ par l'application f.

Pour que $I = 0$, quel que soit le tube $\mathcal{T}$, c'est-à-dire quels que soient les vecteurs $Y_1, \ldots, Y_{p-1}$, il faut et il suffit que :

$$i(X)\omega \equiv 0,$$

d'où le

THÉORÈME. — *Pour que l'intégrale* $\int_{\mathcal{T}} \omega$ *soit nulle quel que soit le tube* $\mathcal{T}$ *de trajectoires du système différentiel* S(X), *il faut et il suffit que*

$$i(X)\omega \equiv 0$$

c'est-à-dire que ω *engendre une relation intégrale d'invariance pour* S(X).

8. — Notion d'invariant intégral relatif ou absolu.

Soit ω une p-forme définie sur V_{n+1} ; soit W une chaîne orientable de V_{n+1} à p dimensions ayant pour bord ∂W. Nous avons vu (3. 1) que :

$$\theta(X)\int_W \omega = \int_{\partial W} i(X)\omega + \int_W i(X)\, d\omega.$$

1° Supposons la chaîne W fermée (c'est-à-dire un cycle). La formule précédente se réduit à :

$$\theta(X)\int_W \omega = \int_W i(X)\, d\omega. \tag{8. 1}$$

Pour que l'on ait : $\theta(X)\int_W \omega = 0$ quel que soit le cycle W, il faut et il suffit (d'après le § 7) que

$$i(X)\, d\omega = 0 \tag{8. 2}$$

c'est-à-dire que X soit une direction extrémale de ω en tout point x de V_{n+1}.

Il en résulte que, W_0 et W_1 étant deux cycles à p dimensions de V_{n+1} tels que $W_1 = \exp(uX)W_0$, l'on a :

$$\int_{W_1} \omega = \int_{W_0} \omega.$$

Cette égalité, qu'on aurait pu déduire par application de la formule de Stokes du fait que $d\omega$ définit une relation intégrale

2

d'invariance pour S(X), justifie la dénomination d'invariant intégral relatif.

2° Supposons maintenant que la chaîne W ait un bord $\partial W \neq 0$. Pour que l'on ait $\theta(X)\int_W \omega = 0$ quelle que soit W il faut et il suffit que l'on ait à la fois :

$$(8.\ 3) \qquad i(X)\omega \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad i(X)\, d\omega \equiv 0.$$

Dans ces conditions :

$$\int_{W_1} \omega = \int_{W_0} \omega$$

quelle que soit la chaîne W_0 à p dimensions de V_{n+1}, fermée ou non, W_1 désignant toujours la chaîne $\exp(uX)W_0$.

Cette égalité qui justifie l'expression d'invariant intégral absolu résulte de $\theta(X)\int_W \omega = 0$ et aussi du fait que les identités (8. 3) entraînent que la forme ω peut s'exprimer uniquement à l'aide de n intégrales premières indépendantes de S(X) et de leurs différentielles (conséquence de 7. 1).

Indiquons quelques théorèmes dont la démonstration est immédiate :

THÉORÈMES. — 1° *Si une forme* ω *définit un invariant intégral relatif pour* S(X), *la forme* $d\omega$ *définit un invariant intégral absolu pour* S(X).

2° *Si la forme* $d\omega$ *engendre une relation intégrale d'invariance pour* S(X), *la forme* ω *définit un invariant intégral relatif pour* S(X) *et réciproquement.*

3° *Si les formes* ω *et* $d\omega$ *engendrent des relations intégrales d'invariance pour* S(X), *la forme* ω *définit un invariant intégral absolu pour* S(X) *et réciproquement.*

4° *Si la forme* ω *engendre une relation intégrale d'invariance pour* S(X) *et si* Y *est un champ de vecteurs quelconque de* V_{n+1}, *la forme* $i(Y)\omega$ *engendre aussi une relation intégrale d'invariance pour* S(X).

En effet : $i(X)i(Y)\omega = -\, i(Y)i(X)\omega = 0.$

9. — Groupes à un paramètre laissant invariant le système S(X).

Soit Y un champ de vecteurs tangents à V_{n+1}. Ce champ engendre un groupe local G_t à un paramètre de transformations locales de V_{n+1} par intégration du système différentiel :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Y_{x(t)}$$

à partir d'un point initial $x(0) = x$.

Le système S(X) est dit invariant par G_t si, pour tout point x ou G_t est défini et pour t suffisamment petit, le vecteur $X_{x(t)}$ est colinéaire à $(\exp tY)'X_x$.

On montre [4] qu'il en est ainsi si et seulement si :

$$\theta(Y)X = [Y, X] = fX$$

où f est une fonction scalaire de x. Dans ce cas on dit que le système S(X) admet une transformation infinitésimale définie par Y. Nous avons alors les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *Si une forme* ω *engendre une relation intégrale d'invariance pour* S(X), *il en est de même de la forme* $\theta(Y)\omega$.

THÉORÈME 2. — *Si une forme* ω *définit un invariant intégral relatif pour* S(X) *il en est de même de la forme* $\theta(Y)\omega$.

THÉORÈME 3. — *Si une forme* ω *définit un invariant intégral absolu pour* S(X) *il en est de même des formes* $\theta(Y)\omega$ *et* $i(Y)\omega$.

Démonstrations. — Il suffit d'établir la 2e partie du théorème 3. On a :

$$i(X)i(Y)\omega = -i(Y)i(X)\omega = 0$$

et

$$i(X)di(Y)\omega = i(X)[\theta(Y)\omega - i(Y)\,d\omega]$$
$$i(X)\,di(Y)\omega = i(X)\theta(Y)\omega + i(Y)i(X)\,d\omega = 0$$

ce qui démontre la propriété.

(4) H. Cartan [2], chap. IV, p. 3.

CHAPITRE II

Espaces fibrés des vecteurs tangents ou des directions tangentes à une variété différentiable.

10. — Définition des espaces fibrés $\mathcal{V}$ et W.

Soit V_{n+1} une variété différentiable de dimension $n+1$, de classe C^∞; soit $\mathcal{V}$ l'espace fibré des vecteurs non nuls tangents à V_{n+1}, de groupe structural $GL(n+1, R)$ et de fibre isomorphe à R^{n+1} privé de son origine. Soit Z un point de $\mathcal{V}$, π la projection canonique de Z sur son origine $x \in V_{n+1}$. Soit $x^\alpha(\alpha = 1, \ldots, n+1)$ un système de coordonnées locales du point x de V_{n+1}, y^α les composantes, sur le repère naturel associé R_x, d'un vecteur y de T_x. Les $2n+2$ nombres x^α, y^α constituent un système de coordonnées locales d'un point Z de la fibre $\pi^{-1}x$. Le changement de coordonnées, sur V_{n+1}, défini par les fonctions $x^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^\beta)$ entraîne pour les y le changement :

$$(10.1) \qquad y^{\alpha'} = \partial_\beta f^{\alpha'} y^\beta = A^{\alpha'}_\beta y^\beta.$$

Considérons deux points Z_1 et Z_2 de la fibre $\pi^{-1}x$ tels que les vecteurs correspondants de T_x, y_1 et y_2 soient colinéaires positivement ($y_2 = \lambda y_1$, $\lambda > 0$).

La relation ainsi définie sur $\mathcal{V}$ est une relation d'équivalence R. L'espace quotient $W = \mathcal{V}/R$ est par définition l'espace des directions orientées tangentes à V_{n+1}. L'espace W peut être muni d'une structure de variété différentiable de dimension $2n+1$; par la projection p de chaque direction z sur son origine x, W est doué d'une structure d'espace fibré de base V_{n+1}, de fibre homéomorphe à la sphère S_n, de groupe structural, le groupe $GL(n+1, R)$ ou de façon plus précise le groupe orthogonal $0(n)$.

Un système de coordonnées locales d'un point $z = p^{-1}x$ est encore l'ensemble des $2n + 2$ nombres x^α, y^α, les $n + 1$ nombres y^α n'étant définis qu'à un facteur de proportionalité positif près.

11. — Tenseurs et formes définis sur $\mathcal{V}$ ou W.

Au sens usuel, un champ de tenseurs affines relatif à $\mathcal{V}$ est une application t qui à tout point Z de $\mathcal{V}$ fait correspondre un élément de l'Algèbre tensorielle affine construite sur T_Z. Les tenseurs ainsi définis sont relatifs au groupe linéaire : $GL(2n + 2, R)$.

Mais $\mathcal{V}$ étant un espace fibré de base V_{n+1}, le changement de carte locale sur la base

$$x^\alpha = f^\alpha(x^{\beta'})$$

induit dans T^*_Z le changement de corepère défini par :

$$\begin{cases} dx^\alpha = A^\alpha_{\beta'}\, dx^{\beta'}, \\ dy^\alpha = B^\alpha_{\beta'}\, dx^{\beta'} + A^\alpha_{\beta'}\, dy^{\beta'} \end{cases}$$

avec $A^\alpha_{\beta'} = \partial_{\beta'} f^\alpha$ et $B^\alpha_{\beta'} = y^{\gamma'} \partial_{\beta'} A^\alpha_{\gamma'}$.

La matrice correspondante est $\begin{pmatrix} A & O \\ B & A \end{pmatrix}$ A et B étant des matrices d'ordre $n + 1$ ayant pour éléments respectifs $A^\alpha_{\beta'}$ et $B^\alpha_{\beta'}$; O est la matrice nulle d'ordre $n + 1$. L'ensemble de ces matrices est un sous-groupe de $GL(2n + 2, R)$, le groupe dit prolongé de $GL(n + 1, R)$ que nous désignerons par $\widetilde{GL}(n + 1, R)$. Nous appellerons dorénavant tenseur *au sens large* sur $\mathcal{V}$ un tenseur relatif à $\widetilde{GL}(n + 1, R)$.

On dit que t est un champ de tenseurs *au sens restreint* sur $\mathcal{V}$, de degré k, si pour deux points $Z(x, y)$ et $Z'(x, \lambda y)$ de la fibre $\pi^{-1}x$ on a :

$$t(Z') = \lambda^k t(Z).$$

Une forme ω sur $\mathcal{V}$ au sens large ou au sens restreint est un champ de tenseurs covariants antisymétriques sur $\mathcal{V}$ au sens large ou au sens restreint.

Soit la 1-forme ω qui dans un domaine de coordonnées locales x^α, y^α est représentée par

$$\omega = a_\alpha(x, y)\, dx^\alpha + b_\alpha(x, y)\, dy^\alpha.$$

Au point de coordonnées locales x^α, λy^α où λ est une fonction positive arbitraire des variables x^α nous avons

$$\omega' = a_\alpha(x, \lambda y)\, dx^\alpha + b_\alpha(x, \lambda y)(\lambda\, dy^\alpha + y^\alpha\, d\lambda).$$

Pour que $\omega' = \lambda^k \omega$ quelle que soit λ, il faut et il suffit que les a_α soient $\dot{h}k$ c'est-à-dire homogènes de degré k par rapport aux y^α, que les b_α soient $\dot{h}(k - 1)$ et que

$$b_\alpha(x, y) y^\alpha = 0.$$

On montre plus généralement qu'une p-forme ω est restreinte de degré k si les coefficients des termes de degré $p - h$ par rapport aux dx^α sont $\dot{h}(k - h)$ et si

$$y^\alpha \frac{\partial \omega}{\partial\,(dy^\alpha)} \equiv 0.$$

Par abus de langage un tenseur (ou une forme) restreint de degré 0 est dit *défini sur* W.

Un champ de tenseurs défini sur $\mathcal{V}$ *semi-basique* est une application t qui à tout point Z de $\mathcal{V}$ fait correspondre un élément de l'Algèbre tensorielle affine construite sur $T_{\pi Z}$. Dans la suite n'interviendront que des champs de tenseurs semi-basiques restreints de degré k que nous désignerons par tenseurs $\dot{h}k$, leurs composantes étant homogènes de degré k par rapport aux variables y^α.

Un champ de tenseurs antisymétriques, covariants, d'ordre p, semi-basique est par définition une p-forme semi-basique; si le tenseur est $\dot{h}k$, la forme est dite semi-basique $\dot{h}k$.

Les p-formes semi-basiques $\dot{h}k$ sur $\mathcal{V}$ forment un module sur l'anneau des fonctions à valeurs réelles de V_{n+1}, module que nous désignerons par H_k^p.

L'algèbre extérieure des formes semi-basiques restreintes définies sur $\mathcal{V}$ est donc une algèbre bigraduée que nous désignerons par $H(\mathcal{V})$.

12. — Opérateurs différentiels sur $H(\mathcal{V})$.

Soit t un tenseur restreint défini sur un ouvert U de $\mathcal{V}$. x^α, y^α un système de coordonnées locales d'un point Z de U. Si t est $\dot{h}k$, l'identité d'Euler :

$$kt = \partial_{\dot\alpha} t\, y^\alpha \qquad \text{où} \qquad \partial_{\dot\alpha} t = \frac{\partial t}{\partial y^\alpha}$$

montre que les $\partial_{\dot\alpha} t$ définissent un tenseur restreint de degré $k-1$.

Soit alors une forme $\omega \in H_k^{(q)}(U)$; son expression en coordonnées locales est :

$$\omega = \frac{1}{q\,!} a_{i_1 \dots i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}.$$

L'expression $dx^\alpha \wedge \partial_{\dot\alpha}\omega$ définit une forme semi-basique de degré $q+1$, de degré d'homogénéité $k-1$. Nous la noterons dorénavant $\dot d\omega$. Nous posons donc par définition

$$(12.\,1) \qquad \dot d\omega = dx^\alpha \wedge \partial_{\dot\alpha}\omega.$$

L'opérateur $\dot d$ est un endomorphisme de H(U), de bidegré égal à $(1, -1)$ c'est-à-dire une application du module H_k^q dans le module H_{k-1}^{q+1}.

Si nous remplaçons tous les dx par des dy de même indice l'opérateur $\dot d$ donne une différentielle extérieure dans les fibres $\pi^{-1}x$ c'est-à-dire une différentielle à x fixé.

Il en résulte que l'opérateur $\dot d$ possède les propriétés suivantes :

$$\dot d(\omega_1 + \omega_2) = \dot d\omega_1 + \dot d\omega_2,$$
$$\dot d(\omega_1 \wedge \omega_2) = \dot d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1}\, \omega_1 \wedge \dot d\omega_2,$$
$$\dot d(\dot d\omega) = 0.$$

Soit X un champ de vecteurs restreint défini sur $\mathfrak{V}$ et ω une q-forme semi-basique restreinte de $\mathfrak{V}$, le produit intérieur de X par ω :

$$i(X)\omega = X^\alpha \frac{\partial\omega}{\partial\,(dx^\alpha)}$$

est une $(q-1)$-forme semi-basique restreinte de $\mathfrak{V}$.

Posons :

$$\dot\theta(X)\omega = \dot d i\,(X)\omega + i(X)\,\dot d\omega$$

l'opérateur $\dot\theta(X)$ ainsi défini est une dérivation de degré 0 c'est-à-dire que :

$$\dot\theta(X)\,(\omega_1 \wedge \omega_2) = \dot\theta(X)\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \dot\theta(X)\omega_2.$$

On vérifie que les opérateurs $\dot d$ et $\dot\theta$ commutent. Si $f(x^\alpha, y^\alpha)$ est une fonction définie sur $\mathfrak{V}$, hk

$$\dot\theta(X)f = X^\alpha \partial_{\dot\alpha} f = \langle\, X, \dot d f\,\rangle.$$

Si $\omega = a_\alpha\, dx^\alpha$

$$\dot\theta(X)\omega = (\partial_{\dot\beta} a_\alpha X^\beta + a_\beta \partial_{\dot\alpha} X^\beta)\, dx^\alpha.$$

13. — Formes $\dot{d}$-fermées.

Une forme $\Omega \in \mathrm{H}$ est localement $\dot{d}$ fermée si $\dot{d}\Omega = 0$ sur un ouvert U de $\mathfrak{V}$; d'après le théorème de Poincaré, il existe sur U une forme $\omega \in \mathrm{H}$ telle que :

$$\dot{d}\omega = \Omega.$$

Nous allons retrouver ce résultat et préciser l'expression de ω en établissant une identité remarquable vérifiée par toute forme de l'Algèbre H.

Soit ω une p-forme semi-basique $\dot{h}k$ définie sur $\mathfrak{V}$. Prenons pour champ de vecteurs le champ y qui au point Z, de coordonnées locales x^α, y^α, a pour composantes sur le repère naturel : $\mathrm{X}^\alpha = y^\alpha$. Explicitons l'opérateur $\dot{\theta}(y)\omega$. Par définition :

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}(y)\omega &= \dot{d}i(y)\omega + i(y)\,\dot{d}\omega,\\
&= \dot{d}\left[y^\beta \frac{\partial\omega}{\partial(dx^\beta)}\right] + i(y)[dx^\alpha \wedge \partial_{\dot{\alpha}}\omega],\\
&= dx^\alpha \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(dx^\alpha)} + dx^\alpha \wedge y^\beta \frac{\partial_{\dot{\alpha}}\omega}{\partial(dx^\beta)} + y^\alpha\partial_{\dot{\alpha}}\omega - dx^\alpha \wedge y^\beta \frac{\partial_{\dot{\alpha}}\omega}{\partial(dx^\beta)},\\
&= dx^\alpha \wedge \frac{\partial\omega}{\partial(dx^\alpha)} + y^\alpha\partial_{\dot{\alpha}}\omega;
\end{aligned}$$

la première expression du 2e membre est égale à $p\omega$, car ω est de degré p, la deuxième expression est égale à $k\omega$, car ω est $\dot{h}k$, d'où l'identité :

$$\boxed{\dot{\theta}\,(y)\omega = (p+k)\omega} \tag{13. 1}$$

ou

$$\dot{d}i(y)\omega + i(y)\,\dot{d}\omega = (p+k)\omega. \tag{13. 2}$$

Conséquence. — Si une p-forme ω $\dot{h}k$ est $\dot{d}$ fermée l'identité (13. 2) se réduit à :

$$\dot{d}i(y)\omega = (p+k)\omega \tag{13. 3}$$

et $\omega = \dot{d}\dfrac{i(y)\,\omega}{p+k}$ si $p+k \neq 0$.

THÉORÈME. — *Une p-forme ω semi-basique $\dot{h}k$ de $\mathfrak{V}$, $\dot{d}$ fermée est la $\dot{d}$ différentielle de la forme $\dfrac{1}{p+k}i(y)\,\omega$ si $p+k \neq 0$.*

Remarque. — Si une p-forme ω de R^{n+1} de coordonnées canoniques (x^α) :

$$\omega = \frac{1}{p\,!} a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

est fermée et si ses coefficients sont des fonctions homogènes des x^α de degré k, ω est la différentielle extérieure de la forme

$$\frac{1}{p+k} i(x)\,\omega \qquad \text{si} \qquad p+k \neq 0.$$

Pour $p + k > 0$ ce résultat est une conséquence de la formule classique d'homotopie ([5]).

14. — Cas particulier de l'Algébre H(W).

L'Algèbre H(W) est par définition l'Algèbre extérieure des formes semi-basiques restreintes définies sur W c'est-à-dire $\dot{h}0$.

Si X est un champ de vecteurs restreints $\dot{h}0$, c'est-à-dire défini sur W, l'Algèbre H(W) est stable pour les opérateurs $i(X)$ et $\theta(X)$ mais non pour l'opérateur $\dot{d}$. Celui-ci permet de déduire de toute forme semi-basique $\dot{h}1$ un élément de H(W).

A la fonction scalaire $\mathcal{L}(x, y)$ $\dot{h}1$, correspond la forme de H(W) :

$$\dot{d}\mathcal{L} = \partial_{\dot{\alpha}}\mathcal{L}\, dx^\alpha.$$

A la 1-forme $\omega = a_\alpha(x, y)\, dx^\alpha$, $\dot{h}1$, correspond la 2-forme de H(W) :

$$\dot{d}\omega = \frac{1}{2} (\partial_{\dot{\alpha}} a_\beta - \partial_{\dot{\beta}} a_\alpha)\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

D'après le théorème du § 13 toute p-forme semi-basique ω de W, $\dot{d}$ fermée, est la $\dot{d}$ différentielle de la $p-1$ forme $\frac{1}{p} i(y)\,\omega$. Vérifions ce théorème en établissant en même temps des conditions nécessaires et suffisantes plus simples pour que $\dot{d}\omega = 0$ pour $p = 1$ et 2.

Tout d'abord pour qu'une fonction $f(x, y)\dot{h}0$ soit telle que :

$$\dot{d}f = \partial_{\dot{\alpha}} f\, dx^\alpha = 0$$

il faut et il suffit que f soit indépendante des variables y^α.

([5]) H. Cartan [2], chap. III, p. 18.

Cas d'une 1-*forme.* — Soit une 1-forme semi-basique $\dot{h}0$:

$$\omega = a_\alpha(x, y)\, dx^\alpha.$$

Pour que ω soit $\dot{d}$ fermée sur un ouvert U de W il faut et il suffit que :

$$\partial_{\dot\alpha} a_\beta - \partial_{\dot\beta} a_\alpha = 0 \qquad \text{sur U.} \tag{14. 1}$$

Dans ces conditions :

$$\omega = \dot{d}(a_\alpha y^\alpha).$$

En effet

$$\dot{d}(a_\alpha y^\alpha) = (a_\alpha + \partial_{\dot\alpha} a_\beta\, y^\beta)\, dx^\alpha.$$

Or les relations (14. 1) entraînent que

$$\partial_{\dot\alpha} a_\beta\, y^\beta = 0 \qquad \text{sur U.} \tag{14. 2}$$

Inversement les identités (14. 2) entraînent en dérivant par rapport à y^β :

$$\partial_{\dot\alpha} a_\beta + \partial_{\dot\alpha\dot\beta} a_\gamma y^\gamma = 0.$$

En échangeant α et β et en retranchant on obtient les identités (14. 1) d'où le

Théorème. — *Pour que la forme* $\omega = a_\alpha(x, y)\, dx^\alpha$, $\dot{h}0$, *soit* $\dot{d}$ *fermée il faut et il suffit que :*

$$y^\beta \partial_{\dot\alpha} a_\beta = 0.$$

Dans ces conditions il existe une fonction F *unique* $\dot{h}1$ *telle que*

$$\omega = \dot{d}\mathrm{F}.$$

La fonction F *est nécessairement égale à* $a_\alpha y^\alpha$.

Cas d'une 2-*forme.* — Soit une 2-forme semi-basique $\dot{h}0$

$$\Omega = \frac{1}{2}\, a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Pour que Ω soit $\dot{d}$ fermée sur un ouvert U de W il faut et il suffit que :

$$\partial_{\dot\alpha} a_{\beta\gamma} + \partial_{\dot\beta} a_{\gamma\alpha} + \partial_{\dot\gamma} a_{\alpha\beta} = 0. \tag{14. 3}$$

Dans ces conditions :

$$\Omega = \dot{d}\omega \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{1}{2}\, a_{\alpha\beta} y^\alpha\, dx^\beta.$$

En effet :

$$\dot{d}\omega = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta + \frac{1}{4} y^\gamma (\partial_{\dot\alpha} a_{\gamma\beta} - \partial_{\dot\beta} a_{\gamma\alpha})\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Mais les relations (14. 3) entraînent les identités :

$$(14.\ 4) \qquad y^\gamma(\partial_{\dot\alpha} a_{\gamma\beta} - \partial_{\dot\beta} a_{\gamma\alpha}) = 0$$

et nous avons bien :

$$\dot{d}\omega = \Omega.$$

Les identités (14. 4) sont d'ailleurs équivalentes à (14. 3) En effet en dérivant (14. 4) par rapport à y^γ, en permutant circulairement α, β, γ et en ajoutant nous obtenons les identités (14. 3) d'où le théorème :

Théorème. — *Pour que la 2-forme semi-basique $\dot{h}0$:*

$$\Omega = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

soit $\dot{d}$ fermée il faut et il suffit que l'on ait les identités

$$(\partial_{\dot\alpha} a_{\beta\gamma} - \partial_{\dot\beta} a_{\alpha\gamma}) y^\gamma = 0.$$

Dans ces conditions il existe une 1-forme semi-basique $\dot{h}1$ ω telle que :

$$\Omega = \dot{d}\omega \qquad \text{avec} \qquad \omega = \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} y^\alpha dx^\beta + \dot{d}F$$

(où F *est une fonction scalaire arbitraire de* $\mathfrak{V}$, $\dot{h}2$*).*

Remarque. — Sur un voisinage déterminé d'un domaine de coordonnées locales de $\mathfrak{V}(x^\alpha, y^\alpha)$ il est parfois commode de poser pour une p-forme ω quelconque $\dot{h}k$

$$\dot{d}\omega = dx^\alpha \wedge \partial_{\dot\alpha}\omega.$$

L'opérateur local ainsi défini possède les mêmes propriétés que l'opérateur $\dot{d}$ dans le cas des formes semi-basiques; nous avons en outre la formule :

$$d\dot{d}\omega = -\dot{d}d\omega.$$

Une p-forme ω est dite $d\dot{d}$ fermée si

$$d\dot{d}\omega = 0.$$

Si ω est une 1-forme définie sur W et $d\dot{d}$ fermée, ω peut se mettre localement sous la forme :

$$\omega = \dot{d}f + dg$$

où $f(\dot{h}1)$ et $g(\dot{h}0)$ sont deux fonctions scalaires.

15. — Prolongement sur $\mathfrak{V}$ d'un groupe à un paramètre de V_{n+1}.

Soit C une courbe de V_{n+1} ayant, sur un ouvert U de V_{n+1}, une représentation paramétrique de la forme :

$$x^\alpha = f^\alpha(u).$$

A C correspond une courbe $\pi^{-1}C$ de $\mathfrak{V}$ définie dans $\pi^{-1}U$ par

$$x^\alpha = f^\alpha(u) \qquad \text{et} \qquad y^\alpha = \frac{df^\alpha}{du}.$$

Si nous changeons de paramètre, en posant $u = \varphi(v)$ la courbe C sera représentée par

$$x^\alpha = f^\alpha[\varphi(v)] = F^\alpha(v)$$

et la courbe $\pi^{-1}C$ par :

$$x^\alpha = F^\alpha(v), \qquad y^\alpha = \frac{dF^\alpha}{dv} = \frac{df^\alpha}{du}\varphi'(v).$$

Les coordonnées y^α sont toutes multipliées par $\varphi'(v)$; la courbe $\pi^{-1}C$ dépend donc du paramétrage de la courbe (C) ; par contre la courbe $p^{-1}C$ de W est parfaitement déterminée puisque l'ensemble x^α, λy^α définit, quel que soit λ, un point bien déterminé de W. Une courbe de W qui se déduit par p^{-1} d'une courbe de V_{n+1} sera désignée dorénavant par *courbe basique* de W.

Nous noterons :

$$\overline{C} = p^{-1}C.$$

Soit X un champ de vecteurs défini sur U ; il engendre un groupe local G de transformations locales à un paramètre par intégration du système différentiel S :

$$(15.\ 1) \qquad dx^\alpha = X^\alpha(x)\, du.$$

Par tout point x_0 de U passe une trajectoire C du groupe G et une seule, notée $x = \exp(uX)x_0$ et définie en coordonnées locales par

$$x^\alpha = f^\alpha(x_0^\beta,\ u). \tag{15. 2}$$

L'application linéaire tangente $(\exp uX)'$ fait correspondre au vecteur y_0 de T_{x_0} le vecteur y de T_x tel que

$$y^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta}(x_0,\ u)\, y_0^\beta. \tag{15. 3}$$

Si y désigne en particulier le vecteur tangent en x, à la courbe C, défini par : $y^\alpha = \dot{x}^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{du} = X^\alpha(x)$ nous avons :

$$\frac{dy^\alpha}{du} = \partial_\beta X^\alpha y^\beta. \tag{15. 4}$$

Ce système admet comme solutions le long de C non seulement le champ des vecteurs tangents à C mais tout champ y invariant par $\theta(X)$. Vérifions-le.

Les égalités :

$$[\theta(X)\, y]^\alpha = X^\beta \partial_\beta y^\alpha - y^\beta \partial_\beta X^\alpha = 0$$

équivalent le long de C à :

$$\frac{dy^\alpha}{du} = \partial_\beta y^\alpha \frac{dx^\beta}{du} = \partial_\beta y^\alpha X^\beta = y^\beta \partial_\beta X^\alpha.$$

Nous retrouvons bien les équations (15. 4).

Désignons par $\overline{X}$ le champ de vecteurs prolongé sur $\mathcal{V}$ du champ X de V_{n+1} et défini par les composantes :

$$X^\alpha \qquad \text{et} \qquad X^{\dot\alpha} = y^\beta \partial_\beta X^\alpha.$$

Le champ $\overline{X}$ engendre un groupe local $\overline{G}$ à 1 paramètre de transformations locales de W par intégration du système S défini par :

$$\frac{dx^\alpha}{du} = X^\alpha(u) \qquad \text{et} \qquad \frac{dy^\alpha}{du} = X^{\dot\alpha}.$$

Ce groupe $\overline{G}$, dit prolongé de G sur $\mathcal{V}$, admet comme trajectoires des courbes de $\mathcal{V}$ se projettant sur V_{n+1} suivant les trajectoires de G. Les projections de ces courbes sur W ne sont pas en général basiques.

Pour que la courbe passant par $z_0(x_0, y_0)$ soit basique il faut et il suffit que $y_0 = \lambda X(x_0)$.

Si ω désigne une p-forme définie sur W ou plus généralement une p-forme restreinte de $\mathcal{V}$, sa dérivée de Lie par X est par définition :

$$\theta(X)\,\omega = \theta(\overline{X})\,\omega$$

et nous avons la formule :

$$\theta(X)\,\omega = i(\overline{X})\,d\omega + di\,(\overline{X})\,\omega.$$

En particulier si $\mathcal{L}(x, y)$ est une fonction scalaire $\dot{h}1$:

$$\theta(X)\,\mathcal{L} = X^\alpha \partial_\alpha \mathcal{L} + y^\beta \partial_\beta X^\alpha \partial_{\dot{\alpha}} \mathcal{L}.$$

CHAPITRE III

Calcul variationnel.

16. — Extrémales d'une intégrale.

Soit $L(x, y)$ une fonction $h1$ de classe C^2 sur un domaine U de $\mathfrak{V}$. La 1-forme $\omega = \dot{d}L$ est alors définie dans W.

Soient $f_0 = p^{-1}x_0$ et $f_1 = p^{-1}x_1$ deux fibres appartenant au domaine $p^{-1}\pi U$ de W, x_0 et x_1 étant deux points arbitraires de πU.

Considérons l'intégrale $I(C) = \int_C \dot{d}L$ où C est un chemin différentiable quelconque joignant un point de f_0 à un point de f_1. Nous appelons extrémale de l'intégrale I(C) une courbe C telle que

$$\theta(Z)I = 0$$

quel que soit le champ de vecteurs Z tangents à W et vérifiant la relation : $pZ = 0$ aux points x_0 et x_1.

D'après (1, 2)

$$\begin{aligned}\theta(Z)I &= \int_C \theta(Z)\, \dot{d}L = \int_C \theta(Z)\omega \\ &= \int_C i(Z)\, d\omega + \int_C di(Z)\omega.\end{aligned}$$

La dernière intégrale est nulle car la forme ω est semi-basique et $pZ = 0$ en x_0 et x_1.

Si X^α, Y^α sont les composantes du vecteur Z sur le repère naturel au point (x, y) de W nous avons

$$i(Z)\, d\omega = X^\alpha \frac{\partial(d\omega)}{\partial(dx^\alpha)} + Y^\alpha \frac{\partial(d\omega)}{\partial(dy^\alpha)}.$$

Pour que l'intégrale $\int_C i(Z)\, d\omega$ soit nulle quel que soit le champ Z, il faut et il suffit que le chemin C soit tel que le long de C, l'on ait :

$$\frac{\partial(d\omega)}{\partial(dx^\alpha)} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial(d\omega)}{\partial(dy^\alpha)} = 0.$$

Le système différentiel précédent n'est autre que le système extrémal de la forme ω, système qui est complètement intégrable.

Explicitons ce système. Nous avons :

$$d\omega = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha\dot\beta}\mathrm{L} - \partial_{\beta\dot\alpha}\mathrm{L})\, dx^\alpha \wedge dx^\beta + \partial_{\dot\alpha\dot\beta}\mathrm{L}\, dy^\beta \wedge dx^\alpha.$$

Le système extrémal est formé par les $2(n+1)$ équations suivantes :

$$(16.\ 1) \quad \frac{\partial\,(d\omega)}{\partial\,(dx^\alpha)} = (\partial_{\alpha\dot\beta}\mathrm{L} - \partial_{\beta\dot\alpha}\mathrm{L})\, dx^\beta - \partial_{\dot\alpha\dot\beta}\mathrm{L}\, dy^\beta = 0.$$

$$(16.\ 2) \quad \frac{\partial\,(d\omega)}{\partial\,(dy^\alpha)} = \partial_{\dot\alpha\dot\beta}\mathrm{L}\, dx^\beta = 0.$$

Comme L est $\dot h 1$ nous avons identiquement :

$$\partial_{\dot\alpha\dot\beta}\, \mathrm{L} y^\beta = 0.$$

La matrice $||\partial_{\dot\alpha\dot\beta}\mathrm{L}||$ est donc singulière; par définition le problème variationnel étudié est dit *régulier* si la matrice $||\partial_{\dot\alpha\dot\beta}\mathrm{L}||$ est de rang n. Dans ces conditions le système (16. 2) montre que les dx sont proportionnels aux y de même indice. Les extrémales de la forme $\dot d\mathrm{L}$ sont donc des *courbes basiques* de W.

En désignant par u un paramètre arbitraire nous pouvons poser :

$$y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du} = \dot x^\alpha.$$

Les équations (16. 1) s'écrivent alors sous la forme :

$$(16.\ 3) \qquad \partial_{\dot\alpha\dot\beta}\mathrm{L}\, \ddot x^\beta - (\partial_{\alpha\dot\beta}\mathrm{L} - \partial_{\beta\dot\alpha}\mathrm{L})\, \dot x^\beta = 0$$

et comme

$$\partial_{\alpha\dot\beta}\mathrm{L}\, \dot x^\beta = \partial_\alpha \mathrm{L}$$

ces équations, qui définissent les projections des extrémales sur V_{n+1} s'écrivent encore :

$$\frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha}\mathrm{L} - \partial_\alpha\mathrm{L} = 0.$$

Ces équations sont les équations d'Euler relatives à l'intégrale

$$\int \mathrm{L}(x,\ \dot{x})\, du.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème.

THÉORÈME. — *Les extrémales de l'intégrale* $\int \dot{d}\mathrm{L}$ *où* $\mathrm{L}(x,\ y)$ *est une fonction* $\dot{h}1$ *de* $\mathcal{V}$ *sont les chemins basiques de* W *se projetant sur* V_{n+1} *suivant les extrémales de l'intégrale*

$$\int \mathrm{L}(x,\ \dot{x})\, du.$$

17. — Système extrémal d'une 1-forme ω définie sur W.

Soit ω une 1-forme définie sur W. Son image réciproque sur $\mathcal{V}$, que nous désignons encore par ω, s'écrit localement :

$$\omega = a_\alpha(x,\ y)\, dx^\alpha + b_\alpha(x,\ y)\, dy^\alpha.$$

Cette forme étant supposée définie sur W, il en résulte que les a_α sont $\dot{h}0$, les b_α $\dot{h}$ (-1) et que $b_\alpha y^\alpha = 0$.

La forme ω étant définie sur W, il en est de même de sa différentielle extérieure :

$$d\omega = \frac{1}{2}\, a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta + \frac{1}{2}\, b_{\alpha\beta}\, dy^\alpha \wedge dy^\beta + c_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dy^\beta$$

avec

$$a_{\alpha\beta} = \partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha; \qquad b_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\alpha} b_\beta - \partial_{\dot\beta} b_\alpha; \qquad c_{\alpha\beta} = \partial_\alpha b_\beta - \partial_{\dot\beta} a_\alpha$$

Il en résulte que :

$$b_{\alpha\beta} y^\beta = 0 \qquad \text{et} \qquad c_{\alpha\beta} y^\beta = 0.$$

Formons maintenant le système extrémal de ω. Il est défini par

$$\frac{\partial\,(d\omega)}{\partial\,(dx^\alpha)} = a_{\alpha\beta}\, dx^\beta + c_{\alpha\beta}\, dy^\beta = 0, \tag{17. 1}$$

$$\frac{\partial\,(d\omega)}{\partial\,(dy^\alpha)} = -\, c_{\beta\alpha}\, dx^\beta + b_{\alpha\beta}\, dy^\beta = 0. \tag{17. 2}$$

Ce système défini sur W est complètement intégrable. Par tout point $(x_0,\ y_0)$ de W passe une courbe intégrale et une seule, définie sur un voisinage de $(x_0,\ y_0)$ par les équations :

$$x^\alpha = f^\alpha(x_0,\ y_0,\ u), \qquad y^\alpha = g^\alpha(x_0,\ y_0,\ u).$$

Ces courbes ne sont pas en général basiques. Pour qu'elles le soient il faut et il suffit que les $2(n+1)$ équations différentielles suivantes, à $n+1$ fonctions inconnues (x^β) :

$$a_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta + c_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta = 0, \tag{17. 3}$$
$$-c_{\beta\alpha}\dot{x}^\beta + b_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta = 0. \tag{17. 4}$$

soient compatibles.

Il en est ainsi si les équations (17. 4) sont identiquement vérifiées c'est-à-dire si :

$$b_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{et si} \qquad c_{\beta\alpha}\dot{x}^\beta = 0.$$

Dans ce cas il existe localement une fonction $F(x, y)\,\dot{h}0$ telle que $b_\alpha = \partial_{\dot\alpha}F$. Les identités : $c_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = 0$ s'écrivent alors sous la forme :

$$(\partial_{\dot\beta\alpha}F - \partial_{\dot\beta}a_\alpha)\,\dot{x}^\alpha = 0$$

ou

$$\partial_{\dot\beta}A_\alpha\dot{x}^\alpha = 0 \qquad \text{avec} \qquad A_\alpha = -\partial_\alpha F + a_\alpha.$$

La forme $A_\alpha\,dx^\alpha$ est alors $\dot{d}$ fermée ; il existe donc une fonction $L(x, y)\,\dot{h}1$ telle que $A_\alpha = \partial_{\dot\alpha}L$ ou

$$a_\alpha = \partial_{\dot\alpha}L + \partial_\alpha F.$$

La forme ω s'écrit alors :

$$\omega = \partial_{\dot\alpha}L\,dx^\alpha + \partial_\alpha F\,dx^\alpha + \partial_{\dot\alpha}F\,dy^\alpha$$

ou

$$\omega = \dot{d}L + dF.$$

Les considérations précédentes sont en particulier valables pour une 1-forme semi-basique. En effet dans ce cas les $b_{\alpha\beta}$ sont identiquement nuls.

Les équations (17. 4) s'écrivent alors :

$$\partial_{\dot\alpha}a_\beta\dot{x}^\beta = 0.$$

Comme elles doivent être identiquement vérifiées, elles constituent une condition nécessaire et suffisante (14. 2) pour que la forme :

$$\omega = a_\alpha\,dx^\alpha.$$

soit $\dot{d}$ fermée. Nous pouvons énoncer le théorème :

Théorème. — *Pour qu'une 1-forme semi-basique de W admette des extrémales basiques il faut et il suffit qu'elle soit $\dot{d}$ fermée.*

Il résulte de (I § 8) que la forme $\omega = \dot{d}L$ définit un invariant intégral relatif et que sa différentielle $d\omega$ définit un invariant intégral absolu pour les extrémales de la forme ω.

18. — Vecteurs et formes d'Euler.

Soit C un chemin différentiable de W appartenant à un même domaine U de coordonnées locales. Soit

$$x^\alpha = x^\alpha(u) \qquad \text{et} \qquad y^\alpha = y^\alpha(u)$$

une représentation paramétrique de C.

Les $n + 1$ fonctions de u :

$$(18.\ 1) \qquad P_\alpha(L) = \partial_{\dot\alpha\dot\beta} L \frac{dy^\beta}{du} + (\partial_{\dot\alpha\beta} L - \partial_{\alpha\dot\beta} L) y^\beta$$

sont les composantes covariantes d'un vecteur P(L) restreint $\dot{h}$ 1 défini en tout point de C. Ces différents vecteurs sont par définition les *vecteurs d'Euler* du chemin C relativement à L.

Les extrémales de $\int L(x, y)\, du$ sont les chemins de W le long desquels le vecteur d'Euler P(L) est nul.

A la fonction $L(x, y)\dot{h}$ 1 est attachée une 2-forme $\pi(L)$ définie sur W :

$$(18.\ 2) \qquad \pi(L) = d(\dot{d}L) = d(\partial_{\dot\alpha} L\, dx^\alpha)$$
$$= \partial_{\dot\alpha\dot\beta} L\, dy^\alpha \wedge dx^\beta + \frac{1}{2} (\partial_{\alpha\dot\beta} L - \partial_{\beta\dot\alpha} L)\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Cette 2-forme $\pi(L)$ est par définition la *forme d'Euler* correspondant à la fonction L.

Indiquons quelques propriétés des vecteurs et formes d'Euler attachés à un même chemin de W.

1° La correspondance entre L et P(L) est linéaire. Si L_1 et L_2 sont 2 fonctions définies sur $\mathfrak{V}$ $\dot{h}1$ et de classe C_2 et si k_1 et k_2 sont deux constantes arbitraires :

$$P(k_1L_1 + k_2L_2) = k_1P(L_1) + k_2P(L_2).$$

2° Nous avons identiquement :

$$P_\alpha(L)\ y^\alpha = 0.$$

En effet $\partial_{\dot\alpha\dot\beta} L y^\alpha = 0$ puisque $\partial_{\dot\beta} L$ est $\dot{h}0$, et

$$(\partial_{\dot\alpha\beta} L - \partial_{\alpha\dot\beta} L)\ y^\alpha y^\beta = 0$$

d'après l'antisymétrie des parenthèses ou par usage de l'identité d'Euler.

3° Supposons que L soit de la forme

$$L = A_\alpha(x) y^\alpha.$$

Dans ces conditions

$$(18.3) \qquad P_\alpha(L) = (\partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta)\, y^\beta$$

et

$$\pi(L) = d(A_\alpha\, dx^\alpha).$$

Supposons plus particulièrement que le vecteur A de composantes covariantes A_α soit le gradient d'une fonction $f(x)$ c'est-à-dire que

$$A_\alpha = \partial_\alpha f.$$

Nous avons alors :

$$P_\alpha(L) \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad \pi(L) \equiv 0.$$

Inversement si $\pi(L) \equiv 0$ nous avons :

$$\partial_{\dot\alpha\dot\beta} L = 0$$

d'où

$$L = A_\alpha(x)\, y^\alpha \qquad \text{et} \qquad \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = 0$$

ce qui entraîne, qu'il existe localement une fonction $f(x)$ telle que :

$$A_\alpha = \partial_{\dot\alpha} f.$$

Nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME. — *Pour que deux fonctions* $L(x, y)$ *et* $\bar{L}(x, y)$ $\dot{h}1$ *admettent des vecteurs d'Euler identiques, il faut et il suffit que localement :*

$$\bar{L} - L = \partial_\alpha f y^\alpha$$

où f *est une fonction arbitraire des variables* x^α.

4° Si $f(x)$ est une fonction dérivable arbitraire des variables x^α et $L(x, y)$ une fonction $\dot{h}1$ deux fois dérivable nous avons :

$$(18.4) \qquad P_\alpha(fL) = fP_\alpha(L) + (\partial_\beta f \partial_{\dot\alpha} L - \partial_\alpha f \partial_{\dot\beta} L)\, y^\beta$$

et

$$(18.5) \qquad \pi(fL) = f\pi(L) + df \wedge \dot{d}L.$$

En particulier si $L = \partial_\alpha g \, y^\alpha$, $g(x)$ étant une fonction dérivable arbitraire des variables x^α,

$$P_\alpha(fL) = (\partial_\alpha g \, \partial_\beta f - \partial_\beta g \, \partial_\alpha f) \, y^\beta$$

et

$$\pi(fL) = df \wedge dg.$$

19. — Conditions de Helmholtz.

Soit une 2-forme Ω définie sur W qui dans un domaine U de coordonnées locales x^α, y^α a pour expression :

$$\Omega = a_{\alpha\beta} \, dy^\alpha \wedge dx^\beta + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Si Ω est la forme d'Euler d'une fonction $L(x, y)\dot{h}1$ les $a_{\alpha\beta}$ sont symétriques et $d\Omega = 0$.
Montrons que ces conditions sont suffisantes.

La forme Ω étant fermée, il existe localement une 1-forme définie sur W :

$$\omega = A_\alpha(x, y) \, dx^\alpha + B_\alpha(x, y) \, dy^\alpha$$

telle que

$$\Omega = d\omega.$$

Comme Ω ne contient pas de terme en $dy^\alpha \wedge dy^\beta$, les B_α sont indépendants des variables y^α et comme ω est définie sur W, les B_α sont $\dot{h}(-1)$; ils sont donc identiquement nuls et ω est semi-basique. Nous avons alors :

$$a_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\beta} A_\alpha \qquad \text{et} \qquad b_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Les $a_{\alpha\beta}$ étant symétriques nous en déduisons que :

$$\partial_{\dot\beta} A_\alpha - \partial_{\dot\alpha} A_\beta = 0$$

relations qui montrent que la forme ω est $\dot{d}$ fermée.

Il existe donc localement une fonction $L(x, y)\dot{h}1$ telle que

$$A_\alpha = \partial_{\dot\alpha} L$$

et nous avons bien :

$$a_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\alpha\dot\beta} L \qquad \text{et} \qquad b_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\dot\beta} L - \partial_{\beta\dot\alpha} L$$

d'où le

THÉORÈME. — *Pour que la 2-forme définie sur* W :

$$\Omega = a_{\alpha\beta} \, dy^\alpha \wedge dx^\beta + \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

soit une forme d'Euler, il faut et il suffit que Ω soit fermée, les coefficients $a_{\alpha\beta}$ étant symétriques.

En explicitant nous trouvons les conditions dites de Helmholtz. En effet le problème précédent est équivalent à celui résolu par Helmholtz et Mayer relatif à l'existence d'une fonction $L(x^k, x'^k, t)$ telle que le système de n équations différentielles du 2e ordre :

$$G_i(x^k, x'^k, x''^k, t) = 0$$

puisse se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

20. — Extrémales et géodésiques.

Considérons l'espace de Finsler F défini sur la variété V_{n+1} par la fonction $L(x^\alpha, y^\alpha)\mathring{h}1$. Posons avec E. Cartan :

$$l^\alpha = \frac{1}{L} y^\alpha \qquad \text{et} \qquad l_\alpha = \partial_{\dot\alpha} L.$$

Les géodésiques de F sont définies par les équations :

$$(20.\ 1) \qquad \frac{\nabla l^\alpha}{du} = \frac{dl^\alpha}{du} + \frac{1}{L}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} l^\beta l^\gamma = 0$$

ou par

$$(20\ 2) \qquad \frac{\nabla l_\alpha}{du} = \frac{dl_\alpha}{du} - \frac{1}{L}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} l_\beta l^\gamma = 0.$$

Un calcul classique ([6]) montre que :

$$\frac{1}{L}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} l_\beta l^\gamma = \partial_\alpha L$$

et que

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} y^\beta y^\gamma = 2G^\alpha$$

avec

$$G^\alpha = g^{\alpha\beta} G_\beta \qquad \text{et} \qquad 2G_\beta = \partial_{\dot\beta\lambda} F y^\lambda - \partial_\beta F \quad \left(F = \frac{1}{2} L^2\right).$$

Les équations (20. 2) montrent alors que les géodésiques de F sont identiques aux extrémales de l'intégrale $\int L\,du$.

([6]) E. Cartan [1]; J. Favard [2].

Ces équations sont équivalentes aux équations (20. 1) qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{dl^\alpha}{du} + \frac{2}{L} G^\alpha = 0$$

ou en revenant aux variables y^α

$$(20.\ 3) \qquad \frac{dy^\alpha}{du} + 2G^\alpha = y^\alpha \frac{dL}{Ldu} \qquad \text{avec} \qquad y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}.$$

Nous écrirons parfois dans la suite ce système sous la forme :

$$(20.\ 4) \qquad \frac{\ddot{x}^1 + 2G^1}{\dot{x}^1} = \frac{\ddot{x}^2 + 2G^2}{\dot{x}^2} = \cdots = \frac{\ddot{x}^{n+1} + 2G^{n+1}}{\dot{x}^{n+1}}.$$

21. — Application géodésique de deux espaces de Finsler.

Considérons deux espaces de Finsler F et $\overline{F}$ définis sur la même variété de base, V_{n+1}, par la donnée de 2 fonctions $h1$ $L(x, y)$ et $\overline{L}(x, y)$. Les géodésiques de F sont définies par les équations (20. 4), celles de $\overline{F}$ par les équations obtenues à partir des précédentes en remplaçant les G^α relatifs à L par les $\overline{G}^\alpha$ relatifs à $\overline{L}$. Pour que ces deux systèmes d'équations soient équivalents il faut et il suffit qu'il existe une fonction $p(x, \dot{x})h1$ telle que :

$$(21.\ 1) \qquad \overline{G}^\alpha - G^\alpha \equiv p\dot{x}^\alpha.$$

Les géodésiques de $\overline{F}$ sont définies, d'autre part, par les équations d'Euler relatives à la fonction $\overline{L}$:

$$\partial_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{L}\ddot{x}^\beta + (\partial_{\dot\alpha\beta}L - \partial_{\alpha\dot\beta}\overline{L})\dot{x}^\beta = 0$$

ou, comme $\partial_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{L}\dot{x}^\beta \equiv 0$ par les équations :

$$(21.\ 2) \qquad \partial_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{L}\left(\ddot{x}^\beta - \frac{1}{L}\frac{dL}{du}\dot{x}^\beta\right) + (\partial_{\dot\alpha\beta}\overline{L} - \partial_{\alpha\dot\beta}\overline{L})\dot{x}^\beta = 0.$$

Pour que ces géodésiques soient les mêmes que celles de F il faut et il suffit d'après (20. 3) que les premières parenthèses de (21. 2) soient égales à G^β. D'où ce résultat : les fonctions $\overline{L}$ définissant les mêmes géodésiques que L sont les fonctions $h1$ solution du système d'équations aux dérivées partielles :

$$(21.\ 3) \qquad \partial_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{L}\, G^\beta + (\partial_{\dot\alpha\beta}\overline{L} - \partial_{\alpha\dot\beta}\overline{L})\dot{x}^\beta = 0.$$

Comme application des considérations précédentes résolvons le problème suivant :

Problème. — Étant donné une fonction $L(x, \dot{x})\dot{h}1$, existe-t-il une fonction $\overline{L}(x, \dot{x})$ de la forme :

$$\overline{L}(x, \dot{x}) = f(x)L(x, \dot{x})$$

telle que L et $\overline{L}$ définissent les mêmes géodésiques?

Surlignons tout ce qui est relatif à l'espace de Finsler $\overline{F}$ défini par $f(x)L$, où $f(x)$ est supposée connue.

Posons $\overline{F} = \frac{1}{2}f^2L^2$; d'où

$$2\overline{G}_\beta = \partial_{\dot\beta\dot\alpha}\overline{F}\dot{x}^\alpha - \partial_\beta\overline{F} = 2f^2G_\beta + 2f\partial_\alpha f L\partial_{\dot\beta}L\dot{x}^\alpha - f\partial_\beta f L^2. \tag{21. 4}$$

Pour que ces relations soient de la forme (21. 1) ou de la forme équivalente :

$$2\overline{G}_\beta = 2f^2G_\beta + 2pf^2L\partial_{\dot\beta}L \tag{21. 5}$$

il faut et il suffit qu'il existe une fonction $g(x, \dot{x})\dot{h}0$ telle que

$$\partial_{\dot\beta}L = g(x, \dot{x})\partial_\beta f. \tag{21. 6}$$

L est alors de la forme :

$$L = g(x, \dot{x})\partial_\beta f\dot{x}^\beta. \tag{21. 7}$$

Mais pour que l'on en déduise (21. 6) il faut que la fonction g soit indépendante des $\dot{x}$. Nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME. — *Pour que les fonctions* $L(x, \dot{x})$ et $f(x)L\,(x, \dot{x})$ *définissent les mêmes géodésiques, il est nécessaire et suffisant que la fonction* $L(x, \dot{x})$ *soit de la forme :*

$$L = g(x)\partial_\alpha f(x)\dot{x}^\alpha = g(x)\frac{df(x)}{du}.$$

Ce théorème est d'ailleurs une conséquence immédiate de la formule (18. 4).

Remarquons que si L est de la forme (21. 7) non seulement fL mais toute fonction de la forme

$$F(f)\,L \qquad \text{ou} \qquad G(g)\,L$$

définit les mêmes extrémales que L.

Cela résulte d'ailleurs directement de la définition du système extrémal des formes

$$\omega = g \partial_\alpha f \, dx^\alpha = g \, df \qquad \text{et} \qquad \varpi = \mathrm{F}(f) \, g \, df.$$

En effet $d\omega = dg \wedge df$ et $d\bar{\omega} = \mathrm{F}(f) \, dg \wedge df$ admettent le même système associé.

22. — Extrémales en coordonnées hamiltoniennes.

Considérons l'espace de Finsler défini sur la variété V_{n+1} par la donnée d'une fonction $\mathrm{L}(x^\alpha, y^\alpha)\, \dot{h}1$.

Un vecteur y de l'espace tangent en x à V_{n+1} peut être défini, soit par ses composantes contravariantes y^α par rapport au repère naturel au point x, soit par ses composantes covariantes $y_\alpha = g_{\alpha\beta} y^\beta$.

Au vecteur y d'origine x correspond le point Z de l'espace $\mathfrak{V}$ des vecteurs tangents à V_{n+1}. Nous appelons coordonnées hamiltoniennes du point Z les $2(n+1)$ nombres : x^α et y_α.

La métrique finslérienne étant supposée régulière, les relations : $y_\alpha = g_{\alpha\beta} y^\beta$ permettent de calculer les y^β en fonction des x^α et des y_α, les expressions obtenues étant homogènes et du 1er degré par rapport aux y_α ($\dot{h}1$ dans la suite).

En remplaçant dans $\mathrm{L}(x^\alpha, y^\alpha)$ les y^α par les expressions ainsi obtenues, L devient une fonction H des x^α, y_α telle que :

$$(22.1) \quad \mathrm{H}(x^\alpha, y_\alpha) = \mathrm{L}(x^\alpha, g^{\alpha\beta} y_\beta) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}(x^\alpha, g_{\alpha\beta} y^\beta) = \mathrm{L}(x^\alpha, y^\alpha).$$

Par définition $\mathrm{H}(x^\alpha, y_\alpha)$ est la fonction d'Hamilton correspondant à L. Comme L est $\dot{h}1$, H est $\dot{h}1$ c'est-à-dire que

$$(22.2) \qquad \dot{\partial}^\alpha \mathrm{H} y_\alpha = \mathrm{H} \qquad \text{avec} \qquad \dot{\partial}^\alpha \mathrm{H} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_\alpha}.$$

Le vecteur unitaire 1 ayant même direction que y a pour composantes contravariantes $l^\alpha = \dfrac{y^\alpha}{\mathrm{L}}$ et pour composantes covariantes

$$l_\alpha = \frac{y_\alpha}{\mathrm{H}}.$$

La relation (22. 1) montre alors que :

$$l^\alpha = \dot{\partial}^\alpha \mathrm{H} = \frac{y^\alpha}{\mathrm{H}}.$$

Nous avons donc

$$y^\alpha = \mathrm{H}\partial^{\dot\alpha}\mathrm{H} = \partial^{\dot\alpha}\left(\frac{1}{2}\mathrm{H}^2\right) = \partial^{\dot\alpha}\mathrm{K} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{K} = \frac{1}{2}\mathrm{H}^2$$

formules duales de

$$y_\alpha = \mathrm{L}\partial_{\dot\alpha}\mathrm{L} = \partial_{\dot\alpha}\left(\frac{1}{2}\mathrm{L}^2\right) = \partial_{\dot\alpha}\mathrm{F}.$$

Montrons maintenant que $\partial_\alpha \mathrm{H} = -\partial_\alpha \mathrm{L}$.

Différentions les 2 membres de l'identité

$$\mathrm{H}(x^\alpha,\ y_\alpha) = \mathrm{L}(x^\alpha,\ g^{\alpha\beta}y_\beta) = \mathrm{L}(x^\alpha,\ y^\alpha).$$

$$d\mathrm{H} = \partial_\alpha \mathrm{L}\, dx^\alpha + \partial_{\dot\alpha}\mathrm{L}\, dy^\alpha. \tag{22. 3}$$

Or $\quad \partial_{\dot\alpha}\mathrm{L}\, dy^\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{H}}\, y_\alpha\, dy^\alpha = 2\, d\mathrm{H} - \dfrac{1}{\mathrm{H}}\, y^\alpha\, dy_\alpha$

d'après $\quad y^\alpha y_\alpha = \mathrm{H}^2.$

L'expression (22. 3) de $d\mathrm{H}$ devient alors

$$d\mathrm{H} = -\partial_\alpha \mathrm{L}\, dx^\alpha + \frac{1}{\mathrm{H}}\, y^\alpha\, dy_\alpha. \tag{22. 4}$$

Nous en déduisons bien que $\partial_\alpha \mathrm{H} = -\partial_\alpha \mathrm{L}$ et nous retrouvons que

$$\partial^{\dot\alpha}\mathrm{H} = \frac{1}{\mathrm{H}}\, y^\alpha.$$

Il est alors aisé d'écrire les formules fondamentales relatives à un espace de Finsler, à l'aide des variables x^α, y_α et de la fonction H.

Nous avons par exemple les relations :

$$\mathrm{H}^2 = \mathrm{L}^2 = g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = g^{\alpha\beta}y_\alpha y_\beta.$$

Les relations $y^\alpha \partial_{\dot\lambda} g_{\alpha\beta} = 0$ entraînent que $g_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\alpha\dot\beta}\mathrm{F}$.

On montre alors à partir de $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma} = \delta^\beta_\gamma$ que $y_\alpha \partial^{\dot\lambda} g^{\alpha\beta} = 0$ relations qui entraînent que :

$$g^{\alpha\beta} = \partial^{\dot\alpha\dot\beta}\mathrm{K}.$$

La connexion étant euclidienne ($\nabla g^{\alpha\beta} = 0$) et spéciale au sens de Lichnerowicz, nous en déduisons que le tenseur de torsion a des composantes :

$$\mathrm{T}^{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\partial^{\dot\gamma} g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\partial^{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}\mathrm{K}.$$

Mais intéressons nous plus particulièrement au système différentiel des géodésiques de l'espace de Finsler; celles-ci sont définies par les équations d'Euler :

$$(22.5)\qquad \frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha}L - \partial_\alpha L = 0 \qquad \text{avec} \qquad y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}.$$

Or

$$\partial_{\dot\alpha}L = \frac{1}{H}y_\alpha \qquad \text{et} \qquad \partial_\alpha L = -\partial_\alpha H.$$

Les équations (22. 5) s'écrivent alors sous la forme :

$$\frac{d}{du}\frac{y_\alpha}{H} + \partial_\alpha H = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy_\alpha}{du} - \frac{y_\alpha}{H}\frac{dH}{du} + H\partial_\alpha H = 0$$

d'où le système d'équations définissant les géodésiques de l'espace de Finsler en coordonnées hamiltoniennes :

$$(22.6)\qquad \frac{dy_\alpha}{du} = -\partial_\alpha K + \lambda y_\alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{dx^\alpha}{du} = \partial^{\dot\alpha}K$$

λ étant une fonction des x^α, y_α h 1.

Les équations précédentes définissent en réalité des chemins basiques de W se projettant sur V_{n+1} suivant les géodésiques de l'espace de Finsler considéré.

Au lieu de prendre comme coordonnées hamiltoniennes sur W, x^α et y_α, ces dernières étant les composantes covariantes d'un vecteur quelconque de l'espace tangent T_x, prenons x^α et l_α avec $l_\alpha = \frac{y_\alpha}{H}$.

Ces $2(n+1)$ variables ne sont plus indépendantes car les l_α étant les composantes covariantes d'un vecteur unité nous avons :

$$H(x^\alpha, l_\alpha) = 1.$$

Prenons comme paramètre u l'arc s de géodésique défini par

$$ds = L(x^\alpha, dx^\alpha) = \partial_{\dot\alpha}L(x^\alpha, y^\alpha)\,dx^\alpha = l_\alpha\, dx^\alpha.$$

Dans ces conditions les équations (22. 6) se mettent sous la forme :

$$(22.7)\qquad \frac{dx^\alpha}{ds} = \partial^{\dot\alpha}H \qquad \text{et} \qquad \frac{dl_\alpha}{ds} = -\partial_\alpha H.$$

Les équations précédentes peuvent être obtenues directement; elles constituent en effet le système extrémal de la forme :

$$\omega = \partial_{\dot\alpha} L dx^\alpha = l_\alpha dx^\alpha.$$

Ce système extrémal est le système associé de la 2-forme :

$$d\omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha.$$

En écrivant que

$$i(Z)\, d\omega \equiv 0$$

pour tout vecteur Z tangent à W c'est-à-dire tel que

$$i(Z)\, dH = 0$$

nous trouvons

$$\frac{\partial\, d\omega}{\partial\, dx^\alpha} = \lambda \frac{\partial\, dH}{\partial\, dx^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\, d\omega}{\partial\, dl_\alpha} = \lambda \frac{\partial\, dH}{\partial\, dl_\alpha}$$

ou

$$-\, dl_\alpha = \lambda\, \partial_\alpha H \qquad \text{et} \qquad dx^\alpha = \lambda \partial^{\dot\alpha} H.$$

Comme $\dfrac{dx^\alpha}{ds} = l^\alpha = \partial^{\dot\alpha} H$ le facteur de proportionnalité est égal à ds d'où les équations (22. 7).

23. — Chemins basiques de W en coordonnées hamiltoniennes. Considérons un chemin différentiable de W. Un tel chemin est défini paramétriquement par les équations

$$x^\alpha = x^\alpha(u) \qquad \text{et} \qquad l_\alpha = l_\alpha(u).$$

Pour que ce chemin soit basique il faut et il suffit qu'il existe une fonction $f(u)$ telle que

$$\frac{dx^\alpha}{du} = f(u)\, l^\alpha \qquad \text{où} \qquad l^\alpha = g^{\alpha\beta} l_\beta = \partial^{\dot\alpha} H$$

en supposant les x^α et l_α figurant dans $\partial^{\dot\alpha} H$ exprimés en fonction de u.

Un chemin est donc basique si et seulement si le long de ce chemin l'on a :

$$\text{(23. 1)} \qquad \frac{dx^1}{\partial^{\dot 1} H} = \frac{dx^2}{\partial^{\dot 2} H} = \cdots = \frac{dx^{n+1}}{\partial^{\dot n + 1} H}.$$

Comme application de ce qui précède considérons la forme semi-basique définie sur W :

$$\omega = a_\alpha(x^\beta, l_\beta)\, dx^\alpha$$

et cherchons sous quelles conditions les extrémales de ω sont des courbes basiques de W. Nous avons :

$$d\omega = \frac{1}{2}(\partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha)\, dx^\alpha \wedge dx^\beta + \dot{\partial}^\beta a_\alpha\, dl_\beta \wedge dx^\alpha.$$

D'où le système extrémal :

$$\begin{cases} (\partial_\alpha a_\beta - \partial_\beta a_\alpha)\dfrac{dx^\beta}{du} - \dot{\partial}^\beta a_\alpha \dfrac{dl_\beta}{du} = \lambda \partial_\alpha \mathrm{H}, & (23.2) \\[2ex] \dot{\partial}^\alpha a_\beta \dfrac{dx^\beta}{du} = \lambda \dot{\partial}^\alpha \mathrm{H}. & (23.3) \end{cases}$$

Les équations (23. 3) doivent entraîner

$$\frac{dx^\beta}{du} = \mu \dot{\partial}^\beta \mathrm{H}.$$

Il est donc nécessaire que les coefficients $\dot{\partial}^\alpha a_\beta$ soient de la forme :

$$\dot{\partial}^\alpha a_\beta = f(x, l)\, \delta^\alpha_\beta. \tag{23. 4}$$

On en déduit en supposant $\alpha \neq \beta$

$$\frac{\partial^2 a_\beta}{\partial l_\alpha \partial l_\beta} = \frac{\partial f}{\partial l_\alpha} = 0.$$

La fonction f est donc indépendante de l, et a_α est nécessairement de la forme :

$$a_\alpha = f(x)\, l_\alpha + g_\alpha(x).$$

La réciproque est immédiate; d'où le

THÉORÈME. — *Pour qu'une forme semi-basique définie sur* W :

$$\omega = a_\alpha(x^\beta, l_\beta)\, dx^\alpha$$

admette des extrémales basiques, il faut et il suffit que a_α soit de la forme :

$$a_\alpha = f(x) l_\alpha + g_\alpha(x)$$

$f(x)$ étant une fonction des seules variables x^α, $g_\alpha(x)$ les composantes covariantes d'un vecteur défini sur V_{n+1}.

Le résultat obtenu concorde bien avec celui du § 17. En effet, en passant aux variables x^α, y^α, ω se met sous la forme :

$$\omega = [f(x)\partial_{\dot\alpha}L + g_\alpha(x)]\, dx^\alpha = \dot{d}(fL + g_\alpha y^\alpha).$$

Les calculs précédents montrent aussi que, étant donnée la 2-forme Ω définie sur W :

$$\Omega = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta + a^\beta_\alpha\, dl_\beta \wedge dx^\alpha$$

pour que les solutions du système associé de Ω soient des courbes basiques de W, il faut et il suffit que les coefficients a^β_α soient de la forme :

$$a^\beta_\alpha = f(x)\, \delta^\beta_\alpha$$

c'est-à-dire que l'on ait :

$$\Omega = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta + f(x)\, dl_\alpha \wedge dx^\alpha.$$

CHAPITRE IV

Calcul variationnel et Espace de Finsler généralisés.

24. — S-extrémales d'une intégrale.

Reprenons les notations du § 16. Soient f_0 et f_1 deux fibres de W appartenant à un même domaine U de coordonnées locales de W; soient $x_0 = pf_0$ et $x_1 = pf_1$ les points correspondants de V_{n+1}.

Soit E l'ensemble des chemins différentiables de U joignant un point de f_0 à un point de f_1. Définissons l'un de ces chemins C par une représentation de la forme :

$$(24.1) \qquad x^\alpha = x^\alpha(u), \qquad y^\alpha = y^\alpha(u)$$

avec

$$x_0 = x(u_0) \qquad \text{et} \qquad x_1 = x(u_1).$$

Un chemin $\overline{C}$ de E voisin de C est défini par :

$$(24.2) \qquad x^\alpha = x^\alpha(u) + \delta x^\alpha, \qquad y^\alpha = y^\alpha(u) + \delta y^\alpha$$

où δx^α et δy^α sont des fonctions différentiables de u de la forme :

$$\delta x^\alpha = \varepsilon X^\alpha(u), \qquad \delta y^\alpha = \varepsilon Y^\alpha(u)$$

ε étant un infiniment petit principal, X^α, Y^α les composantes d'un vecteur tangent à W au point $z(u)$ de coordonnées $x^\alpha(u)$, $y^\alpha(u)$.

Supposons que T^β_α soit un tenseur restreint $\dot{h}1$ défini sur $\mathfrak{V}$. Nous appellerons chemins T-voisins de C les chemins $\overline{C}_T$ voisins de C définis par des δx^α arbitraires et par

$$(24.3) \qquad \delta y^\alpha = \frac{d}{du}\delta x^\alpha + T^\alpha_\beta \delta x^\beta.$$

Supposons donnée sur U une fonction L $\dot{h}1$ de classe C^2 ; en coordonnées locales elle s'exprimera par $L(x^\alpha, y^\alpha)$. Posons

$$I(C) = \int_C L\,du.$$

En passant de C à $\overline{C}$, I(C) subit une variation ΔI de partie principale

$$\delta I = \int_C (\partial_\alpha L \delta x^\alpha + \delta_{\dot\alpha} L \delta y^\alpha)\,du. \tag{24. 4}$$

Pour un chemin $\overline{C}$, T-voisin de C nous avons :

$$\delta I = \int_C (\partial_\alpha L \delta x^\alpha + \partial_{\dot\alpha} L T^\alpha_\beta \delta x^\beta)\,du + \int_C \partial_{\dot\alpha} L \frac{d\delta x^\alpha}{du}\,du.$$

Intégrons par parties la dernière intégrale; comme les δx^α sont nuls aux extrémités de C nous obtenons :

$$\delta I = \int_C \left(\partial_\alpha L + \partial_{\dot\beta} L T^\beta_\alpha - \frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha} L\right) \delta x^\alpha\,du.$$

Pour que $\delta I = 0$ quels que soient les δx^α, il faut et il suffit d'après le lemme fondamental du calcul des variations que l'on ait le long de C :

$$\partial_\alpha L - \frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha} L + \partial_{\dot\beta} L\, T^\beta_\alpha = 0$$

ou

$$P_\alpha(L) \equiv \frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha} L - \partial_\alpha L = \partial_{\dot\beta} L\, T^\beta_\alpha. \tag{24. 5}$$

Nous désignons par extrémales généralisées de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} L(x, \dot x)\,du$ les projections sur V_{n+1} des chemins basiques solutions de (24. 5) c'est-à-dire les solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{du}\partial_{\dot\alpha} L - \partial_\alpha L = \partial_{\dot\beta} L\, T^\beta_\alpha, \\ y^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{du}. \end{cases} \tag{24. 6}$$

Lorsque le tenseur T^β_α est nul en tout point de $\mathfrak{V}$, les T-extrémales de I sont les extrémales ordinaires de l'intégrale :

$$\int_{x_0}^{x_1} L(x, \dot x)\,du.$$

Supposons maintenant la variété V_{n+1} douée de la métrique finslérienne définie par : $ds = L(x^\alpha, dx^\alpha)$.

Dans ces conditions nous pouvons transformer les 2e membres de (24. 5).

En effet :

$$\partial_{\dot\beta} L\, T^\beta_\alpha = g_{\beta\gamma} l^\gamma T^\beta_\alpha = T_{\alpha\gamma} l^\gamma \qquad (T_{\alpha\gamma} = g_{\beta\gamma} T^\beta_\alpha).$$

Or $l^\alpha P_\alpha(L) \equiv 0$, il en résulte que

$$T_{\alpha\gamma} l^\alpha l^\gamma = 0.$$

Cette condition est satisfaite si le tenseur $T_{\alpha\gamma}$ est antisymétrique, ce que nous supposerons dans la suite.

En *Mécanique Analytique* nous serons amenés à introduire la 2-forme :

$$\omega = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{2} \dot d(- X_\alpha\, dx^\alpha)$$

les X_α étant les composantes covariantes du vecteur force généralisé, les $S_{\alpha\beta}$ étant les composantes $h0$ d'un tenseur appelé tenseur force et défini sur W. Nous sommes amenés à poser :

$$T_{\alpha\beta} = L S_{\alpha\beta}.$$

Nous appellerons S-extrémales de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} L(x, \dot x)\, du$ les solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{du} \partial_{\dot\alpha} L - \partial_\alpha L = S_{\alpha\beta} y^\beta, \\ y^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{du}. \end{cases}$$

Remarquons que ce système différentiel est le système associé de la 2-forme :

$$\begin{aligned} \Omega &= d(\partial_{\dot\alpha} L\, dx^\alpha) + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \\ &= d(\dot d L) + \dot d\left(- \frac{1}{2} X_\alpha\, dx^\alpha\right) \\ &= \dot d\left(- dL - \frac{1}{2} X_\alpha\, dx^\alpha\right). \end{aligned}$$

25. — Espaces S-Finslériens.

Proposons-nous de définir sur V_{n+1} une connexion linéaire de directions dont les coefficients sont déterminés par la donnée de la fonction $L \cdot \dot{h}1$ et par celle du tenseur $S_{\alpha\beta}$ $\dot{h}0$ et qui soit telle que les géodésiques de V_{n+1}, relativement à cette connexion, soient les S-extrémales de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} L(x,\ \dot{x})\, du$$

définies précédemment. Nous adopterons le mode d'exposition de A. Lichnerowicz ([7]).

Soit $E(V_{n+1})$ l'espace fibré principal des repères sur V_{n+1} $p^{-1}E(V_{n+1})$ son image réciproque sur W. Une connexion linéaire de directions sur V_{n+1} est une connexion infinitésimale sur $p^{-1}E(V_{n+1})$.

Une telle connexion est définie par la donnée d'une 1-forme convenable ω de type adjoint à valeurs dans l'Algèbre de Lie de $GL(n+1,\ R)$.

Soit U un domaine de coordonnées locales de V_{n+1}, $\pi^{-1}U$ le domaine correspondant de $\mathfrak{V}$; soit Z un point de $\mathfrak{V}$ tel que $\pi Z = x$; un système de coordonnées locales de Z est l'ensemble des coordonnées x^α de x et des composantes y^α d'un vecteur de T_x.

Prenons comme corepère de T^*_Z les $2(n+1)$ formes dx^α, dy^α. Rapportée à ce corepère la connexion ω est définie par ses composantes ω^α_β qui sont de la forme:

$$\omega^\alpha_\beta = b^\alpha_{\beta\gamma}\, dx^\gamma + c^\alpha_{\beta\gamma}\, dy^\gamma. \tag{25. 1}$$

La connexion étant définie sur W, les $b^\alpha_{\beta\gamma}$ sont $\dot{h}0$, les $c^\alpha_{\beta\gamma}\dot{h}(-1)$ et nous avons les identités:

$$c^\alpha_{\beta\gamma} y^\gamma = 0.$$

Pour un vecteur restreint quelconque $\vec{X}$ défini sur $\mathfrak{V}$ nous posons:

$$\nabla X^\alpha = dX^\alpha + \omega^\alpha_\beta X^\beta.$$

Considérons en particulier le champ de vecteurs qui au point z de $\mathfrak{V}$ fait correspondre le vecteur $\vec{z}$ de T_{pz} de composantes y^α. Posons

$$\theta^\alpha = \nabla y^\alpha = dy^\alpha + \omega^\alpha_\beta y^\beta. \tag{25. 2}$$

([7]) A. Lichnerowicz [6].

La connexion linéaire ω étant supposée régulière, les $2(n+1)$ formes dx^α et θ^α définissent un corepère de T^*_z. Relativement à ce corepère nous poserons :

$$\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\, dx^\gamma + C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\gamma. \tag{25. 3}$$

Les formes ω^α_β étant définies sur W, on vérifie que les Γ sont $\mathring{h}0$, les C $\mathring{h}(-1)$ et que $C^\alpha_{\beta\gamma} y^\gamma = 0$.

Les dérivées pfaffiennes d'une fonction $f(x, y)$ relativement au corepère $(dx^\alpha, \theta^\alpha)$ s'expriment de façon simple à l'aide des dérivées partielles de f relativement aux x et y. En effet en désignant les dérivées pfaffiennes par $\delta_\alpha f$ et $\delta_{\dot\alpha} f$ nous avons :

$$df = \delta_\alpha f\, dx^\alpha + \delta_{\dot\alpha} f \theta^\alpha = \partial_\alpha f\, dx^\alpha + \partial_{\dot\alpha} f\, dy^\alpha$$

d'où par identification :

$$\delta_\alpha = \partial_\alpha - y^\lambda \Gamma^\beta_{\lambda\alpha}\partial_{\dot\beta}, \tag{25. 4}$$

$$\delta_{\dot\alpha} = \partial_{\dot\alpha} - y^\lambda C^\beta_{\lambda\alpha}\partial_{\dot\beta}. \tag{25. 5}$$

Explicitons maintenant la forme de torsion de cette connexion. La 2-forme Σ de torsion est définie par :

$$\Sigma^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge dx^\beta = \frac{1}{2} S^\alpha_{\beta\gamma}\, dx^\beta \wedge dx^\gamma - T^\alpha_{\beta\gamma}\, dx^\beta \wedge \theta^\gamma.$$

En remplaçant ω^α_β par son expression tirée de (25. 3) nous obtenons :

$$S^\alpha_{\beta\gamma} = -(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}) \tag{25. 6}$$

et

$$T^\alpha_{\beta\gamma} = C^\alpha_{\beta\gamma}. \tag{25. 7}$$

Posons maintenant $2F = L^2$ et

$$g_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\alpha\dot\beta} F.$$

La fonction F étant $\mathring{h}2$ nous avons :

$$2F = L^2 = g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta$$

ce qui montre que les $g_{\alpha\beta}$ sont les composantes covariantes d'un tenseur symétrique $\mathring{h}0$, c'est-à-dire défini sur W.

Pour que la connexion linéaire de directions définie par ω soit naturellement associée à une connexion euclidienne de directions de la variété métrique définie sur V_{n+1} par le tenseur $g_{\alpha\beta}$, il faut et il suffit que pour cette connexion l'on ait ([8]) :

$$\nabla g_{\alpha\beta} = 0$$

ou, en explicitant :

$$dg_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha}^{\lambda} g_{\lambda\beta} - \omega_{\beta}^{\lambda} g_{\lambda\alpha} = 0. \tag{25. 8}$$

Posons

$$\omega_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda}\omega_{\beta}^{\lambda}; \qquad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\lambda}\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}; \qquad T_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\lambda}T_{\beta\gamma}^{\lambda}.$$

Les relations (25. 8) sont alors équivalentes aux suivantes :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \delta_{\gamma} g_{\alpha\beta}, \tag{25. 9}$$
$$T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\alpha\gamma} = \delta_{\dot\gamma} g_{\alpha\beta}. \tag{25. 10}$$

Pour que la connexion ω soit entièrement déterminée par la donnée de L et du tenseur S nous allons faire des hypothèses supplémentaires, relatives aux tenseurs de torsion, analogues aux hypothèses définissant les classes de *connexions spéciales* au sens de M. A. Lichnerowicz :

(25. 11) 1° $T_{\alpha\beta\gamma} = T_{\beta\alpha\gamma}$,

(25. 12) 2° $S_{\beta\gamma}^{\alpha} = -l^{\alpha} S_{\beta\gamma}$ avec $l^{\alpha} = \dfrac{y^{\alpha}}{L}$.

Si le tenseur $S_{\alpha\beta}$ est nul sur toute la variété W les hypothèses faites définissent une connexion et une seule : la connexion finslérienne de la variété; c'est le théorème fondamental de la Géométrie Finslérienne ([8]).

Si le tenseur $S_{\alpha\beta} \neq 0$ nous allons montrer que les hypothèses précédentes déterminent encore une connexion et une seule. Les relations (25. 10) et (25. 11) montrent que l'on a :

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\delta_{\dot\gamma} g_{\alpha\beta}.$$

De l'expression de $g_{\alpha\beta}$ on tire

$$y^{\beta}\partial_{\dot\gamma} g_{\alpha\beta} = 0.$$

Or d'après (25. 5)

$$\delta_{\dot\gamma} g_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\gamma} g_{\alpha\beta} - y^{\lambda} T_{\lambda\gamma}^{\rho} \partial_{\dot\rho} g_{\alpha\beta}.$$

Il en résulte

$$y^{\beta}\delta_{\dot\gamma} g_{\alpha\beta} = 0.$$

([8]) A. Lichnerowicz [6].

C'est-à-dire
$$y^{\beta}T_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

D'après (25. 5) $\delta_{\dot\gamma} = \partial_{\dot\gamma}$ et ainsi

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\partial_{\dot\gamma}g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}F. \tag{25. 13}$$

$T_{\alpha\beta\gamma}$ est donc un tenseur symétrique par rapport à ses 3 indices qui satisfait à :

$$T_{\alpha\beta\gamma}y^{\alpha} = T_{\alpha\beta\gamma}y^{\beta} = T_{\alpha\beta\gamma}y^{\gamma} = 0. \tag{25. 14}$$

Calcul des $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$. — Il nous reste à déterminer les coefficients $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$. Nous avons d'après (25. 9), (25. 6) et (25. 12) les relations :

$$\begin{cases} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}g_{\alpha\beta} \\ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = l_{\alpha}S_{\beta\gamma}. \end{cases}$$

Écrivons les quatre relations déduites des précédentes en permutant circulairement α, β, γ. Par des combinaisons évidentes nous obtenons :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\delta_{\gamma}g_{\alpha\beta} + \delta_{\beta}g_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha}g_{\beta\gamma}) + \frac{1}{2}(l_{\alpha}S_{\beta\gamma} + l_{\beta}S_{\gamma\alpha} - l_{\gamma}S_{\alpha\beta}). \tag{25. 15}$$

Posons pour simplifier :

$$\Sigma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(l_{\alpha}S_{\beta\gamma} + l_{\beta}S_{\gamma\alpha} - l_{\gamma}S_{\alpha\beta})$$

tenseur antisymétrique par rapport à α et β.

Passons maintenant des dérivées pfaffiennes aux dérivées ordinaires d'où :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma, \alpha] - y^{\lambda}(\Gamma^{\mu}{}_{\gamma}T_{\mu\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta}T_{\mu\gamma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha}T_{\mu\beta\gamma}) + \Sigma_{\alpha\beta\gamma} \tag{25. 16}$$

où les $[\beta\gamma, \alpha]$ sont les symboles de Christoffel de 1re espèce.

Formons maintenant $y^{\beta}\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ et $y^{\beta}y^{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ en tenant compte de (25. 14) :

$$y^{\beta}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = y^{\beta}[\beta\gamma, \alpha] - y^{\beta}y^{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\lambda\beta}T_{\mu\gamma\alpha} + y^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta\gamma} \tag{25. 17}$$

et

$$y^{\beta}y^{\gamma}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = y^{\beta}y^{\gamma}[\beta\gamma, \alpha] + y^{\beta}y^{\gamma}\Sigma_{\alpha\beta\gamma}. \tag{25. 18}$$

Posons avec E. Cartan :

$$y^\beta y^\gamma[\beta\gamma,\ \alpha] = 2G_\alpha = \partial_{\lambda\dot\alpha} F y^\lambda - \partial_\alpha F.$$

D'autre part :

$$y^\beta y^\gamma{}_\alpha\Sigma_{\beta\gamma} = LS_{\gamma\alpha}y^\gamma = -LX_\alpha$$

en posant

$$X_\alpha = S_{\alpha\gamma}y^\gamma.$$

Les relations (25. 18) prennent alors la forme

$$y^\beta y^\gamma \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = 2G_\alpha - LX_\alpha$$

ou

$$y^\beta y^\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 2G^\alpha - LX^\alpha.$$

En remplaçant dans (25. 17) nous obtenons :

$$y^\beta\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = y^\beta[\beta\gamma,\ \alpha] - (2G^\beta - LX^\beta)T_{\alpha\beta\gamma} + y^\beta\Sigma_{\alpha\beta\gamma}$$

ou

$$(25.\ 19) \qquad y^\beta\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\beta}\partial_{\dot\gamma}G^\beta + LX^\beta T_{\alpha\beta\gamma} + y^\beta\Sigma_{\alpha\beta\gamma}$$

en remarquant que

$$\partial_{\dot\gamma}G_\alpha - 2G^\beta T_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\beta}\partial_{\dot\gamma}G^\beta.$$

Transformons alors (25. 16) à l'aide de (25. 19) nous obtenons :

(25. 20)

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma,\ \alpha] &- (T_{\alpha\beta\lambda}\partial_{\dot\gamma}G^\lambda + T_{\gamma\alpha\lambda}\partial_{\dot\beta}G^\lambda - T_{\beta\gamma\lambda}\partial_{\dot\alpha}G^\lambda)\\ &- LX^\lambda(T_{\mu\lambda\gamma}T^\mu_{\alpha\beta} + T_{\mu\lambda\beta}T_{\gamma\alpha} - T_{\mu\lambda\alpha}T^\mu_{\beta\gamma})\\ &- y^\lambda(\Sigma_{\mu\lambda\gamma}T^\mu_{\alpha\beta} + \Sigma_{\mu\lambda\beta}T^\mu_{\gamma\alpha} - \Sigma_{\mu\lambda\alpha}T^\mu{}_\gamma) + \Sigma_{\alpha\beta\gamma}.\end{aligned}$$

La première ligne de l'expression de $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ représente le coefficient $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ pour la connexion finslérienne, coefficient que nous désignerons par $\mathring{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}$. En explicitant les différentes parenthèses nous trouvons

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \mathring{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} &- LX_\lambda(T^\lambda_{\mu\gamma}T^\mu_{\alpha\beta} + T^\lambda_{\mu\beta}T^\mu_{\gamma\alpha} - T^\lambda_{\mu\alpha}T^\mu{}_\gamma)\\ &+ \frac{1}{2}X_\lambda(l_\gamma T^\lambda_{\alpha\beta} + l_\beta T^\lambda_{\gamma\alpha} - l_\alpha T^\lambda_{\beta\gamma})\\ &- \frac{1}{2}L(S_{\gamma\lambda}T^\lambda_{\alpha\beta} + S_{\beta\lambda}T^\lambda_{\gamma\alpha} - S_{\alpha\lambda}T^\lambda_{\beta\gamma})\\ &+ \frac{1}{2}(l_\alpha S_{\beta\gamma} + l_\beta S_{\gamma\alpha} - l_\gamma S_{\alpha\beta}).\end{aligned}$$

Remarquons que la partie antisymétrique de $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ en β et γ est :

$$\Gamma_{\alpha\underset{\smile}{\beta\gamma}} = \frac{1}{2} l_\alpha S_{\beta\gamma}.$$

Calcul des $b_{\alpha\beta\gamma}$. — Les coefficients $b_{\alpha\beta\gamma}$ s'expriment simplement en fonction des $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$.

En effet en identifiant les coefficients de dx^γ dans (25. 1) et (25. 3) nous obtenons :

$$b_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + T_{\alpha\beta\mu} b^\mu_{\lambda\gamma} y^\lambda.$$

Comme $y^\beta b_{\alpha\beta\gamma} = y^\beta \Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ nous avons

$$b_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + T_{\alpha\beta\mu}(\partial_{\dot\gamma} G^\mu + LX^\lambda T^\mu_{\lambda\gamma} + y^\lambda \Sigma^\mu_{\lambda\gamma}).$$

En remplaçant $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ par son expression tirée de (25. 20) nous trouvons :

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta\gamma} = {} & [\beta\gamma,\ \alpha] - (T_{\gamma\alpha\lambda}\,\partial_{\dot\beta} G^\lambda - T_{\beta\gamma\lambda}\,\partial_{\dot\alpha} G^\lambda) \\ & - LX^\lambda (T_{\mu\lambda\beta} T^\mu_{\gamma\alpha} - T_{\mu\lambda\alpha} T^\mu_{\beta\gamma}) - y^\lambda (\Sigma_{\mu\lambda\beta} T^\mu_{\gamma\alpha} - \Sigma_{\mu\lambda\alpha} T^\mu_{\beta\gamma}) + \Sigma_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

La première ligne de l'expression de $b_{\alpha\beta\gamma}$ représente le coefficient analogue pour la connexion finslérienne que nous noterons $\mathring{b}_{\alpha\beta\gamma}$; le coefficient de LX^λ représente le tenseur de courbure $Q_{\lambda\gamma,\,\alpha\beta}$ (9) qui est d'ailleurs le même pour les deux connexions.

Nous pouvons donc écrire :

$$b_{\alpha\beta\gamma} = \mathring{b}_{\alpha\beta\gamma} - LX^\lambda Q_{\lambda\gamma,\,\alpha\beta} - y^\lambda (\Sigma_{\mu\lambda\beta} T^\mu_{\gamma\alpha} - \Sigma_{\mu\lambda\alpha} T^\mu_{\beta\gamma}) + \Sigma_{\alpha\beta\gamma}.$$

Nous pouvons d'ailleurs expliciter davantage :

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta\gamma} = \mathring{b}_{\alpha\beta\gamma} - LX_\lambda Q^\lambda_{\gamma,\,\alpha\beta} + \frac{1}{2} L(S_{\alpha\lambda} T^\lambda_{\beta\gamma} - S_{\beta\lambda} T^\lambda_{\gamma\alpha}) \\ - \frac{1}{2} X_\lambda (l_\alpha T^\lambda_{\beta\gamma} - l_\beta T^\lambda_{\gamma\alpha}) + \Sigma_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Géodésiques. — Soit $l_\alpha = \partial_{\dot\alpha} L$. Calculons sa différentielle absolue :

$$\begin{aligned} \nabla l_\alpha &= dl_\alpha - \omega^\beta_\alpha l_\beta \\ &= dl_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} l_\beta \, dx^\gamma \\ &= dl_\alpha - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} l^\beta \, dx^\gamma. \end{aligned}$$

(9) Tenseur noté S par Élie Cartan.

Explicitons la 2-forme $\nabla l_\alpha \wedge dx^\alpha$. Nous obtenons

$$\nabla l_\alpha \wedge dx^\alpha = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} l^\beta (\Gamma_{\beta\alpha\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma\alpha})\, dx^\alpha \wedge dx^\gamma.$$

Or

$$\Gamma_{\beta\alpha\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma\alpha} = l_\beta S_{\alpha\gamma}.$$

Comme $l_\beta l^\beta = 1$ nous trouvons

$$\nabla l_\alpha \wedge dx^\alpha = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

La 2-forme ainsi obtenue est comme nous le verrons la 2-forme fondamentale du système dynamique défini par L et $S_{\alpha\beta}$.

Le long d'une géodésique $\frac{\nabla l_\alpha}{du} = 0$, u étant un paramètre arbitraire. En posant $y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}$ nous obtenons le système différentiel :

$$\frac{\nabla l_\alpha}{du} = \frac{dl_\alpha}{du} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} l^\beta y^\gamma = 0.$$

Or

$$\Gamma_{\beta\alpha\gamma} l^\beta y^\gamma = \mathring{\Gamma}_{\beta\alpha\gamma} l^\beta y^\gamma + \Sigma_{\beta\alpha\gamma} l^\beta y^\gamma.$$

Mais $\Sigma_{\beta\alpha\gamma} l^\beta y^\gamma = X_\alpha$.

Le système différentiel des géodésiques est alors le suivant

$$\frac{\nabla l_\alpha}{du} = \frac{\mathring{\nabla} l_\alpha}{du} - X_\alpha = 0$$

ou

$$\frac{d}{du} \partial_{\dot\alpha} L - \partial_\alpha L = X_\alpha.$$

Nous retrouvons bien les S-extrémales de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} L(x,\ \dot x)\, du.$$

Les espaces que nous venons de construire ne diffèrent des espaces de Finsler que par la convention E d'Élie Cartan; les $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ notés $\Gamma^*_{\alpha\beta\gamma}$ dans (10) et (11) ne sont plus symétriques par rapport à β et γ mais sont tels que

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = l_\alpha S_{\beta\gamma}.$$

(10) E. Cartan [1]

(11) A. Lichnerowicz [6].

Il en résulte que la carte d'un cycle infinitésimal ponctuel obtenue en attachant à chaque point un vecteur unitaire se déplaçant parallèlement à lui-même à partir de l'origine du cycle ne se ferme plus; le vecteur joignant l'origine à l'extrémité ayant pour composantes

$$\Sigma^\alpha = \left(\frac{1}{2} S_{\beta\gamma}\, dx^\beta \wedge dx^\gamma\right) l^\alpha.$$

Remarquons que nous aurions pu remplacer notre hypothèse (25. 12) par d'autres sans modifier les géodésiques. Indiquons les deux suivantes :

1° $$S_{\alpha\beta\gamma} = -(S_{\alpha\beta} l_\gamma - S_{\alpha\gamma} l_\beta).$$

On en déduit :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma,\ \alpha]^\delta + S_{\alpha\beta} l_\gamma$$

où l'indice δ indique qu'il s'agit de dérivées pfaffiennes.

2° $S_{\alpha\beta\gamma} = -(g_{\alpha\gamma} X_\beta - g_{\alpha\beta} X_\gamma)$ comme pour les espaces de Weyl. On en déduit :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma,\ \alpha]^\delta + X_\alpha g_{\beta\gamma} - X_\beta g_{\alpha\gamma}.$$

Mais dans chacun de ces deux cas nous aurions trouvé :

$$\nabla l_\alpha \wedge dx^\alpha = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2}(X_\alpha l_\beta - X_\beta l_\alpha)\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Cette 2-forme n'est pas, en général, la 2-forme fondamentale d'un système dynamique.

Cas particulier : espaces S-*riemanniens.* — Supposons que L^2 soit une forme quadratique par rapport aux variables y; dans ces conditions les $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants des y et le tenseur de torsion T est nul. Les coefficients de connexion $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ se réduisent alors à :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma,\ \alpha] + \Sigma_{\alpha\beta\gamma}.$$

Un tel espace sera dit S-riemannien; il pourrait être utilisé en Relativité générale, $S_{\alpha\beta}$ étant par exemple les composantes du tenseur champ électro-magnétique.

26. — Calcul variationnel généralisé de A. Lichnerowicz ([12]).

Considérons toujours la variété différentiable V_{n+1}, la variété $\mathfrak{V}$ des vecteurs non nuls tangents à V_{n+1} et la variété W des directions orientées tangentes à V_{n+1}.

Soit C un chemin différentiable de V_{n+1} défini dans un domaine U de coordonnées locales par la représentation paramétrique :

$$x^\alpha = x^\alpha(\nu)$$

les fonctions $x^\alpha(\nu)$ étant de classe C^2 sur un intervalle (a, b).

Désignons par (u_0, u_1) un sous-intervalle de (a, b) d'amplitude inférieure à ε, ε étant un nombre positif donné, arbitrairement petit et soit $y^\alpha(\nu, \varepsilon)$ un ensemble de $n+1$ fonctions continûment différentiables pour tout ν appartenant à (u_0, u_1) et nulles pour $\nu = u_0$ et $\nu = u_1$.

Posons

$$(26.\ 1)\quad \delta x^\alpha = \varepsilon y^\alpha(\nu, \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \eta(\varepsilon) = \max |\delta x^\alpha(\nu)|$$

pour

$$\nu \in (u_0, u_1) \qquad \text{et} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n+1.$$

En supposant les dérivées par rapport à ν des fonctions $y^\alpha(\nu, \varepsilon)$ bornées en valeur absolue sur (a, b) par un nombre K nous avons

$$\eta(\varepsilon) < K\varepsilon^2.$$

Sous-différentielle d'une fonctionnelle. — Désignons avec M. Lichnerowicz par $F_{u_0}^{u}[x^\alpha(\nu)]$ une fonctionnelle attachée à l'arc (u_0, u) de C et satisfaisant à la condition suivante : pour tout u_0 de l'intervalle (a, b) il existe un intervalle (u_0, u_1) tel que pour tout u de cet intervalle, $F_{u_0}^{u}$ définisse une fonction intégrable de u.

On appelle *sous-différentielle* δF de la fonctionnelle F une fonction des $x^\alpha(\nu)$, de leur dérivées premières $\dot{x}^\alpha(\nu)$ et des δx^α, linéaire par rapport aux δx^α et telle que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta F - \delta F}{\eta} = 0$$

où ΔF désigne l'accroissement de F correspondant aux accroissements (26. 1) des x^α.

([12]) A. Lichnerowicz [2], pp. 343-350.

Exemple. — Soit $f(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$ une fonction $h1$ de classe C^2. Posons

$$F = \int_{u_0}^{u} f[x^\alpha(v),\ \dot{x}^\alpha(v)]\, dv. \tag{26. 2}$$

La fonctionnelle F admet pour différentielle :

$$dF = \int_{u_0}^{u} [\partial_\alpha f - \frac{d}{dv}\partial_{\dot\alpha} f]\, dx^\alpha\, dv + \partial_{\dot\alpha} f[x^\alpha(u)]\, dx^\alpha(u).$$

M. Lichnerowicz a montré (13) que la sous-différentielle de F est :

$$\delta F = \partial_{\dot\alpha} f \delta x^\alpha \tag{26. 3}$$

les δx^α étant les accroissements (26. 1) au point u.

Sous-variation d'une intégrale. — $F_{u_0}^{u}$ désignant l'intégrale (26. 2) posons :

$$J = \int_{u_0}^{u_1} H[F_{u_0}^{u},\ x^\alpha(u),\ \dot{x}^\alpha(u)]\, du \tag{26. 4}$$

où H est une fonction continue de F, des x^α et des $\dot{x}^\alpha$.

Avec M. Lichnerowicz nous appelons sous-variation J de l'intégrale J, une intégrale de la forme :

$$\delta J = \int_{u_0}^{u_1} L[x^\alpha(u),\ \dot{x}^\alpha(u),\ \delta x^\alpha(u)]\, du.$$

L étant une fonction linéaire par rapport aux δx^α, telle que l'on ait :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta J - \delta J}{\varepsilon\eta} = 0$$

où ΔJ désigne l'accroissement de J correspondant aux accroissements (26. 1) de x^α.

La fonction H étant supposée de classe C^3, M. Lichnerowicz a démontré (14) que la sous-variation avait pour expression :

(26. 5)

$$\delta J = \int_{u_0}^{u_1} \left[\partial_\alpha H(0) - \frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha} H(0) + H'(0)\partial_{\dot\alpha} f - f\partial_{\dot\alpha} H'(0)\right] \delta x^\alpha\, du$$

où H(0) est la fonction obtenue à partir de $H(F, x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$ en posant $F = 0$ et $H'(0)$ est la fonction des x^α, $\dot{x}^\alpha$ obtenue en

(13) A. Lichnerowicz [2], p. 346.
(14) *Idem*, pp. 347-349.

annulant F dans la dérivée partielle de H par rapport à l'argument F.

Les extrémales généralisées de l'intégrale J sont par définition les courbes (C) pour lesquelles $\delta J = 0$ quels que soient les accroissements δx^α définis par (26. 1). Ces extrémales sont les solutions du système différentiel :

$$(26.\ 6) \quad \frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha}H(0) - \partial_\alpha H(0) = H'(0)\partial_{\dot\alpha}f - f\partial_{\dot\alpha}H'(0).$$

Remarquons que ce système différentiel reste invariant si on change simultanément H' en $-H'$, f en $-f$ ou H' en f et f en $-H'$. Nous aurions obtenu le même système différentiel en remplaçant la fonction $H(F, x^\alpha, \dot x^\alpha)$ par la fonction :

$$H = H(0) + FH'(0)$$

obtenue en remplaçant $H(F)$ par son développement de Taylor du 1er ordre au voisinage de $F = 0$, les variables x^α et $\dot x^{\dot\alpha}$ étant supposées fixées.

Généralisation. — Supposons données sur $\mathcal{V}$, k fonctions $f^A(x, y)$ $\dot h 1$ et posons comme précédemment

$$F^A = \int_{u_0}^{u} f^A[x^\alpha(v), \dot x^\alpha(v)]\, dv \qquad \text{avec} \qquad A = 1, 2, \ldots, k.$$

Soit maintenant une fonction des k fonctionnelles F^A, des x^α, des $\dot x^\alpha$, $\dot h 1$. Posons :

$$J = \int_{u_0}^{u_1} H[F^A, x^\alpha(u), \dot x^\alpha(u)]\, du.$$

Des calculs analogues à ceux de M. Lichnerowicz [Lich. (2), pages 347 à 349)] montrent que la sous-variation de cette intégrale a pour expression :

$$\delta J = \int_{u_0}^{u_1} \left[\partial_\alpha H(0) - \frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha}H(0) + \partial_A H(0)\partial_{\dot\alpha}f^A - f^A\partial_{\dot\alpha A}H(0)\right]\delta x^\alpha\, du.$$

Les extrémales généralisées de l'intégrale J sont les solutions du système différentiel :

$$(26.\ 7) \quad \frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha}H(0) - \partial_\alpha H(0) = \partial_A H(0)\partial_{\dot\alpha}f^A - f^A\partial_{\dot\alpha A}H(0).$$

27. — Algèbre différentielle non holonome et extrémales généralisées.

Fonctions non holonomes. — Soit U un domaine de coordonnées locales de V_{n+1}, p^{-1}U le domaine correspondant de W. Au voisinage de tout point x de U considérons un ensemble de chemins différentiables joignant x à tout point voisin x'.

Soit $f(x, y)$ une fonction $\dot{h}1$ définie sur $\mathcal{V}$. Posons :

$$\mathrm{F} = \int_x^{x'} f(x, y)\, du \qquad \text{avec} \qquad y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}$$

l'intégrale étant calculée le long du chemin xx'.

Au chemin xx' de V_{n+1} correspond par p^{-1} un chemin zz' de W et l'on a :

$$\mathrm{F} = \int_z^{z'} \partial_{\dot{\alpha}} f(x, y)\, dx^\alpha. \tag{27.1}$$

Soit maintenant $\overline{\mathrm{L}}$ une fonction définie dans $\mathcal{V}$, $\dot{h}1$, qui au point z' de coordonnées x'^α, y'^α a une valeur dépendant de F que nous désignerons par $\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{F}, x', y')$. Supposons $\overline{\mathrm{L}}$ continûment différentiable par rapport à l'ensemble de ses arguments et désignons par $\mathrm{L}(x, y)$ la limite de $\overline{\mathrm{L}}$ quand z' tend vers z le long de l'arc $z'z$.

Posons

$$x'^\alpha = x^\alpha + \Delta x^\alpha, \qquad y'^\alpha = y^\alpha + \Delta y^\alpha$$

et

$$\eta = \max\left(|\Delta x^\alpha|, |\Delta y^\alpha|\right) \qquad \text{pour} \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n+1.$$

La différence $\Delta\mathrm{L} = \overline{\mathrm{L}}(\mathrm{F}, x', y') - \mathrm{L}(x, y)$ peut se mettre sous la forme :

$$\Delta\mathrm{L} = \mathrm{L}'\mathrm{F} + \partial_\alpha \mathrm{L}\Delta x^\alpha + \partial_{\dot{\alpha}}\mathrm{L}\Delta y^\alpha + \varepsilon\eta \tag{27.2}$$

où L′ est la limite de la dérivée partielle de $\overline{\mathrm{L}}$ par rapport à F quand z' tend vers z, ε une fonction de z' tendant vers 0 quand η tend vers 0.

D'autre part z' étant suffisamment voisin de z,

$$\mathrm{F} = \partial_{\dot{\alpha}} f(x, y)\,\Delta x^\alpha + \varepsilon'\eta \qquad \text{où} \qquad \varepsilon' \to 0 \quad \text{avec } \eta.$$

Finalement nous pouvons mettre ΔL sous la forme :

$$\Delta\mathrm{L} = (\partial_\alpha \mathrm{L} + \mathrm{L}'\partial_{\dot{\alpha}} f)\,\Delta x^\alpha + \partial_{\dot{\alpha}}\mathrm{L}\Delta y^\alpha + \varepsilon''\eta \tag{27.3}$$

avec ε'' tendant vers 0 quand η tend vers 0.

A l'expression trouvée pour ΔL nous sommes amenés à associer l'application linéaire de l'espace vectoriel tangent en z à W sur R, définie par :

$$(\partial_\alpha L + L' \partial_{\dot\alpha} f)\, dx^\alpha + \partial_{\dot\alpha} L\, dy^\alpha. \tag{27.4}$$

Cette forme linéaire sera notée $d\overline{L}$ et sera par définition une différentielle non holonome de la fonction $L(x, y)$; nous dirons aussi que l'ensemble : $L(x, y)$, $d\overline{L}$ définit une fonction différentiable non holonome $\overline{L}$ de $\mathfrak{V}$.

Sous une forme plus condensée nous avons :

$$d\overline{L} = dL + L'\, \dot{d}f. \tag{27.5}$$

Cette expression de $d\overline{L}$ nous amène aux définitions suivantes des dérivées partielles d'une fonction non holonome $\overline{L}$:

$$\partial_\alpha \overline{L} = \partial_\alpha L + L' \partial_{\dot\alpha} f,$$
$$\partial_{\dot\alpha} \overline{L} = \partial_{\dot\alpha} L.$$

Remarquons que la différentielle extérieure de $d\overline{L}$ n'est pas nulle. On a en effet :

$$d(d\overline{L}) = d^2\overline{L} = d(L'\, \dot{d}f).$$

mais

$$d^3\overline{L} = d(d^2\overline{L}) = 0.$$

Formes non holonomes. — Soit une forme différentielle ϖ définie sur $\mathfrak{V}$ ou W dont les coefficients en z' voisin de z dépendent de F. Soit d'abord une 1-forme définie par :

$$\varpi = \overline{a}_\alpha\, dx^\alpha + \overline{b}_\alpha\, dy^\alpha.$$

Posons par définition qu'au point z

$$d\varpi = d\overline{a}_\alpha \wedge dx^\alpha + d\overline{b}_\alpha \wedge dy^\alpha.$$

Si nous désignons par a_α, b_α, a'_α, b'_α, ω les limites respectives de $\overline{a}_\alpha$, $\overline{b}_\alpha$, $\frac{\partial \overline{a}_\alpha}{\partial F}$, $\frac{\partial \overline{b}_\alpha}{\partial F}$, ϖ quand z' tend vers z nous obtenons :

$$d\varpi = da_\alpha \wedge dx^\alpha + db_\alpha \wedge dy^\alpha + \dot{d}f \wedge (a'_\alpha\, dx^\alpha + b'_\alpha\, dy^\alpha)$$

ou

$$d\varpi = d\omega + \dot{d}f \wedge \omega'. \tag{27.6}$$

Par définition nous dirons que $d\varpi$ est la différentielle extérieure de la forme non holonome ϖ égale localement à la forme ω.

Les mêmes considérations amènent à associer à une p-forme non holonome ϖ, définie sur $\mathcal{V}$ ou W, c'est-à-dire à une forme dont les coefficients en z' voisin de z dépendent de F, une $p+1$ forme

$$d\varpi = d\omega + \dot{d}f \wedge \omega'$$

appelée différentielle extérieure de la forme non holonome ϖ.

Si ϖ_1 et ϖ_2 sont deux formes extérieures de degrés respectifs p_1 et p_2, non holonomes par rapport à la même fonctionnelle F, nous avons :

$$\begin{aligned} d(\varpi_1 + \varpi_2) &= d\varpi_1 + d\varpi_2, \\ d(\varpi_1 \wedge \varpi_2) &= d\varpi_1 \wedge \varpi_2 + (-1)^{p_1}\omega_1 \wedge d\varpi_2. \end{aligned}$$

Ces formules sont des conséquences immédiates de (27. 6).

Système extrémal d'une forme non holonome.

Par définition le système extrémal d'une forme non holonome ϖ est le système associé de sa différentielle extérieure $d\varpi$. Considérons par exemple la 1-forme semi-basique

$$\varpi = \partial_{\dot{\alpha}}\overline{L}(F, x, y)\, dx^\alpha$$

où L est une fonction $h1$ définie sur $\mathcal{V}$. Nous avons :

$$d\varpi = d(\partial_{\dot{\alpha}}L\, dx^\alpha) + \dot{d}f \wedge \partial_{\dot{\alpha}}L'\, dx^\alpha$$

ou

(27. 7)

$$d\varpi = \partial_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}L\, dy^\beta \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2}(\partial_{\alpha\dot{\beta}}L - \partial_{\beta\dot{\alpha}}L)\, dx^\alpha \wedge dx_\beta$$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_{\dot{\alpha}}f\partial_{\dot{\beta}}L' - \partial_{\dot{\beta}}f\partial_{\dot{\alpha}}L')\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Le système associé de $d\varpi$ est formé par les équations :

$$\begin{cases} \partial_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}L\, dy^\beta - (\partial_{\alpha\dot{\beta}}L - \partial_{\beta\dot{\alpha}}L)\, dx^\beta = (\partial_{\dot{\alpha}}f\,\partial_{\dot{\beta}}L - \partial_{\dot{\beta}}f\partial_{\dot{\alpha}}L)dx^\beta, & (27.\ 8) \\ \partial_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}L\, dx^\alpha = 0. & (27.\ 9) \end{cases}$$

Les équations (27. 9) montrent que les solutions de ce système sont des chemins basiques de W ayant pour projections sur V_{n+1} les solutions du système d'équations différentielles :

$$\partial_{\dot\alpha\dot\beta}L\ddot{x}^\beta - (\partial_{\alpha\dot\beta}L - \partial_{\beta\dot\alpha}L)\dot{x}^\beta = (\partial_{\dot\alpha}f\partial_{\dot\beta}L' - \partial_{\dot\beta}f\partial_{\dot\alpha}L')\dot{x}^\beta$$

ou

$$\frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha}L - \partial_\alpha L = L'\partial_{\dot\alpha}f - f\partial_{\dot\alpha}L'$$

Les courbes ainsi définies sont les extrémales généralisées de l'intégrale :

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \overline{L}(F,\ x,\ \dot{x})\, du$$

d'où le théorème :

THÉORÈME. — *Les extrémales généralisées de l'intégrale* $J = \int_{u_0}^{u_1} \overline{L}(F,\ x,\ \dot{x})\, du$ *sont les projections sur* V_{n+1} *des solutions du système extrémal de la forme :*

$$\varpi = \partial_{\dot\alpha}\overline{L}\,(F,\ x,\ y)\, dx^\alpha.$$

Généralisation.

Supposons maintenant qu'on se donne k fonctions définies sur $\mathfrak{V}$, $\dot{h}1$ $f^A(x,\ y)$ avec $A = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Avec les notations du début de ce paragraphe posons :

$$F^A = \int_x^{x'} f^A(x,\ \dot{x})\, du = \int_z^{z'} \partial_{\dot\alpha}f^A(x,\ y)\, dx^\alpha.$$

Soit $\overline{L}$ une fonction des k fonctionnelles F^A et des $2n+2$ variables x^α, y^α $\dot{h}1$.

Désignons par L la limite de $\overline{L}$ quand z' tend vers z.

Par définition nous appelons différentielle de la fonction non holonome $\overline{L}$ la 1-forme

$$(27.10)\qquad d\overline{L} = dL + \dot{d}f^A\partial_A L$$

où $\partial_A L$ est la limite quand z' tend vers z, de la dérivée partielle de $\overline{L}$ par rapport à F^A.

Soit maintenant une p forme quelconque ϖ définie sur $\mathfrak{V}$ ou W dont les coefficients en z' sont des fonctions des F^A. Nous appelons différentielle extérieure de cette forme la $p+1$ forme définie au point z par

$$(27.11)\qquad d\varpi = d\omega + \dot{d}f^A \wedge \partial_A\omega$$

avec

$$\omega = \lim_{z' \to z} \varpi \qquad \text{et} \qquad \partial_A \omega = \lim_{z' \to z} \frac{\partial \varpi}{\partial F^A}.$$

Si ϖ_1 et ϖ_2 sont deux formes extérieures définies sur $\mathcal{V}$ ou W, de degrés respectifs p_1 et p_2, non holonomes par rapport aux mêmes fonctionnelles F^A, nous avons comme conséquences immédiates de la définition (27. 11).

$$d(\varpi_1 + \varpi_2) = d\varpi_1 + d\varpi_2,$$
$$d(\varpi_1 \wedge \varpi_2) = d\varpi_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{p_1} \omega_1 \wedge d\bar{\omega}_2.$$

Considérons en particulier la forme

$$\varpi = \partial_{\dot{\alpha}} \overline{L}(F^A, x, y)\, dx^\alpha.$$

Sa différentielle extérieure est

$$d\varpi = d\omega + \dot{d}f^A \wedge \dot{d}\partial_A L.$$

Le système extrémal de ϖ qui est par définition le système associé de $d\varpi$ est analogue au système des équations (27. 8) et (27. 9). Ses solutions sont des chemins basiques de W se projettant sur V_{n+1} suivant les solutions du système:

$$(27.\ 12) \qquad \frac{d}{du}\partial_{\dot{\alpha}} L - \partial_\alpha L = \partial_A L\, \partial_{\dot{\alpha}} f^A - f^A \partial_{\dot{\alpha}A} L.$$

Ces projections sont les extrémales généralisées de l'intégrale:

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \overline{L}(F^A, x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\, du.$$

28. — Espaces de Lichnerowicz ([15]).

Reprenons les notations des § 25 et 27. Considérons une fonction non holonome $\overline{L}(F, z)$ avec $F = \int_z^{z'} \partial_{\dot{\alpha}} f(x, y)\, dx^\alpha$ et telle que $L = \overline{L}(0, z)$ soit une fonction définie sur $\mathcal{V}$, $\dot{h}1$.

Proposons-nous de définir sur V_{n+1} une connexion linéaire de directions qui pour $f = 0$ se réduise à la connexion finslérienne attachée à L, et telle que les géodésiques de V_{n+1} relativement à cette connexion soient les extrémales généralisées de l'intégrale

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \overline{L}[(F, z(u)]\, du.$$

([15]) A. Lichnerowicz [2], pp. 352-362.

Comme pour les espaces S-Finslériens, posons

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = b^{\alpha}_{\beta\gamma}\, dx^{\gamma} + c^{\alpha}_{\beta\gamma}\, dy^{\gamma}$$

par rapport au corepère de T^*_z défini par les $2(n+1)$ formes dx^{α}, dy^{α} et

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\, dx^{\gamma} + C^{\alpha}_{\beta\gamma}\, \theta^{\gamma}$$

par rapport au corepère de T^*_z défini par les $2(n+1)$ formes dx^{α} et $\theta^{\alpha} = \nabla y^{\alpha}$.

La forme de connexion ω étant supposée définie sur W, les b et Γ sont $\dot{h}0$, les c et C $\dot{h}(-1)$ et nous avons identiquement :

$$c^{\alpha}_{\beta\gamma} y^{\gamma} = C^{\alpha}_{\beta\gamma} y^{\gamma} = 0.$$

Les dérivées pfaffiennes d'une fonction $G(x, y)$ relativement au corepère dx^{α}, θ^{α} s'expriment en fonction des dérivées partielles de $G(x, y)$ par les formules (25. 4) et (25. 5). Si $\overline{G}$ est une fonction non holonome $\overline{G} = \overline{G}(F, x, y)$ nous avons :

$$(28.\ 1) \qquad \begin{cases} \delta_{\alpha}\overline{G} = \partial_{\alpha}\overline{G} - y^{\lambda}\Gamma^{\beta}_{\lambda\alpha}\partial_{\dot\beta}\overline{G} = \partial_{\alpha}G + G'\partial_{\dot\alpha}f - y^{\lambda}\Gamma^{\beta}_{\lambda\alpha}\partial_{\dot\beta}G, \\ \delta_{\dot\alpha}\overline{G} = \partial_{\dot\alpha}G - y^{\lambda}T^{\beta}_{\lambda\alpha}\partial_{\dot\beta}G. \end{cases}$$

Prenons comme tenseur métrique en $z(x^{\alpha}, y^{\alpha})$ le tenseur de composantes non holonomes :

$$\overline{g}_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\alpha\dot\beta}\left(\frac{1}{2}\overline{L}^2\right) = \partial_{\dot\alpha\dot\beta}\left(\frac{1}{2}L^2\right) \equiv g_{\alpha\beta}$$

tel que

$$\partial_{\gamma}\overline{g}_{\alpha\beta} = \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta} + g'_{\alpha\beta}\partial_{\dot\gamma}f,$$
$$\partial_{\dot\gamma}\overline{g}_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\gamma}g_{\alpha\beta}$$

les notations étant celles du paragraphe précédent.

Pour que la connexion linéaire de directions définie par ω soit naturellement associée à une connexion euclidienne de directions définie sur V_{n+1} par le tenseur $\overline{g}_{\alpha\beta}$, il faut et il suffit que $\nabla\overline{g}_{\alpha\beta} = 0$ c'est-à-dire que :

$$(28.\ 2) \qquad d\overline{g}_{\alpha\beta} - \omega^{\lambda}_{\alpha} g_{\lambda\beta} - \omega^{\lambda}_{\beta} g_{\lambda\alpha} = 0.$$

Explicitons par rapport au corepère $(dx^{\alpha}, \theta^{\alpha})$; nous obtenons

$$(28.\ 3) \qquad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}\overline{g}_{\alpha\beta},$$
$$(28.\ 4) \qquad T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\alpha\gamma} = \delta_{\dot\gamma}\overline{g}_{\alpha\beta}.$$

Considérons maintenant la forme de torsion :

$$\Sigma^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge dx^{\beta} = \frac{1}{2} S^{\alpha}_{\beta\gamma}\, dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma} - T^{\alpha}_{\beta\gamma}\, dx^{\beta} \wedge \theta^{\gamma}$$

avec

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma} = -(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}),$$
$$T^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Imposons à la connexion ω d'être spéciale au sens de M. A. Lichnerowicz. Les tenseurs de torsion doivent alors vérifier les conditions :

$$(28.5) \qquad 1^{o} \quad S_{\alpha\beta\gamma} = 0,$$
$$(28.6) \qquad 2^{o} \quad T_{\alpha\beta\gamma} = T_{\beta\alpha\gamma}.$$

Les conditions (28. 5) entraînent que les coefficients $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ sont symétriques par rapport aux deux derniers indices.

Les conditions (28. 6) et (28. 4) nous donnent

$$T_{\alpha\beta\gamma} = C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\,\delta_{\dot{\gamma}} g_{\alpha\beta}$$

soit avec le même raisonnement que pour établir (25. 13)

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\,\partial_{\dot{\gamma}} g_{\alpha\beta}$$

le tenseur $T_{\alpha\beta\gamma}$ est donc complètement symétrique.

Calcul des coefficients $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$.

Les coefficients Γ sont déterminés par le système suivant :

$$\begin{cases} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}\bar{g}_{\alpha\beta}, \\ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = 0. \end{cases}$$

Nous en déduisons que

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma,\ \alpha]^{\delta}$$

les $[\beta\gamma, \alpha]^{\delta}$ étant les symboles de Christoffel en dérivées pfaffiennes.

Explicitons à l'aide des formules (28. 1)

$$(28.7) \qquad \delta_{\gamma}\bar{g}_{\alpha\beta} = \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta} + g'_{\alpha\beta}\,\partial_{\dot{\beta}} f - 2y^{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma} T_{\mu\alpha\beta}.$$

Nous obtenons, en posant :

$$(28.8) \qquad \Sigma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\,(g'_{\alpha\gamma}\,\partial_{\dot{\beta}} f + g'_{\alpha\beta}\,\partial_{\dot{\gamma}} f - g'_{\beta\gamma}\,\partial_{\dot{\alpha}} f),$$

(28. 9)

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma, \alpha] - y^{\lambda}(\Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma} T_{\mu\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} T_{\mu\gamma\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} T_{\mu\beta\gamma}) + \Sigma_{\alpha\beta\gamma}.$$

Posons :

$$y^\beta y^\gamma[\beta\gamma,\ \alpha] = 2G_\alpha = \partial_{\lambda\dot\alpha}\left(\frac{1}{2}L^2\right)y^\lambda - \partial_\alpha\left(\frac{1}{2}L^2\right).$$

Calculons $y^\beta y^\gamma \Sigma_{\alpha\beta\gamma}$. Comme la fonction f est supposée $\dot{h}1$ et que $\frac{1}{2}g'_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta = LL'$ nous obtenons :

$$y^\beta y^\gamma \Sigma_{\alpha\beta\gamma} = f\partial_{\dot\alpha}(LL') - (LL')\,\partial_{\dot\alpha}f = f^2\,\partial_{\dot\alpha}\varphi$$

en posant

$$\varphi = \frac{LL'}{f} \quad (f \neq 0).$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} y^\beta y^\gamma \Gamma_{\alpha\beta\gamma} &= y^\beta y^\gamma[\beta\gamma,\ \alpha] + y^\beta y^\gamma \Sigma_{\alpha\beta\gamma} \\ &= 2G_\alpha + f^2\partial_{\dot\alpha}\varphi. \end{aligned}$$

Il est remarquable que le second membre soit égal à $2\overline{G}_\alpha$ défini par

$$2\overline{G}_\alpha = \partial_{\lambda\dot\alpha}\left(\frac{1}{2}\overline{L}^2\right)y^\lambda - \partial_\alpha\left(\frac{1}{2}\overline{L}^2\right).$$

En effet :

$$\partial_\lambda\left(\frac{1}{2}\overline{L}^2\right) = \partial_\lambda\left(\frac{1}{2}L^2\right) + LL'\partial_\lambda f$$

et

$$\begin{aligned} 2\overline{G}_\alpha &= 2G_\alpha + \partial_{\dot\alpha}(LL'\partial_\lambda f)y^\lambda - LL'\partial_{\dot\alpha}f \\ &= 2G_\alpha + \partial_{\dot\alpha}(LL')f - LL'\partial_{\dot\alpha}f \end{aligned}$$

car

$$\partial_{\dot\alpha\lambda}f y^\lambda = 0.$$

Nous terminons les calculs comme au paragraphe 25; il suffit d'ailleurs de remplacer dans les résultats obtenus LX_α par $-f^2\partial_{\dot\alpha}\varphi$.

Nous obtenons ainsi :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma,\ \alpha] - (T_{\alpha\beta\lambda}\partial_{\dot\gamma}\overline{G}^\lambda + T_{\alpha\gamma\lambda}\partial_{\dot\beta}\overline{G}^\lambda - T_{\beta\gamma\lambda}\partial_{\dot\alpha}\overline{G}^\lambda) + \Sigma_{\alpha\beta\gamma}$$

ou

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \mathring{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} &+ f^2\partial_{\dot\lambda}\varphi(T^\lambda_{\mu\gamma}T^\mu_{\alpha\beta} + T^\lambda_{\mu\beta}T^\mu_{\gamma\alpha} - T^\lambda_{\mu\alpha}T^\mu_{\beta\gamma}) \\ &- y^\lambda(\Sigma_{\mu\lambda\gamma}T^\mu_{\alpha\beta} + \Sigma_{\mu\lambda\beta}T^\mu_{\gamma\alpha} - \Sigma_{\mu\lambda\alpha}T^\mu_{\beta\gamma}) + \Sigma_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression $\mathring{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ représente le coefficient analogue pour la connexion finslérienne définie par L.

Les Γ ainsi définis sont les coefficients $\overline{\Gamma}^*$ de la connexion intermédiaire de A. Lichnerowicz. On vérifie qu'ils sont symétriques par rapport à leurs derniers indices.

Dérivation covariante.

Soit $\vec{X}$ un champ de vecteurs restreint défini sur $\mathcal{V}$ ou W; les composantes X^α sont alors des fonctions des x^α, y^α homogènes par rapport à ces dernières variables. Dans ces conditions nous avons

$$\nabla X^\alpha = dX^\alpha + \omega^\alpha_\beta X^\beta.$$

Supposons maintenant que $\vec{X}$ soit un champ de vecteurs non holonome c'est-à-dire que ses composantes $\overline{X}^\alpha$ en un point z' voisin de z soient des fonctions de $\overline{L}$ et par conséquent de F. Sa différentielle absolue est alors définie par

$$\nabla \overline{X}^\alpha = d\overline{X}^\alpha + \omega^\alpha_\beta X^\beta$$

ou $d\overline{X}^\alpha$ est la différentielle de la fonction non holonome $\overline{X}^\alpha$ Les considérations précédentes s'étendent immédiatement à des champs tensoriels quelconques, holonomes ou non.

Géodésiques.

Posons $\overline{l}^\alpha = \dfrac{y^\alpha}{\overline{L}}$ et $\overline{l}_\alpha = \partial_{\dot\alpha}\overline{L}$. Les géodésiques de l'espace étudié précédemment sont définies par :

$$\frac{\nabla \overline{l}^\alpha}{du} = \frac{d\overline{l}^\alpha}{du} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} l^\beta y^\gamma = 0$$

ou par

$$\frac{\nabla \overline{l}_\alpha}{du} = \frac{d\overline{l}_\alpha}{du} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} l^\beta y^\gamma = 0.$$

Or

$$\Gamma_{\beta\alpha\gamma} l^\beta y^\gamma = \mathring{\Gamma}_{\beta\alpha\gamma} l^\beta y^\gamma + \Sigma_{\beta\alpha\gamma} l^\beta y^\gamma.$$

Nous avons d'abord :

$$\Sigma_{\beta\alpha\gamma} l^\beta y^\gamma = \frac{1}{2}\left(g'_{\beta\gamma}\partial_{\dot\alpha} f + g'_{\beta\alpha}\partial_{\dot\gamma} f - g'_{\alpha\gamma}\partial_{\dot\beta} f\right) l^\beta y^\gamma = L'\partial_{\dot\alpha} f,$$

$$\frac{d\overline{l}_\alpha}{du} = \frac{dl_\alpha}{du} + \partial_{\dot\alpha}(L'\partial_{\dot\beta} f)\, y^\beta = \frac{dl_\alpha}{du} + \partial_{\dot\alpha} L'\partial_{\dot\beta} f y^\beta = \frac{dl_\alpha}{du} + f\partial_{\dot\alpha} L'.$$

Finalement les géodésiques de l'espace considéré sont définies par

$$\frac{\nabla \bar{l}_\alpha}{du} = \frac{\nabla l_\alpha}{du} + f \partial_{\dot{\alpha}} L' - L' \partial_{\dot{\alpha}} f = 0$$

ou par

$$\frac{d}{du} \partial_{\dot{\alpha}} L - \partial_\alpha L = L' \partial_{\dot{\alpha}} f - f \partial_{\dot{\alpha}} L'.$$

Ces géodésiques sont bien identiques aux extrémales généralisées de l'intégrale

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \bar{L}(F, \; z(u)) \, du.$$

L'espace ainsi construit satisfait bien aux différentes conditions que nous lui avons imposées.

Généralisation.

Considérons une fonction non holonome de plusieurs fonctionnelles $\bar{L}(F^A, \; z)$ avec

$$F^A = \int_z^{z'} \partial_{\dot{\alpha}} f^A(x, \; y) \, dx^\alpha = \int_z^{z'} \dot{d} f^A \qquad \text{où} \qquad A = 1, 2, \dots, k,$$

telle que $L = L(0, \; z)$ soit une fonction définie sur $\mathfrak{V}$, $\dot{h}1$.

Il est aisé d'étendre les considérations précédentes en définissant sur V_{n+1} une connexion linéaire de directions telle que les géodésiques de V_{n+1} relativement à cette connexion soient les extrémales généralisées de l'intégrale

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \bar{L}[F^A, \; z(u)] \, du.$$

Il suffit de remplacer dans les formules obtenues $\Sigma_{\alpha\beta\gamma}$ par

$$\Sigma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\partial_A g_{\alpha\gamma} \partial_{\dot{\beta}} f^A + \partial_A g_{\alpha\beta} \partial_{\dot{\gamma}} f^A - \partial_A g_{\beta\gamma} \partial_{\dot{\alpha}} f^A)$$

et $2\bar{G}_\alpha$ par

$$2\bar{G}_\alpha = 2G_\alpha + \partial_{\dot{\alpha}}(L \partial_A L) f^A - L \partial_A L \partial_{\dot{\alpha}} f^A.$$

Nous désignerons dorénavant par espaces de Lichnerowicz ou espaces $\mathfrak{L}$ des espaces du type précédent;

un espace $\mathfrak{L}_1$ correspondra à une fonction $\bar{L}$ non holonome par rapport à une seule fonctionnelle F,

un espace $\mathfrak{L}_k$ correspondra à une fonction L non holonome par rapport à k fonctionnelles F_A.

DEUXIÈME PARTIE

APPLICATIONS MÉCANIQUES

CHAPITRE V

Systèmes dynamiques à liaisons holonomes.

29. — Équations de Lagrange.

Soit un système dynamique (S) non conservatif, à liaisons holonomes, bilatérales parfaites, admettant n degrés de liberté.

Désignons par V_{n+1} son espace-temps de configuration.

Supposons que la configuration de (S) soit définie par les paramètres x^k où $k = 1, 2, \ldots, n$. Les paramètres x^k et le temps t définissent un système de coordonnées locales pour V_{n+1}. Posons

$$x'^k = \frac{dx^k}{dt}$$

et soit $\mathcal{L}$ le lagrangien du système (S) pour les paramètres x^k. Les trajectoires de (S) dans V_{n+1} sont définies par les n fonctions $x^k(t)$ solutions des n équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\partial_{k'}\mathcal{L} - \partial_k\mathcal{L} = Q_k. \tag{29. 1}$$

Les Q_k sont des fonctions déterminées des x^i, des x'^i et du temps t.

Posons maintenant : $x^{n+1} = t$.

Un système de coordonnées locales d'un point x de V_{n+1} est alors x^α, où $\alpha = 1, 2, \ldots, n, n+1$.

(Dans la suite un indice latin pourra prendre les valeurs 1, 2, ..., n; tout indice grec les valeurs 1, 2, ..., $n + 1$.)

Soit u un paramètre réel arbitraire; posons

$$\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/du$$

d'où

$$x'^k = \dot{x}^k/\dot{x}^{n+1}.$$

Les trajectoires du système dynamique (S) dans V_{n+1} sont alors définies par des fonctions $x^\alpha(u)$ solutions d'un système d'équations différentielles déduit classiquement de (29. 1) ([16]).

Posons $L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = \mathcal{L}(x^\alpha, \dot{x}^k/\dot{x}^{n+1})\dot{x}^{n+1}$.

L qui est $\overset{*}{h}(1)$ est par définition le lagrangien homogène de (S). Nous en déduisons

$$\partial_{\dot{k}} L = \partial_{k'}\mathcal{L} \qquad \text{et} \qquad \partial_{\dot{n+1}} L = \mathcal{L} - x'^k \partial_{k'}\mathcal{L} = -\mathcal{H},$$

$\mathcal{H}$ désignant l'hamiltonien correspondant à $\mathcal{L}$.

Les équations (29. 1) se mettent alors sous la forme :

$$\text{(29. 2)} \qquad \frac{d}{du}\partial_{\dot{k}} L - \partial_k L = Q_k \dot{x}^{n+1}$$

ou, avec les notations du § 18

$$P_k(L) = X_k \qquad \text{en posant} \qquad X_k = Q_k \dot{x}^{n+1}.$$

De l'identité :

$$P_\alpha(L)\dot{x}^\alpha \equiv 0$$

nous déduisons :

$$P_{n+1}(L)\dot{x}^{n+1} = - P_k(L)\dot{x}^k = - X_k \dot{x}^k$$

ou

$$\text{(29. 3)} \qquad P_{n+1}(L) = X_{n+1} \quad \text{en posant} \quad X_{n+1} = - Q_k \dot{x}^k$$

Finalement les fonctions $x^\alpha(u)$ sont solution du système des équations de Lagrange relatives au lagrangien homogène L :

$$\text{(29. 4)} \qquad P_\alpha(L) = \frac{d}{du}\partial_{\dot{\alpha}} L - \partial_\alpha L = X_\alpha.$$

Les X_α qui sont des fonctions des x^α et des $\dot{x}^\alpha$ sont homogènes

([16]) A. Lichnerowicz [2], pp. 375-376.

et de degré 1 par rapport à ces dernières variables ($\dot{h}1$) et telles que

$$X_\alpha \dot{x}^\alpha \equiv 0;$$

Ce sont les composantes d'un vecteur appelé vecteur force généralisée. Les $n+1$ équations (29. 4) n'étant pas indépendantes, on pourra se donner arbitrairement l'une des fonctions $x^\alpha(u)$, les n autres seront alors déterminées en général par les équations (29. 4). Rappelons que la $(n+1)^{\text{ème}}$ équation, l'équation

$$P_{n+1}(L) = X_{n+1}$$

s'écrit encore sous la forme

$$-\frac{d\mathcal{H}}{du} - \frac{\partial L}{\partial t} = -Q_k \dot{x}^k$$

ou, en posant $t = u$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = Q_k x'^k.$$

Cette équation traduit le théorème bien connu de Painlevé. Les équations de Lagrange ainsi obtenues ont une forme indépendante de tout repérage particulier adopté pour l'espace-temps de configuration.

30. — Notion de tenseur force généralisée.

Comme dans la première partie nous désignerons par $\mathfrak{V}$ l'espace fibré des vecteurs non nuls tangents à la variété différentiable V_{n+1}, par W l'espace fibré des directions orientées tangentes à V_{n+1}; l'espace W est désigné en Mécanique par espace des états, ou espace temps d'extension en phase. Considérons la forme « travail élémentaire ».

$$\omega = X_\alpha \, dx^\alpha.$$

Cette forme est une forme semi-basique $\dot{h}1$ définie sur $\mathfrak{V}$. Par l'opérateur $\dot{d}$ nous lui faisons correspondre une 2-forme semi-basique $\dot{h}0$, définie sur W :

$$\dot{d}\omega = \frac{1}{2}(\partial_{\dot{\alpha}} X_\beta - \partial_{\dot{\beta}} X_\alpha)\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Les coefficients de cette forme sont les composantes d'un tenseur restreint $\dot{h}0$, antisymétrique, deux fois covariant. Nous désignerons dans la suite par tenseur force correspondant à la force généralisée de composantes X_α, le tenseur de composantes :

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_{\dot\beta} X_\alpha - \partial_{\dot\alpha} X_\beta).$$

Ces composantes sont telles que :

1° $$S_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = X_\alpha.$$

En effet :

$$\partial_{\dot\beta} X_\alpha \dot{x}^\beta = X_\alpha$$

car les X_α sont $\dot{h}1$ et d'autre part

$$X_\beta \dot{x}^\beta \equiv 0$$

entraîne par dérivation partielle :

$$\partial_{\dot\alpha} X_\beta \dot{x}^\beta = -X_\beta.$$

La forme $\dot{d}\omega = -S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$ étant $\dot{d}$ fermée, nous avons les identités :

$$\partial_{\dot\alpha} S_{\beta\gamma} + \partial_{\dot\beta} S_{\gamma\alpha} + \partial_{\dot\gamma} S_{\alpha\beta} = 0.$$

2° Si les X^α sont linéaires par rapport aux composantes $\dot{x}^\alpha$ de la vitesse, les $S_{\alpha\beta}$ sont indépendantes des $\dot{x}$; dans l'espace T_x tangent au point x à V_{n+1} le vecteur force X correspondant à un vecteur vitesse donné $V(x)$ se déduit de ce dernier par la transformation linéaire définie par la matrice ayant pour éléments les $S_{\alpha\beta}(x)$.

Interprétation géométrique des équations de Lagrange.

31. — 1° Dans un espace de Finsler.

Supposons la variété différentiable V_{n+1} munie de la métrique finslérienne :

$$ds = L(x^\alpha,\ \dot{x}^\alpha)\, du.$$

Supposons d'autre part que la fonction L conduise à un problème variationnel régulier c'est-à-dire que la matrice $\|\partial_{\dot\alpha\dot\beta} L\|$ soit de rang n sur $\mathcal{V}$. Le système dynamique (S) sera alors dit ***régulier***. Soit (T) une trajectoire quelconque de ce système; en un point arbitraire x de (T) un vecteur unitaire $\vec{l}$ de la tangente à (T) a pour composantes :

$$l^\alpha = \frac{\dot{x}^\alpha}{L} \qquad \text{ou} \qquad l_\alpha = \partial_{\dot{\alpha}} L.$$

Les premiers membres $P_\alpha(L)$ des équations de Lagrange sont les composantes du vecteur dérivée covariante de $\vec{l}$ par rapport à u. Les équations (29. 4) prennent donc la forme :

$$\frac{\nabla l_\alpha}{du} = X_\alpha \tag{31. 1}$$

ou

$$\frac{\nabla \vec{l}}{du} = \vec{X}$$

Prenons comme paramètre u l'arc s de (T); les composantes du vecteur force généralisée sont alors $\frac{X_\alpha}{L}$ et les premiers membres des équations (31. 1) sont les composantes du vecteur courbure de la trajectoire (T) en x :

$$\frac{\nabla \vec{l}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R} = \vec{C}; \qquad \frac{\vec{X}}{L} = \vec{F}.$$

D'où le théorème :

THÉORÈME. — *Dans l'espace de Finsler défini sur l'espace-temps de configuration d'un système dynamique* (S) *par :*

$$ds = L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)\, du$$

où L *est le lagrangien homogène de* (S), *les trajectoires sont les courbes de cet espace telles qu'en tout point le vecteur courbure soit égal au vecteur force.*

Cas particulier. — Si le vecteur force est nul en tout point de V_{n+1}, les équations de Lagrange s'écrivent sous la forme

$$\frac{\nabla l_\alpha}{du} = 0$$

et expriment que les trajectoires sont les géodésiques de l'espace de Finsler associé au système dynamique. Ces trajectoires sont les extrémales de la forme

$$\omega = \partial_{\dot{\alpha}} \mathrm{L}\, dx^{\alpha}$$

ou les extrémales de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{u_0}^{u_1} \mathrm{L}(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha})\, du.$$

(Principe d'Hamilton sous sa forme générale.)
Il est équivalent de dire que ces trajectoires sont caractérisées par l'existence de l'invariant intégral relatif d'E. Cartan :

$$\int \partial_{\dot{\alpha}} \mathrm{L}\, dx^{\alpha}.$$

32. — 2° Dans un espace S-Finslérien.

Considérons l'espace S-Finslérien (§ 25) défini sur V_{n+1} par la donnée de la fonction scalaire $\mathrm{L}(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha})\dot{h}\ 1$ et par le tenseur restreint $\dot{h}\ 0\ \mathrm{S}_{\alpha\beta}$.

Rappelons qu'un espace S-Finslérien ne diffère d'un espace finslérien que par la convention suivante :

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = \mathrm{S}_{\beta\gamma} l^{\alpha}$$

les $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ étant définis par les formes de connexion :

$$\omega^{\alpha}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\, dx^{\gamma} + \mathrm{C}^{\alpha}_{\beta\gamma} \nabla y^{\gamma}$$

avec

$$y^{\gamma} = \dot{x}^{\gamma}.$$

Le système différentiel des géodésiques est :

$$\frac{d}{du} \partial_{\dot{\alpha}} \mathrm{L} - \partial_{\alpha} \mathrm{L} = \mathrm{S}_{\alpha\beta} \dot{x}^{\beta} = \mathrm{X}_{\alpha}.$$

Il en résulte que les trajectoires du système dynamique $\mathrm{S}(\mathrm{L}, \mathrm{S}_{\alpha\beta})$ sont les géodésiques de l'espace S-Finslérien défini par L et $\mathrm{S}_{\alpha\beta}$.

Ces trajectoires sont aussi les S-extrémales (§ 24) de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{u_0}^{u_1} \mathrm{L}(x, \dot{x})\, du.$$

Rappelons qu'une S-extrémale de I est la projection sur V_{n+1} d'un chemin basique de W défini par :

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(u); \qquad y^{\alpha} = y^{\alpha}(u) = \frac{dx^{\alpha}}{du}$$

pour lequel I est extrémum, les chemins voisins étant définis par :

$$x^\alpha = x^\alpha(u) + \delta x^\alpha(u); \qquad y^\alpha = y^\alpha(u) + \delta y^\alpha(u)$$

avec δx^α arbitraires sauf en x_0 et x_1 où ils sont tous nuls et

$$\delta y^\alpha = \frac{d}{du}\,\delta x^\alpha + \mathrm{L}\mathrm{S}^\alpha_\beta \delta x^\beta.$$

Le théorème ainsi obtenu est une généralisation du théorème d'Hamilton relatif aux systèmes dynamiques conservatifs (cas où $\mathrm{S}_{\alpha\beta} = 0$).

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME D'HAMILTON GÉNÉRALISÉ. — *Les trajectoires d'un système dynamique* $\mathrm{S}(\mathrm{L}, \mathrm{S}_{\alpha\beta})$ *sont les* S-*extrémales de l'intégrale* $\int_{u_0}^{u_1} \mathrm{L}\, du$.

33. — 3e Dans un espace de Lichnerowicz.

Considérons la forme

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{S}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Posons $y^\alpha = \dot{x}^\alpha$ et associons à Ω la forme

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{S}_{\alpha\beta}\, dy^\alpha \wedge dy^\beta$$

dans laquelle les variables x^α sont supposées fixées. Comme $\dot{d}\Omega = 0$ nous en déduisons que $d\overline{\Omega} = 0$.

Supposons la forme $\overline{\Omega}$ de rang $2r$. Appliquons le théorème ([17]) : Toute forme quadratique extérieure, fermée, de rang $2r$, peut se mettre sous la forme :

$$d\mathrm{H}_\mathrm{A} \wedge d\mathrm{K}^\mathrm{A} \qquad (\text{avec } \mathrm{A} = 1, 2, \ldots, r),$$

les fonctions H_A et K^A constituant un système d'intégrales premières indépendantes du système caractéristique de cette forme.

Nous en déduisons que Ω peut, sur un voisinage U de $\mathfrak{V}$, se mettre sous la forme :

$$\Omega = \dot{d}\mathrm{H}_\mathrm{A} \wedge \dot{d}\mathrm{K}^\mathrm{A}.$$

([17]) E. Cartan [2], pp. 119-120.

Le système associé de $\overline{\Omega}$ étant homogène par rapport aux y^α les intégrales premières H_A et K^A sont des fonctions $\dot{h}$; la somme de leurs degrés d'homogénéité étant deux nous pouvons supposer H_A et K^A $\dot{h}1$; s'il n'en était pas ainsi on introduirait une fonction $f\dot{h}$ de degré convenable et $\dot{d}$ fermée, d'après l'identité :

$$\dot{d}H \wedge \dot{d}K = \dot{d}(Hf) \wedge \dot{d}\left(\frac{K}{f}\right).$$

Nous obtenons alors :

$$S_{\alpha\beta} = \partial_{\dot{\alpha}} H_A \, \partial_{\dot{\beta}} K^A - \partial_{\dot{\alpha}} K^A \, \partial_{\dot{\beta}} H_A$$

et

$$X_\alpha = S_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta = K^A \partial_{\dot{\alpha}} H_A - H_A \partial_{\dot{\alpha}} K^A.$$

Les équations de Lagrange du système dynamique $S(L, S_{\alpha\beta})$ montrent que les trajectoires de S sont les extrémales généralisées de l'intégrale :

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \left[L(x, \dot{x}) + K^A \int_{u_0}^{u} H_A \, dv \right] du.$$

Ces trajectoires sont (§ 27) les projections sur V_{n+1} des extrémales de la forme non holonome :

$$\omega = \dot{d}L + \dot{d}K^A \int_z^{z'} \dot{d}H_A$$

ou

$$\omega = \dot{d}L - \dot{d}H_A \int_z^{z'} \dot{d}K^A$$

$z(x, y)$ et $z'(x', y')$ étant deux points voisins de W. Ces trajectoires sont aussi les géodésiques de l'espace $\mathcal{L}_r$ défini par la fonction non holonome

$$\overline{L} = L(x, \dot{x}) + K^A \int_z^{z'} \dot{d}H_A$$

c'est-à-dire par les $2r + 1$ fonctions : L, K^A, H_A.

Cas particulier des espaces $\mathcal{L}_1$ [18].

Pour que $r = 1$ il faut et il suffit que la forme

$$\Omega = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

soit décomposable ou soit monôme. Pour qu'il en soit ainsi,

[18] J. Klein [1].

il faut et il suffit [18] que les coefficients $S_{\alpha\beta}$ vérifient les relations :

$$S_{\alpha\beta}S_{\gamma\delta} + S_{\alpha\gamma}S_{\delta\beta} + S_{\alpha\delta}S_{\beta\gamma} = 0.$$

Dans ces conditions on peut trouver deux fonctions H et K $\dot{h}1$ telles que localement l'on ait :

$$\Omega = \dot{d}H \wedge \dot{d}K.$$

Nous avons alors :

$$X_\alpha = K\partial_{\dot{\alpha}}H - H\partial_{\dot{\alpha}}K = K^2\partial_{\dot{\alpha}}\frac{H}{K} \quad (K \neq 0).$$

Les trajectoires du système dynamique correspondant sont alors les géodésiques de l'espace $\mathcal{L}_1$ défini par les 3 fonctions $\dot{h}1$: L, K et H.

Exemples. — 1° Supposons qu'il existe un potentiel des vitesses c'est-à-dire que les Q_k soient de la forme :

$$Q_k = \partial_{k'}U(x^\alpha, x'^m).$$

Remplaçons dans U, x'^m par $\dot{x}^m/\dot{x}^{n+1}$; la fonction U ainsi obtenue étant $\dot{h}0$ nous avons l'identité :

$$\partial_{\dot{\alpha}}U\dot{x}^\alpha = 0.$$

Or $$X_k = Q_k\dot{x}^{n+1} = (\dot{x}^{n+1})^2\partial_{\dot{k}}U$$

donc $$X_{n+1} = -Q_k\dot{x}^k = (\dot{x}^{n+1})^2\partial_{\dot{n+1}}U.$$

Pour tout $\alpha = 1, \ldots, n+1$ nous avons donc

$$X_\alpha = (\dot{x}^{n+1})^2\partial_{\dot{\alpha}}U.$$

Les trajectoires du système dynamique considéré sont alors les extrémales généralisées de l'intégrale :

$$J = \int_{u_0}^{u_1}\left[L + \dot{x}^{n+1}\int_{u_0}^{u} U\dot{x}^{n+1}\,dv\right]du,$$

ou les géodésiques de l'espace $\mathcal{L}_1$ défini par le lagrangien L et les fonctions $K = \dot{x}^{n+1}$, $H = U\dot{x}^{n+1}$.

Dans ce cas rentre en particulier celui où les Q_i sont indépendants de la vitesse : il suffit de poser $U = Q_k\, x'^k$; on en déduit que $K = \dot{x}^{n+1}$, $H = Q_k\dot{x}^k$.

[18] E. Cartan [3] page 18.

2° Plus généralement supposons que :

$$Q_k = f^2 \partial_{k'} U$$

f et U étant deux fonctions des x^k, t et x'^k.

Les calculs précédents montrent alors que :

$$X_\alpha = (f \dot{x}^{n+1})^2 \partial_{\dot{\alpha}} U.$$

Les trajectoires du système dynamique correspondant sont alors les géodésiques de l'espace $\mathcal{L}_1$ défini par le lagrangien L et les deux fonctions :

$$K = f \dot{x}^{n+1} \qquad \text{et} \qquad H = U \dot{x}^{n+1}.$$

3° Supposons que nous ayons :

$$Q_k = R_k(x^h, t) + S_{km}(x^h, t) x'^m$$

avec

$$S_{km} = - S_{mk}.$$

Posons

$$R_k = S_{k,\,n+1} = - S_{n+1,\,k}.$$

D'où

$$X_k = S_{k\alpha} \dot{x}^\alpha \quad \text{et} \quad X_{n+1} = - Q_k \dot{x}^k = - R_k \dot{x}^k = S_{n+1,\,\alpha} \dot{x}^\alpha.$$

Donc quel que soit $\alpha = 1, \ldots, n+1$, nous avons

$$X_\alpha = S_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta$$

où $S_{\alpha\beta}$ en un tenseur sur V_{n+1}.

Pour que l'espace de Lichnerowicz correspondant soit de type $\mathcal{L}_1$ il faut et il suffit que :

$$S_{\alpha\beta} S_{\gamma\delta} + S_{\alpha\gamma} S_{\delta\beta} + S_{\alpha\delta} S_{\beta\gamma} = 0,$$

c'est-à-dire que le tenseur $S_{\alpha\beta}$ soit un bivecteur. Il existe alors deux champs de vecteurs de composantes covariantes $f_\alpha(x)$ et $g_\alpha(x)$ telles que localement :

$$S_{\alpha\beta} = f_\alpha g_\beta - g_\alpha f_\beta.$$

L'espace $\mathcal{L}_1$ correspondant est défini par le lagrangien L et par les fonctions :

$$H = f_\alpha \dot{x}^\alpha \qquad \text{et} \qquad K = g_\alpha \dot{x}^\alpha.$$

34. — La 2-forme fondamentale Ω.

Lorsque le tenseur force d'un système dynamique est nul, nous avons vu (§ 16) que le système des équations de Lagrange

$$P_\alpha(L) = 0$$

est le système extrémal de la forme

$$\omega = \partial_{\dot\alpha} L\, dx^\alpha$$

c'est-à-dire le système associé de la 2-forme

$$d\omega = d(\partial_{\dot\alpha} L) \wedge dx^\alpha.$$

Soit maintenant un système dynamique $S(L, S_{\alpha\beta} \neq 0)$ et considérons la 2-forme :

$$(34.\ 1) \qquad \Omega = d(\partial_{\dot\alpha} L) \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Le système associé de Ω est formé par $2n + 2$ équations de Pfaff

$$(34.\ 2) \qquad \begin{cases} -\pi_\alpha(L) + S_{\alpha\beta}\, dx^\beta = 0 \\ \partial_{\dot\alpha\dot\beta} L\, dx^\beta = 0 \end{cases}$$

avec

$$\pi_\alpha(L) = \partial_{\dot\alpha\dot\beta} L\, d\dot{x}^\beta + (\partial_{\dot\alpha\beta} L - \partial_{\alpha\dot\beta} L)\, dx^\beta.$$

Le système dynamique étant supposé régulier la matrice $\|\partial_{\dot\alpha\dot\beta} L\|$ est de rang n; nous concluons alors comme au § 16 que le système (34. 2) définit des courbes basiques de W dont les projections sur V_{n+1} sont les solutions du système :

$$P_\alpha(L) = \frac{\pi_\alpha(L)}{du} = S_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = X_\alpha$$

c'est-à-dire les trajectoires du système dynamique considéré; d'où le théorème :

THÉORÈME. — *Les trajectoires du système dynamique* $S(L, S_{\alpha\beta})$ *sont les courbes intégrales du système associé de la 2-forme :*

$$\Omega = d\,(\partial_{\dot\alpha} L) \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

forme dans laquelle nous supposons que : $\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/du$.

Conséquences. — Les trajectoires du système dynamique $S(L, S_{\alpha\beta})$ sont caractérisées par la propriété d'admettre la relation intégrale d'invariance engendrée par la forme Ω.

Si $\mathcal{T}$ est un tube engendré par une suite continue fermée de trajectoires de S limitées par deux courbes fermées homotopes entourant ce tube, nous avons :

$$\int_{\mathcal{T}} \Omega = 0. \tag{34. 3}$$

De cette propriété nous allons déduire une relation fondamentale généralisant directement le théorème de Cartan relatif à l'invariant intégral relatif $\int \partial_{\dot{\alpha}} L\, dx^\alpha$ et due aux notations près à M. Lichnerowicz [19].

35. — Théorème de Lichnerowicz.

Soient dans l'espace-temps de configuration V_{n+1} *d'un système dynamique* $S(L, S_{\alpha\beta})$ *deux chemins fermés, homotopes,* C_0 *et* C_1 *entourant un même tube de trajectoires; la différence des circulations du vecteur vitesse* $\partial_{\dot{\alpha}} L$ *le long des cycles* C_0 *et* C_1 *est égale au flux, à travers la portion de tube de bord* $C_0 - C_1$, *du tenseur force généralisée* $S_{\alpha\beta}$:

$$\int_{C_1} \partial_{\dot{\alpha}} L\, dx^\alpha - \int_{C_0} \partial_{\dot{\alpha}} L\, dx^\alpha = \iint_{\mathcal{T}_0^1} \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Les $\dot{x}^\alpha$ *intervenant dans* L *et* $S_{\alpha\beta}$ *sont les composantes en* x *du vecteur vitesse tangent à la trajectoire passant par* x.

1re *démonstration.* — Considérons dans V_{n+1} deux chemins fermés C_0 et C_1 homotopes, entourant le même tube de trajectoires $\mathcal{T}$. Soit $\mathcal{T}_0^1$ la 2-chaîne de support $\mathcal{T}$ et de bord $C_0 - C_1$.

Posons :

$$\omega = \partial_{\dot{\alpha}} L\, dx^\alpha.$$

Nous avons, en appliquant le théorème de Stokes :

$$\int_{C_0} \omega - \int_{C_1} \omega = \int_{\mathcal{T}_0^1} d\omega.$$

Or d'après (34. 3)

$$\int_{\mathcal{T}_0^1} \left(d\omega + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \right) = 0.$$

[19] A. Lichnerowicz [1], pp. 8-10.

Nous en déduisons la formule que nous nous proposions de démontrer :

$$(35.\ 1)\qquad \int_{C_1} \partial_{\dot\alpha} L\, dx^\alpha - \int_{C_0} \partial_{\dot\alpha} L\, dx^\alpha = \int_{\mathfrak{C}_0^1} \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

2e *démonstration* ([20]). — Soit x_0x_1 un arc de trajectoire de (S) dans V_{n+1}, x_0 et x_1 correspondant respectivement aux valeurs u_0 et u_1 du paramètre u. Considérons l'intégrale d'action :

$$I = \int_{u_0}^{u_1} L\, du$$

évaluée le long de l'arc x_0x_1.

La variation δI de I correspondant à des δx^α arbitraires en tout point de x_0x_1, extrémités comprises, et à

$$\delta \dot x^\alpha = \frac{d}{du}\, \delta x^\alpha$$

est donnée par la formule classique :

$$(35.\ 2)\qquad \delta I = [\partial_{\dot\alpha} L\, \delta x^\alpha]_{x_0}^{x_1} - \int_{u_0}^{u_1} P_\alpha(L) \delta x_x^\alpha\, du$$

ou, d'après les équations de Lagrange

$$(35.\ 3)\qquad \delta I = [\partial_{\dot\alpha} L \delta x^\alpha]_{x_0}^{x_1} - \int_{u_0}^{u_1} X_\alpha\, \delta x^\alpha\, du;$$

comme $X_\alpha\, du = S_{\alpha\beta}\, \dot x^\beta\, du = S_{\alpha\beta}\, dx^\beta$, nous avons :

$$(35.\ 4)\qquad \delta I = [\partial_{\dot\alpha} L\, \delta x^\alpha]_{x_0}^{x_1} - \int_{u_0}^{u_1} S_{\alpha\beta}\, \delta x^\alpha\, dx^\beta.$$

Intégrons les deux membres de (35. 4) sur la suite continue fermée de trajectoires définissant $\mathfrak{C}_0^1$; nous obtenons :

$$\int_{c_1} \partial_{\dot\alpha} L\, dx^\alpha - \int_{c_0} \partial_{\dot\alpha} L\, dx^\alpha = \iint_{\mathfrak{C}_0^1} \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

De cette relation nous déduisons, comme précédemment, par application de la formule de Stokes :

$$\iint_{\mathfrak{C}_0^1} \left(d\partial_{\dot\alpha} L \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \right) = 0$$

([20]) A. Lichnerowicz [1], pp. 8-10.

Nous avons ainsi démontré directement que la forme

$$\Omega = d(\partial_{\dot{\alpha}}\mathrm{L}) \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

définit une relation intégrale d'invariance pour les trajectoires de (S).

36. — Cas où la forme Ω est fermée.

Soit $\Omega = d(\partial_{\dot{\alpha}}\mathrm{L}\,dx^\alpha) + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta$.
Nous en déduisons :

$$(36.\ 1)\qquad d\Omega = \frac{1}{3\,!}\,\mathrm{K}_{\alpha\beta\gamma}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma + \frac{1}{2}\,\partial_{\dot{\gamma}}\mathrm{S}_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge d\dot{x}^\gamma$$

avec

$$\mathrm{K}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha \mathrm{S}_{\beta\gamma} + \partial_\beta \mathrm{S}_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \mathrm{S}_{\alpha\beta}.$$

Pour que $d\Omega = 0$ il est nécessaire et suffisant que :

1° $\partial_{\dot{\gamma}}\mathrm{S}_{\alpha\beta} = 0$ quels que soient α, β, γ, c'est-à-dire que le tenseur $\mathrm{S}_{\alpha\beta}$ soit indépendant des $\dot{x}$.

2° $\mathrm{K}_{\alpha\beta\gamma} = 0$ c'est-à-dire que $\mathrm{S}_{\alpha\beta}$ soit localement un tenseur rotationnel.

Il existe alors un champ local de vecteurs $\vec{\mathrm{A}}$, de composantes covariantes A_α, tel que :

$$(36.\ 2)\qquad \mathrm{S}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathrm{A}_\beta - \partial_\beta \mathrm{A}_\alpha.$$

Nous désignerons $\vec{\mathrm{A}}$ par potentiel-vecteur du système dynamique $\mathrm{S}(\mathrm{L}, \mathrm{S}_{\alpha\beta})$. En remarquant que dans ces conditions

$$(36.\ 3)\qquad \Omega = d(\partial_{\dot{\alpha}}\mathrm{L}\,dx^\alpha + \mathrm{A}_\alpha\,dx^\alpha)$$

nous pouvons énoncer le théorème :

Théorème. — *Pour que la 2-forme fondamentale Ω d'un système dynamique* $\mathrm{S}\ (\mathrm{L}, \mathrm{S}_{\alpha\beta})$ *soit fermée, il faut et il suffit que le tenseur* $\mathrm{S}_{\alpha\beta}$ *dérive d'un potentiel vecteur* $\vec{\mathrm{A}}\ (\mathrm{A}_\alpha)$ *dont les composantes sont indépendantes de la vitesse c'est-à-dire que*

$$\mathrm{S}_{\alpha\beta}(x) = \partial_\alpha \mathrm{A}_\beta - \partial_\beta \mathrm{A}_\alpha.$$

Les trajectoires du système dynamique sont alors caractérisées par l'existence de l'invariant intégral relatif défini par

$$\omega = (\partial_{\dot{\alpha}}\mathrm{L} + \mathrm{A}_\alpha)\,dx^\alpha$$

c'est-à-dire sont les extrémales de l'intégrale

$$I = \int_{u_0}^{u_1} (L + A_\alpha \dot{x}^\alpha)\, du.$$

Ces trajectoires sont aussi les géodésiques de l'espace de Finsler défini sur l'espace-temps de configuration V_{n+1} par la fonction :

$$L + A_\alpha \dot{x}^\alpha.$$

37. — Exemple : Tenseur « force centrifuge ».

Considérons un système de N points matériels M_k de coordonnées X_k, Y_k, Z_k par rapport à un repère orthonormé (R) de l'espace euclidien E_3. Supposons que le repère (R) soit en mouvement par rapport à un repère orthonormé (R_0) ; soient a', b', c' les composantes sur (R) du vecteur vitesse de son origine, p, q, r les composantes sur (R) du vecteur instantané de rotation de (R) par rapport à R_0.

La force vive absolue du système de points M_k est alors :

$$\begin{aligned} 2T_a = \sum_{k=1}^{N} m_k[&(X'_k + a' + qZ_k - rY_k)^2 \\ &+ (Y'_k + b' + rX_k - pZ_k)^2 + (Z'_k + c' + pY_k - qX_k)^2] \end{aligned}$$

alors que la force vive relative est réduite à :

$$2T_r = \sum_{k=1}^{N} m_k(X'^2_k + Y'^2_k + Z'^2_k).$$

Supposons que le système considéré admette n degrés de liberté x^i.

La force vive relative et la force vive absolue ont des expressions de la forme :

$$\begin{aligned} 2T_r &= a_{ij} x'^i x'^j \\ 2T_a &= a_{ij} x'^i x'^j + 2b_i x'^i + c \end{aligned}$$

où les a_{ij}, b_i et c sont des fonctions des x^k et du temps.

Supposons qu'à l'instant t le repère R coïncide avec le repère fixe R_0.

Les équations de Lagrange relatives à R_0 sont alors :

$$\frac{d}{dt}(a_{ij} x'^j) - \partial_i a_{jk} x'^j x'^k = Q_i. \tag{37. 1}$$

Q_i désignant la ième composante du vecteur force généralisée.

Les équations de Lagrange relatives à R sont :

$$(37.2)\quad \frac{d}{dt}(a_{ij}x'^j) - \partial_i a_{jk}x'^j x'^k = Q_i - \frac{d}{dt}b_i + \partial_i(b_j x'^j + c).$$

Les termes supplémentaires qui apparaissent au 2e membre :

$$(\partial_i b_j - \partial_j b_i)x'^j + \partial_i c + \frac{\partial b_i}{\partial t}$$

représentent l'ensemble des forces d'inertie ou « centrifuges ».

Passons au formalisme homogène en posant $x^{n+1} = t$, $\mathcal{T} = T_r \dot{x}^{n+1}$. Les équations (36. 5) deviennent alors (§ 29) :

$$\frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha}\mathcal{T} - \partial_\alpha\mathcal{T} = X_\alpha + (\partial_\alpha\varphi_\beta - \partial_\beta\varphi_\alpha)\dot{x}^\beta$$

en posant $\varphi_i = b_i$ et $\varphi_{n+1} = c$.

Le tenseur $\partial_\alpha\varphi_\beta - \partial_\beta\varphi_\alpha$ que nous appellerons tenseur force centrifuge dérive du potentiel vecteur φ_α. C'est bien un tenseur du type précédent (37. 2).

En posant $L = \mathcal{T} + \varphi_\alpha\dot{x}^\alpha$ les équations du mouvement sont :

$$\frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha}L - \partial_\alpha L = X_\alpha.$$

Inversement étant donné un système dynamique $(L, S_{\alpha\beta})$. Les équations du mouvement sont :

$$\frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha}L - \partial_\alpha L = S_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta.$$

Nous dirons que le tenseur $S_{\alpha\beta}$ est du type force centrifuge s'il existe un potentiel vecteur global φ_α, ne dépendant que des x^β et non des $\dot{x}^\beta$, tel que

$$S_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\varphi_\beta - \partial_\beta\varphi_\alpha.$$

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que la forme

$$\Omega = d(\dot{d}L) + \frac{1}{2}S_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

soit fermée c'est-à-dire que $\partial_{\dot\alpha}S_{\beta\gamma} = 0$ et

$$\partial_\alpha S_{\beta\gamma} + \partial_\beta S_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma S_{\alpha\beta} = 0.$$

Il en est ainsi pour le tenseur champ électro-magnétique en Relativité Générale (§ 50).

38. — Cas où Ω admet un facteur intégrant.

Par définition Ω admet un facteur intégrant s'il existe une fonction différentiable $f(x, \dot{x}) \neq 0$ telle que la forme $f\Omega$ soit fermée. Le facteur intégrant f est tel que :

$$d(f\Omega) = df \wedge \Omega + f\, d\Omega = 0$$

ou

$$d\Omega = -\frac{df}{f} \wedge \Omega$$

ou

$$d\Omega = d\varphi \wedge \Omega \tag{38. 1}$$

en posant $f = e^{-\varphi}$.

Admettons l'existence de φ et explicitons l'identité (38. 1) :

$$\frac{1}{6} K_{\alpha\beta\gamma}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma + \frac{1}{2} \partial_{\dot{\gamma}} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge d\dot{x}^\gamma \tag{38. 2}$$
$$= (\partial_\gamma \varphi\, dx^\gamma + \partial_{\dot{\gamma}} \varphi\, d\dot{x}^\gamma) \wedge \left(\partial_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} L\, d\dot{x}^\beta \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} R_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta\right)$$

avec $K_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha S_{\beta\gamma} + \partial_\beta S_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma S_{\alpha\beta}$ et $R_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha\dot{\beta}} L - \partial_{\beta\dot{\alpha}} L + S_{\alpha\beta}$.

En identifiant les différents coefficients des deux membres de (38. 2) nous obtenons les trois systèmes de relations :

$$\partial_{\dot{\gamma}}\varphi \partial_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} L - \partial_{\dot{\beta}}\varphi \partial_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} L = 0. \tag{38. 3}$$
$$\partial_\beta \varphi \partial_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} L - \partial_\alpha \varphi \partial_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} L + \partial_{\dot{\gamma}} \varphi R_{\alpha\beta} = \partial_{\dot{\gamma}} S_{\alpha\beta}. \tag{38. 4}$$
$$R_{\alpha\beta} \partial_\gamma \varphi + R_{\beta\gamma} \partial_\alpha \varphi + R_{\gamma\alpha} \partial_\beta \varphi = K_{\alpha\beta\gamma}. \tag{38. 5}$$

Les relations (38. 3) entraînent que la fonction φ est indépendante des x car s'il n'en était pas ainsi, $\partial_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} L$ serait de la forme :

$$\lambda \partial_{\dot{\alpha}} \varphi \partial_{\dot{\beta}} \varphi$$

et la matrice $\|\partial_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} L\|$ serait de rang 1, ce qui est absurde, le système dynamique étant supposé régulier.

Les relations (38. 4) entraînent alors, en intégrant par rapport à $\dot{x}^\gamma$ où γ est arbitraire :

$$S_{\alpha\beta} = \partial_\beta \varphi \partial_{\dot{\alpha}} L - \partial_\alpha \varphi \partial_{\dot{\beta}} L + T_{\alpha\beta}(x)$$

les $T_{\alpha\beta}$ ne dépendant que des variables x^γ.

Explicitons alors (38. 5); après réductions on obtient :

$$\partial_\alpha T_{\beta\gamma} + \partial_\beta T_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi T_{\beta\gamma} + \partial_\beta \varphi T_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma \varphi T_{\alpha\beta}.$$

Ces relations expriment que :

$$d\left(\frac{1}{2}\mathrm{T}_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta\right) = d\varphi \wedge \left(\frac{1}{2}\mathrm{T}_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta\right)$$

c'est-à-dire que la forme

$$e^{-\varphi}\mathrm{T}_{\alpha\beta}\,dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

est fermée.

Il existe alors localement un champ de vecteurs $\vec{\mathrm{A}}(x)$ de composantes covariantes A_α telles que :

$$e^{-\varphi}\mathrm{T}_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathrm{A}_\beta - \partial_\beta \mathrm{A}_\alpha.$$

Donc si la forme Ω admet un facteur intégrant le tenseur $\mathrm{S}_{\alpha\beta}$ a nécessairement des composantes de la forme :

$$(38.\ 6)\qquad \mathrm{S}_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\alpha}\mathrm{L}\,\partial_\beta\varphi - \partial_{\dot\beta}\mathrm{L}\,\partial_\alpha\varphi + e^{\varphi}(\partial_\alpha\mathrm{A}_\beta - \partial_\beta\mathrm{A}_\alpha)$$

les fonctions φ et A_α ne dépendant que des seules variables x^α.

Inversement si le tenseur $\mathrm{S}_{\alpha\beta}$ est de la forme précédente; nous avons :

$$e^{-\varphi}\Omega = e^{-\varphi}\,d(\dot d\mathrm{L}) + e^{-\varphi}\dot d\mathrm{L} \wedge d\varphi + d(\mathrm{A}_\alpha\,dx^\alpha) = d(e^{-\varphi}\dot d\mathrm{L} + \mathrm{A}_\alpha\,dx^\alpha)$$

$f = e^{-\varphi}$ est bien un facteur intégrant de Ω.

En remarquant que les formes Ω et $f\Omega$ admettent le même système associé, nous pouvons énoncer le théorème :

Théorème. — *Pour que la 2-forme fondamentale Ω d'un système dynamique* $\mathrm{S}(\mathrm{L}, \mathrm{S}_{\alpha\beta})$ *admette un facteur intégrant, il faut et il suffit que le tenseur force ait des composantes pouvant se mettre sous la forme :*

$$\mathrm{S}_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\alpha}\mathrm{L}\ \partial_\beta\varphi - \partial_{\dot\beta}\mathrm{L}\ \partial_\alpha\varphi + e^{\varphi}(\partial_\alpha\mathrm{A}_\beta - \partial_\beta\mathrm{A}_\alpha).$$

$\varphi(x)$ *et* $\mathrm{A}_\alpha(x)\,dx^\alpha$ *sont respectivement une fonction scalaire et une 1-forme définies sur l'espace-temps de configuration* V_{n+1}.

Dans ces conditions les trajectoires sont caractérisées par l'existence de l'invariant intégral relatif défini par :

$$\omega = (e^{-\varphi}\partial_{\dot\alpha}\mathrm{L} + \mathrm{A}_\alpha)\,dx^\alpha$$

c'est-à-dire sont les extrémales de l'intégrale :

$$\mathrm{I} = \int_{u_0}^{u_1}(e^{-\varphi}\mathrm{L} + \mathrm{A}_\alpha\dot x^\alpha)\,du.$$

Ces trajectoires sont aussi les géodésiques de l'espace de Finsler défini sur V_{n+1} par la fonction :

$$e^{-\varphi}L + A_\alpha \dot{x}^\alpha.$$

Cas particulier :

1° $\varphi = 0$. Dans ce cas : $S_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$; la forme Ω est alors fermée et égale à :

$$d(\partial_{\dot\alpha} L \, dx^\alpha + A_\alpha \, dx^\alpha)$$

ce que nous avons déjà trouvé.

2° $\vec{A} = 0$. Dans ce cas :

$$S_{\alpha\beta} = \partial_{\dot\alpha} L \partial_\beta \varphi - \partial_{\dot\beta} L \; \partial_\alpha \varphi.$$

Les trajectoires sont alors les extrémales de l'intégrale :

$$I = \int_{u_0}^{u_1} e^{-\varphi} L \, du.$$

Dans ces cas, comme dans le cas général, il existe un espace de Finsler admettant les mêmes géodésiques que l'espace S-Finslérien défini par L et $S_{\alpha\beta}$.

39. — Équations canoniques.

Soit le système dynamique $S(L, S_{\alpha\beta})$ et $\mathcal{F}$ l'espace de Finsler associé, c'est-à-dire l'espace de Finsler défini sur l'espace-temps de configuration par :

$$ds = L(x^\alpha, \; \dot{x}^\alpha) \, du.$$

Posons comme au § 22

$$y_\alpha = g_{\alpha\beta} y^\beta \qquad \text{avec} \qquad y^\beta = dx^\beta / du.$$

Au lagrangien $L(x^\alpha, y^\alpha)$ correspond alors l'hamiltonien $H(x^\alpha, y_\alpha)$ tel que :

$$H(x^\alpha, \; y_\alpha) = H(x^\alpha, \; g_{\alpha\beta} y^\beta) = L(x^\alpha, \; y^\alpha).$$

Rappelons que la fonction H est $h1$ et que :

$$\partial_\alpha L = -\partial_\alpha H, \qquad y^\alpha = H \, \partial^\alpha H. \tag{39. 1}$$

Si nous prenons comme paramètre u l'arc s de trajectoire, y^α et y_α sont respectivement les composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur unitaire tangent en x à $\mathcal{F}$.

En posant $l^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{ds}$, $l_\alpha = g_{\alpha\beta} l^\beta = \partial_{\dot\alpha} \mathrm{L}$ nous avons

$$\text{(39. 2)} \qquad \mathrm{L}(x^\alpha, l^\alpha) = \mathrm{H}(x^\alpha, l_\alpha) = 1.$$

Les $2n + 2$ nombres x^α et l_α supposés indépendants peuvent être considérés comme un système de coordonnées locales d'un point z de l'espace fibré $\mathfrak{V}$ des vecteurs tangents à V_{n+1}.

Liés par la relation

$$\mathrm{H}(x^\alpha, l_\alpha) = 1,$$

ces nombres x^α et l_α définissent un point de l'espace des états W.

Les trajectoires dans W du système dynamique (S) sont alors définies par des fonctions

$$x^\alpha = x^\alpha(s), \qquad l_\alpha = l_\alpha(s)$$

telles que

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \partial^\alpha \mathrm{H} \qquad \text{et} \qquad \frac{dl_\alpha}{ds} + \partial_\alpha \mathrm{H} = \mathrm{X}_\alpha.$$

Ces dernières équations sont les équations de Lagrange du système dynamique, écrites à l'aide des variables x et l.

En posant $\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{S}_{\alpha\beta}\partial^\beta \mathrm{H}$ où les $\mathrm{S}_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur force nous obtenons le système des équations canoniques sous la forme

$$\text{(39. 3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^\alpha}{ds} = \partial^\alpha \mathrm{H}, \\ \dfrac{dl_\alpha}{ds} = -\partial_\alpha \mathrm{H} + \mathrm{S}_{\alpha\beta}\partial^\beta \mathrm{H}, \end{cases}$$

ou encore sous la forme

$$\text{(39. 4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^\alpha}{ds} = \partial^\alpha \mathrm{H}, \\ \dfrac{dl_\alpha}{ds} - \mathrm{S}_{\alpha\beta}\dfrac{dx^\beta}{ds} = -\partial_\alpha \mathrm{H}. \end{cases}$$

Comme $\mathrm{X}_\alpha \dfrac{dx^\alpha}{ds} = \mathrm{S}_{\alpha\beta}\dfrac{dx^\alpha}{ds}\dfrac{dx^\beta}{ds} = 0$, nous voyons que le système des équations canoniques admet l'intégrale première

$$\mathrm{H}(x^\alpha, l_\alpha) = \mathrm{C^{te}}.$$

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — *Les trajectoires du système dynamique* S *d'hamiltonien* $H(x^\alpha, l_\alpha)$, *de tenseur force* $S_{\alpha\beta}(x, l)$ *sont les courbes intégrales du système* (39. 3) *vérifiant la condition initiale :*

$$H[(x^\alpha)_0, (l_\alpha)_0] = 1.$$

Nous remarquons que le système des équations canoniques est encore le système associé de la 2-forme Ω qui s'écrit ici :

$$\Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta. \tag{39. 5}$$

En effet, le système associé de Ω s'obtient en écrivant que la relation

$$i(Z)\Omega = 0$$

est vérifiée pour tout vecteur Z tangent à W, c'est-à-dire tel que :

$$i(Z)\, dH = 0.$$

En écrivant que

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(dx^\alpha)} = \lambda \frac{\partial(dH)}{\partial(dx^\alpha)}$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial(dl_\alpha)} = \lambda \frac{\partial(dH)}{\partial(dl_\alpha)}$$

et en remarquant que $\lambda = ds$ nous obtenons les équations canoniques sous la forme (39. 4).

Les $n + 1$ premières équations montrent que les courbes intégrales du système associé de Ω sont des courbes basiques de W; cela est d'ailleurs évident, d'après les résultats du § 23, sur l'expression (39. 5) de Ω.

Nous avons vu que $H = C^{te}$ est une intégrale première du système canonique; toute intégrale première $F = C^{te}$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\theta(Z)\, F = 0$$

Z étant le vecteur ayant pour composantes les 2[e] membres des équations (39. 1) d'où

$$\partial^\alpha H\, \partial_\alpha F + (-\partial_\alpha H + X_\alpha)\, \partial^\alpha F = 0$$

ou encore

$$(F, H) + X_\alpha \partial^\alpha F = 0$$

(F, H) désignant la parenthèse de Poisson des fonctions F et H relativement aux variables x^α et l_α.

40. — Équations canoniques sous forme matricielle [21].

Désignons par $\left(\frac{dz}{ds}\right)$ la matrice colonne formée par les dérivées, par rapport à s, des x^α et l_α, par $(\text{grad}_z H)$ la matrice colonne des dérivées partielles de H par rapport aux x^α et l_α, par E_s la matrice antisymétrique $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & S \end{pmatrix}$, par J_s la matrice antisymétrique $\begin{pmatrix} S & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, S étant la matrice ayant pour éléments $S_{\alpha\beta}$, I et 0 étant respectivement la matrice unité et la matrice nulle d'ordre $n + 1$.

Le système des équations canoniques (39. 3) se met sous la forme

$$\left(\frac{dz}{ds}\right) = E_s(\text{grad}_z H). \tag{40. 1}$$

Comme la matrice J_s est l'inverse de la matrice E_s, le système canonique se met sous la forme équivalente :

$$J_s\left(\frac{dz}{ds}\right) = (\text{grad}_z H) \tag{40. 2}$$

correspondant aux équations (39. 4).

Remarquons que J_s est la matrice associée à la forme Ω c'est-à-dire la matrice des coefficients de

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(dx^\alpha)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\Omega}{\partial(dl_\alpha)}.$$

On peut aussi dire que J_s est la matrice des coefficients de la forme bilinéaire alternée $f(\Omega)$ associée à Ω; on a en effet :

$$f(\Omega) = {}^t(dz)J_s(\delta z)$$

où ${}^t(dz)$ est la matrice ligne ayant pour éléments dx^α, dl_α. (δz) la matrice colonne ayant pour éléments δx^α, δl_α, (dz) et

[21] Y. Thiry [2], pp. 206-212.

(δz) correspondant à deux vecteurs arbitraires $\overrightarrow{dz}$ et $\overrightarrow{\delta z}$ de l'espace T_z tangent au point $z(x^\alpha, l_\alpha)$ à $\mathcal{V}$.

Dans la suite il sera parfois commode de poser : $l_\alpha = x^{\alpha^*}$ avec $\alpha^* = \alpha + n + 1$ et de désigner par une lettre latine majuscule un indice prenant les valeurs 1, 2, ..., $2n + 2$. En désignant par a_{AB} l'élément de la $A^{\text{ème}}$ ligne et de la $B^{\text{ème}}$ colonne de J_s la 2-forme Ω s'écrit alors :

$$\Omega = \frac{1}{2} a_{AB}\, dx^A \wedge dx^B \tag{40. 3}$$

et le système des équations canoniques (40. 2) devient

$$a_{AB} \frac{dx^B}{ds} = \partial_A H. \tag{40. 4}$$

41. — Changement de variables.

Considérons sur $\mathcal{V}$ le changement de variables défini par

$$x^A = X^A(x^{B'}) \tag{41. 1}$$

les $2n + 2$ fonctions X^A étant supposées différentiables par rapport aux nouvelles variables $x^{A'}$.

Par différentiation nous déduisons de (41. 1) les formules :

$$dx^A = \partial_{B'} X^A\, dx^{B'}. \tag{41. 2}$$

Désignons par M la matrice jacobienne d'éléments $X^A_{B'} = \partial_{B'} X^A$ A étant l'indice des lignes, B′ celui des colonnes. Nous pouvons alors écrire les relations (41. 2) sous la forme matricielle :

$$(dz) = M(dz').$$

La forme bilinéaire $f(\Omega) = {}^t(dz) J_s(\delta z)$ se transforme dans

$$f(\Omega') = {}^t(dz'){}^t M J_s M(\delta z)$$

où ${}^tM$ est la matrice transposée de M.

La forme bilinéaire $f(\Omega')$ est encore alternée car la matrice

$$K_s = {}^tM J_s M$$

est antisymétrique.

Le système associé de la forme correspondante Ω' est :

$$K_s\left(\frac{dz'}{ds}\right) = (\text{grad}_{z'} H') \tag{41. 3}$$

où $(\mathrm{grad}_{z'} \mathrm{H}')$ est la matrice colonne des dérivées partielles par rapport aux $x^{\mathrm{A}'}$ de l'hamiltonien H supposé exprimé à l'aide des nouvelles variables.

Le système canonique s'écrit donc, à l'aide des nouvelles variables sous la forme suivante :

$$a_{\mathrm{A'B'}} \frac{dx^{\mathrm{B'}}}{ds} = \partial_{\mathrm{A'}} \mathrm{H}' \tag{41. 4}$$

la matrice ayant pour éléments $a_{\mathrm{A'B'}}$ étant la matrice ${}^t\mathrm{MJ}_s\mathrm{M}$, J_s étant la matrice de l'ancien système canonique, M la matrice jacobienne du changement de variables et

$$\mathrm{H}'(x^{\mathrm{A}'}) = \mathrm{H}[\mathrm{X}^{\mathrm{A}}(x^{\mathrm{B}'})] = \mathrm{H}(x^{\mathrm{A}}).$$

42. — Transformations canoniques

Nous dirons que la transformation définie par la matrice M est canonique, si, quelle que soit la matrice antisymétrique S, la matrice

$$\mathrm{K}_s = {}^t\mathrm{MJ}_s\mathrm{M}$$

est de la forme

$$\mathrm{K}_s = \begin{pmatrix} \mathrm{S}' & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{J}_{s'}$$

S′ étant une matrice antisymétrique.

Nous dirons que la transformation définie par la matrice M est pseudo-canonique, si, quelle que soit la matrice antisymétrique S,

$$\mathrm{K}_s = f\mathrm{J}_{s'}$$

où f est une fonction scalaire des variables $x^{\mathrm{A}'}$.

On montre facilement que l'ensemble des transformations canoniques ou pseudo-canoniques a une structure de groupe multiplicatif admettant localement comme sous-groupe le groupe symplectique $\mathrm{S}p(n+1, \mathrm{R})$.

Essayons de caractériser des matrices M définissant des transformations canoniques. Pour cela revenons aux notations x^α, l_α; désignons les nouvelles variables par $x^{\alpha'}$, $l_{\alpha'}$.

Posons

$$x^\alpha = \mathrm{X}^\alpha(x^{\beta'}, l_{\beta'}), \qquad l_\alpha = \mathrm{L}_\alpha(x^{\beta'}, l_{\beta'});$$

d'où :

$$dx^\alpha = X^\alpha_{\beta'}\, dx^{\beta'} + X^{\alpha\beta'}\, dl_{\beta'},$$
$$dl_\alpha = L_{\alpha\beta'}\, dx^{\beta'} + L^{\beta'}_\alpha\, dl_{\beta'}$$

avec

$$X^\alpha_{\beta'} = \partial_{\beta'} X^\alpha, \qquad X^{\alpha\beta'} = \partial^{\beta'} X^\alpha,$$
$$L_{\alpha\beta'} = \partial_{\beta'} L_\alpha, \qquad L^{\beta'}_\alpha = \partial^{\beta'} L_\alpha.$$

La matrice M est alors de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où A, B, C, D sont des sous-matrices de M d'ordre $n + 1$ ayant pour éléments respectifs les $X^\alpha_{\beta'}$, $X^{\sigma\beta'}$, $L_{\alpha\beta'}$, $L^{\beta'}_\alpha$ l'indice primé étant celui des colonnes.

Explicitons :

$$K_S = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & -I \\ I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} {}^tASA + {}^tCA - {}^tAC & {}^tASB + {}^tCB - {}^tAD \\ {}^tBSA + {}^tDA - {}^tBC & {}^tBSB + {}^tDB - {}^tBD \end{pmatrix}.$$

Pour que K_S soit de la forme J_S, quelle que soit S, il est nécessaire que :

$${}^tDA - {}^tBC = I \qquad \text{et} \qquad {}^tDB - {}^tBD = 0.$$

Supposons la matrice A régulière; les conditions

$${}^tBSA = {}^tBSB = 0$$

sont alors équivalentes à la condition :

$${}^tBS = 0$$

qui n'est vérifiée, quelle que soit S, que pour

$$B = 0.$$

Nous en déduisons le résultat suivant : pour que la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où A est supposée régulière définisse une transformation canonique, il faut et il suffit que :

$$1^o\ B = 0 \qquad \text{et} \qquad 2^o\ {}^tDA = I$$

ou encore que les variables x^α soient indépendantes des nouvelles variables $l_{\alpha'}$ et que :

$$\partial^{\gamma'} L_\alpha \partial_{\gamma'} X^\beta = \delta^\beta_\alpha.$$

Dans ces conditions la forme :

$$\Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

a pour transformée la forme :

$$\Omega' = dl_{\alpha'} \wedge dx^{\alpha'} + \frac{1}{2} S'_{\alpha'\beta'} dx^{\alpha'} \wedge dx^{\beta'}$$

la matrice ayant pour éléments les $S'_{\alpha'\beta'}$ étant la matrice :

$$S' = {}^t\!ASA + {}^t\!CA - {}^t\!AC.$$

Les équations canoniques du système dynamique considéré, relativement aux nouvelles variables, sont alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dx^{\alpha'}}{ds} = \partial^{\alpha'} H' \\ \dfrac{dl_{\alpha'}}{ds} = -\partial_{\alpha'} H' + S'_{\alpha'\beta'} \partial^{\beta'} H' \end{cases}$$

avec $H'(x^{\alpha'}, l_{\alpha'}) = H(X^\alpha, L_\alpha)$.

Pour un tenseur $S_{\alpha\beta}$ fixé, on peut trouver d'autres transformations respectant la forme du système canonique; les matrices A, B, C, D correspondantes vérifient les relations :

$$\begin{aligned} {}^t\!BSB + {}^t\!DB - {}^t\!BD &= 0 \\ {}^t\!BSA + {}^t\!DA - {}^t\!BC &= fI \end{aligned}$$

où f est une fonction scalaire arbitraire des nouvelles variables.

Cas particuliers. — 1° *Changement de variables laissant la forme Ω invariante.*

Nous dirons que la forme Ω est invariante par le changement de variables défini par M si la forme transformée est

$$\Omega' = dl_{\alpha'} \wedge dx^{\alpha'} + \frac{1}{2} S_{\alpha'\beta'} dx^{\alpha'} \wedge dx^{\beta'}$$

où $S_{\alpha'\beta'}$ s'obtient en remplaçant dans $S_{\alpha\beta}$ les x^α par $X^\alpha(x', l')$, les l_α par $L_\alpha(x', l')$.

Pour qu'il en soit ainsi, quelle que soit S, il faut et il suffit que, en supposant A régulière :

1° $B = 0$;

2° ${}^t\!DA = I$;

3° ${}^t\mathrm{ASA} + {}^t\mathrm{CA} - {}^t\mathrm{AC} = \mathrm{S}$ quelle que soit S, c'est-à-dire que $\mathrm{A} = \mathrm{I}$ et que ${}^t\mathrm{C} = \mathrm{C}$.

Les matrices ainsi obtenues sont de la forme : $\mathrm{M_C} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ \mathrm{C} & \mathrm{I} \end{pmatrix}$ où C est une matrice symétrique.

Ces matrices forment un sous-groupe du groupe multiplicatif des matrices canoniques, isomorphe au groupe additif des matrices symétriques d'ordre $n + 1$.

La matrice C étant symétrique nous avons les identités :

$$\partial_{\alpha'}\mathrm{L}_\beta - \partial_{\beta'}\mathrm{L}_\alpha = 0.$$

Il existe donc une fonction $\mathrm{F}(x')$ telle que :

$$\mathrm{L}_\alpha = l_{\alpha'} + \partial_{\alpha'}\mathrm{F}(x^{\beta'}).$$

Le changement de variables considéré est alors défini par :

$$x^\alpha = x^{\alpha'} + a^\alpha$$

les a^α étant des constantes, et

$$l_\alpha = l_{\alpha'} + \partial_{\alpha'}\mathrm{F}.$$

Il en résulte bien que :

$$dl_\alpha \wedge dx^\alpha = dl_{\alpha'} \wedge dx^{\alpha'}$$

et

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta = dx^{\alpha'} \wedge dx^{\beta'}.$$

2° *Changement de variables sur* V_{n+1} *prolongé sur* $\mathcal{V}$. — Définissons un changement de variables sur V_{n+1} par :

$$x^\alpha = \mathrm{X}^\alpha(x^{\beta'}).$$

Il est évident, d'après la nature tensorielle de l_α et $\mathrm{S}_{\alpha\beta}$ que ce changement de variables est canonique. Vérifions-le. Par différentiation nous obtenons

$$dx^\alpha = \partial_{\beta'}\mathrm{X}^\alpha\, dx^{\beta'} \qquad \text{ou} \qquad l^\alpha = \partial_{\beta'}\mathrm{X}^\alpha l^{\beta'}.$$

La matrice A a pour éléments $\mathrm{X}^\alpha_{\beta'} = \partial_{\beta'}\mathrm{X}^\alpha$, l'indice α étant celui des lignes, l'indice β' celui des colonnes. La matrice B est nulle.

Les composantes covariantes l_α se transforment suivant la loi :

$$l_{\beta'} = \mathrm{X}^\alpha_{\beta'} l_\alpha \qquad \text{ou} \qquad l_\alpha = \mathrm{X}^{\beta'}_\alpha l_{\beta'}.$$

Par différentiation nous obtenons

$$dl_\alpha = \partial_{\beta'}\mathrm{X}^{\gamma'}_\alpha l_{\gamma'} dx^{\beta'} + \mathrm{X}^{\beta'}_\alpha dl_{\beta'}.$$

La matrice D d'éléments $X_\alpha^{\beta'}$ ou l'indice α représente les lignes est l'inverse de la matrice d'éléments $X_{\beta'}^{\alpha}$ où l'indice α représente les colonnes, c'est-à-dire de ${}^t\mathrm{A}$. Nous obtenons donc :

$$\mathrm{D} = {}^t\mathrm{A}^{-1}.$$

La transformation $(x^\alpha, l_\alpha) \to (x^{\alpha'}, l_{\alpha'})$ ainsi définie est bien une transformation canonique.

La matrice $\mathrm{K}_s = {}^t\mathrm{M}\mathrm{J}_s\mathrm{M}$ est alors de la forme : $\begin{pmatrix} {}^t\mathrm{ASA} & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$ car on peut montrer directement d'après l'expression de C que

$${}^t\mathrm{CA} - {}^t\mathrm{AC} = 0$$

mais cela résulte du fait que le changement de variables considéré est tel que

$$l_\alpha\, dx^\alpha = l_{\alpha'}\, dx^{\alpha'} \qquad \text{ou} \qquad dl_\alpha \wedge dx^\alpha = dl_{\alpha'} \wedge dx^{\alpha'}.$$

Remarque. — Il est aisé de retrouver par la méthode matricielle les résultats du § 38 relatifs aux cas où Ω est fermée ou admet un facteur intégrant.

43. — Espace de Lee défini par la 2-forme Ω.

Considérons la variété $\mathfrak{V}$ dont un point z admet comme système de coordonnées locales les $2n + 2$ nombres x^α et l_α supposés indépendants.

La donnée sur $\mathfrak{V}$ de la 2-forme :

$$\Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} \mathrm{S}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \tag{43. 1}$$

définit sur $\mathfrak{V}$ une structure d'espace presque symplectique ou encore une structure d'espace de Lee ([22]).

En effet les variables x^α et l_α étant supposées indépendantes la forme Ω est de rang maximum $2n + 2$; la matrice associée à Ω est $\mathrm{J}_s = \begin{pmatrix} \mathrm{S} & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}$ cette matrice est régulière, son inverse est la matrice $\mathrm{E}_s = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & \mathrm{S} \end{pmatrix}$.

Posons comme au § 40, $l_\alpha = x^{\alpha^*}$ avec $\alpha^* = \alpha + n + 1$.

([22]) H. C. Lee, A kind of even-dimensional geometry and its application to exterior calculus (*Amer. J. Math.* t. 55, 1943, pp. 433-438).

La 2-forme Ω s'écrit alors :

$$\Omega = \frac{1}{2} a_{AB}\, dx^A \wedge dx^B$$

où a_{AB} est l'élément de la A° ligne et de la B° colonne de J_s.

Rappelons que tout indice latin majuscule peut prendre les valeurs 1, 2, ..., $2n+2$.

Désignons par a^{AB} les éléments de la matrice E_s inverse de J_s. Introduisons avec Lee les quatre tenseurs suivants :

1° le tenseur de courbure de composantes :

$$K_{ABC} = \partial_A a_{BC} + \partial_B a_{CB} + \partial_C a_{AB} \tag{43. 2}$$

telles que

$$d\Omega = \frac{1}{6} K_{ABC}\, dx^A \wedge dx^B \wedge dx^C.$$

2° Le vecteur covariant de courbure de composantes

$$K_A = K_{ABC} a^{BC} \tag{43. 3}$$

la forme $K_A\, dx^A$ étant la codifférentielle ($\delta\Omega$) de Ω par rapport à elle-même.

3° le premier tenseur conforme de courbure de composantes

$$b_{AB} = \partial_A K_B - \partial_B K_A. \tag{43. 4}$$

On a :

$$d(\delta\Omega) = \frac{1}{2} b_{AB}\, dx^A \wedge dx^B.$$

4° le deuxième tenseur conforme de courbure de composantes :

$$C_{ABC} = K_{ABC} + \frac{1}{2n}(K_A a_{BC} + K_B a_{CA} + K_C a_{AB}). \tag{43. 5}$$

Ce tenseur est tel que

$$\frac{1}{6} C_{ABC}\, dx^A \wedge dx^B \wedge dx^C = d\Omega - \frac{1}{n}\delta\Omega \wedge \Omega.$$

Explicitons les composantes de ces différents tenseurs. Pour le tenseur de courbure nous trouvons :

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\alpha S_{\beta\gamma} + \partial_\beta S_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma S_{\alpha\beta}. \tag{43. 6}$$

$$K_{\alpha^*\beta\gamma} = \partial_{\alpha^*} S_{\beta\gamma} = \partial^\alpha S_{\beta\gamma}; \quad K_{\alpha\beta^*\gamma} = \partial_{\beta^*} S_{\gamma\alpha}; \quad K_{\alpha\beta\gamma^*} = \partial_{\gamma^*} S_{\alpha\beta}. \tag{43. 7}$$

Les composantes admettant plus d'un indice étoilé sont toutes nulles.

Pour le vecteur de courbure nous trouvons :

$$K_\alpha = K_{\alpha\beta\gamma}a^{\beta\gamma} + K_{\alpha\beta^*\gamma}a^{\beta^*\gamma} + K_{\alpha\beta\gamma^*}a^{\beta\gamma^*} = \partial_{\gamma^*}S_{\alpha\beta}\delta^{\beta\gamma} - \partial_{\beta^*}S_{\gamma\alpha}\delta^{\beta\gamma}$$

d'où

$$K_\alpha = 2\sum_\beta \partial_{\beta^*}S_{\alpha\beta} = 2\partial^\beta S_{\alpha\beta} \tag{43. 8}$$

avec sommation sur β.

$$K_{\alpha^*} = K_{\alpha^*\beta\gamma}a^{\beta\gamma} = 0.$$

Nous avons donc

$$\delta\Omega = 2\partial^\beta S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha.$$

Pour le 2e tenseur de courbure nous trouvons :

$$C_{\alpha\beta\gamma} = K_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2n}(K_\alpha S_{\beta\gamma} + K_\beta S_{\gamma\alpha} + K_\gamma S_{\alpha\beta})$$

ou

$$C_{\alpha\beta\gamma} = S\left(\partial_\alpha S_{\beta\gamma} + \frac{1}{n}\,\partial^\lambda S_{\alpha\lambda}S_{\beta\gamma}\right) \tag{43. 9}$$

où S indique qu'il faut ajouter aux termes entre parenthèses ceux que l'on en déduit en permutant circulairement α, β, γ.

$$C_{\alpha^*\beta\gamma} = K_{\alpha^*\beta\gamma} + \frac{1}{2n}(K_{\alpha^*}S_{\beta\gamma} - K_\beta\delta_{\gamma\alpha} + K_\gamma\delta_{\alpha\beta}).$$

Si α, β, γ sont tous les trois différents nous obtenons :

$$C_{\alpha^*\beta\gamma} = \partial_{\alpha^*}S_{\beta\gamma} = \partial^\alpha S_{\beta\gamma}. \tag{43. 10}$$

Si $\beta = \gamma$, les coefficients C correspondants sont nuls. Si $\alpha = \beta \neq \gamma$ nous obtenons

$$C_{\alpha^*\alpha\gamma} = \partial_{\alpha^*}S_{\alpha\gamma} + \frac{1}{n}\sum_\lambda \partial_{\lambda^*}S_{\gamma\lambda}. \tag{43. 11}$$

Tous les coefficients C ayant plus d'un indice étoilé sont nuls.

44. — Conditions nécessaires et suffisantes pour que Ω admette un facteur intégrant.

Les espaces de Lee remarquables sont ceux que Lee désigne par « flat » pour lesquels la forme Ω est fermée et « conformally flat » pour lesquels la forme Ω admet un facteur intégrant. Nous sommes ainsi ramenés aux cas fondamentaux étudiés au § 38.

Pour que la forme Ω soit fermée il faut et il suffit que le tenseur de courbure soit nul; cette condition équivaut comme nous l'avons vu, à l'existence d'un potentiel vecteur $\vec{A}(x)$ tel que localement :

$$S_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Pour que la forme Ω admette un facteur intégrant, il faut et il suffit que le 2e tenseur conforme de courbure soit nul. Ce théorème dû à Lee, retrouvé et complété par C. Ehresmann et Mlle P. Libermann [23] suppose $n > 1$; cela est évidemment le cas pour la 2-forme Ω d'un système dynamique.

Écrivons donc que le tenseur $C_{ABC} = 0$. D'après (43. 10) $S_{\beta\gamma}$ ne dépend que des variables x, de l_β et l_γ. D'après (43. 11) $\partial_{\alpha^*} S_{\alpha\gamma}$ a une valeur indépendante de α. Posons alors

$$\partial_{\alpha^*} S_{\alpha\gamma} = \varphi_\gamma$$

les relations $C_{\alpha^*\alpha\gamma} = 0$ sont alors vérifiées. Comme $\partial_{\alpha^*\gamma^*} S_{\alpha\gamma} = 0$, les fonctions φ_γ ne dépendent que des variables x.

$S_{\alpha\beta}$ est alors de la forme :

$$S_{\alpha\beta} = l_\alpha \varphi_\beta(x) - l_\beta \varphi_\alpha(x) + T_{\alpha\beta}(x). \tag{44. 1}$$

Explicitons maintenant les conditions

$$C_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{n} \partial^\lambda S_{\alpha\lambda} = - \varphi_\alpha(x)$$

nous obtenons après réductions :

$$S(l_\alpha \partial_\gamma \varphi_\beta - l_\beta \partial_\gamma \varphi_\alpha + \partial_\gamma T_{\alpha\beta} - \varphi_\gamma T_{\alpha\beta}) = 0. \tag{44. 2}$$

Ces conditions sont équivalentes à :

$$\partial_\gamma \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\gamma = 0 \tag{44. 3}$$

et

$$S(\partial_\gamma T_{\alpha\beta} - \varphi_\gamma T_{\alpha\beta}) = 0. \tag{44. 4}$$

[23] C. Ehresmann et P. Libermann, *C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, pp. 420-421; t. 229, 1949, pp. 697-699.

Les conditions (44. 3) expriment que la forme $\varphi_\alpha\, dx^\alpha$ est fermée sur V_{n+1} ; il existe donc une fonction $\varphi(x)$ telle que localement :

$$\varphi_\alpha = \partial_\alpha \varphi.$$

Les conditions (43. 4) expriment que la 2-forme

$$\frac{1}{2} T_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

admet $e^{-\varphi}$ comme facteur intégrant.

Il existe alors un potentiel vecteur $A_\alpha(x)$ tel que localement l'on ait :

$$T_{\alpha\beta} = e^\varphi (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha).$$

Nous trouvons comme au § 37 que $S_{\alpha\beta}$ est de la forme :

$$(44.5) \qquad S_{\alpha\beta} = l_\alpha \partial_\beta \varphi - l_\beta \partial_\alpha \varphi + e^\varphi (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème :

Théorème. — *Pour que la 2-forme fondamentale d'un système dynamique*

$$\Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

admette un facteur intégrant il faut et il suffit que le tenseur force $S_{\alpha\beta}$ *vérifie quels que soient* α, β, γ *les conditions suivantes :*

1° $\quad \dfrac{\partial S_{\beta\gamma}}{\partial l_\alpha} = 0 \quad$ pour $\quad \alpha \neq \beta \quad$ et $\quad \alpha \neq \gamma.$

2° $\quad \dfrac{\partial S_{\beta\gamma}}{\partial l_\beta} = \dfrac{\partial S_{\alpha\gamma}}{\partial l_\alpha}.$

3° $\quad S\left(\dfrac{\partial S_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \dfrac{1}{n} \sum_\lambda \dfrac{\partial S_{\alpha\lambda}}{\partial l_\lambda} S_{\beta\gamma}\right) = 0.$

Dans ces conditions il existe une fonction scalaire $\varphi(x)$ et un champ covariant $A_\alpha(x)$ définis sur V_{n+1} tels que localement l'on ait :

$$S_{\alpha\beta} = l_\alpha \partial_\beta \varphi - l_\beta \partial_\alpha \varphi + e^\varphi (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha).$$

CHAPITRE VI

Systèmes dynamiques à liaisons non holonomes.

45. — Liaisons du premier ordre dans le formalisme homogène.
Soit un système dynamique (S_0) à liaisons holonomes parfaites à n degrés de liberté x^k. Reprenons les notations du § 29; les équations du mouvement sont, dans le formalisme non homogène :

$$P_k(\mathfrak{L}) = Q_k. \tag{45. 1}$$

Soit $a(x^k, t, x'^k)$ une fonction des $2n + 1$ variables x^k, t et x'^k qui ne soit pas la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction $A(x^k, t)$ et telle que : $a = C^{te}$ ne soit pas une intégrale première des équations du mouvement de (S_0).

Imposer au système dynamique S_0 une liaison non holonome du 1er ordre :

$$a(x^k, t, x'^k) = 0$$

revient à ajouter à chaque second membre des équations (45. 1) une fonction R_k des x^i, t et x'^i de façon que le mouvement du nouveau système dynamique (S) soit défini dans l'espace-temps de configuration V_{n+1} par :

$$P_k(\mathfrak{L}) = Q_k + R_k \tag{45. 2}$$

ces équations admettant $a = 0$ comme intégrale première [24].

Passons au formalisme homogène comme au § 29.

Posons :

$$Y_k = R_k\dot{x}^{n+1}, \qquad Y_{n+1} = -R_k\dot{x}^k.$$

[24] F. Gallissot [1], p. 45.

Les Y_α sont les composantes covariantes d'un vecteur appelé force de liaison.

La relation de liaison s'écrit alors :

$$a(x^\alpha,\ \dot{x}^\alpha) = 0.$$

La fonction a est $\dot{h}$. Comme $\lambda a = 0$ définit la même liaison si $\lambda \neq 0$ sur $\mathcal{V}$, nous pouvons fixer arbitrairement le degré d'homogénéité de a.

Nous supposerons en général $a\ \dot{h}\ 0$.

La lagrangien homogène L définit sur V_{n+1} une structure d'espace de Finsler; nous supposerons cet espace régulier et le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ tel que

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\ dx^\alpha\ dx^\beta$$

soit une forme quadratique définie positive en tout point de $\mathcal{V}$.

Les trajectoires de (S) dans l'espace-temps de configuration sont alors définies par les $n+1$ équations :

$$\text{(45. 3)} \qquad P_\alpha(L) = X_\alpha + Y_\alpha$$

Les équations canoniques des trajectoires dans l'espace de phase W sont :

$$\text{(45. 4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx^\alpha}{ds} = \partial^\alpha H, \\ \dfrac{dl_\alpha}{ds} = -\partial_\alpha H + X_\alpha + Y_\alpha. \end{cases}$$

les fonctions H, X_α, Y_α étant supposées exprimées à l'aide des variables x^α et l_α.

A la fonction $a(x^\alpha,\ \dot{x}^\alpha)$ correspond la fonction $\overline{a}(x^\alpha,\ l_\alpha)$ telle que :

$$\overline{a}(x^\alpha,\ \partial_{\dot{\alpha}}L) = a(x^\alpha,\ \dot{x}^\alpha).$$

Traduisons maintenant le fait que $\overline{a}(x^\alpha,\ l_\alpha) = 0$ est une intégrale première des équations (45. 4).

En écrivant que :

$$i(Z)\ d\overline{a} = 0$$

où Z est le vecteur tangent à W ayant pour composantes les 2[e] membres des équations (45. 4) nous obtenons :

$$\text{(45. 5)} \qquad (\overline{a},\ H) + \partial^\alpha \overline{a}(X_\alpha + Y_\alpha) = 0$$

$(\overline{a}, H)$ désignant la parenthèse de Poisson des fonctions $\overline{a}$ et H.

A la force de liaison Y dont les composantes Y_α sont $\dot{h}1$ et telles que

$$Y_\alpha \dot{x}^\alpha = 0$$

associons le tenseur $T_{\alpha\beta}$, dit tenseur des liaisons, défini par :

$$(45.6) \qquad T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_{\dot{\beta}} Y_\alpha - \partial_{\dot{\alpha}} Y_\beta).$$

Les composantes $T_{\alpha\beta}$ sont $\dot{h}0$ et telles que :

$$T_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = Y_\alpha.$$

Les considérations du chapitre précédent montrent alors que le système (45. 4) est le système associé de la 2-forme :

$$(45.7) \qquad \Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2}(S_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta})\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

les variables l_α et x^α étant liées par la relation :

$$H(x^\alpha, l_\alpha) = 1.$$

Les trajectoires du système dynamique (S) peuvent être considérées comme les géodésiques de l'espace S-Finslérien défini par le lagrangien L et le tenseur $S_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}$.

La donnée de la relation de liaison $a = 0$, ne détermine pas la force de liaison; celle-ci dépend en outre de la façon dont la liaison est réalisée. Dans la suite nous étudierons les liaisons à réalisation parfaite au sens de Delassus, ou liaisons parfaites.

46. — Liaisons parfaites.

La relation de liaison :

$$(46.1) \qquad a(x^\alpha, y^\alpha) = 0 \qquad \text{avec} \qquad y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}$$

définit en chaque point x de V_{n+1} un cône de directions C_x situé dans l'espace T_x tangent en x à V_{n+1}.

Ce cône est réduit à un plan si la liaison est linéairement non holonome c'est-à-dire si la relation (46. 1) peut se mettre sous la forme :

$$a_\alpha(x) y^\alpha = 0.$$

Dans ce cas, la liaison est dite *parfaite* si la force de liaison Y_α est perpendiculaire à ce plan, du sens de la métrique finslérienne.

Dans le cas général, associons à chaque génératrice G du cône C_x le plan tangent le long de cette génératrice.

Si nous désignons par y_0^α les composantes d'un vecteur porté par G, l'équation de ce plan tangent est :

$$\partial_{\dot{\alpha}} a(x^\alpha, \; y_0^\alpha)\, y^\alpha = 0. \tag{46. 2}$$

La relation (46. 2) définit ce que nous appellerons la liaison linéaire tangente à la liaison donnée au point x^α, y_0^α de W.

La liaison est dite *parfaite* si la force de liaison au point x^α, y_0^α est perpendiculaire au plan tangent au cône C_x le long de la génératrice y_0^α. Les forces de liaisons vérifient alors la *condition dite des travaux virtuels généralisée* : le travail virtuel $Y_\alpha \delta x^\alpha$ de la force de liaison correspondant à l'élément linéaire $(x_0^\alpha, \; y_0^\alpha)$ est nul pour tout déplacement virtuel δx^α permis par la liaison linéaire tangente à la liaison donnée en x_0^α, y_0^α.

Dans le cas d'une liaison parfaite les composantes de la force de liaison sont de la forme :

$$Y_\alpha = \lambda \partial_{\dot{\alpha}} a \tag{46. 3}$$

où λ est une fonction des x^α, y^α $\dot{h}1$ si a est $\dot{h}1$, $\dot{h}2$ si a est $\dot{h}0$. Inversement si les composantes de $\vec{Y}$ sont de la forme (46. 3) la liaison considérée est parfaite.

L'énoncé de la condition des travaux virtuels généralisée donnée plus haut est équivalent à l'énoncé suivant : à un instant donné le travail virtuel des forces de liaison $Y_k \delta x^k$ est nul pour tout déplacement virtuel δx^k compatible avec la liaison indépendante du temps qui coïncide avec la liaison donnée à l'instant considéré.

En effet cette condition entraîne que :

$$Y_k = \lambda \partial_{\dot{k}} a.$$

Comme $Y_\alpha \dot{x}^\alpha = 0$ et $\partial_{\dot{\alpha}} a \dot{x}^\alpha = 0$, a étant supposée $\dot{h}0$, nous en déduisons bien que :

$$Y_{n+1} = \lambda \partial_{\dot{n+1}} a.$$

Les liaisons parfaites du 1^er^ ordre comprennent en particulier les liaisons linéairement non holonomes et même les liaisons holonomes à condition de remplacer la relation de liaison :

$$A(x^\alpha) = 0$$

par la relation du 1er ordre :

$$a = \partial_{\dot{\alpha}} A \dot{x}^\alpha = 0.$$

La force de liaison dans le cas d'une liaison parfaite est déterminée par la donnée de la relation de liaison $a = 0$.

Le coefficient λ se détermine en exprimant que $a = 0$ est une intégrale première des équations du mouvement.

Pour expliciter les calculs supposons la fonction a $\dot{h}0$ ou exprimée en fonction des variables x^α et l_α.

Ces variables sont liées par la relation

$$H(x^\alpha, l_\alpha) = 1$$

où H est l'hamiltonien correspondant au Lagrangien $L(x^\alpha, y^\alpha)$.

Soit $\mathcal{F}$ l'espace de Finsler défini sur V_{n+1} par

$$ds = L(x^\alpha, dx^\alpha)$$

Dans $\overline{a}(x^\alpha, l_\alpha)$ remplaçons l_α par $\partial_{\dot{\alpha}} L$. En dérivant partiellement nous obtenons :

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{\alpha}} a &= \partial^\beta \overline{a}\, \partial_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} L, \\ &= \partial^\beta \overline{a}\, (g_{\alpha\beta} - l_\alpha l_\beta), \\ &= \partial^\beta \overline{a}\, g_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

car $\partial_{\dot{\alpha}} a l^\alpha = \partial^\beta \overline{a} l_\beta = 0$, a étant $\dot{h}0$.

Nous en déduisons que les composantes de la force de liaison sont :

$$Y_\alpha = \lambda\, \partial_{\dot{\alpha}} a \qquad \text{et} \qquad Y^\alpha = \lambda\, \partial^\alpha \overline{a}.$$

La relation (45. 5) exprimant que $\overline{a} = 0$ est une intégrale première des équations du mouvement, devient alors :

$$(46.\ 4) \qquad (\overline{a},\ H) + \partial^\alpha \overline{a}\, X_\alpha + \lambda g_{\alpha\beta}\, \partial^\alpha \overline{a}\, \partial^\beta \overline{a} = 0.$$

Le coefficient de λ, représentant le carré de la norme du vecteur $\partial^\alpha \overline{a}$, est positif; cette relation détermine donc λ.

Exemple de liaison parfaite non holonome.

On lance un projectile avec une vitesse initiale $\vec{V_0}$; on fait agir sur ce projectile une force $\vec{F}$ de façon que le mouvement soit uniforme et plan.

Par rapport à un repère orthonormé Ox, Oy situé dans le plan de la trajectoire la relation de liaison est :

$$a = x'^2 + y'^2 - v^2 = 0$$

ou

$$a = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{t}^2} - v^2 = 0.$$

Faire l'hypothèse que la liaison est parfaite revient à supposer la force de liaison $\vec{F}$ colinéaire au vecteur vitesse.

Interprétation géométrique des trajectoires.

Considérons un système dynamique (S) de lagrangien L, soumis à une liaison parfaite définie par :

$$a(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = 0$$

la fonction a étant $\dot{h}0$.

Supposons d'autre part le tenseur $S_{\alpha\beta} = 0$, de sorte que les équations des trajectoires dans l'espace-temps de configuration V_{n+1} doient définies par le système :

$$P_\alpha(L) = \lambda \partial_{\dot{\alpha}} a \qquad \text{où} \qquad \lambda \text{ est } \dot{h}2.$$

Le tenseur des liaisons correspondant est :

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_{\dot{\alpha}} a \partial_{\dot{\beta}} \lambda - \partial_{\dot{\alpha}} \lambda \partial_{\dot{\beta}} a).$$

Les trajectoires admettent la relation intégrale d'invariance définie par :

$$\Omega = d(\partial_{\dot{\alpha}} L) \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} \dot{d}a \wedge \dot{d}\lambda.$$

Posons $\lambda = K^2$ et $a = \frac{H}{K}$ ce qui est toujours possible, en changeant éventuellement les signes de a et λ. Nous avons alors :

$$\lambda \partial_{\dot{\alpha}} a = K \partial_{\dot{\alpha}} H - H \partial_{\dot{\alpha}} K.$$

Les fonctions H et K étant $\dot{h}1$, les trajectoires de (S) sont les extrémales généralisées de l'intégrale

$$I = \int_{u_0}^{u_1} (L + K \int_{u_0}^{u} H \, dv) \, du.$$

Ces trajectoires sont aussi les géodésiques de l'espace $\mathfrak{L}_1$ défini par les fonctions L, K et H, d'où le théorème :

THÉORÈME. — *Les trajectoires d'un système dynamique dont les forces données dérivent d'une fonction de force et qui est assujetti à une liaison parfaite* $a(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = 0$ *peuvent être considérées comme les géodésiques d'un espace* $\mathfrak{L}_1$.

Cas de plusieurs liaisons parfaites.

Ce qui précède se généralise immédiatement au cas de plusieurs liaisons parfaites définies par $k < n$ relations compatibles :

$$a_A(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = 0 \qquad \text{avec} \qquad A = 1, 2, \ldots, k.$$

Les équations du mouvement sont :

$$P_\alpha(L) = X_\alpha + \lambda^A \partial_{\dot\alpha} a_A.$$

Si $X_\alpha = 0$, les trajectoires peuvent être considérées comme les géodésiques d'un espace $\mathfrak{L}_k$.

47. — Principe de moindre courbure.

Considérons l'espace de phase W, c'est-à-dire l'espace fibré des directions orientées tangentes à l'espace-temps de configuration V_{n+1} d'un système dynamique $S(L, X_\alpha)$.

Un point z de W peut être défini par les $2n + 2$ nombres x^α, l^α liés par

$$L(x^\alpha, l^\alpha) = 1.$$

Le lieu des points z de W dont les coordonnées vérifient la relation

$$a(x^\alpha, l^\alpha) = 0$$

où a est $h0$ est une sous-variété U de W.

Considérons les courbes basiques Γ de U passant toutes par le même point z. Leurs projections γ sur V_{n+1} ont toutes la même tangente au point x.

Comparons en x leurs vecteurs courbure

$$\vec{C} = \frac{\nabla \vec{l}}{ds}.$$

Une courbe basique Γ de U est définie par :

$$x^\alpha = x^\alpha(s)\,;\; l^\alpha = l^\alpha(s) \qquad \text{avec} \qquad l^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}.$$

Les fonctions x^α et l^α de s vérifiant identiquement :

$$a(x^\alpha, l^\alpha) = 0$$

nous obtenons, en dérivant par rapport à l'arc s de γ :

$$\partial_\alpha a l^\alpha + \partial_{\dot\alpha} a \frac{dl^\alpha}{ds} = 0. \tag{47. 1}$$

Or

$$\frac{dl^\alpha}{ds} = \frac{\nabla l^\alpha}{ds} - 2G^\alpha(x, l) = C^\alpha - 2G^\alpha.$$

La relation (47. 1) devient alors :

$$\partial_\alpha a l^\alpha + \partial_{\dot\alpha} a(C^\alpha - 2G^\alpha) = 0. \tag{47. 2}$$

Soit Γ' une autre courbe basique de U passant par z admettant une représentation paramétrique en fonction de l'arc s' de sa projection γ' sur V_{n+1}. Pour Γ' nous obtenons la relation :

$$\partial_\alpha a l^\alpha + \partial_{\dot\alpha} a(C'^\alpha - 2G^\alpha) = 0. \tag{47. 3}$$

En comparant les relations (47. 2) et (47. 3) nous obtenons au point z :

$$\partial_{\dot\alpha} a(C^\alpha - C'^\alpha) = 0. \tag{47. 4}$$

Cette relation traduit une généralisation du théorème de Meusnier qu'on peut énoncer de la façon suivante :

THÉORÈME. — *Toutes les courbes d'un espace de Finsler à $n + 1$ dimensions, dont les éléments linéaires (x, l) vérifient une même relation*

$$a(x, l) = 0$$

et qui sont tangentes en un même point x, admettent en ce point des vecteurs courbure dont les extrémités sont sur une variété plane de T_x (espace tangent en x à V_{n+1}) de dimension n-1 intersection du plan normal en x à $\vec{l}$ et du plan perpendiculaire en x au vecteur de composantes $\partial_{\dot\alpha} a$.

Ce théorème se généralise immédiatement au cas où U est une sous-variété de W définie par $k < n$ relations

$$a_A(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = 0 \qquad \text{avec} \qquad A = 1, \ldots, k.$$

La relation (47. 4) est remplacée par les k relations :

$$\partial_{\dot{\alpha}} a_A (C^\alpha - C'^\alpha) = 0. \tag{47. 5}$$

Démonstration du théorème de moindre courbure.

Étendons aux systèmes dynamiques à lagrangien $L(x^\alpha, l^\alpha)$ quelconque, assujetti à k liaisons parfaites

$$a_A(x^\alpha, l^\alpha) = 0$$

le théorème de Synge [25] relatif à des systèmes dynamiques à liaisons indépendantes du temps, linéairement non holonomes.

Soit S le système dynamique donné; ses trajectoires dans l'espace de phase appartiennent à la sous-variété U de W définie par les k relations

$$a_A(x, l) = 0.$$

Soit (S_0) le système dynamique libre associé à (S) c'est-à-dire déduit de (S) par supression de ces k liaisons.

Considérons alors les trois chemins basiques Γ, Γ', Γ'' passant par un même point $z(x, l)$ de W :

1° le chemin Γ est la trajectoire de (S) passant par z;

2° le chemin Γ' est une courbe basique quelconque de U passant par z;

3° le chemin Γ'' est la trajectoire de (S_0) passant par z.

Soient γ, γ', γ'' les projections respectives de Γ, Γ', Γ'' sur V_{n+1}, $\vec{C}$, $\vec{C'}$, $\vec{C''}$ les vecteurs courbure au point x de ces courbes. Désignons par courbures de γ et γ' relativement à γ'' les normes c et c' des vecteurs $\vec{C} - \vec{C''}$ et $\vec{C'} - \vec{C''}$; nous avons donc :

$$\begin{aligned} c^2 &= (C_\alpha - C''_\alpha)(C^\alpha - C''^\alpha), \\ c'^2 &= (C_\alpha - C''_\alpha)(C^\alpha - C''^\alpha). \end{aligned}$$

D'après une identité classique nous pouvons écrire :

$$c'^2 - c^2 = (C_\alpha - C'_\alpha)(C^\alpha - C'^\alpha) - 2(C^\alpha - C'^\alpha)(C_\alpha - C''_\alpha). \tag{47. 6}$$

[25] J. L. Synge [1].

Or $\quad C''_\alpha = X_\alpha \quad$ et $\quad C_\alpha = X_\alpha + \lambda^A \partial_{\dot\alpha} a_A$

les liaisons étant supposées parfaites.

Nous avons alors :

$$(C^\alpha - C'^\alpha)(C_\alpha - C''_\alpha) = \lambda^A \partial_{\dot\alpha} a_A (C^\alpha - C'^\alpha). \tag{47. 7}$$

Mais d'après le théorème de Meusnier cette expression est nulle. La relation (47. 6) se réduit donc à :

$$c'^2 - c^2 = (C_\alpha - C'_\alpha)(C^\alpha - C'^\alpha). \tag{47. 8}$$

L'espace $\mathcal{F}$ étant proprement finslérien, le 2e membre qui est le carré de la norme du vecteur $\vec{C} - \vec{C}'$ est positif. Nous en déduisons l'inégalité

$$c'^2 \geqslant c^2 \tag{47. 9}$$

d'où le théorème :

Théorème de moindre courbure. — *Soit un système dynamique* $S(L, X_\alpha)$ *assujetti à des liaisons parfaites non holonomes du* 1er *ordre; soit* $S_0(L, X_\alpha)$ *le système libre associé et* $\mathcal{F}$ *l'espace de Finsler défini sur l'espace-temps de configuration par le lagrangien* L.

De toutes les courbes de $\mathcal{F}$ *tangentes en un même point* x *et satisfaisant aux relations de liaison, la trajectoire de* (S) *est celle qui a, par rapport à la trajectoire libre associée, la moindre courbure en* x.

48. — Conséquences du principe de moindre courbure.

1° *Principe de Gauss-Appell.* — Considérons la fonction

$$2R = \left(\frac{\nabla l_\alpha}{ds} - X_\alpha\right)\left(\frac{\nabla l^\alpha}{ds} - X^\alpha\right). \tag{48. 1}$$

Cette fonction des x^α, $\dot x^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} = l^\alpha$, $\ddot x^\alpha = \frac{dl^\alpha}{ds}$ est égale au carré de la courbure relative en un point x, d'une courbe γ quelconque de l'espace-temps de configuration V_{n+1} et de la trajectoire libre γ'' qui lui est tangente en x.

Dans l'espace de phase W, la trajectoire du système dynamique (S) passant par $z(x^\alpha, l^\alpha)$ est celle des courbes de la sous-variété U de W (espace des liaisons) pour laquelle la fonction R est minimum en z.

Le principe de moindre courbure se traduit donc analytiquement de la façon suivante, u étant de nouveau un paramètre quelconque :

Les trajectoires du système (S) sont définies par les fonctions $x^\alpha = x^\alpha(u)$ pour lesquelles

$$\partial_{\ddot{\alpha}} R = 0.$$

compte tenu des relations de liaison, la fonction R étant définie par :

$$R = \frac{1}{2L^2}\left(\frac{\nabla l_\alpha}{du} - X_\alpha\right)\left(\frac{\nabla l^\alpha}{du} - X^\alpha\right).$$

Sous la forme précédente, le principe de moindre courbure apparaît comme une généralisation du principe de la moindre contrainte. La fonction R précédente est en effet celle introduite par Appell [26] étendue à l'espace-temps de configuration.

2° *Réciproque.* — Supposons qu'un système dynamique $S(L, X_\alpha)$ soit soumis à k liaisons non holonomes du 1^er^ ordre, les relations de liaison étant :

$$a_A(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) = 0, \qquad A = 1, 2, \ldots, k.$$

Supposons les fonctions a homogènes d'ordre 0 par rapport aux

$$\dot{x}^\alpha = dx^\alpha/ds.$$

Montrons que les liaisons sont des liaisons parfaites si les trajectoires de (S), dans l'espace de configuration, vérifient le principe de moindre courbure.

Dérivons partiellement R par rapport aux $\ddot{x}^\alpha$ en tenant compte de :

$$\frac{\nabla l^\alpha}{ds} = \ddot{x}^\alpha + 2G^\alpha(x, l) \qquad \text{avec} \qquad \ddot{x}^\alpha = dl^\alpha/ds.$$

Nous obtenons :

$$\partial_{\ddot{\alpha}} R = \frac{\nabla l_\alpha}{ds} - X_\alpha. \tag{48. 2}$$

Soient Γ et Γ' deux courbes de W passant par le même point

(26) P. Appell [1], t. II, p. 392.

$z(x, l)$. En passant de Γ à Γ' la fonction R subit une variation en z de la forme :

$$(48.\ 3) \qquad \delta R = \left(\frac{\nabla l_\alpha}{ds} - X_\alpha\right)\delta \ddot{x}^\alpha.$$

Si Γ est la trajectoire de (S) passant par z nous devons avoir $\delta R = 0$ pour tous les $\delta \ddot{x}^\alpha$ permis par les liaisons, c'est-à-dire tels que :

$$(48.\ 4) \qquad \partial_{\dot{\alpha}} a\, \delta \ddot{x}^\alpha = 0$$

et vérifiant en outre la relation :

$$(48.\ 5) \qquad \partial_{\dot{\alpha}} L\, \delta \ddot{x}^\alpha = 0$$

conséquence de $L(x^\alpha, l^\alpha) = 1$.

Nous avons donc le long de Γ :

$$(48.\ 6) \qquad \frac{\nabla l_\alpha}{ds} - X_\alpha = \lambda^A \partial_{\dot{\alpha}} a_A + \mu \partial_{\dot{\alpha}} L.$$

Le produit contracté par l^α donne $\mu = 0$.

Les équations (48. 6) montrent alors que les liaisons considérées sont des liaisons parfaites; Nous pouvons donc énoncer :

Théorème. — *Pour qu'un système dynamique soumis à des liaisons du* 1^er^ *ordre vérifie le principe de moindre courbure, il faut et il suffit que ces liaisons soient parfaites.*

3° *Équations d'Appell.* — Pour le système libre $S_0(L, X_\alpha)$ les équations des trajectoires dans l'espace-temps de configuration V_{n+1} peuvent se mettre sous la forme indiquée par Appell

$$(48.\ 7) \qquad \partial_{\ddot{\alpha}} R = 0.$$

Ces équations sont une conséquence directe des relations (48. 2).

Si nous désignons par A l'énergie d'accélération dans V_{n+1} c'est-à-dire si nous posons :

$$A = \frac{1}{2}\frac{\nabla l_\alpha}{ds}\frac{\nabla l^\alpha}{ds}$$

nous pouvons mettre les équations d'Appell (48. 7) sous la forme :

(48. 8) $$\partial_{\ddot{\alpha}} A = X_{\alpha}.$$

Pour le système lié (S) les équations d'Appell des trajectoires dans V_{n+1} se déduisent de (48. 6) ; elles s'écrivent sous la forme :

(48. 9) $$\partial_{\ddot{\alpha}} R = \lambda^{A} \partial_{\dot{\alpha}} a_{A} \qquad A = 1, \ldots, k$$

les k liaisons parfaites étant définies par les relations :

$$a_{A}(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha}) = 0 ;$$

de ces relations nous déduisons par dérivation :

(48. 10) $$\partial_{\dot{\alpha}} a_{A} \dot{x}^{\alpha} + \partial_{\ddot{\alpha}} a_{A} \ddot{x}^{\alpha} = 0.$$

Supposons que ces relations nous permettent de calculer k des $\ddot{x}^{\alpha}$, par exemple les k premières en fonction des autres. R devient alors une fonction des x^{α}, $\dot{x}^{\alpha}$ et des $n + 1 - k$ dérivées secondes $\ddot{x}^{(\alpha)}$ où $(\alpha) = k + 1, \ldots, n + 1$.

Comme nous devons avoir :

$$\delta R = 0 \quad \text{quels que soient les } \delta \ddot{x}^{(\alpha)}$$

nous obtenons les $n + 1 - k$ équations d'Appell :

$$\partial_{(\ddot{\alpha})} R = 0$$

qui jointes aux k relations de liaison :

$$a_{A}(x^{\alpha}, \dot{x}^{\alpha}) = 0$$

définissent les trajectoires de (S) dans V_{n+1}.

Comme les équations de Lagrange ou les équations canoniques, les équations d'Appell ont une forme indépendante de tout mode de repérage de l'espace-temps de configuration.

CHAPITRE VII

Applications.

49. — Systèmes dynamiques admettant une intégrale première de Painlevé.

Soit un système dynamique (S) à liaisons bilatérales parfaites à n degrés de liberté caractérisés par les paramètres x^k.

Supposons que sur l'espace-temps de configuration de (S) existe un groupe à 1 paramètre : t en $t + h$, laissant (S) invariant.

Sous des hypothèses générales on peut passer au quotient et définir un espace de configuration V_n correspondant à V_{n+1}. Le lagrangien $\mathcal{L} = T + U$ ainsi que les fonctions Q_k sont alors indépendants du temps.

Au lagrangien $\mathcal{L}$ correspond le lagrangien homogène L (§ 29) indépendant de $x^{n+1} = t$. La dernière équation de Lagrange se réduit alors à :

$$\frac{d}{du}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{n+1}} = -\, Q_k \dot{x}^k.$$

Supposons que la force généralisée Q_k soit de puissance nulle c'est-à-dire que $Q_k \dot{x}^k = 0$ sur toute trajectoire.

Dans ces conditions le système des équations de Lagrange de (S) admet l'intégrale première :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{n+1}} = -\, \mathcal{H} = h \qquad \text{où } h \text{ est une constante.}$$

Considérons l'ensemble des trajectoires (T) de (S) correspondant à une valeur déterminée de h. Pour ces trajectoires la 2-forme fondamentale Ω s'écrit :

$$\Omega = d\,\partial_{\dot{k}} L \wedge dx^k + \frac{1}{2}\, S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

D'après le procédé de descente bien connu ([27]) on peut substituer au lagrangien L, un lagrangien L_1 indépendant de $\dot{x}^{n+1}$. Ce lagrangien est défini par :

$$L_1 = L[x^k, \dot{x}^k, \varphi(x^k, \dot{x}^k, h)] - h\varphi(x^k, \dot{x}^k, h)$$

où $\varphi = \dot{x}^{n+1}$ est obtenue par résolution de $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^{n+1}} = h$ en $\dot{x}^{n+1}$.
On vérifie bien que, pour les trajectoires (T) :

$$\partial_{\dot{k}} L_1 = \partial_{\dot{k}} L.$$

Posons maintenant

$$X_k = Q_k \dot{x}^{n+1}$$

et supposons les X_k indépendants de $\dot{x}^{n+1}$; comme

$$\frac{\partial X_k}{\partial \dot{x}^{n+1}} = Q_k - \partial_{m'} Q_k x'^m$$

cela revient à supposer que les composantes de la force généralisée Q_k sont homogènes et du 1er degré par rapport aux composantes de la vitesse x'^k $(h'1)$.

Dans ces conditions la 2-forme Ω devient :

$$\Omega_1 = d\partial_{\dot{k}} L_1 \wedge dx^k + \frac{1}{2} S_{jk} dx^j \wedge dx^k.$$

Les trajectoires du système dynamique (S) correspondant à une valeur déterminée h peuvent donc être obtenues dans l'espace de configuration V_n, indépendamment de l'horaire des parcours, comme solutions du système associé de Ω_1.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui apparaît comme une généralisation du principe de Maupertuis :

THÉORÈME. — *Soit un système dynamique* S *à* n *degrés de liberté* x^k *admettant l'intégrale première de Painlevé*

$$\mathcal{H} = -h = C^{te}$$

et tel que la force généralisée ait des composantes de la forme :

$$Q_k = S_{km} x'^m \qquad \text{avec} \qquad S_{km} = -S_{mk},$$

les S_{km} *étant des fonctions des* x^k *et* x'^k $h'0$.

([27]) Y. Thiry [1], chap. I.

Les trajectoires de S *à énergie totale déterminée* E *sont définies dans l'espace de configuration* V_n, *indépendamment de la loi de parcours, comme étant les S-extrémales de l'intégrale*

$$I = \int_{x_0}^{x_1} L_1(x^h, \dot{x}^k, h)\, du$$

u étant un paramètre arbitraire, $\dot{x}^k = \dfrac{dx^k}{du}$ *et* $h = -E$; *le lagrangien* L_1 *est défini à partir du lagrangien homogène* L *par*

$$L_1 = L(x^k, \dot{x}^k, \varphi) - h\varphi$$

avec $\dot{x}^{n+1} = \varphi(x^k, \dot{x}^k, h)$ *relation équivalente à* $\mathcal{H} = -h$.

Cas particuliers :

1° Ω_1 *est fermée.* — Dans ces conditions il existe un potentiel vecteur de composantes $A_l(x^k)$ telles que :

$$S_{kl} = \partial_k A_l - \partial_l A_k.$$

Les trajectoires de S à énergie constante $E = -h$ sont alors les extrémales de l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} L_2\, du$$

avec $L_2 = L_1 + A_k \dot{x}^k$.

Ces trajectoires sont aussi les géodésiques de l'espace de Finsler défini sur V_n par $ds = L_2\, du$.

Si nous posons

$$L = a_{ij}\frac{\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\dot{x}^{n+1}} + b_i\dot{x}^i + (T_0 + u)\dot{x}^{n+1}$$

nous obtenons pour L_2

$$L_2 = \sqrt{2(T_0 + U - h)a_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} + (b_i + A_i)\dot{x}^i.$$

Dans ces conditions on sait que les trajectoires T dans V_n peuvent être considérées comme les projections sur V_n de géodésiques d'un espace riemannien à $n + 1$ variables, la $(n + 1)$ème variable x^0 n'étant plus le temps.

2° Ω_1 *admet un facteur intégrant.* — Il en est ainsi si les composantes du tenseur force sont de la forme :

$$S_{lk} = \partial_l L_1 \partial_k \varphi - \partial_k L_1 \partial_l \varphi + e^{\varphi}(\partial_l A_k - \partial_k A_l)$$

où φ, A_k sont $n+1$ fonctions arbitraires des variables x^k. Les trajectoires T sont alors les extrémales de l'intégrale :

$$I = \int_{x_0}^{x_1} (e^{-\varphi} L_1 + A_k \dot{x}^k)\, du.$$

Exemples. 1° *Liaisons d'Appell* [28]. — Supposons que le système dynamique S soit soumis à la liaison d'Appell définie par :

$$a(x^k,\ x'^k) = 0 \qquad \text{avec} \qquad a\, h'1$$

la force de liaison ayant des composantes de la forme :

$$Q_k = \lambda \partial_{k'} a \qquad \lambda \text{ étant } h'1.$$

Nous sommes bien dans les conditions d'application du principe de Maupertuis généralisé car $Q_k x'^k = \lambda a = 0$ sur toute trajectoire.

2° *Couplage gyroscopique.* — Soit un système dynamique S formé par n oscillateurs linéaires ; la position d'un oscillateur sur son support D_k, supposé fixe, étant définie par son abscisse x_k le système des équations de Lagrange du mouvement est de la forme :

$$x_k'' + \lambda_k^2 x_k = 0.$$

Un couplage gyroscopique entre ces n oscillateurs se traduit par la présence aux 2e membres d'un vecteur force généralisée ayant des composantes de la forme [29] :

$$Q_k = \sum_{m=1}^{n} S_{km} x'_m.$$

Le tenseur S_{km} supposé antisymétrique dépend des x_k uniquement ; c'est par définition le tenseur « couplage gyroscopique ».

50. — Applications en Relativité Générale.

Soit V_4 l'espace-temps de la Relativité Générale muni de la métrique riemannienne définie par

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha\, dx^\beta.$$

u étant un paramètre quelconque, posons :

$$L^2 = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \qquad \text{avec} \qquad \dot{x}^\alpha = dx^\alpha / du,$$

[28] P. Appell, *C. R. Acad. Sc.*, 152, 1911, p. 1197.
[29] Y. Rocard, Dynamique générale des vibrations, Masson, 1943, pp. 114-124

et

$$l_\alpha = \partial_{\dot\alpha} L = g_{\alpha\beta}\frac{\dot x^\beta}{L} = g_{\alpha\beta} l^\beta.$$

Supposons que sur un domaine D de V_4 soit définie une distribution énergétique correspondant au tenseur impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$. Posons [30] :

$$T_{\alpha\beta} = r l_\alpha l_\beta - \theta_{\alpha\beta} \qquad \text{et} \qquad \nabla_\alpha \theta^\alpha_\beta = r K_\beta$$

les $\theta_{\alpha\beta}$ dépendant à la fois de x et de l.

Les K_α $h0$ définissent le vecteur densité de force associé au tenseur énergie $\theta_{\alpha\beta}$ et au scalaire r (pseudo-densité).

Les équations de conservation :

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0$$

donnent d'une part l'équation de continuité, d'autre part le système différentiel des lignes de courant partout tangentes au vecteur-vitesse unitaire l^α.

Ce système différentiel peut être mis sous la forme :

$$(50.\ 1) \qquad \frac{\nabla l_\alpha}{ds} = (K_\alpha l_\beta - K_\beta l_\alpha) l^\beta \qquad \text{ou} \qquad \frac{\nabla l_\alpha}{du} = (K_\alpha l_\beta - K_\beta l_\alpha)\dot x^\beta.$$

Posons

$$X_\alpha = (K_\alpha l_\beta - K_\beta l_\alpha)\dot x^\beta = L K_\alpha - K l_\alpha \quad \text{avec} \quad K = K_\alpha \dot x^\alpha.$$

Au vecteur force X_α associons le tenseur antisymétrique :

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\partial_{\dot\beta} X_\alpha - \partial_{\dot\alpha} X_\beta) \\ &= K_\alpha l_\beta - K_\beta l_\alpha + \frac{1}{2} L(\partial_{\dot\beta} K_\alpha - \partial_{\dot\alpha} K_\beta) + \frac{1}{2}\dot x^\lambda (l_\beta \partial_{\dot\alpha} K_\lambda - l_\alpha \partial_{\dot\beta} K_\lambda). \end{aligned}$$

Lorsque le vecteur densité de force K_α est indépendant de la vitesse, le tenseur $s_{\alpha\beta}$ se réduit à : $K_\alpha l_\beta - K_\beta l_\alpha$.

Dans le cas général nous avons les identités :

$$s_{\alpha\beta}\dot x^\beta = X_\alpha \qquad \text{et} \qquad \partial_{\dot\alpha} s_{\beta\gamma} + \partial_{\dot\beta} s_{\gamma\alpha} + \partial_{\dot\gamma} s_{\alpha\beta} = 0.$$

Au tenseur symétrique $\theta_{\alpha\beta}$, pseudo-tenseur des pressions correspond ainsi un tenseur antisymétrique $s_{\alpha\beta}$, appelé tenseur-force, tel que le système différentiel des lignes de courant soit :

$$(50.\ 2) \qquad l^\beta \nabla_\beta l_\alpha = s_{\alpha\beta} l^\beta \qquad \text{ou} \qquad l^\beta(\nabla_\beta l_\alpha - \nabla_\alpha l_\beta) = s_{\alpha\beta} l^\beta$$

(30) A. Lichnerowicz [3], chap. II, § 17.

Les résultats généraux obtenus précédemment permettent d'énoncer les théorèmes équivalents suivants :

THÉORÈMES. — 1° *Le système différentiel des lignes de courant d'un schéma à tenseur énergie quelconque est le système associé de la 2-forme :*

$$(50.3) \qquad \Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} s_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Les l_α sont les composantes covariantes du vecteur vitesse unitaire : $l_\alpha = \partial_{\dot\alpha} L$ avec $L^2 = g_{\alpha\beta}\, \dot x^\alpha \dot x^\beta$; les $s_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur force associé au tenseur énergie du schéma considéré.

2° *La forme Ω définit une relation intégrale d'invariance pour les lignes de courant.*

3° *Soient C_0 et C_1 deux cycles homotopes à une dimension entourant un même tube de lignes de courant ; la différence des circulations du vecteur vitesse unitaire le long de C_0 et C_1 est égale au flux du tenseur force à travers la portion de tube limitée par C_0 et C_1.*

4° *Les lignes de courant sont les s-extrémales de l'intégrale :*

$$I = \int_{u_0}^{u_1} L\, du.$$

5° *Les lignes de courant sont les géodésiques de l'espace s-riemannien défini par L et le tenseur force $s_{\alpha\beta}$* (§ 25).

Rappelons la définition d'un tel espace ;

Sur V_4 on considère la métrique riemannienne définie par

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

et la connexion euclidienne de directions correspondant aux formes de torsion :

$$(50.4) \qquad \Sigma^\alpha = \left(\frac{1}{2} s_{\beta\gamma}\, dx^\beta \wedge dx^\gamma\right) l^\alpha$$

la parenthèse représentant la 2-forme associée au tenseur force.

Dans ces conditions la connexion est définie par :

$$(50.5) \qquad \Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma,\ \alpha] + \frac{1}{2}(l_\alpha s_{\beta\gamma} + l_\beta s_{\gamma\alpha} - l_\gamma s_{\alpha\beta})$$

qui se réduit à :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = [\beta\gamma,\ \alpha] - s_{\alpha\beta} l_\gamma$$

si les K_α sont indépendants des $\dot x^\gamma$.

Exemple :

Schéma fluide parfait chargé ([31]). — Les résultats les plus intéressants obtenus en Relativité Générale sont ceux correspondant à une 2-forme fondamentale Ω fermée ou admettant un facteur intégrant. Étudions le schéma englobant tous les autres, celui d'un fluide parfait chargé de manière homogène.

Le tenseur impulsion-énergie d'un tel schéma est défini dans un domaine D de V_4 par :

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, l_\alpha l_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}$$

ρ est la densité propre, p la pression propre, $\tau_{\alpha\beta}$ le tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique défini par le tenseur $F_{\alpha\beta}$.

Le système différentiel des lignes de courant est :

$$\frac{\nabla l_\alpha}{ds} = (g_\alpha^\beta - l^\beta l_\alpha)\left(\frac{\partial_\beta p}{\rho + p} + \frac{\mu}{\rho + p} F_{\beta\lambda} l^\lambda\right)$$

où μ est la densité de charge propre du fluide.

Nous pouvons encore écrire ces équations sous la forme

$$\frac{\nabla l_\alpha}{ds} = \frac{l^\beta}{\rho + p}(\partial_\alpha p l_\beta - \partial_\beta p l_\alpha + \mu F_{\alpha\beta}). \tag{50. 6}$$

Les scalaires p, ρ et μ étant supposés indépendants de la vitesse, les composantes du tenseur force sont :

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{\rho + p}(\partial_\alpha p l_\beta - \partial_\beta p l_\alpha + \mu F_{\alpha\beta}). \tag{50. 7}$$

Supposons qu'il existe une équation d'état $\rho = f(p)$ l'indice F du fluide est alors défini par :

$$F = e^\varphi \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho + p}.$$

Nous en déduisons que :

$$\frac{\partial_\alpha p}{\rho + p} = \partial_\alpha \varphi.$$

Supposons d'autre part le fluide chargé d'une manière homogène.

Dans ces conditions $k = \dfrac{\mu F}{\rho + p}$ est constant dans tout le domaine D de V_4.

([31]) A. Lichnerowicz [3], chap. IV, §§ 34-37.

Faisons une dernière hypothèse : il existe dans D un potentiel vecteur global $\vec{A}$ tel que :

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha.$$

Dans ces conditions le tenseur force a des composantes de la forme :

$$s_{\alpha\beta} = l_\beta \partial_\alpha \varphi - l_\alpha \partial_\beta \varphi + k e^{-\varphi}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha). \tag{50. 9}$$

Ces composantes caractérisent les 2-formes Ω admettant un facteur intégrant (relations 38. 6 du § 38).
Nous obtenons ainsi directement les résultats classiques suivants :

Théorème. — *Dans tout mouvement d'un fluide parfait chargé d'une manière homogène, les lignes de courant sont les extrémales de la forme* :

$$\omega = (F l_\alpha + k A_\alpha) dx^\alpha$$

ou de l'intégrale

$$I = \int_{u_0}^{u_1} (FL + k A_\alpha \dot{x}^\alpha)\, du.$$

Ces lignes de courant sont caractérisées par l'existence de l'invariant intégral relatif défini par :

$$\omega = (F l_\alpha + k A_\alpha)\, dx^\alpha.$$

Ces lignes de courant sont aussi les géodésiques de l'espace de Finsler défini sur V_4 par :

$$ds = (FL + k A_\alpha\ \dot{x}^\alpha)\, du.$$

Cas particuliers :

1° Schéma matière pure : $s_{\alpha\beta} = 0$, $\Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha$;

2° Schéma matière-champ électromagnétique (cas homogène)

$$s_{\alpha\beta} = k F_{\alpha\beta} \qquad \text{et} \qquad \Omega = d(l_\alpha + k A_\alpha) \wedge dx^\alpha ;$$

3° Schéma milieu holonome :

$$s_{\alpha\beta} = l_\beta \partial_\alpha \varphi - l_\alpha \partial_\beta \varphi.$$

$$\Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{4} d\varphi \wedge \dot{d}L$$

admet e^φ comme facteur intégrant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Appel, *Traité de Mécanique Rationnelle*, Gauthier-Villars, 1941.
[1] E. Cartan, *Les espaces de Finsler. Act.*, Hermann, 1934.
[2] E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, 1922.
[3] E. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs*, Hermann, 1945.
[1] H. Cartan, Notions d'algèbre différentielle, *Colloque de topologie de Bruxelles*, 1950, Masson, 1951.
[2] H. Cartan, Variétés différentiables-Groupes de Lie, *Cours E.N.S.*, 1953-1954.
[1] J. Favard, *Cours de Géométrie différentielle*, Gauthier-Villars, 1957.
[2] J. Favard, Espaces de Finsler. *Cours de la Faculté des Sciences de Paris*, 1955-1956.
[1] F. Gallissot, Les formes extérieures en Mécanique (*Thèse*), Durand, Chartres, 1954.
[1] J. Klein, *C. R.*, t. 238, pp. 2144-2146, 1954.
[2] J. Klein, *C. R.*, t. 240, pp. 2208-2210, 1955.
[1] A. Lichnerowicz, Les relations intégrales d'invariance. *Bulletin des Sc. math.*, tome LXX, 1946.
[2] A. Lichnerowicz, Les espaces variationnels généralisés, *Annales de l'E.N.S.*, 63, 1946.
[3] A. Lichnerowicz, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, 1955.
[4] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, éd. Cremonese, Rome, 1955.
[5] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformation*, Dunod, 1958.
[6] A. Lichnerowicz, Les espaces de Finsler, *Cours du Collège de France*, 1959-1960.
[1] J. Pérès, *Mécanique générale*, Masson, 1953.
[1] G. Reeb, Sur les espaces de Finsler et les espaces de Cartan, *Colloque de Géométrie différentielle*, Strasbourg, 1953.
[1] J. L. Synge, University Toronto Studies, *Appl. Math. série n⁰* 2, 1936.
[1] Y. Thiry, Étude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ (*Thèse*), *Journal math. pures et appl.* 9, 30, 1951.
[2] Y. Thiry, Remarques sur les équations canoniques de la Mécanique. *Scuola Normale Superiore*, Pisa, 1959.