MICHEL M. RAJOELINA

Éléments de Cohen et fonctions extérieures de l'algèbre du disque. II

Annales de l'institut Fourier, tome 39, nº 4 (1989), p. 1061-1072

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_4_1061_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 4 (1989), 1061-1072.

ÉLÉMENTS DE COHEN ET FONCTIONS EXTÉRIEURES DE L'ALGÈBRE DU DISQUE. II

par Michel M. RAJOELINA

1. Introduction.

La notion d'éléments de Cohen a été introduite par J. Esterle dans sa construction d'homomorphismes discontinus de $\mathscr{C}(K)$, l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes sur un compact infini K ; cette construction [3] nécessite l'hypothèse du continu de même que celle de Dales [2] (des constructions plus générales sont données dans [4] et [5]). Un élément de Cohen x d'une algèbre de Banach commutative non unitaire à unité approchée bornée A est en particulier limite d'une suite (u_n) d'éléments de $\exp(A \oplus \mathbb{C}e)$ vérifiant $y \times u_n^{-1} \to y (n \to \infty)$ pour tout $y \in A$, et ces éléments engendrent des idéaux principaux denses dans A.

Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ le disque unité ouvert. Notons $A(\mathbb{D})$ l'algèbre du disque, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions continues sur $\bar{\mathbb{D}}$, analytiques dans $\mathbb{D}$, munie de la norme uniforme. Soit K un fermé de mesure nulle sur le cercle unité $T = \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$ et notons $\mathscr{M}_K = \{f \in A(\mathbb{D})/f(z) = 0$ pour tout $z \in K\}$ l'idéal fermé de $A(\mathbb{D})$.

Il résulte de la théorie des idéaux fermés de $A(\mathbb{D})$ de Beurling-Rudin que l'ensemble $\mathscr{O}$ des générateurs d'idéaux principaux denses de $\mathscr{M}_K$ coïncide avec l'ensemble des fonctions extérieures de $\mathscr{M}_K$ ne s'annulant que sur K [6]. Le théorème principal de cette théorie est le suivant :

THÉORÈME [6] p. 85. — *Soient J un idéal fermé non nul de $A(\mathbb{D})$ et K l'intersection sur T de l'ensemble des zéros des éléments de J. Soit F*

Mots-clés : Fonction extérieure - Algèbre du disque - Théorème d'Arakélian.
Classification A.M.S. : 46J15.

le plus grand commun diviseur des facteurs intérieurs des éléments non nuls de J. Alors $J = F\mathscr{M}_K$.

L'ensemble $\mathscr{C}$ des éléments de Cohen de $\mathscr{M}_K$ est inclus dans $\mathcal{O}$.

Nous montrons dans cet article que l'ensemble $\mathcal{O}$ coïncide en fait avec $\mathscr{C}$. On obtient ainsi en particulier une démonstration plus « constructive » que la démonstration classique par dualité [6] du fait que $[f\mathscr{M}_k]^- = \mathscr{M}_K$ si f est une fonction extérieure de $\mathscr{M}_K$ ne s'annulant que sur K. En effet on peut associer à une telle fonction f une suite (F_n) d'éléments inversibles de $A(\mathbb{D})$ telle que $\|f-F_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$ et telle que $\|fgF_n^{-1}-g\| \to 0$ $(n\to\infty)$ ce qui explicite pour tout $g \in \mathscr{M}_K$ une suite de multiples de f convergeant vers g, autrement dit $[\mathrm{f}\mathscr{M}_K]^- = \mathscr{M}_K$.

Notre résultat est une extension d'une étude effectuée dans $\mathscr{M}_1$ [7].

On rappelle dans le paragraphe 2 les résultats classiques dont nous aurons besoin pour résoudre le problème dans le paragraphe 3.

On montre d'abord dans le paragraphe 3 que les fonctions extérieures de $\mathscr{M}_K$ qui ne s'annulent que sur K et dont la restriction à $T\backslash K$ est de classe C^1 sont des éléments de Cohen de $\mathscr{M}_K$. Puis on utilise un théorème d'approximation d'Arakélian pour conclure dans le cas général.

Je dois remercier J. Esterle pour les fructueuses conversations que j'ai eues avec lui pendant la préparation de cet article lors de mon séjour à l'Université de Bordeaux (automne 1986-hiver 1987). Je remercie aussi P. M. Gauthier de m'avoir indiqué la référence du théorème d'Arakélian utilisé ici.

2. Rappels.

Toutes les algèbres considérées ici sont complexes. On dira qu'une algèbre de Banach commutative A admet une unité approchée bornée si, et seulement si, il existe $M > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout élément α de A, il existe $f \in A$ vérifiant $\|f\| \leqslant M$ et $\|\alpha f-\alpha\| \leqslant \varepsilon$.

Notons $A' = A \oplus \mathbb{C}e$ l'algèbre obtenue en adjoignant une unité à A.

DÉFINITION 2.1. — *Soit A une algèbre de Banach commutative séparable à unité approchée bornée. On dit qu'un élément x de A est un élément de*

Cohen de A si et seulement si il existe une suite (a_n) de A' vérifiant les propriétés suivantes :

i) $x = \lim_{n\to\infty} \exp(a_n)$,

ii) $\left(\exp\left(\frac{1}{j} a_n\right)\right)_n$ *converge pour tout* $j \in \mathbb{N}^*$ *vers un élément de* A *noté* $x^{1/j}$,

iii) $\sup_{n\geq 0} \left\| x^{1/j} \exp\left(-\frac{1}{j} a_n\right)\right\| < \infty$ *pour tout* $j \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 0$,

iv) $\beta x \exp(-a_n) \to \beta (n\to\infty)$ *pour tout* $\beta \in A$.

Cette définition est équivalente à la définition originale de [3]. L'utilisation des exponentielles dans la version donnée ici évite toute ambiguïté de notations.

Signalons aussi une notion plus faible, celle d'éléments de Cohen faibles qui suppose seulement que $\exp(a_n) \to x (n\to\infty)$, $\sup_{n\geq 0} \|x \exp(-a_n)\| < \infty$ et $\beta x \exp(-a_n) \to \beta (n\to\infty)$ pour tout $\beta \in A$ [9, 10].

DÉFINITION 2.2 [6]. — *Une fonction extérieure du disque est une fonction F analytique dans $\mathbb{D}$ de la forme :*

$$F(z) = \lambda \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} k(t)\, dt\right\} \quad (z \in \mathbb{D})$$

où k est une fonction numérique intégrable sur $[-\pi,\pi]$ et λ un nombre complexe de module 1.

Soit K un compact de mesure nulle sur le cercle unité T. Notons $\mathcal{M}_K$ l'idéal fermé de $A(\mathbb{D})$ formé par les fonctions s'annulant sur K. L'algèbre $\mathcal{M}_K$ possède une unité approchée bornée séquentielle. En effet on construit dans [6] ch. 6, p. 80, une fonction $g \in A(\mathbb{D})$ s'annulant exactement sur K et vérifiant $\operatorname{Re} g \leq 0$. Alors la suite $(e_n)_n$ de $\mathcal{M}_K$ définie par :

$$e_n(z) = \frac{ng(z)}{ng(z)-1} \quad (z \in \bar{\mathbb{D}})$$

est une unité approchée séquentielle bornée par 1.

Nous utiliserons les deux résultats suivants certainement bien connus. Une démonstration se trouve dans [7].

PROPOSITION 2.3. — *Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ et ne s'annulant en aucun point de $\mathbb{D}$; soit g une détermination du logarithme de f dans $\mathbb{D}$. Soit I un ouvert de T. Si f admet un prolongement continu $\tilde{f}$ à $\mathbb{D} \cup I$ et si $\tilde{f}(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in I$, alors g admet un prolongement continu à $\mathbb{D} \cup I$.*

COROLLAIRE 2.4. — $\exp(A(\mathbb{D})) = \operatorname{Inv}(A(\mathbb{D}))$.

Rappelons aussi le résultat suivant.

THÉORÈME 2.5 [1]. — *Soit M un domaine dans $\mathbb{C}$ de frontière non vide. Soit E une partie de M relativement fermée dans M. Soit $\tilde{M}$ le compactifié d'Alexandroff de M et $A(E)$ l'ensemble des fonctions continues sur E et analytiques dans l'intérieur de E. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que tout élément de $A(E)$ soit uniformément approchable sur E par des fonctions analytiques sur M est que $\tilde{M}\backslash E$ soit connexe et localement connexe.*

Le théorème d'Arakélian a été étendu aux surfaces de Riemann ouvertes par Scheinberg [8]. Nous utiliserons également le résultat technique suivant.

PROPOSITION 2.6 [8] lemme 1.3. — *E et M vérifiant les hypothèses du théorème 2.5, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *$\tilde{M}\backslash E$ est localement connexe,*

(2) *pour tout compact K dans M on peut trouver un compact $K' \supset K$ tel que $K' \cup E$ n'a dans son complémentaire aucune composante connexe bornée dans M.*

3. Éléments de Cohen de $\mathcal{M}_K$.

PROPOSITION 3.1. — *Soient f une fonction extérieure de $A(\mathbb{D})$ et K l'ensemble des zéros de f. Si la restriction de f à $T\backslash K$ est de classe C^1 alors f est un élément de Cohen de $\mathcal{M}_K$.*

Preuve. — 1) K est un fermé de T de mesure nulle sinon f serait identiquement nulle. f s'écrit :

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f(e^{it})|\,dt\right\} \quad (z \in \mathbb{D}).$$

On peut supposer $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$. Notons $E = \{t \in [-\pi,\pi]/e^{it} \in K\}$ et φ l'application de classe C^1 de $[-\pi,\pi]\backslash E$ dans $\mathbb{R}_-$ définie par $\varphi(t) = \log|f(e^{it})|$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $V_p = \{t \in [-\pi,\pi], |f(e^{it})| < e^{-p}\}$. V_p est un ouvert de $[-\pi,\pi]$ qui contient le compact E.

On a évidemment $E \subset V_{p+1} \subset \bar{V}_{p+1} \subset V_p$ car $\bar{V}_{p+1}$ est compact. Par le lemme d'Urysohn on peut trouver un ouvert U_p de $[-\pi,\pi]$ et une fonction g_p de classe C^∞ sur $[-\pi,\pi]$ avec $g_p(-\pi) = g_p(\pi)$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$E \subset V_{p+1} \subset \bar{V}_{p+1} \subset U_p \subset \bar{U}_p \subset V_p,$$

$$0 \leqslant g_p \leqslant 1, \qquad g_p \equiv 1 \quad \text{sur} \quad U_p \qquad \text{et} \qquad g_p \equiv 0 \quad \text{sur} \quad V_p^c.$$

Posons $\varphi_p = -pg_p + (1-g_p)\varphi$. Comme $1 - g_p \equiv 0$ sur U_p et φ est de classe C^1 sur E^c, on a φ_p de classe C^1.

On a

$$\varphi_p = \varphi \quad \text{sur} \quad V_p^c \qquad \text{et} \qquad \varphi_p \equiv -p \quad \text{sur} \quad U_p.$$

Sur V_p nous avons $\varphi_p - \varphi = -g_p(\varphi+p) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\varphi_p \geqslant \varphi$. Donc $\varphi_p \geqslant \varphi$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Comparons maintenant φ_p et φ_{p+1}.

Sur V_{p+1}^c on a $\varphi_{p+1} = \varphi \leqslant \varphi_p$.

Sur V_{p+1} nous avons $\varphi_p \equiv -p$ car $V_{p+1} \subset U_p$ donc :

$$\begin{aligned}\varphi_{p+1} - \varphi_p = -(p+1)g_{p+1} + (1-g_{p+1})\varphi + p &= p(1-g_{p+1}) \\ + (1-g_{p+1})\varphi - g_{p+1} &= (1-g_{p+1})(\varphi+p) - g_{p+1} \leqslant 0.\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{p+1} \leqslant \varphi_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On a $V_{p+1} \subset V_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $E = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} U_p = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} V_p$.

Pour tout $z \in \mathbb{D}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, posons :

$$F_p(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\,\varphi_p(t)\,dt\right\}.$$

En utilisant les théorèmes de convergence radiale de l'intégrale de

Poisson et de son conjugué [6] p. 32 et p. 79, on obtient les relations suivantes :

$$F_p \in \exp(A(\mathbb{D})) \tag{1}$$

et

$$|f(z)| \leqslant |F_{p+1}(z)| \leqslant |F_p(z)| \tag{2}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$.

2) Montrons que $(|F_p|)_p$ converge uniformément vers $|f|$ sur $\bar{\mathbb{D}}$. Pour cela prouvons d'abord la convergence simple.

Pour $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on a :

$$|f(z)| = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\varphi(t)\,dt\right\}$$

et

$$|F_p(z)| = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\varphi_p(t)\,dt\right\}$$

où

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\,(0 \leqslant r < 1, -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

désigne le noyau de Poisson.

D'après les théorèmes de convergence radiale de l'intégrale de Poisson [6] p. 32, on a :

$$|F_p(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})| \quad \text{pour} \quad \theta \notin V_p$$

et $|F_p(e^{i\theta})| = e^{-p}$ pour $\theta \in U_p$ donc en particulier pour $\theta \in E$.

Soit $\theta \in [-\pi, \pi] \backslash E$ fixé. On peut trouver un entier $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\theta \notin V_{p_0}$, donc pour tout $p \geqslant p_0$ on a $\theta \notin V_p$. Alors :

$$|F_p(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})| \quad \text{pour tout} \quad p \geqslant p_0. \tag{3}$$

Supposons maintenant que $\theta \in E$. Alors $\theta \in U_p$ pour tout p et

$$|F_p(e^{i\theta})| = e^{-p} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 = |f(e^{i\theta})|. \tag{4}$$

La suite $(|F_p|)$ converge donc simplement sur le cercle unité T.

Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ on a :

$$(5) \quad \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\varphi_p(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)\varphi(t)\,dt\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)(\varphi_p(t)-\varphi(t))\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{V_p} P_r(\theta-t)(\varphi_p(t)-\varphi(t))\,dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{V_p} P_r(\theta-t)(-\varphi(t))\,dt.$$

Notons $|V_p|$ la mesure de V_p sur $[-\pi,\pi]$. Comme $V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_p \supset V_{p+1} \supset \ldots, |V_0| = 2\pi$ et $E = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} V_p$, on a $\lim_{p\to\infty} |V_p| = |E| = 0$.

Par le théorème de la convergence dominée on obtient :

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{V_p} P_r(\theta-t)(-\varphi(t))\,dt = 0$$

d'où

$$\lim_{p\to\infty} |F_p(re^{i\theta})| = |f(re^{i\theta})|.$$

On a donc la convergence simple de la suite $(|F_p|)$ sur le compact $\bar{\mathbb{D}}$. Comme $(|F_p|)$ est une suite monotone décroissante, on déduit du théorème de Dini la convergence uniforme de $(|F_p|)$ vers $|f|$ sur $\bar{\mathbb{D}}$.

3) Montrons que (F_p) converge uniformément vers f sur $\bar{\mathbb{D}}$. Pour $z_0 \in \bar{\mathbb{D}}$ et $r > 0$, notons $V(z_0;r) = \bar{\mathbb{D}} \cap D(z_0;r)$ avec $D(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C}/|z-z_0|<r\}$ et $U(r) = \bigcup_{z\in K} V(z;r)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ et comme f s'annule sur K, on peut trouver $r > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $z \in U(r)$.

Il existe aussi un entier $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$ et tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$ on ait : $||F_p(z)|-|f(z)|| \leqslant \varepsilon$ donc $|F_p(z)| \leqslant |f(z)| + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$ et $|F_p(z)-f(z)| \leqslant 3\varepsilon$ pour tout $p \geqslant p_0$ et tout $z \in U(r)$ (6).

D'autre part on peut trouver un entier $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout

$t \in V_p$ avec $p \geqslant p_1$ on ait $e^{it} \in U(r/2)$; donc $\left|\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right| \leqslant \dfrac{4}{r}$ pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash U(r)$ et tout $t \in V_p$ avec $p \geqslant p_1$.

Pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash U(r)$ et tout $p \geqslant p_1$ on a donc :

$$(7)\quad \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}(\varphi_p(t)-\varphi(t))\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{V_p}\frac{4}{r}(\varphi_p(t)-\varphi(t))\,dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{V_p}\frac{4}{r}(-\varphi(t)\,dt \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

par le théorème de la convergence dominée. Comme cette convergence est uniforme en $z \in \mathbb{D}\backslash U(r)$, en passant aux exponentielles on peut trouver $p_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}\backslash U(r)$ et tout $p \geqslant p_2$ on ait $|F_p(z)-f(z)| \leqslant \varepsilon$. Par continuité cette inégalité s'étend à $\bar{D}\backslash U(r)$.

Donc $\sup_{z\in\bar{\mathbb{D}}} |F_p(z)-f(z)| \leqslant 3\varepsilon$ pour tout $p \geqslant \max(p_0, p_2)$ c'est-à-dire que la suite (F_p) converge uniformément sur $\bar{\mathbb{D}}$ vers f.

4) Nous avons donc prouvé le premier point de la définition 2.1 c'est-à-dire :

$$F_p \in \exp(A(\mathbb{D})) \text{ et } F_p \to f(p\to\infty) \text{ uniformément sur } \bar{\mathbb{D}}.$$

Notons pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $j \in \mathbb{N}^*$:

$$f^{1/j}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f(e^{it})|\,dt\right\}$$

et

$$F_p^{1/j}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\varphi_p(t)\,dt\right\}.$$

En raisonnant comme ci-dessus, on montre que :

- $F_p^{1/j} \to f^{1/j}(p\to\infty)$ uniformément sur $\bar{\mathbb{D}}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et

$$(8)\qquad \sup_{z\in\bar{\mathbb{D}}} |f^{1/j}(z)F^{-1/j}(z)| \leqslant 1$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Il reste à montrer que $gfF_p^{-1} \to g(p\to\infty)$ uniformément sur $\bar{\mathbb{D}}$ pour tout $g \in \mathscr{M}_k$.

Comme g s'annule sur K et que $(fF_p^{-1})_p$ est uniformément bornée, il suffira de prouver le résultat sur tout compact $L \subset \bar{\mathbb{D}}\backslash K$.

Il existe $m > 0$ tel que $|f(z)| \geqslant m$ pour tout $z \in L$ car f s'annule exactement sur K. On peut donc trouver un entier $p_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant p_3$ et tout $z \in L$ on ait $|F_p(z)| \geqslant \frac{m}{2} > 0$ donc (F_p^{-1}) est uniformément bornée sur L. Par conséquent $gfF_p^{-1} - g = gF_p^{-1}(f-F_p) \to 0\,(p\to\infty)$ uniformément sur L.

Les points (i) à (iv) de la définition 2.1 étant vérifiés, la proposition est démontrée.

LEMME 3.2. — *Soient K un fermé de mesure nulle sur le cercle unité T et f une fonction analytique dans le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ et admettant un prolongement continu en tout point de $T\backslash K$. Alors f est uniformément approchable sur $\bar{\mathbb{D}}\backslash K$ par une fonction analytique sur $\mathbb{C}\backslash K$.*

Preuve. — Notons $M = \mathbb{C}\backslash K$, $E = \bar{\mathbb{D}}\backslash K$ et $\tilde{M} = M \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de M. Alors E est relativement fermé dans M et $\tilde{M}\backslash E$ est connexe.

Soit K_1 un compact de M. K_1 est un borné de $\mathbb{C}$ et on peut trouver un réel $m > 0$ tel que la distance $d(K_1, K)$ de K_1 à K soit minorée par m. Notons $\hat{K}_1$ la réunion des composantes connexes bornées de $M\backslash K_1$. Alors $d(K,\hat{K}_1) \geqslant d(K,K_1) \geqslant m$ et $\hat{K}_1$ est bornée dans $\mathbb{C}$. Notons $K'_1 = K_1 \cup \hat{K}_1$. Il est clair que K'_1 est compact et $M\backslash(E\cup K'_1)$ ne possède pas de composantes connexes bornées dans M. Donc $\tilde{M}\backslash E$ est localement connexe d'après la proposition 2.6. Le lemme résulte alors du théorème 2.5.

Remarque 3.3. — Si $|g(z)| \geqslant |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et si f est extérieure alors g est extérieure.

En effet soit $g = uv$ la factorisation canonique de g avec u intérieure et v extérieure [6]. Comme $|g(z)| \geqslant |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, on peut écrire $f = gh$ avec $h \in H^\infty(\mathbb{D})$. Soit $h = \alpha\beta$ la factorisation canonique de h avec α intérieure et β extérieure. Donc $f = (\alpha u)(\beta v)$. Comme f est extérieure, on a $\alpha u \equiv 1$ donc $u \equiv 1$ et g est extérieure.

LEMME 3.4. — *Soit $f \in \mathcal{M}_K$ ne s'annulant que sur K. Soit (f_n) une suite d'éléments de $A(\mathbb{D})$ vérifiant les conditions de la proposition 3.1 telle que $f_n^{1/j} \to f^{1/j} \to (n\to\infty)$ uniformément sur $\bar{\mathbb{D}}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $|f(z)| \leqslant |f_n(z)|$ pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Alors f est un élément de Cohen de $\mathcal{M}_K$.*

Preuve. — Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on peut construire une suite $(F_{n,p})_p$ d'éléments de $\exp(A(\mathbb{D}))$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $\|f_n^{1/j} - F_{n,p}^{1/j}\| \to 0 (p \to \infty)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

ii) $|f_n^{1/j}(z)| \leqslant |F_{n,p}^{1/j}(z)|$ pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$, $j \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$.

Ici la norme désigne la norme de la convergence uniforme sur $\bar{\mathbb{D}}$. Il existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un entier p_n tel que $\|f_n^{1/k} - F_{n,p_n}^{1/k}\| \leqslant \dfrac{1}{n}$ pour $k \leqslant n$ car $\|f_n^{1/j} - F_{n,p}^{1/j}\| \to 0 (p \to \infty)$.

Posons $F_n = F_{n,p_n}$. Alors $\|f_n^{1/j} - F_n^{1/j}\| \to 0 (n \to \infty)$ donc

$$\|f^{1/j} - F_n^{1/j}\| \to 0 (n \to \infty)$$

pour tout $j \geqslant 1$.

D'autre part $\|f^{1/j} F_n^{-1/j}\| \leqslant \|f_n^{1/j} F_n^{-1/j}\| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme f s'annule exactement sur K, avec (fF_n^{-1}) uniformément bornée par 1 sur $\bar{\mathbb{D}}$ et avec $F_n \to f(n \to \infty)$ uniformément sur $\bar{\mathbb{D}}$, on voit de même que dans la proposition 3.1 que $\|gfF_n^{-1} - g\| \to 0 (n \to \infty)$ pour tout $g \in \mathcal{M}_K$.

Donc f est un élément de Cohen de $\mathcal{M}_K$ et le lemme est démontré.

THÉORÈME 3.5. — *Soit K un fermé de mesure nulle sur le cercle unité T. Un élément f de $\mathcal{M}_K$ est un élément de Cohen de $\mathcal{M}_K$ si, et seulement si, f est une fonction extérieure de $A(\mathbb{D})$ ne s'annulant que sur K.*

Preuve. — Il est clair d'après les résultats de Beurling-Rudin rappelés dans l'introduction que la condition est nécessaire.

Réciproquement en appliquant la proposition 2.3, on obtient une détermination du logarithme de f notée $\log f$ telle que $\log f$ soit analytique dans $\mathbb{D}$ et admette un prolongement continu sur $\bar{\mathbb{D}} \backslash K$. Par le lemme 3.2. on peut approcher $\log f$ uniformément sur $\bar{\mathbb{D}} \backslash K$ par une suite (φ_n) de fonctions analytiques sur $\mathbb{C} \backslash K$ donc en particulier de classe C^1 sur $T \backslash K$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|x| \leqslant \delta$ entraîne $|e^x - 1| \leqslant \varepsilon/\|f\|$.

On peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}} \backslash K$ on ait $|\log f(z) - \varphi_n(z)| \leqslant \delta/2$.

Alors pour $n \geqslant n_0$ et $z \in \bar{\mathbb{D}} \backslash K$ on a :

$$|\log f(z) - (\varphi_n(z) + \delta/2)| \leqslant \delta$$

et

$$|\log|f(z)| - \text{Re } \varphi_n(z)| \leqslant \delta/2$$

donc

$$\log|f(z)| \leqslant \text{Re } \varphi_n(z) + \delta/2.$$

Posons $f_n(z) = \exp(\varphi_n(z) + \delta/2)$ pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $z \in \bar{\mathbb{D}}\backslash K$. Comme pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $z \in \bar{\mathbb{D}}\backslash K$ on a

$$|\log|f(z)| - \text{Re } \varphi_n(z)| \leqslant \delta/2$$

et comme

$$\log|f(z)| \to -\infty\,(z \to z_0, z_0 \in K),$$

on a $\text{Re } \varphi_n(z) + \delta/2 \to -\infty\,(z \to z_0, z_0 \in K)$ pour tout $n \geqslant n_0$. Donc $f_n \in \mathscr{M}_K$.

D'autre part pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $z \in \bar{\mathbb{D}}\backslash K$ on a :

$$|f(z)| \leqslant \exp(\text{Re } \varphi_n(z) + \delta/2) = |f_n(z)|$$

et

$$|\log f(z) - (\varphi_n(z) + \delta/2)| \leqslant \delta$$

donc

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant \varepsilon.$$

On obtient de la même manière que $f_n^{1/j} \to f^{1/j}\,(n \to \infty)$ uniformément sur $\bar{\mathbb{D}}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Donc pour tout $n \geqslant n_0$ f_n ne s'annule que sur K et est extérieure par la remarque 3.3. En supprimant éventuellement les premiers termes, on obtient ainsi une suite (f_n) de fonctions extérieures de $A(\mathbb{D})$ ne s'annulant que sur K dont la restriction à $T\backslash K$ est de classe C^1 et vérifiant :

1) $|f(z)| \leqslant |f_n(z)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$ et

2) $f_n^{1/j} \to f^{1/j}\,(n \to \infty)$ uniformément sur $\bar{\mathbb{D}}$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Le théorème résulte alors du lemme 3.4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. U. Arakelian, Approximation complexe et propriétés des fonctions analytiques, Actes Congrès intern. Math., 1970, t. 2, 595-600.

[2] H. G. Dales, A discontinuous homomorphism from $\mathscr{C}(X)$, Am. J. Math., 101 (1979), 647-734.

[3] J. ESTERLE, Injection de semi-groupes divisibles dans des algèbres de convolution et construction d'homomorphismes discontinus de $\mathscr{C}(K)$, Proc. Lond. Math. Soc., 36 (1978), 59-85.

[4] J. ESTERLE, Universal properties of some commutative radical Banach algebras, J. Reine Ang. Math., 321 (1981), 1-24.

[5] J. ESTERLE, Elements for a classification of commutative radical Banach algebras, Lect. Notes Math., 975, pp. 4-65, Berlin, Heidelberg, New-York, Springer, 1983.

[6] K. HOFFMAN, Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, Englewwood cliffs, 1962.

[7] M. M. RAJOELINA, Éléments de Cohen et fonctions extérieures de l'algèbre du disque, Bull. Sci. Math. (à paraître).

[8] S. SCHEINBERG, Uniform approximation by functions analytic on a Riemann surface, Ann. of Math., 108 (1978), 257-298.

[9] A. M. SINCLAIR, Cohen elements in Banach algebras, Proc. R. Edinb., Sect. A, 84 (1979), 55-70.

[10] F. ZOUAKIA, The theory of Cohen elements, Lect. Notes Math., 975, pp. 163-178, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1983.

Manuscrit reçu le 24 juillet 1989.

Michel M. RAJOELINA,

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
351, cours de la Libération
33405 Talence (France)
&
Établissement d'Enseignement Supérieur
des Sciences
Service de Mathématiques
B.P. 906
101, Tananarive (Madagascar).