ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES FÉLIX
JEAN-CLAUDE THOMAS

Effet d'un attachement cellulaire dans l'homologie de l'espace des lacets

Annales de l'institut Fourier, tome 39, nº 1 (1989), p. 207-224
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_1_207_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 1 (1989), 207-224

EFFET D'UN ATTACHEMENT CELLULAIRE DANS L'HOMOLOGIE DE L'ESPACE DES LACETS

par Y. FELIX* et J.C. THOMAS**

---

1. Introduction.

1.1. Un des problèmes historiques [21] de la théorie homotopique des espaces est de mesurer l'effet de l'attachement d'une cellule au niveau des groupes d'homotopie. Le problème de l'attachement *inerte* reste en particulier un problème ouvert. Rappelons de quoi il s'agit. Rattacher des cellules à un espace X consiste à considérer la cofibration

$$(*) \qquad Z \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y$$

où

1) $Z = \bigvee\limits_{\alpha} S^{d_\alpha+1}$ est un bouquet de sphères.

2) Pour chaque α , $\varphi_\alpha = \varphi|S^{d_\alpha+1}$ désigne la fonction d'attachement de la cellule $e^{d_\alpha+2}$.

3) f désigne l'inclusion naturelle de X dans $Y = X \bigcup\limits_{\varphi} (\bigvee\limits_{\alpha} e^{d_\alpha+2})$.

---

* Chercheur qualifié au F.N.R.S.
** U.A. au C.N.R.S. 04751
Partiellement supporté par un contrat de coopération Franco-Belge.

Mots-clés : Cofibration – Fibration – Suite inerte
Classification A.M.S. : 55 P 35, 55 Q 52.

L'attachement φ (resp. la suite φ_α) est inerte si l'homomorphisme
$$\Pi(\Omega f) : \Pi(\Omega X) \longrightarrow \Pi(\Omega Y)$$
est surjectif.

QUESTION. — *Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que l'attachement soit inerte.*

1.2. En homotopie rationnelle et lorsque X est un CW-complexe de type fini 1-connexe, la surjectivité de
$$\Pi(\Omega f) \otimes \mathbf{Q} : \Pi(\Omega X) \otimes \mathbf{Q} \longrightarrow \Pi(\Omega Y) \otimes \mathbf{Q}$$
équivaut ([17], appendice) à celle du morphisme d'algèbres de Hopf
$$H_*(\Omega f; \mathbf{Q}) : H_*(\Omega X; \mathbf{Q}) \longrightarrow H_*(\Omega Y; \mathbf{Q}) .$$

J.M. Lemaire a établi [15] une condition suffisante pour que $\Pi(\Omega f) \otimes \mathbf{Q}$ soit surjective. Puis en collaboration avec S. Halperin [13], ils ont montré que cette condition est aussi nécessaire.

Dans cet article, nous généralisons dans deux directions le résultat de Halperin-Lemaire. Nous démontrons en effet des conditions nécessaires et suffisantes pour que
$$H_*(\Omega f; R) : H_*(\Omega X; R) \longmapsto H_*(\Omega Y; R)$$
soit surjective dans les deux cas suivants :

1. $R = \mathbf{k}$ désigne un corps de caractéristique différente de 2.

2. R est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ contenant $1/2$ et $1/3$ tel que ΩX soit un H-espace R-décomposable au sens de Baues [6].

Dans les deux cas, les caractérisations de la surjectivité de $H_*(\Omega f; R)$ sont obtenues à partir de l'étude de la fibration homotopique
$$F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y \qquad (**)$$
associée à f .

1.3. Si $\mathbf{k}$ est un corps alors, pour tout espace S , $H_*(\Omega S; \mathbf{k})$ est une algèbre de Hopf cocommutative qui est connexe lorsque S est supposé 1-connexe. D'autre part, chaque application d'attachement φ_α définit un élément sphérique x_α dans $H_{d_\alpha}(\Omega X; \mathbf{k})$. Notons J l'idéal bilatère engendré par les x_α . Alors J est un idéal de Hopf ([17]) et la suite exacte courte d'algèbres de Hopf (*cf.* 2.1)
$$\mathbf{k} \longrightarrow I \longrightarrow H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \longrightarrow (H_*(\Omega X; \mathbf{k})/J) \longrightarrow \mathbf{k}$$

induit une structure canonique de $H_*(\Omega X;\mathbf{k})/J$−module sur l'espace des indécomposables $QI = \bar{I}/\bar{I}\cdot\bar{I}$ de l'algèbre I ($\bar{I}$ désigne l'idéal d'augmentation de I).

THÉORÈME 1. — *Si X (resp. Z) est un CW−complexe de type fini 1−connexe (resp. 2−connexe) et si la caractéristique de* $\mathbf{k}$ *est différente de 2 alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$H_*(\Omega f;\mathbf{k})$ est surjective;*

(2) *la suite*

$$\mathbf{k} \longrightarrow H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega i)_*} H_*(\Omega X;\mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega f)_*} H_*(\Omega Y;\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$$

est une suite exacte courte d'algèbres de Hopf;

(3) *$H_*(\Omega F;\mathbf{k})$ est une algèbre libre;*

(4) *I est une algèbre libre et QI est un $H_*(\Omega X;\mathbf{k})/J$−module librement engendré par les x_α ;*

(5) *les séries de Poincaré des espaces ΩX , ΩY et Z sont reliés par la relation*

$$P_{\Omega X}\Big(1 - \frac{1}{t}(P_Z - 1)P_{\Omega Y}\Big) = P_{\Omega Y} \ .$$

En fait, la partie (3) $\Longrightarrow$ (2) du théorème 1 est vraie dans un contexte plus général.

THÉORÈME 2. — *Si la caractéristique de* $\mathbf{k}$ *est différente de 2 et si la fibration $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ de base 1−connexe satisfait la condition : il existe un isomorphisme d'algèbres, $H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \cong T(V)$, avec $\dim V \geq 2$, alors la suite*

$$\mathbf{k} \longrightarrow H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega j)_*} H_*(\Omega E;\mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega p)_*} H_*(\Omega B;\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{k}$$

est une suite exacte courte d'algèbres de Hopf.

Par définition, si l'une des conditions du théorème est satisfaite, on dit que la suite x_α est *inerte.*

D. Anick d'une part [2], S. Halperin et J.M. Lemaire d'autre part [13] ont montré que toute sous-suite d'une suite inerte de $H_*(\Omega \bigvee_\alpha S^{d_\alpha+1};\mathbf{Q})$ est inerte. Nous généralisons ce résultat à la caractéristique p impaire.

COROLLAIRE. — *Soit Z_1 un bouquet de sphères contenu dans Z , φ_1 la restriction de φ à Z_1 et $f_1 : X \longrightarrow Y_1$ la cofibre de φ_1 . Si X (resp*

Z) est un $CW-$complexe de type fini $1-$connexe (resp. $2-$connexe) et si la caractéristique de $\mathbf{k}$ est différente de 2 alors si $H_*(\Omega f;\mathbf{k})$ est surjective il en est de même de $H_*(\Omega f_1;\mathbf{k})$.

1.4. Soit R un anneau commutatif tel que 2 soit inversible, nous dirons que $H_*(\Omega X;R)$ est sphériquement engendrée si l'image de l'homomorphisme de Hurewicz

$$h_{\Omega X}\otimes R:\Pi_*(\Omega X)\otimes R\longrightarrow H_*(\Omega X;R)$$

engendre $H_*(\Omega X;R)$ en tant qu'algèbre. $H_*(\Omega X;R)$ est alors une algèbre de Hopf primitivement engendrée. Dans ce cas, si $H_*(\Omega f;R)$ est surjective alors

1) $H_*(\Omega Y;R)$ est aussi une algèbre de Hopf sphériquement engendrée.

2) L'homomorphisme d'algèbre de Lie induit par $\Pi_*(\Omega f)\otimes R$

$$(\Omega f)_\#:\Pi(\Omega X)\otimes R\longrightarrow \Pi(\Omega Y)\otimes R/\ker(h_{\Omega Y}\otimes R)$$

est surjectif. Cette interprétation au niveau des groupes d'homotopie de la surjectivité de $H_*(\Omega f;R)$ devient plus complète lorsque ΩX est un $H-$espace $R-$décomposable.

1.5. Soit R un sous-anneau de $\mathbf{Q}$ contenant $1/2$ et $1/3$, le $H-$espace ΩX est dit *$R-$décomposable* si $H_*(\Omega X;R)$ est sphériquement engendré et sans $R-$torsion. Comme exemple de $CW-$complexe X $1-$connexe de type fini tel que ΩX soit $R-$décomposable, on trouve,

– tous les X si $R=\mathbf{Q}$ ([17], appendice);

– les X tels que $\dim \Pi(\Omega X)\otimes \mathbf{Q} < \infty$ pour un certain $R = \mathbf{Z}[1/p_1,\dots,1/p_k]$ dépendant de X ([16]);

– les X de L.S. catégorie inférieure ou égale à 2 tels que $H_*(\Omega X,R)$ soit sans torsion et R contient les inverses des nombres premiers $p\leq \dim X$ ([4]).

Nous démontrons :

THÉORÈME 3. — *Si X (resp. Z) est un $CW-$complexe de type fini $1-$connexe (resp. $2-$connexe) et si ΩX est $R-$décomposable alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *$(\Omega f)_*:H_*(\Omega X;R)\longrightarrow H_*(\Omega Y;R)$ admet une section $R-$linéaire;*

ii) *ΩY est $R-$décomposable et*

$(\Omega f)_\#:\Pi(\Omega X)\otimes R/R-\text{torsion}\longmapsto \Pi(\Omega Y)\otimes R/R-\text{torsion}$

est surjective;

iii) *l'application localisée* $(\Omega f)_R : (\Omega X)_R \longrightarrow (\Omega Y)_R$ *admet une section homotopique;*

iv) *l'espace localisé* F_R *a le type d'homotopie d'un wedge (infini) de sphères localisées.*

Ce résultat est une conséquence du théorème 2 et du résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Si* X *(resp.* Z*) est un* $CW-$*complexe de type fini* $1-$*connexe (resp.* $2-$*connexe) et si dans la fibration*

$$(**) \qquad F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

Ωf *admet une section homotopique alors* ΩF *a le type d'homotopie d'une suspension.*

Le reste de cet article est consacré à la démonstration des résultats annoncés ci-dessus et s'organise de la manière suivante :

2. Suite exacte courte d'algèbres de Hopf.
3. Preuve du théorème 2.
4. Preuve du théorème 4.
5. Preuve du théorème 1.
6. Hérédité de l'inertie (corollaire).
7. $H-$espaces $R-$décomposables (th. 3).

2. Suite exacte courte d'algèbres de Hopf.

2.1. Rappelons ([17],4.7) qu'une suite de morphismes de **k**–algèbres de Hopf

$$(\mathcal{H}) \qquad A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A''$$

est une suite exacte courte d'algèbres de Hopf s'il existe un isomorphisme

$$h : A' \otimes A'' \longrightarrow A$$

qui est simultanément un homomorphisme de $A'-$module à gauche et de $A''-$comodule à droite.

Nous noterons

$$(\mathcal{E}) \qquad \mathbf{k} \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A'' \longrightarrow \mathbf{k}$$

une suite exacte courte d'algèbres de Hopf. Dans le cas où A est cocommutative, la suite $(\mathcal{H})$ est exacte si et seulement si $j \circ i$ est trivial, i est injective, j est surjective et l'une ou l'autre des conditions suivantes est satisfaite :

a) l'homomorphisme naturel $\bar{j} : \mathbf{k} \underset{A'}{\otimes} A \longrightarrow A''$ est un isomorphisme;

b) l'homomorphisme naturel $\bar{i} : A' \longrightarrow A \underset{A''}{\boxtimes} \mathbf{k}$ est un isomorphisme.

Ici $\boxtimes$ désigne le produit cotensoriel des comodules [17].

2.2. Dans la suite exacte courte $(\mathcal{E})$, l'isomorphisme h définit une opération de A'' sur l'espace des indécomposables $QA' = \bar{A}'/\bar{A}'\bar{A}'$ de l'algèbre A' ($\bar{A}'$ désigne l'idéal d'augmentation de A').

Si $\alpha \in A'$ et $\bar{\beta} \in A''$, choisissons β dans A tel que $j(\beta) = \bar{\beta}$, alors

$$h^{-1}(\beta i(\alpha)) = \sum_s a'_s \otimes a''_s \in A' \otimes A'' .$$

Nous posons,

$$\bar{\beta} \bullet \alpha = (1 \otimes \varepsilon_{\alpha''})\Big(\sum_s a'_s \otimes a''_s\Big)$$

lorsque $\varepsilon_{A''}$ désigne l'augmentation de A'' . Il est facile de vérifier que cette dernière formule induit une structure de A''–module à gauche sur QA' .

Afin d'établir que cette opération est canonique (*i.e.* indépendante de h) nous en donnons une autre description.

Notons J le noyau de l'homomorphisme d'algèbres $j : A \longrightarrow A''$. Nous avons alors la suite exacte d'algèbres

$$(\mathcal{A}) \qquad 0 \longrightarrow J \xrightarrow{k} A \xrightarrow{j} A'' \longrightarrow 0$$

ainsi qu'une opération de A'' sur J/J^2 .

On définit cette opération en choisissant une section linéaire $s : A'' \longrightarrow A$ puis en posant

$$a'' \cdot x = s(a'')k(x) , \quad a'' \in A'' , \quad x \in J .$$

On vérifie sans difficulté que cette formule induit une opération de A'' sur J/J^2 qui est indépendante du choix de la section s .

Si nous supposons maintenant que j est un homomorphisme d'algèbres de Hopf, notons I son Hopf-noyau ([17]) alors :

1. $\bar{i} : A' \longrightarrow I = A \underset{A''}{\boxtimes} \mathbf{k}$ est un isomorphisme.

2. $J = \bar{I}A = A\bar{I} = A\bar{I}A$.

3. L'inclusion de $\bar{I}$ dans J induit un isomorphisme de $\bar{I}/\bar{I}^2 = Q(I) \cong Q(A')$ sur J/J^2 .

Ceci permet d'établir :

LEMME. — *L'opération définie à partir de h et celle induite par $(\mathcal{A})$ coïncident;*

d'où le caractère canonique de l'opération de A'' sur $Q(A)$ défini par la suite exacte courte $(\mathcal{E})$.

2.3. *Exemple.* — Considérons le cas particulier où la suite exacte courte

$$(\mathcal{E}) \qquad \mathbf{k} \longrightarrow UL' \xrightarrow{U_i} UL \xrightarrow{U_j} UL'' \longrightarrow \mathbf{k}$$

est l'algèbre enveloppante de la suite exacte courte d'algèbres de Lie :

$$(\mathcal{L}) \qquad 0 \longrightarrow L' \xrightarrow{i} L \xrightarrow{j} L'' \longrightarrow 0$$

$(\mathcal{L})$ définit par adjonction une opération canonique de UL'' dans $L'/[L', L']$ qui s'identifie à l'opération de UL'' dans $QUL' \cong L'/[L', L']$ définie par $(\mathcal{E})$.

Un cas particulier de cette situation nous est fourni par la suite exacte courte d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{i} \mathbf{L}(U \oplus V) \xrightarrow{P} \mathbf{L}(V) \longrightarrow 0$$

où $\mathbf{L}$ désigne le foncteur algèbre de Lie libre et

$$p(u) = 0 \ , \ u \in U \quad , \quad p(v) = v \ , \ v \in V \ .$$

Dans ce cas L' est une algèbre de Lie librement engendrée par $W \cong U \otimes T(V)$.

Autrement dit, $Q(UL') \cong W$ est un module libre sur $T(V) = UL(V)$ engendré par U .

3. Preuve du théorème 2.

3.1. Considérons une fibration $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ de base 1−connexe et $\mathbf{k}$ un corps.

LEMME 1. — *Si $\Omega j_* : H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \longrightarrow H_*(\Omega E;\mathbf{k})$ est injective alors la suite*

$$H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \xrightarrow{\Omega j_*} H_*(\Omega E;\mathbf{k}) \xrightarrow{\Omega p_*} H_*(\Omega B;\mathbf{k})$$

est une suite exacte courte d'algèbres de Hopf.

On montre à l'aide de la suite spectrale de Serre, en cohomologie, de la fibration $\Omega F \longrightarrow \Omega E \longrightarrow \Omega B$ que l'on a la suite exacte courte d'algèbres de Hopf

$$H_*(\Omega B;\mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega p)_*} H_*(\Omega E;\mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega j)_*} H_*(\Omega F;\mathbf{k})\ .$$

□

3.2. Notons $\delta : \Omega^2 B \longrightarrow \Omega F$ le connectant de la fibration $\Omega F \xrightarrow{\Omega j} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B$. Nous allons établir

LEMME 2. — *Si $H_*(\Omega F;\mathbf{k}) = T(V)$ avec $\dim V \geq 2$ alors*

1) $\delta_* : H_*(\Omega^2 B;\mathbf{k}) \longrightarrow H_*(\Omega F;\mathbf{k})$ est nul.

2) Si caract $\mathbf{k} \neq 2$, alors $(\Omega i)_* : H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \longrightarrow H_*(\Omega E;\mathbf{k})$ est injective.

Ceci entraîne le théorème 2.

Preuve du lemme 2.

1) Montrons que δ_* est nul.

Si $\mu : B^I \underset{B}{\times} E \longrightarrow E^I$ désigne la connection homotopique de la fibration

(1) $$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$$

(*cf.* [11], I) alors la connection homotopique de la fibration

(1′) $$\Omega F \xrightarrow{\Omega j} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B$$

est donnée par

$$\mu' : (\Omega B)^I \underset{\Omega B}{\times} \Omega E \longrightarrow (\Omega E)^I$$

avec

$$\mu'(H,\gamma)\cdot(t,s)=\mu(H(t,s),\gamma(s))\ ,\quad t\in I\ ,\ s\in S^1\ .$$

Ainsi l'opération d'holonomie associée à μ'

$$\nu':\Omega^2B\times\Omega F\longrightarrow\Omega F$$

coïncide avec $\Omega(\nu)$ lorsque $\nu:\Omega B\times F\longrightarrow F$ désigne l'opération d'holonomie associée à μ .

Comme $\delta=\nu'|_{\Omega^2B\times *}:\Omega^2B\longrightarrow\Omega F$ et que

$$H_*(\Omega(\Omega B\times F);\mathbf{k})\cong H_*(\Omega^2B;\mathbf{k})\times H_*(\Omega F;\mathbf{k})$$

en tant qu'algèbres de Hopf, nécessairement $\delta_*(H_*(\Omega^2B;\mathbf{k}))$ est dans le centre de $H_*(\Omega F;\mathbf{k})$.

Or par hypothèse $H_*(\Omega F;\mathbf{k})$ est une algèbre libre ayant au moins deux générateurs, δ_* est donc nul.

2) Montrons que si $(\Omega i)_*$ n'est pas injective alors δ_* n'est pas nul.

En appliquant la proposition 7.1 de [19] au carré de Hopf

$$\begin{tikzcd} \Omega^2B \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & P\Omega E \arrow[d] \\ \Omega F \arrow[r, "\Omega i"] & \Omega E \end{tikzcd}$$

on obtient

(a) $i_*\ :\ H_*(\Omega F;\mathbf{k})\longrightarrow H_*(\Omega E;\mathbf{k})$ admet un noyau de Hopf $K=H_*(\Omega F;\mathbf{k})\backslash\!\!\backslash i_*$.

(b) δ_* induit un homomorphisme normal d'algèbres de Hopf

$$\bar\delta:H_*(\Omega^2B;\mathbf{k})\longrightarrow K\ .$$

(c) L'algèbre de Hopf quotient $K/\!\!/\bar\delta$ est une algèbre extérieure.

Par suite si $(\Omega i)_*$ n'est pas injective, d'après (a) K est une algèbre tensorielle à au moins deux générateurs et d'après (c) $\delta_*\neq 0$. □

4. Preuve du théorème 4.

4.1. *Fibre d'une cofibre.* — L'application d'attachement $\varphi:Z\longrightarrow X$ se factorise en

$$\bar\varphi:Z\longrightarrow F\ .$$

Si on note $\nu : F \times \Omega Y \longrightarrow F$ l'opération d'holonomie ([22], [11]) de la fibration

$$(**) \qquad F \longrightarrow X \longrightarrow Y$$

nous définissons T comme la composée

$$Z \times \Omega Y \xrightarrow{\bar{\varphi}\times 1} F \times \Omega Y \xrightarrow{\nu} F \ .$$

Dans ce cas ([12], th.1), T induit un isomorphisme

$$T_* : \widetilde{H}_*(Z, \mathbf{Z}) \otimes H_*(\Omega Y, \mathbf{Z}) \longrightarrow \widetilde{H}_*(F, \mathbf{Z}) \ .$$

4.2. *Fin de la démonstration.* — Posons $Z = \sum \bar{Z}$ et considérons la suite exacte de Puppe de la fibration $(**)$

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y \ .$$

Puisque Ωf admet une section homotopique, le connectant $\partial = \nu|_{*\times\Omega Y}$ est homotopiquement nul. Par suite, l'application T , définie ci-dessus se factorise

$$\bar{T} : Z \ltimes \Omega Y = Z \times \Omega Y / * \times \Omega Y \longrightarrow F \ .$$

D'après 4.1, $\bar{T}$ est une équivalence d'homologie donc une équivalence d'homotopie.

Remarquons maintenant que

$$(\sum X) \times Y / * \times Y = \sum (X \times Y / * \times Y)$$

d'où $F \sim \sum(\bar{Z} \ltimes \Omega Y)$. □

5. Preuve du théorème 1.

5.1. (1) $\Longrightarrow$ (2) .

Si $H_*(\Omega f; \mathbf{k})$ est surjective alors $H^*(\Omega Y; \mathbf{k})$ est une sous-algèbre de Hopf de l'algèbre de Hopf commutative $H^*(\Omega X; \mathbf{k})$. Il résulte de 2.1 que $H^*(\Omega X; \mathbf{k})$ est un $H^*(\Omega Y; \mathbf{k})$ module libre.

La suite spectrale d'Eilenberg-Moore de la fibration $\Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega X \xrightarrow{\Omega f}$ ΩY

$$E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(\Omega Y;\mathbf{k})}(H^*(\Omega X; \mathbf{k}), \mathbf{k}) \Longrightarrow H^*(\Omega F; \mathbf{k})$$

dégénère complètement au terme E_2 . Autrement dit, l'homomorphisme naturel

$$(\overline{\Omega i})_* : H^*(\Omega X; \mathbf{k}) \underset{H^*(\Omega Y;\mathbf{k})}{\otimes} \mathbf{k} \longmapsto H^*(\Omega F; \mathbf{k})$$

est un isomorphisme.

D'après 2.1, a), la suite

$$H^*(\Omega Y; \mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega f)^*} H^*(\Omega X; \mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega i)^*} H^*(\Omega F; \mathbf{k})$$

est une suite exacte courte d'algèbres de Hopf. Par dualité, nous obtenons (2).

5.2. (2) $\Longrightarrow$ (5) .

Considérons l'algèbre de chaînes

$$(H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \coprod T(y_\alpha), d)$$

définie par

$$d|_{H_*(\Omega X;\mathbf{k})} = 0 \ , \quad dy_\alpha = x_\alpha \ , (cf.\ 1.3) \ .$$

Comme $(\Omega f)_*$ est surjective, il résulte de la partie (i) $\Longrightarrow$ (ii) du théorème 1.1 de [13] que l'inclusion

$$H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \longrightarrow H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \coprod T(V)$$

induit un homomorphisme surjectif

$$H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \longrightarrow H_*(H_*(\Omega X; \mathbf{k})) \coprod T(V), d)$$

ce qui est équivalent, d'après ([3], th.2.9]), à l'existence d'un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués

$$T(x_\alpha) \coprod H_*(\Omega X; \mathbf{k})/J \cong H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \ .$$

Or, la partie (i) $\Longrightarrow$ (iii) du théorème 1.1 de [13] entraîne que

$$H_*(\Omega X; \mathbf{k})/J \cong H_*(\Omega Y; \mathbf{k})$$

(en tant qu'algèbres).

Finalement, l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$T(x_\alpha) \coprod H_*(\Omega Y; \mathbf{k}) \cong H_*(\Omega X; \mathbf{k})$$

entraîne la formule

$$\left(1 - \frac{1}{t}(P_Z - 1)\right) + P_{\Omega Y}^{-1} - 1 = P_{\Omega Y}^{-1} \ .$$

5.3. (5) $\Longrightarrow$ (3) .

Considérons la suite spectrale de Serre de la fibration

$$\Omega F \xrightarrow{\Omega i} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y$$

$$E_2 = H_*(\Omega Y;\mathbf{k}) \otimes H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \Longrightarrow H_*(\Omega X;\mathbf{k}) \ .$$

Ainsi que nous l'avons rappelé en 4.1,

$$\widetilde{H}_*(F;\mathbf{k}) \cong \widetilde{H}_*(Z;\mathbf{k}) \otimes H_*(\Omega Y;\mathbf{k}) \ .$$

D'autre part, la construction de Adams-Hilton ([1], [8]) fournit une algèbre de chaînes

$$(T(s^{-1}\widetilde{H}_*(F;\mathbf{k})), d)$$

dont l'homologie est isomorphe à $H_*(\Omega F;\mathbf{k})$.

Supposons que cette différentielle soit nulle, alors

$$P_{\Omega F} < \left(1 - \frac{1}{t}(P_Z - 1)P_{\Omega Y}\right)^{-1}$$

et

$$P_{\Omega X} \leq P_{\Omega Y} \cdot P_{\Omega F} < P_{\Omega Y} \cdot \left(1 - \frac{1}{t}(P_Z - 1)P_{\Omega Y}\right)^{-1}$$

ce qui contredit l'hypothèse (5). D'où $d = 0$ et alors

$$H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \cong T(s\widetilde{H}_*(F;\mathbf{k})) \ .$$

5.4. (3) $\Longrightarrow$ (1) .

Ceci résulte du théorème 2.

5.5. (2) $\Longrightarrow$ (4) .

Comme (2) $\Longrightarrow$ (3), on sait que $H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \cong T(s\widetilde{H}(F;\mathbf{k}))$ et d'après (4.1)

$$s\widetilde{H}(F;\mathbf{k}) \cong \left(\underset{\alpha}{\oplus}\, x_\alpha \mathbf{k}\right) \otimes H_*(\Omega Y;\mathbf{k}) \ .$$

Une section linéaire σ de $H_*(\Omega f;\mathbf{k})$ fournit un isomorphisme $H(\Omega F;\mathbf{k})-$ linéaire

$$h : H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \otimes H_*(\Omega Y;\mathbf{k}) \longrightarrow H_*(\Omega X;\mathbf{k})$$

qui se restreint en un isomorphisme

$$T^+\left((\underset{\alpha}{\oplus}\, x_\alpha \mathbf{k}) \otimes H_*(\Omega Y;\mathbf{k})\right) \otimes H_*(\Omega Y;\mathbf{k}) \longrightarrow J \ .$$

De la description que nous avons donnée de l'opération canonique de $H_*(\Omega Y;\mathbf{k})$ sur $QH_*(\Omega F;\mathbf{k})$ en 2.1, il résulte alors que

$$Q(I) \cong J/J^2 \cong \Big(\bigoplus_\alpha x_\alpha \mathbf{k}\Big) \otimes H_*(\Omega Y;\mathbf{k})\ .$$

Comme I s'injecte dans $H_*(\Omega F;\mathbf{k})$, on a nécessairement $I \cong H_*(\Omega F;\mathbf{k})$ et $H_*(\Omega Y;\mathbf{k}) \cong H_*(\Omega X;\mathbf{k})/I$ d'où le résultat annoncé.

Remarquons que nous avons démontré au passage que l'opération de $H_*(\Omega Y;\mathbf{k})$ sur $QH_*(\Omega F;\mathbf{k})$ définie par la suite exacte de Hopf (2) est induite par l'opération d'holonomie de la fibration (**), modulo l'isomorphisme

$$QH_*(\Omega F;\mathbf{k}) \cong sH_*(F;\mathbf{k})\ .$$

5.6. $(4) \Longrightarrow (1)$.

Notons $N(t)$ la série de Hilbert de $H_*(\Omega X;\mathbf{k})/J$, on a alors la relation

$$P_{\Omega X} = N\Big(1 - \frac{1}{t}(P_Z - 1)^{-1}N\Big)^{-1}$$

ce qui d'après ([3], th.2.6) entraîne que $H(\Omega f;\mathbf{k})$ est surjectif.

6. Hérédité de l'inertie (Corollaire).

Considérons les fibrations homotopiques

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ F_1 & \xrightarrow{i_1} & X & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ G & \xrightarrow{j} & Y_1 & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

lorsque g désigne l'inclusion naturelle de Y_1 dans Y . On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} F_1 & \xrightarrow{k} & F & \xrightarrow{\ell} & G & & \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \\ X & = & X & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

où la ligne du haut est une fibration.

Comme $H_*(\Omega f;\mathbf{k})$ est surjective, il en est de même de $H_*(\Omega g;\mathbf{k})$. Le théorème 1,(3) entraîne alors les isomorphismes d'algèbres :

$$H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \cong T(sH_*(F;\mathbf{k}))$$
$$H_*(\Omega G;\mathbf{k}) \cong T(sH_*(G;\mathbf{k}))\ .$$

D'autre part, la naturalité de l'opération d'holonomie et les isomorphismes rappelés en 4.1 entraînent la surjectivité de

$$\ell_*: H_*(F;\mathbf{k}) \cong \widetilde{H}_*(Z;\mathbf{k}) \otimes H_*(\Omega Y;\mathbf{k}) \longrightarrow \widetilde{H}_*(Z,Z_1;\mathbf{k}) \otimes H_*(\Omega Y;\mathbf{k}) \cong H_*(G;\mathbf{k}).$$

Par suite $(\Omega\ell)_*$ est aussi surjective. Notons I le Hopf noyau de $(\Omega\ell)_*$ alors

$$H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \cong I \otimes H_*(\Omega G;\mathbf{k})$$

est un isomorphisme de $H_*(\Omega G;\mathbf{k})$−comodules. Le terme

$$E^2 = \mathrm{cotor}^{H_*(\Omega G;\mathbf{k})}(\mathbf{k}, H_*(\Omega F;\mathbf{k})$$

de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore se réduit au terme $E^2_{0,*} \cong I$ et $H_*(\Omega F;\mathbf{k})$ est isomorphe à I en tant qu'algèbre. Le théorème 2 entraîne alors que $H_*(\Omega f_1;\mathbf{k})$ est surjective.

7. H−espaces R−décomposables (Preuve du théorème 3).

Nous montrons que (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i).

7.1. *Preuve de* (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Remarquons que si $H_*(\Omega X;R)$ et $H_*(\Omega Y;R)$ sont sans R−torsion, la naturalité de l'homomorphisme de Hurewicz et la propriété universelle de l'algèbre enveloppante nous fournit un diagramme commutatif

$$(D) \qquad \begin{array}{ccc} U(\Pi(\Omega X)\otimes R/R-\text{torsion}) & \xrightarrow{\bar h_{\Omega X}} & H_*(\Omega X;R) \\ \big\downarrow U(\Omega f)_\# & & \big\downarrow (\Omega f)_* \\ U(\Pi_*(\Omega X)\otimes R/R-\text{torsion}) & \xrightarrow{\bar h_{\Omega Y}} & H_*(\Omega Y;R)\ . \end{array}$$

Si $R = \mathbf{Q}$, d'après le théorème de Milnor-Moore ([17], appendice) $\bar h_{\Omega X}$ et $\bar h_{\Omega Y}$ sont des isomorphismes. Ce qui entraîne que pour tout sous-anneau R de $\mathbf{Q}$ $(1/2 \in R)$, $\bar h_{\Omega X}$ et $\bar h_{\Omega Y}$ sont des injections.

Supposons maintenant que (i) est réalisée alors $H_*(\Omega X;R)$ et $H_*(\Omega Y;R)$ sont sans R−torsion et $\bar h_{\Omega X}$, $(\Omega f)_*$ sont surjectives. Il résulte du diagramme (D) que $\bar h_{\Omega X}$ et $\bar h_{\Omega Y}$ sont des isomorphismes et par suite que ΩY est R−décomposable et que $(\Omega f)_\#$ est surjective. Ce qui établit (ii).

7.2. *Preuve de* (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Choisissons une base $(x_s)_{s\in S}$ (resp. $(y_t)_{t\in T}$) formée d'éléments homogènes de $H_*(\Omega X;R)$ (resp. $H_*(\Omega Y;R)$) de telle manière que pour chaque $t\in T\subset S$, $(\Omega f)_*(x_t)=y_t$; (on suppose $(\Omega f)_*$ surjective et admettant une section linéaire).

Pour chaque $s\in S$ (resp. $t\in T$) on choisit $\alpha_s : S^{n_s}_R \longrightarrow \Omega X_R$ tel que $\bar{h}_{\Omega X}([\alpha_s])=x_s$ (resp. $\beta_t : S^{m_t}_R \longrightarrow \Omega Y_R$ tel que $\bar{h}_{\Omega Y}([\beta_t])=y_t$).

Pour toute application $\Phi : S^q_R \longrightarrow \Omega S_R$, on définit l'application

$$\widetilde{\Phi} : \Omega^q_R \longrightarrow \Omega S_R$$

de la manière suivante :

Si q est impair, $\Omega^q_R = S^q_R$ et $\widetilde{\Phi}=\Phi$.

Si q est pair, $\Omega^q_R=\Omega\Sigma S^q_R$ et $\widetilde{\Phi}$ est la composée

$$\Omega\Sigma S^q_R \xrightarrow{\Omega\Sigma\Phi} \Omega\Sigma\Omega S_R \xrightarrow{\rho} \Omega S_R$$

pour une rétraction ρ .

D'après [6] les $(\widetilde{\alpha}_s)_{s\in S}$ (resp. les $(\widetilde{\beta}_t)_{t\in T}$) se multiplient pour définir une application $\alpha : \prod\limits_{s\in S} \Omega^{n_s}_R \longrightarrow \Omega X_R$ (resp. $\beta : \prod\limits_{t\in T}\Omega^{m_t}_R \longrightarrow Y_R$) et α et β sont des équivalences d'homotopies.

L'inclusion naturelle $\chi : \prod\limits_{t\in R} \Omega^{m_t}_R \longrightarrow \prod\limits_{t\in T}\Omega^{n_s}_R$ définit alors la section homotopique de $(\Omega f)_R$, et la section de Ωf cherchée est obtenue en posant :

$$\sigma = \alpha\chi\beta^{-1} .$$

7.3. *Preuve de* (iii) $\Longrightarrow$ (iv).

Considérons la fibration homotopique

$$(**) \qquad F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y .$$

Comme Y est 1−connexe, l'espace localisé F_R coïncide ([9], II.1) avec la fibre homotopique de $f_R : X_R \longrightarrow Y_R$.

Si f_R admet une section homotopique, d'après le théorème 3, F_R a le type d'homotopie d'une suspension. Pour montrer que F_R a le type d'homotopie d'un wedge de sphères il suffit d'après ([20], prop.A_2) de montrer que ΩF est un H−espace R−décomposable.

Or d'après ([12], th.1) nous savons que

$$\widetilde{H}_*(F,R) \cong \widetilde{H}_*(Z,R)\otimes H_*(\Omega Y,R) ,$$

ce qui entraîne que $H_*(F;R)$ est sans $R-$torsion. Le théorème de Bott-Samelson ([22], VII.1.18) implique alors que $H_*(\Omega F;R)$ est sans $R-$torsion. Nous en déduisons que dans le diagramme commutatif ci-dessous, les flèches verticales sont des injections.

$$\begin{array}{ccc} H_*(\Omega F;R) & \xrightarrow{H_*(\Omega i;R)} & H_*(\Omega X;R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(\Omega F;\mathbf{Q}) & \xrightarrow{H_*(\Omega i;qb)} & H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) . \end{array}$$

Puisque $H_*(\Omega i;\mathbf{Q})$ est injective, il en est alors de même de $H_*(\Omega i;R)$.

D'autre part, puisque $(\Omega f)_R$ admet une section homotopique, nous avons la suite exacte courte d'algèbres de Lie qui est scindée

$$0 \longrightarrow \Pi(\Omega F)\otimes R \xrightarrow{\pi\Omega i\otimes R} \Pi(\Omega X)\otimes R \xrightarrow{\pi\Omega f\otimes R} \Pi(\Omega Y)\otimes R \longrightarrow 0 .$$

Par suite, nous obtenons aussi la suite exacte courte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Pi(\Omega F)\otimes R/R - \text{torsion} &\xrightarrow{(\overline{\Omega i})_\#} \Pi(\Omega X)\otimes R/R - \text{torsion} \\ &\xrightarrow{(\overline{\Omega f})_\#} \Pi(\Omega Y)\otimes R/R - \text{torsion} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

En appliquant le foncteur "algèbre enveloppante" nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} U(\Pi(\Omega F)\otimes R/R\text{-torsion}) & \longrightarrow & U(\Pi(\Omega X)\otimes R/R\text{-torsion}) & \longrightarrow & U(\Pi(\Omega Y)\otimes R/R\text{-torsion}) \\ \downarrow{\scriptstyle \bar h_{\Omega F}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar h_{\Omega X}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar h_{\Omega Y}} \\ H_*(\Omega F;R) & \xrightarrow{(\Omega i)_*} & H_*(\Omega X;R) & \xrightarrow{(\Omega f)_*} & H_*(\Omega Y;R) \end{array}$$

tel que :

- la ligne supérieure est une suite exacte courte d'algèbres de Hopf;
- $\bar h_{\Omega X}$ et $\bar h_{\Omega Y}$ sont des isomorphismes;
- $(\Omega f)_* \circ (\Omega i)_*$ est trivial, $(\Omega i)_*$ est injective et $(\Omega f)_*$ surjective.

Il en résulte donc que $\bar h_{\Omega F}$ est un isomorphisme et par suite que ΩF est $R-$décomposable.

7.4. *Preuve de* (iv) $\Longrightarrow$ (i).

Le théorème 2 implique que pour tout nombre premier p non inversible dans R , l'espace vectoriel

$$(\text{coker}(\Omega f_R)_*)\otimes \mathbf{Z}_p$$

est nul. Ce qui entraîne que $(\Omega f_R)_*$ est surjective.

D'autre part, l'isomorphisme ([12], th.1)

$$H_*(\Omega F, R) \cong T(s\widetilde{H}(Z,R) \otimes H(\Omega Y; R))$$

entraîne que nécessairement $H_*(\Omega Y; R)$ est sans $R-$torsion. Par suite $(\Omega f)_*$ admet une section linéaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. ADAMS et P. HILTON, On the chain algebra of a loop space, Comment. Math. Helv., 30 (1955), 305-330.

[2] D. ANICK, A rational homotopy analog of Whitehead's problem, Proceedings of the 1983 Nordic Conference, Lecture Notes in Math., 1183, Springer Verlag (1983).

[3] D. ANICK, Non commutative graded algebras and their Hilbert series, J. Algebra, 78 (1982), 120-140.

[4] D. ANICK, Homotopy exponent for spaces of category two, preprint (1987).

[5] D. ANICK, Hopf algebra up to homotopy, preprint (1988).

[6] H. BAUES, Commutator calculus and groups of homotopy classes, London Math. Soc. Lecture Notes series 50, Cambridge University Press (1981).

[7] H. BAUES, On the homotopy classification problem, 5, Homotopy theory of topological mapping cones, Bonn (1984).

[8] H. BAUES et J.M. LEMAIRE, Minimal models in homotopy theory, Math. Ann. 225-3 (1977), 219-242.

[9] A.K. BOUSFIELD et D.M. KAN, Homotopy limits, completions and localisations, Lecture Notes in Math. 304, Springer (1972).

[10] Y. FELIX, S. HALPERIN, C. JACOBSON, C. LOFWALL et J.C. THOMAS, The radical of the homotopy Lie algebra, Amer. J. Math., 110 (1988), 301-322.

[11] Y. FELIX et J.C. THOMAS, Sur l'opération d'holonomie rationnelle. Lecture Notes in Math., 1183, Springer-Verlag (1983), 136-169.

[12] Y. FELIX et J.C. THOMAS, The fibre-cofibre construction and its applications, J.P.A.A., 53 (1988), 59-69.

[13] S. HALPERIN et J.M. LEMAIRE, Suites inertes dans les algèbres de Lie graduées, Math. Scand., 61 (1987), 39-67.

[14] S. HALPERIN et J.M. LEMAIRE, Notions of category in differential algebra, Lecture Notes in Math., 1318, Springer-Verlag (1988), 99-123.

[15] J.M. LEMAIRE, "Autopsie d'un meurtre" dans une algèbre de chaînes, Ann. Sc. E.N.S., 4-11 (1978), 93-100.

[16] C.A. MCGIBBON et C.W. WILKERSON, Loop spaces of finite complexes at large primes, Proc. A.M.S., 96-4 (1986), 698-702.

[17] J.W. MILNOR et J.C. MOORE, On the structure of Hopf algebras, Ann. Math., 821 (1965), 211-264.

[18] J.C. MOORE, Differential homological algebra, Proc. Int. Cong. Math., I (1970), 1-5.

[19] J.C. MOORE et L. SMITH, Hopf algebras and multiplicative fibrations, II, Amer. J. Math.

[20] H. SCHEERER, On rationalized H and Co-H spaces with an appendix on decomposable H and Co-H spaces, Manus. Math, 51 (1984), 63-87.

[21] J.H.C. WHITEHEAD, On adding relations to homotopy groups, Ann. of Math., 2-42 (1941), 409-428.

[22] G.W. WHITEHEAD, Elements of homotopy theory, G.T.M., 61, Springer-Verlag (1978).

Manuscrit reçu le 16 mai 1988,
révisé le 27 février 1989.

Y. FELIX,
Université Catholique de Louvain
2, chemin du Cyclotron
1348 Louvain-la-Neuve (Belgique)
et
J.C. THOMAS,
Université de Lille I
UFR de Mathématiques
Cité Scientifique d'Annapes
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).