Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 1 (1989), 149-154

LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES DE DIMENSION 4 4/19 - PINCÉES

par Marina VILLE

Dans tout ce qui suit, M désigne une variété riemannienne compacte, orientable de dimension 4. Nous noterons

$\chi(M)$ sa caractérisque d'Euler–Poincaré

$\tau(M)$ sa signature

$b_1(M)$ et $b_2(M)$ ses premier et second nombres de Betti.

Elle sera dite k–pincée ($k \in \mathbf{R}$) si tout 2–plan P tangent à M a une courbure sectionnelle $\sigma(P)$ qui vérifie

$$k \leq \sigma(P) \leq 1 .$$

Le théorème de la sphère de Berger (*cf.* [Ch-E], p. 107) nous affirme que si M est 1/4–pincée, elle est homéomorphe à la sphère de même dimension ou bien elle est isométrique à un espace riemannien symétrique de rang un. Il se pose alors la question de descendre en dessous de 1/4 . Marcel Berger a montré (*cf.* [Be 2]) pour toute dimension paire $2n$, l'existence d'un réel théorique $\varepsilon_{2n} > 0$ vérifiant : si M^{2n} est une variété de dimension $2n$ qui est $(1/4 - \varepsilon_{2n})$–pincée, elle est homéomorphe à S^{2n} ou difféomorphe à un espace riemannien symétrique de rang un. Pour cela, il a généralisé la démonstration géométrique du théorème de la sphère (qui se trouve par exemple dans [Ch-E]) en s'appuyant sur le théorème de compacité de Gromov (*cf.* [G-L-P]). Dominique Hulin, quant à elle, est

---

Mots-clés : Tenseur de courbure – Théorème de la sphère – Nombres caractéristiques – Dimension 4.
Classification A.M.S. : 53 C.

partie d'une étude des formes harmoniques sur une variété pincée, à l'aide de la formule de Weitzenböck; ceci lui a permis de montrer que le second nombre de Betti d'une variété de dimension 4, $(1/4 \ -\varepsilon)-$pincée, reste inférieur ou égal à 1 pour un ε suffisamment petit calculable ($\varepsilon \simeq 2,5\cdot 10^{-4}$) (*cf.* [Hu 1]).

Signalons enfin, en dimensions 5 et 6, [Be 1] et [Hu 2].

Notre but ici est de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit M une variété riemannienne de dimension 4 orientable et dont la métrique est $k-$pincée, avec $k \geq 4/19$. Alors M est homéomorphe à la sphère S^4 ou au projectif complexe $\mathbb{C}P^2$.*

La constante 4/19 provient du résultat suivant de Bourguignon :

THÉORÈME 2 ([Bo]). — *Si M vérifie les hypothèses du théorème 1, sa forme d'intersection est définie.*

Le théorème 1 va alors résulter du

LEMME PRINCIPAL. — *Si M vérifie les hypothèses du théorème 1, on a l'inégalité*

$$|\tau(M)| < 1/2\ \chi(M) .$$

Nous montrerons alors, que sous notre hypothèse de pincement, $b_2(M) \leq 1$ (nous verrons que M est simplement connexe); les travaux de Freedman ([Fr]) nous permettront alors de conclure.

Remarque. — Seaman a amélioré le théorème 1 : il a remplacé $k = 4/19$ par $k = \dfrac{\sqrt{5}}{9+\sqrt{5}} \simeq 0,1990$ ([Sea 1]) et $k = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{2^{5/4}+1}{5^{1/2}}}} \simeq 0,1883$ ([Sea 2]) . Son travail consiste à améliorer le théorème 2 en montrant que la forme d'intersection de M reste définie pour ces pincements plus faibles. Il remarque ensuite que notre démonstration du lemme principal est toujours valable pour les pincements en question.

Une remarque de G. Thorbergsson a permis à l'auteur de simplifier un point de la démonstration; elle l'en remercie.

Démonstration du lemme principal. — Notre méthode est identique à celle que nous avions utilisée pour montrer l'inégalité $|\tau| \leq 1/3\ \chi$ sous l'hypothèse de pincement $-1/4 \geq \sigma \geq -1$ (voir [Vi 1] et [Vi 2]). Elle repose sur les formules de Chern donnant les nombres caractéristiques d'une variété riemannienne comme intégrales de fonctions polynômes du tenseur de courbure. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à [Bes] et [Vi 2].

Notons $R = u\mathrm{Id}_{\Lambda^2} + W^+ + W^- + Z$ la décomposition canonique du tenseur de courbure (voir [Bes]); d'après les formules de Chern, il nous suffit de montrer que la quantité

$$\Delta = 6u^2 - \frac{1}{3}\|W^+\|^2 + \frac{7}{3}\|W^-\|^2 - \|Z\|^2$$

est positive en tout point de M .

Plaçons-nous en un point p de M et notons V l'espace tangent à M en p . On rappelle que $\Lambda^2 V = \Lambda^+ V \oplus \Lambda^- V$ où $\Lambda^+ V$ (resp. $\Lambda^- V$) désigne le sous-espace propre de V pour la valeur propre $+1$ (resp. -1) de l'opérateur de Hodge. D'autre part, la grassmannienne des 2—plans de V s'identifie au quotient par $\{\pm 1\}$ de l'espace

$$\left\{\frac{H+K}{\sqrt{2}} \Big/ H \in \Lambda^+ V \ , \ K \in \Lambda^- V \ , \ \|H\| = \|K\| = 1\right\} .$$

Nous reprenons les notations de [Vi 1] : W^+ est un endomorphisme symétrique de Λ^+ donc il s'y diagonalise en une base orthonormée (H_1, H_2, H_3) .

i) Posons $W^+ H_i = w_i^+ H_i$; nous supposerons de plus que $w_1^+ \geq w_2^+ \geq w_3^+$.

ii) Soient $z_i \in \mathbf{R}$ et $K_i \in \Lambda^-$ vérifiant $\|K_i\| = 1$, $ZH_i = z_i K_i$.

iii) $w_i^- = \langle W^- K_i, K_i \rangle$.

Attention : les w_i^- ne sont pas des valeurs propres de W^- .

iv) $v_i = u + (w_i^+/2)$.

LEMME 1.1. — $4/19 \leq v_i \leq 1$.

Démonstration. — W^- est de trace nulle donc il existe un K dans $\Lambda^- V$ tel que $\langle W^- K, K\rangle = 0$. On pose $P_i = \dfrac{H_i + K}{\sqrt{2}}$ et on voit que

$$v_i = \frac{1}{2}\Big[\langle RP_i, P_i\rangle + \langle R * P_i, *P_i\rangle\Big] .$$

□

LEMME 1.2. — $\|Z\|^2 \leq 2\sum_{i=1}^{3} A_i^2$ où

$$A_i = \min\left[(1 - v_i - \frac{w_i^-}{2}), (v_i + \frac{w_i^-}{2} - \frac{4}{19})\right] \geq 0 .$$

Démonstration. — $\|Z\|^2 = 2\sum_{i=1}^{3}\|ZH_i\|^2 = 2\sum_{i=1}^{3}\langle ZH_i, K_i\rangle^2$. Or l'hypothèse de pincement appliquée à $\dfrac{H_i+K_i}{\sqrt{2}}$ s'écrit

$$\frac{4}{19} \le v_i + \frac{w_i^-}{2} \pm \langle ZH_i, K_i\rangle \le 1 ,$$

d'où le lemme. □

Puis un calcul très simple nous donne le

LEMME 1.3. — $6u^2 - \dfrac{1}{3}\|W^+\|^2 = 10u^2 - \dfrac{4}{3}\sum_{i=1}^{3} v_i^2$.

LEMME 1.4. — $\|W^-\|^2 \ge \dfrac{3}{2}\alpha^2$ *où* $\alpha = \max|w_i^-|$.

Démonstration. — Soit i_0 tel que $|w_{i_0}^-| = \alpha$; on complète K_{i_0} en une base orthonormée de $\Lambda^- V$, soit $(\underset{\substack{\| \\ K_{i_0}}}{Y_1}, Y_2, Y_3)$. Alors

$$\|W^-\|^2 \ge \sum_{i=1}^{3}\langle W^- Y_i, Y_i\rangle^2 \ge \frac{3}{2}\alpha^2$$

cette dernière inégalité résultant du fait que

$$0 = \mathrm{tr}(W^-) = \sum_{i=1}^{3}\langle W^- Y_i, Y_i\rangle .$$

□

Il résulte de ces quatre lemmes la minoration suivante :

$$(1) \qquad \Delta \ge \frac{7}{2}\alpha^2 + \frac{10}{9}(v_1+v_2+v_3)^2 - \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{3} v_i^2 - 2\sum_{i=1}^{3}\min\left[\left(1 - v_i - \frac{w_i^-}{2}\right)^2, \left(v_i + \frac{w_i^-}{2} - \frac{4}{19}\right)^2\right] .$$

Introduisons les fonctions réelles de variable(s) réelle(s) suivantes :

$$m(x) = \min\left(1-x, x-\frac{4}{19}\right)$$

$$F(x_1,x_2,x_3) = \frac{10}{9}\Big(\sum_{i=1}^{3} x_i\Big)^2 - \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{3} m(x_i)^2 - \frac{2}{5}\Big(\sum_{i=1}^{3} m(x_i)\Big)^2 .$$

On déduit alors de l'inégalité (1) :

$$\Delta \geq F(v_1, v_2, v_3)$$

et nous sommes ramenés à montrer que F est positive sur

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \ / \ 4/19 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1\} .$$

Pour cela on partitionne E en la réunion de 4 sous-convexes E_i , $i = 1, 2, 3, 4$, séparés par les hyperplans $x_i = 23/38 = 1/2(1 + 4/19)$: F est un polynôme concave sur chacun des E_i . On conclut alors la démonstration en vérifiant que F est positive sur les points extrémaux des E_i. $\square$

Nous pouvons maintenant achever la démonstration.

M étant de courbure sectionnelle strictement positive, le théorème de Synge ([Ch-E], p. 98) nous dit qu'elle est simplement connexe. Il en résulte :

i) $b_1(M) = 0$ et donc

$$b_2(M) = \tau(M) = \chi(M) - 2 > 2\tau(M) - 2 ,$$

d'où, d'après le Lemme Principal,

$$b_2(M) \leq 1 .$$

ii) $H^2(M, \mathbf{Z})$ est sans torsion d'après le théorème du coefficient universel, voir [Gr], p. 189 (*cf.* aussi [F-U]).

La forme d'intersection entière est donc ax^2 pour un $a \in \mathbf{Z}$; et par dualité de Poincaré, on a $a = \pm 1$. Le théorème de Freedman ([Fr]) nous permet alors de conclure.

CQFD

BIBLIOGRAPHIE

[Be 1] M. BERGER, Sur les variétés 4/23–pincées de dimension 5, C. R. Acad. Sci. Paris, 257 (1963), 4122-4125.

[Be 2] M. BERGER, Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de 1/4, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, 33-2 (1983), 135-150.

[Bes] A. BESSE, Géométrie riemannienne en dimension 4, Cedic Fernand Nathan, Paris, 1981.

[Bo] J.P. BOURGUIGNON, La conjecture de Hopf sur $S^2 \times S^2$, in Géométrie riemannienne en dimension 4, Séminaire Arthur Besse, Cedic Paris, 1981.

[Ch-E] J. CHEEGER, D. EBIN, Comparison theorems in riemannian geometry, North Holland, New York, 1975.

[F-U] D.S. FREED, K.K. UHLENBECK, Instantons and four-manifolfs, Springer-Verlag, New York, 1984.

[Fr] M. FREEDMAN, The topology of four-dimensional manifolds, Jour. of Diff. Geom., 17 (1982), 357-454.

[G-L-P] M. GROMOV, J. LAFONTAINE, P. PANSU, Structures métriques sur les variétés riemanniennes, Cedic Fernand Nathan, Paris.

[Gr] M. GREENBERG, Lectures in algebraic topology, Benjamin, New York, 1967.

[Hu 1] D. HULIN, Le second nombre de Betti d'une variété riemannienne $(1/4-\varepsilon)$−pincée de dimension 4, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, 33-2 (1983), 167-182.

[Hu 2] D. HULIN, Pinching and Betti numbers, Annals of Global analysis and geometry, 3 (1) (1985), 59-93.

[Sea 1] W. SEAMAN, On four-manifolds which are positively pinched, à paraître aux Annals of Global analysis and geometry.

[Sea 2] W. SEAMAN, A pinching theorem for four-manifolds, preprint, University of Iowa.

[Vi 1] M. VILLE, Sur les variétés riemanniennes $1/4$−pincées de dimension 4 et de courbure négative, C.R. Acad. Sci. Paris, 300 (1985), 397-400.

[Vi 2] M. VILLE, On $1/4$−pinched 4-dimensional manifolds of negative curvature, Annals of Global analysis and geometry, 3 (3) (1985), 329-336.

Manuscrit reçu le 13 mai 1985,
révisé le 29 août 1988.

Marina VILLE,
Département de Mathématiques
Université de Nancy I
BP 239
54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex (France).