

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHRISTOPHE BAVARD

PIERRE PANSU

**Sur l'espace des surfaces à courbure et aire bornées**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 38, n° 1 (1988), p. 175-203

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1988\\_\\_38\\_1\\_175\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_1_175_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR L'ESPACE DES SURFACES A COURBURE ET AIRE BORNEES

par Ch. BAVARD & P. PANSU

---

Dans [3] figure le résultat suivant :

0.1. — *Si une métrique riemannienne sur la sphère  $S^2$  a sa courbure comprise entre  $-1$  et  $+1$ , et une aire  $a \leq 4\pi(1 + \sqrt{2})$ , alors son rayon d'injectivité est au moins égal à*

$$\left(\pi^2 - \frac{1}{32}(a - 4\pi)^2\right)^{1/2}.$$

L'estimée est optimale pour toute valeur de  $i \leq \pi$  : la surface suivante (notée  $\mathcal{S}(i)$  dans [3]), a un rayon d'injectivité égal à  $i$  et une aire égale à

$$4\pi + (32(\pi^2 - i^2))^{1/2}.$$

La surface  $\mathcal{S}(i)$  est de révolution, de classe  $C^1$ , obtenue en recollant deux calottes sphériques à un collier de courbure  $-1$ , contenant une géodésique fermée de longueur  $2i$ .

Considérons l'espace  $M_A^0$  des sphères  $S^2$  d'aire inférieure à  $A$  et dont la courbure satisfait

$$\sup |K| = 1.$$

---

*Mots-clés* : Graphe - Compactification - Espace de Teichmüller - Inégalité isopérimétrique.

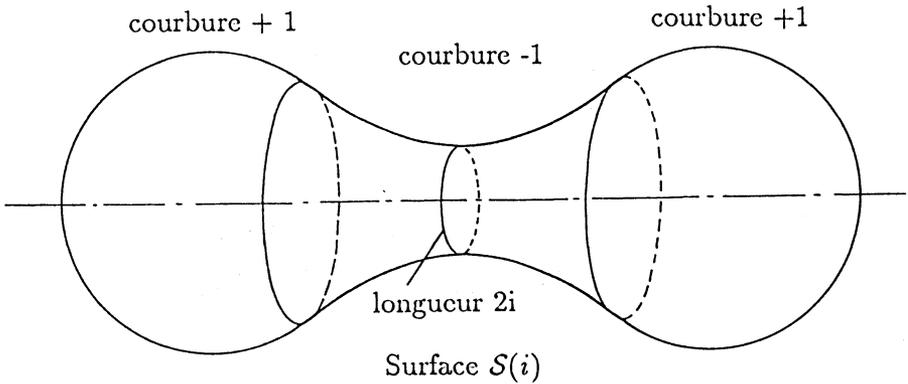


Figure 1

Il résulte de l'énoncé 1 et du principe de compacité de M. Gromov ([9], page 130) que, si  $A < 4\pi(1 + \sqrt{2})$ , l'espace  $M_A^0$  est compact. En effet, connaissant un minorant du rayon d'injectivité, on estime aisément le diamètre d'une surface en fonction de l'aire et de la courbure : chaque boule de rayon  $i$  a une aire au moins égale à  $2\pi(1 - \cos i)$ , d'où

$$\text{diamètre} \leq \frac{a}{2\pi(1 - \cos i)}.$$

(En fait, il faut admettre dans  $M_A^0$  certaines métriques de classe  $C^1$  seulement, mais nous négligerons ce point dans la suite).

Lorsque  $A \geq 4\pi(1 + \sqrt{2})$ , il n'y a plus compacité. L'espace  $M_A^0$  contient en effet toutes les surfaces  $S(i)$ ,  $i > 0$ , dont le diamètre tend vers l'infini.

**0.2.** — Lorsque le rayon d'injectivité  $i$  est petit, la surface  $S(i)$  est "longue et mince". Un observateur situé assez loin verrait peu de différence entre  $S(i)$  et un segment de droite de longueur  $\log(1/i)$ . Voici un exemple un peu plus élaboré : à une sphère unité privée de trois calottes, recollons trois demi-colliers à courbure  $-1$  bordés par une géodésique de longueur  $2i$  (voir figure 2). Assemblons plusieurs exemplaires de la surface obtenue le long des petites géodésiques, et fermons éventuellement certaines petites géodésiques

au moyen de demi-surfaces  $S(i)$ . On construit ainsi une surface  $V$  de classe  $C^1$  dont la courbure prend les valeurs  $+1$  et  $-1$ .

En première approximation, la surface  $V$  ressemble à un grand graphe  $\Gamma$ , ses arêtes (resp. sommets) correspondant aux petites géodésiques (resp. morceaux de sphères) de la surface  $V$ .

Dans cet article, nous montrons qu'inversement, à toute surface, on peut attacher un graphe, une sorte de "squelette", qui l'approche au sens suivant : le graphe  $\Gamma$  est plongé dans la surface  $V$ , et tout point de  $V$  se trouve à distance au plus  $\delta$  de  $\Gamma$ , où le nombre  $\delta$  ne dépend que de la courbure et de l'aire. Cette description assez intuitive des surfaces dont l'aire et la courbure sont relativement petites par rapport au diamètre peut s'énoncer pompeusement en termes de "compactification" ou de "cône tangent à l'infini". Notons  $M_A^g$  l'ensemble des surfaces orientables de genre  $g$ , d'aire inférieure à  $A$ , dont la courbure satisfait  $\sup |K| = 1$ . Plongeons l'ensemble  $M_A^g$  dans l'espace "projectif" des espaces métriques à homothétie près muni de la topologie quotient de la distance dite de Hausdorff-Gromov définie dans [9], page 35. Rappelons la définition. Partant de la distance de Hausdorff ordinaire  $d^Z(X, Y)$  pour deux parties d'un espace métrique  $Z$ , on définit la distance de Hausdorff-Gromov  $\text{dist}_H(X, Y)$  entre deux espaces métriques abstraits  $X$  et  $Y$  comme la borne inférieure des distances  $d^Z(f(X), f(Y))$  sur tous les plongements isométriques  $f$  et  $g$  de  $X$  et  $Y$  dans un espace métrique  $Z$ .

L'adhérence de  $M_A^g$  est alors un sous-ensemble  $T_A^g$  de l'espace des graphes munis de métriques polyédrales (i.e., déterminées par les longueurs des arêtes). Il consiste en les graphes dont la connectivité  $\kappa$ , le nombre  $E$  d'extrémités (i.e., de sommets où aboutit une arête exactement) et le nombre  $I$  d'arêtes infinies satisfont

$$\kappa \leq g ,$$

$$E + \kappa \leq g + (1 - \sqrt{2}/2)(2 - 2g + A/2\pi) ,$$

$$I < 2 - 2g + A/2\pi, \quad \text{et, si } g = 0, \quad I > 2 - A/2\pi .$$

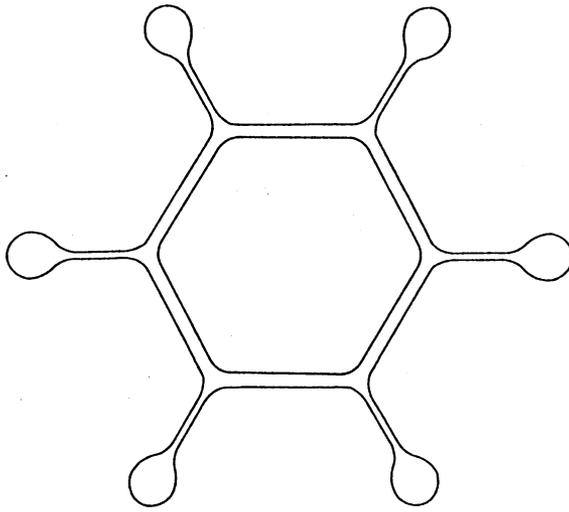
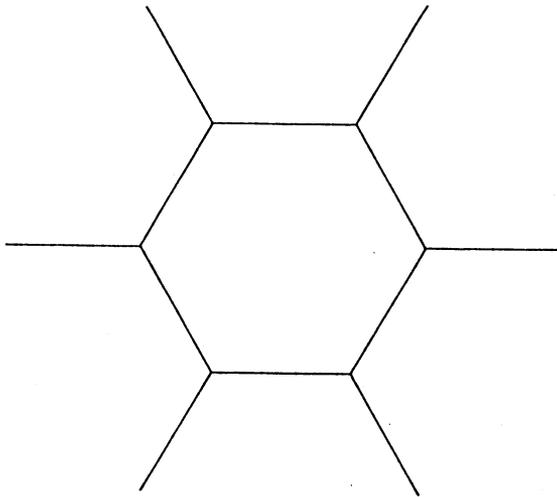
surface  $V$ graphe  $\Gamma$ 

Figure 2

**0.3. THÉORÈME** Compactification de l'espace des surfaces à homothétie près. — Soit  $V_j$  une suite de surfaces riemanniennes orientables dont l'aire et la courbure satisfont

$$\text{aire} \times \sup |K| \leq A.$$

Quitte à effectuer des homothéties sur les surfaces  $V_j$ , on peut trouver une sous-suite qui converge, au sens de Hausdorff-Gromov, ou bien vers une surface riemannienne, ou bien vers un graphe de  $T_A^g$ .

En fait, on montre même que l'ensemble  $M_A^g$  est contenu dans un voisinage tubulaire de largeur bornée du cône  $T_A^g$ , comme l'indique la figure 3.

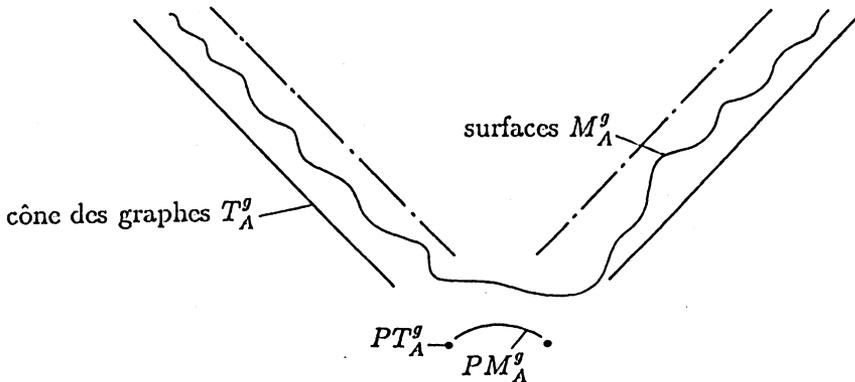


Figure 3

En particulier, l'espace des graphes  $T_A^g$  est le "cône tangent à l'infini" de l'espace métrique  $M_A^g$ . Par définition, le cône tangent à l'infini d'un espace métrique  $(X, d)$  est la limite au sens de Hausdorff-Gromov, quand elle existe, des espaces métriques homothétiques  $(X, \epsilon d)$ , lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

En quelque sorte, le théorème 0.3 réalise le programme de M. Gromov dans [9], page 151. (Noter que les "niveaux critiques" de l'aire ne sont pas seulement des multiples de  $4\pi$  mais des combinaisons de  $2\pi$  et de  $2\pi(1 + \sqrt{2})$ ).

Considérons le sous-ensemble  $M_g$  de  $M_A^g$  formé des surfaces orientables à courbure  $-1$ , de genre  $g \geq 2$ . Son cône tangent

consiste en tous les graphes sans extrémités libres, de connectivité inférieure ou égale à  $g$ . Ceux-ci forment un complexe simplicial de dimension  $3g - 3$ . Noter que la dimension de  $M_g$  est  $6g - 6$ . Il y a donc perte de la moitié des paramètres. Cela apparaît clairement dans la paramétrisation de l'espace de Teichmüller obtenue par la méthode des pantalons (voir [5] et [13]). Un point de l'espace de Teichmüller est la donnée d'une surface à courbure  $-1$  portant un système de  $3g - 3$  classes d'isotopie de courbes fermées simples, deux à deux disjointes. Ses coordonnées seront la longueur des géodésiques dans les classes d'isotopie fixées (prises en compte dans notre cône tangent à l'infini - ce sont les longueurs des arêtes du graphe approchant la surface), et un "angle de rotation" autour de chacune de ces géodésiques, qui joue un rôle négligeable dans la distance de Hausdorff-Gromov.

Les auteurs tiennent à remercier le referee, qui a décelé de nombreuses erreurs et suggéré diverses simplifications. Ils sont reconnaissants à S. Gallot de l'intérêt qu'il a porté à leur travail. Ils lui doivent en particulier les idées du paragraphe 1.6.

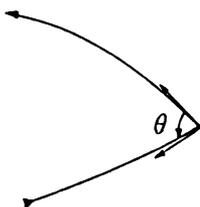
## 1. Décomposition de Jorgensen-Margulis.

1.1. — Dans cette section, on travaille sur une surface orientable fixe  $V$  à courbure entre  $-1$  et  $+1$  et d'aire finie. Nous devons attacher à  $V$  un graphe qui l'approche au sens de la distance de Hausdorff-Gromov. Pour cela, nous allons démontrer que  $V$  admet une décomposition à la Jorgensen-Margulis (voir [13]) : les points où le rayon d'injectivité est petit se rassemblent en anneaux longs et minces, les points où le rayon d'injectivité est grand se rassemblent en paquets dont le nombre et le diamètre sont bornés en fonction de l'aire.

La première étape consiste à montrer que, à moins que  $V$  soit un tore de petit diamètre, le rayon d'injectivité, en tout point où il est inférieur à  $\pi/8$ , est atteint par un *unique* lacet géodésique. Il en résultera immédiatement que chaque composante du lieu des points où le rayon d'injectivité est inférieur à  $\pi/8$  est un anneau.

**1.2. DÉFINITION.** — Un biangle est un lacet formé de deux arcs de géodésique. Il est dit simple si les deux arcs sont disjoints et sans points doubles.

Les surfaces et les biangles seront toujours orientés. On peut alors définir l'angle intérieur  $\theta$  à l'un des sommets comme l'angle entre le vecteur tangent de la courbe sortante et l'opposé du vecteur tangent de la courbe entrante (voir la figure 4).



Convention pour l'angle intérieur  
Figure 4

L'angle intérieur est bien défini modulo  $2\pi$  et nous choisissons la détermination comprise entre 0 et  $2\pi$ . Remarquer que, si on change l'orientation de la surface ou du biangle, un angle intérieur  $\theta$  devient  $2\pi - \theta$ .

**1.3. Procédé de raccourcissement de Birkhoff [4].** — Soit  $c_0$  une courbe fermée simple sur une surface orientée. On choisit une subdivision assez fine (relativement au rayon d'injectivité) le long de  $c_0$ . Deux points consécutifs de cette subdivision sont joints par un unique segment géodésique. Notons  $c_1$  la ligne brisée fermée obtenue en mettant ces segments bout à bout. On obtient  $c_2$  en subdivisant  $c_1$  par les milieux des segments, et ainsi de suite.

Trois situations sont possibles pour la suite de courbes  $(c_i)_i$  :

- les  $c_i$  s'en vont à l'infini
- les  $c_i$  convergent vers un point
- les  $c_i$  convergent vers une géodésique fermée.

Lorsque la courbe  $c_0$  est localement convexe, la courbe  $c_i$  est toute entière d'un même côté de  $c_0$ , i.e., borde avec  $c_0$  un anneau.

Remarquer qu'un biangle est localement convexe si et seulement si les angles intérieurs sont ou bien tous inférieurs à  $\pi$ , ou bien tous supérieurs à  $\pi$ .

1.4. LEMME. — (i) Un lacet géodésique simple, de longueur  $L$  et d'angle intérieur  $\theta$  satisfait

$$L \geq \min\{2\pi, -2 \log \operatorname{tg}(\theta/4)\};$$

(ii) un biangle simple de longueur totale  $\ell = \ell_1 + \ell_2$  et d'angle intérieur  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  inférieur ou égal à  $\pi$  satisfait

$$\ell \geq \min\{2\pi, -4 \log \operatorname{tg}(\theta/8)\}.$$

L'égalité a lieu pour des lacets ou biangles situés sur une pseudo-sphère (quotient du plan hyperbolique par un groupe de rotations paraboliques), si  $\theta$  est grand, ou bien sur la sphère standard, si  $\theta$  est petit.

On se ramène d'abord au cas où le lacet (resp. biangle) borde un anneau d'aire finie. On utilise le procédé de raccourcissement de Birkhoff. Le lacet (resp. biangle) donné  $c$  étant convexe, le procédé fournit des courbes  $c'$  de longueur inférieure à  $\ell$ , et qui bordent avec  $c$  des anneaux croissants. Si on suppose  $\ell < 2\pi$ , comme  $K \leq 1$ , le lemme d'homotopie de W. Klingenberg (cf. [11] ou [8] page 205) garantit que l'aboutissement du procédé ne peut être un point. Ou bien les courbes  $c'$  partent à l'infini, c'est-à-dire, la courbe  $c$  borde un anneau d'aire finie, ou bien on aboutit à une géodésique fermée  $c''$ , et on se ramène au cas précédent comme suit : on découpe la surface  $V$  le long de  $c''$  pour y recoller un anneau d'aire finie, à bord géodésique, et dont la courbure est comprise entre  $-1$  et  $+1+\epsilon$  avec  $\epsilon$  arbitrairement petit (voir [1]).

Découpons cet anneau le long de rayons géodésiques issus des sommets de  $c$  (dans le cas du biangle, ces rayons sont nécessairement disjoints). On obtient ainsi un ou deux triangles géodésiques infinis. On les approche par des triangles finis, auxquels le théorème de comparaison d'Alexandrov-Toponogov s'applique (voir [7], page 42) : le côté fini est plus long que le côté correspondant du triangle du plan hyperbolique ayant les mêmes angles.

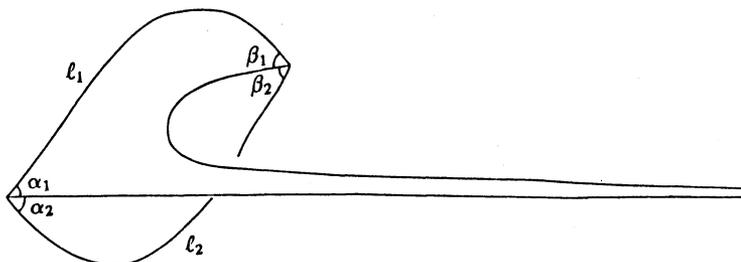


Figure 5

Si ces angles sont  $\alpha_1, \beta_1$  et  $\alpha_2, \beta_2$  (voir figure 5), on a donc montré que

$$\ell_i \geq -\log \operatorname{tg}(\alpha_i/2) - \log \operatorname{tg}(\beta_i/2),$$

et on conclut en utilisant l'inégalité

$$-\log \operatorname{tg}(\alpha/2) - \log \operatorname{tg}(\beta/2) \geq -2 \log \operatorname{tg}(\alpha + \beta/4),$$

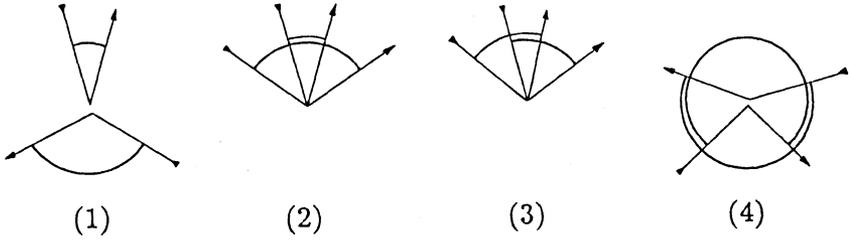
vraie dès que  $\alpha + \beta \leq \pi$ .  $\square$

**1.5. LEMME.** — *Considérons deux lacets géodésiques simples, de même origine  $x$ , de longueur inférieure à  $2\pi$ . On suppose que  $x$  est leur seul point commun. S'ils ne se traversent pas au voisinage de  $x$  (i.e., les angles au sommet ne se chevauchent pas), alors la longueur totale  $\ell = \ell_1 + \ell_2$  satisfait*

$$\ell \geq -4 \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) \sim 3,5255 \dots$$

Sur le cercle unité tangent en  $x$ , chaque lacet détermine un intervalle de longueur égale à l'angle intérieur. Il y a quatre configurations possibles (voir figure 6) : (1) deux intervalles disjoints; (2) un intervalle contenu dans l'autre; (3) deux intervalles qui se chevauchent; (4) un double chevauchement. Par hypothèse, on exclut la configuration (3). Les cas (4) et (2) se ramènent au cas (1) par changement d'orientation de l'un ou des deux lacets.

Notons  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles intérieurs des lacets  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Par hypothèse, le biangle  $b$  formé par  $\ell_1^{-1}$  suivi de  $\ell_2^{-1}$  est simple, et ses angles intérieurs sont  $\theta_3$  et  $\theta_4$  comme indiqué sur la figure 7.



Configurations de deux lacets  
Figure 6

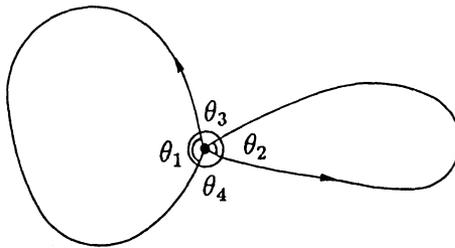


Figure 7

En particulier,

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2\pi.$$

Si  $\theta_1 + \theta_2 \leq \pi$ , l'inégalité (i) du lemme 1.4 donne

$$\begin{aligned} \ell &\geq -2 \log \operatorname{tg}(\theta_1/2) - 2 \log \operatorname{tg}(\theta_2/2) \\ &\geq -4 \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right). \end{aligned}$$

Sinon, l'inégalité (ii) du lemme 1.4 s'applique au biangle d'angles intérieurs  $\theta_3$  et  $\theta_4$  et, de nouveau,

$$\ell \geq -4 \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

□

**1.6. Transport des lacets.** — Dans de nombreux arguments, nous aurons besoin de transporter un lacet géodésique en déplaçant son point base. Ceci est possible grâce aux remarques suivantes (pour plus de détail, voir [1]). Fixons un nombre  $\epsilon < \pi$ , et notons

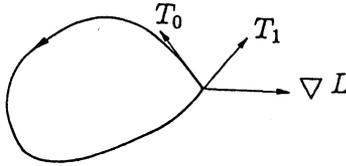
$\Lambda_\epsilon$  l'ensemble des lacets géodésiques de  $V$  de longueur strictement inférieure à  $\pi$ , c'est-à-dire le sous-ensemble du fibré tangent  $p : TV \rightarrow V$  défini par les relations

$$|v| < \epsilon, \quad \text{et} \quad \exp_{p(m)}(v) = m.$$

Comme la courbure est inférieure à 1,  $\Lambda_\epsilon$  est une sous-variété et  $p : \Lambda_\epsilon \rightarrow V$  est une submersion. Un chemin  $c(t)$  dans  $V$  peut donc se relever dans un feuillet de  $\Lambda_\epsilon$  tant que la longueur du lacet  $p^{-1}(c(t))$  reste inférieure à  $\epsilon$ .

La fonction longueur  $L : \Lambda_\epsilon \rightarrow ]0, \epsilon[$  est lisse sur  $\Lambda_\epsilon$  et son gradient  $\nabla L$  au point  $\gamma$  s'obtient comme suit : notons  $T_0$  et  $T_1$  les vecteurs unitaires tangents à  $\gamma$  à l'origine et à l'extrémité (voir figure 8). Alors

$$p_* \nabla L = T_1 - T_0.$$



Gradient de la fonction  $L$

Figure 8

En particulier, les points critiques de la fonction  $L$  correspondent aux géodésiques fermées de longueur inférieure à  $\epsilon$ . Comme la fonction  $L$  est propre, la théorie de Morse permet de conclure que les composantes connexes de  $\Lambda_\epsilon$  sont des tores ou des cylindres. Nous devons cette observation à S. Gallot. Remarquer enfin que  $|\nabla L| \leq 2$ .

**1.7. LEMME.** — *S'il existe dans  $V$  deux courbes fermées d'intersection non nulle dans  $H_1(V, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ , dont les longueurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$  satisfont*

$$\ell_1 + \ell_2 \leq \frac{\pi}{2},$$

alors la surface  $V$  est un tore de diamètre inférieur à  $3(\ell_1 + \ell_2)$ .

Quitte à les remplacer par la courbe de longueur minimum dans leur classe d'homologie, on peut supposer que les courbes  $c$  et  $c'$  sont des géodésiques fermées paramétrées par leur abscisse curviligne, avec origine à un point commun. On peut aussi supposer que  $c$  et  $c'$  n'ont qu'un point commun. Considérons  $c$  comme un lacet géodésique d'origine  $c(0) = c'(0)$ . On peut le déformer continûment en un lacet géodésique  $\gamma_t$ , d'origine  $c'(t)$ , tant que la longueur de  $\gamma_t$  reste inférieure à  $\pi$ .

Supposons que  $\ell_1 + \ell_2 \leq \frac{\pi}{2}$ . Comme

$$\text{longueur}(\gamma_t) \leq \ell_1 + 2t,$$

le lacet  $\gamma_t$  est défini pour tout  $t \leq \ell_2$ . Montrons que  $\gamma_t$  est simple et disjoint de  $c$ . Notons  $\tau$  le plus petit  $t$  tel que  $\gamma_t$  n'est pas simple. Nécessairement,  $\gamma_\tau$  repasse par son origine (figure 9) et se divise en deux lacets simples dont la somme des angles intérieurs (pour une orientation idoine) est inférieure à  $\pi$ .

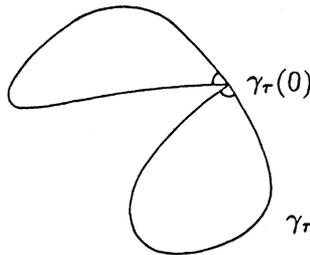


Figure 9

Le lemme 1.4 entraîne que

$$\text{longueur}(\gamma_\tau) \geq -4 \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) > \pi,$$

d'où contradiction. De même, remarquons que, pour  $t$  petit,  $c$  et  $\gamma_t$  sont disjoints. Sinon, le champ de Jacobi

$$J(s) = \frac{\partial}{\partial t} \gamma_t(s)$$

s'annulerait en deux points de  $c$ . Avec la borne  $K \leq 1$  sur la courbure, cela entraînerait que  $\ell_2 \geq \pi$ , d'où contradiction. Par

conséquent, au premier instant  $\tau$  où  $\gamma_t$  et  $c$  ne sont pas disjoints, on doit avoir  $\gamma_\tau(0) = c'(\tau) \in c$ , d'où  $\tau = \ell_2$ .

Si les courbes  $\gamma_\tau$  et  $c$  ne sont pas confondues, elles forment un biangle simple avec deux angles intérieurs dont la somme est inférieure à  $\pi$  (figure 10).

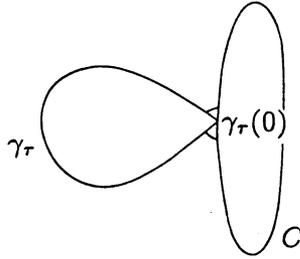


Figure 10

De nouveau, on conclut que

$$\text{longueur}(\gamma_\tau) + \ell_1 \geq -4 \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right),$$

d'où contradiction. Par conséquent,  $\gamma_\tau$  coïncide avec  $c$  (comme  $V$  est orientable, il est impossible que  $c$  soit homotope à  $c^{-1}$ , et donc  $\gamma_\tau \neq c^{-1}$ ). L'application

$$\begin{aligned} F : \mathbf{R}/\ell_1\mathbf{Z} \times [0, \ell_2] &\rightarrow V, \\ (s, t) &\rightarrow \gamma_t(s) \end{aligned}$$

passé au quotient en une application de degré  $\pm 1$  du tore  $T^2$  sur  $V$ . En effet, le point  $c(0)$  est atteint une fois seulement, et le degré  $y$  est égal au nombre d'intersection de  $c$  et  $c'$ . Ceci entraîne que  $\chi(V) \geq 0$  (si  $\chi(V) < 0$ , tout sous-groupe abélien de  $\pi_1(V)$  est contenu dans un groupe cyclique, toute application de  $T^2$  dans  $V$  se rétracte sur une courbe, donc a un degré nul). Comme  $H_1(S^2, \mathbf{Z}) = 0$ , il faut bien que  $V$  soit un tore. L'application  $F$  étant surjective, tout point est à une distance au plus  $\ell_2 + \frac{1}{2}(\ell_1 + 2\ell_2)$ , donc le diamètre de  $V$  est inférieur à  $2\ell_1 + 4\ell_2$ , mais on peut aussi intervertir  $\ell_1$  et  $\ell_2$ .  $\square$

Nous pouvons conclure

**1.8. PROPOSITION.** — *En tout point de  $V$  où le rayon d'injectivité est inférieur à  $\frac{\pi}{8}$ , celui-ci est réalisé par un seul lacet géodésique, à moins que  $V$  ne soit un tore de diamètre inférieur à  $3\pi/4$ .*

Soit  $x$  un point où le rayon d'injectivité  $i$  est inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ . Remarquons qu'un lacet géodésique minimisant (i.e., dont la longueur est égale à  $2i$ ) est simple, et que deux lacets géodésiques minimisants sont simples et ont  $x$  comme seul point commun. S'il y avait un point d'intersection, il déterminerait 4 arcs sur les lacets. En prenant les deux plus courts, on construit un biangle de longueur  $< 2i < \pi$ . Le procédé de raccourcissement de M. Gromov ([6], page 15) doit fournir un lacet géodésique en  $x$ , car il est impossible de raccourcir ce biangle sur un point (lemme d'homotopie de W. Klingenberg, [8], page 205).

S'il y a effectivement deux lacets minimisants en  $x$ , ou bien ils ne se traversent pas autour de  $x$ , et le lemme 1.5 s'applique, et  $4i \geq -4 \log \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) > \pi$ , ou bien ils se traversent. Alors leur nombre d'intersection est non nul, et le lemme 1.7 donne  $4i \geq \frac{\pi}{2}$ .  $\square$

Dans les deux paragraphes suivants, on démontre que deux géodésiques fermées assez courtes sont disjointes.

**1.9. LEMME.** — *Le rayon d'injectivité normal  $\nu$  à une géodésique fermée de longueur  $l$  est au moins égal à*

$$\frac{\pi}{4} - \ell$$

*(à moins que  $V$  ne soit un tore de diamètre inférieur à  $6\nu + 3\ell$ ).*

S'il est inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ , le rayon d'injectivité normal  $\nu$  à une géodésique fermée  $c$  est la moitié de la longueur d'un "pont", arc de géodésique dont les deux extrémités reposent perpendiculairement sur  $c$ . Un pont minimisant  $p$  est simple et ne rencontre  $c$  qu'en ses extrémités. Si les deux extrémités reposent du même côté de  $c$ , alors  $p$  et  $c$  forment un biangle simple ayant deux angles intérieurs égaux à  $\frac{\pi}{2}$ . Le lemme 1.4 s'applique, et

$$\frac{\ell}{2} + 2\nu \geq -4 \log \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}).$$

Sinon,  $p$  fermé par une portion de  $c$  forme une courbe fermée ayant un nombre d'intersection avec  $c$  non nul, donc le lemme 1.7 donne

$$\ell + \ell + 2\nu \geq \frac{\pi}{2}.$$

Dans les deux cas,  $\nu \geq \frac{\pi}{4} - \ell$ . □

**1.10. COROLLAIRE.** — *Si deux géodésiques fermées simples ont un point commun, alors leurs longueurs satisfont*

$$\ell_1 + \ell_2 \geq \frac{\pi}{2},$$

(à moins que  $V$  ne soit un tore de petit diamètre).

Soient  $c$  et  $c'$  deux géodésiques fermées, de longueurs satisfaisant  $\ell_1 + \ell_2 < \frac{\pi}{2}$ . Si  $c$  et  $c'$  ont un point commun,  $c'$  est contenue dans le voisinage tubulaire  $U$  de largeur  $\ell_2/2$  de  $c$ . Comme  $\ell_2/2 < \pi/4 - \ell_1$ , le lemme 1.9 affirme que  $U$  est difféomorphe à un anneau dont le groupe fondamental est engendré aussi bien par  $c$  que par  $c'$ . Divisons le biangle  $c'c^{-1}$  en une suite de biangles simples

$$b_i = (c_{[s_i, s_{i+1}]}) (c'_{[t_i, t_{i+1}]})^{-1}.$$

Comme  $c$  et  $c'$  sont homotopes, l'un des  $b_i$  est homotope à zéro dans  $U$ . D'après [2], cela entraîne que le diamètre de  $U$  est au moins égal à  $\pi$ . Or

$$\text{diamètre}(U) \leq \ell_1 + \ell_2 < \frac{\pi}{2},$$

d'où contradiction. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les propriétés annoncées en 1.1 de la décomposition de  $V$  en points où le rayon d'injectivité est grand ou petit. Notons  $V^{-\pi/8}$  l'ensemble des points où le rayon d'injectivité est inférieur à  $\frac{\pi}{8}$ . Avec les notations du paragraphe 1.6, il existe une composante connexe  $C$  de  $\Lambda_{\pi/8}$  telle que la projection  $p : C \rightarrow V^{-\pi/8}$  soit un difféomorphisme. On conclut que  $V^{-\pi/8}$  est une réunion disjointe d'anneaux. Voici un corollaire immédiat.

**1.11. COROLLAIRE.** — *Sur toute surface orientable, à courbure comprise entre  $-1$  et  $+1$ , d'aire finie, de caractéristique d'Euler*

non nulle, il existe un point où le rayon d'injectivité est au moins égal à  $\frac{\pi}{8}$ .

Comparer [10], [12]. La borne  $\frac{\pi}{8}$  n'est pas optimale. La borne optimale est sans doute

$$\log \frac{2 + \sqrt{7}}{\sqrt{3}},$$

atteinte pour l'unique "pantalon" à courbure  $-1$ , voir [1] où elle est établie pour les surfaces de genre 0.

Il reste à majorer le diamètre des composantes de l'ensemble des points où le rayon d'injectivité est grand.

**1.12. LEMME.** — Fixons un  $\epsilon < \frac{\pi}{8}$ . Notons  $V^+$  le lieu des points où le rayon d'injectivité est supérieur à  $\epsilon$ . Notons  $G$  la réunion des géodésiques fermées de longueur inférieure à  $2\epsilon$ . Pour toute composante connexe  $C$  de  $V \setminus G$ , on a

$$\text{diamètre}(C \cap V^+) \leq \text{const}(\epsilon) \text{ aire}(C).$$

Comme  $C$  est une surface à bord géodésique, deux points quelconques de  $C$  sont reliés par une géodésique contenue dans  $C$ . Il s'agit de majorer la longueur d'une telle géodésique  $c$  minimisante, dont les extrémités sont dans  $C^+ = C \cap V^+$ .

Soit  $\sigma$  une composante de  $c \setminus V^+$ . Montrons que

$$\text{longueur}(\sigma) \leq 2\epsilon.$$

D'après la proposition 1.8, le rayon d'injectivité en tout point  $x$  de  $\sigma$  est réalisé par un unique lacet géodésique  $\gamma_x$ , qui dépend donc de manière  $C^\infty$  de  $x$ . Soit  $u$  un point de  $\sigma$  où le rayon d'injectivité est minimum, et notons  $T_0, T_1$  les deux vecteurs unitaires tangents au lacet  $\gamma_u$  en  $u$ . La différence  $T_1 - T_0$  est non nulle, car sinon,  $\gamma_u$  serait une géodésique fermée de longueur inférieure à  $2\epsilon$ , ce qui est exclu. Le vecteur non nul  $T_1 - T_0$  étant normal à  $\sigma$  en  $u$ , le lacet  $\gamma_u$  ne traverse pas  $\sigma$  au voisinage de  $u$ .

Cela entraîne que les lacets  $\gamma_x$ ,  $x \in \sigma$  se rencontrent tous deux à deux. C'est vrai pour  $x$  proche de  $u$ , et se conserve tout le long de  $\sigma$  par transversalité. En particulier, la distance (relative à  $C$ ) entre

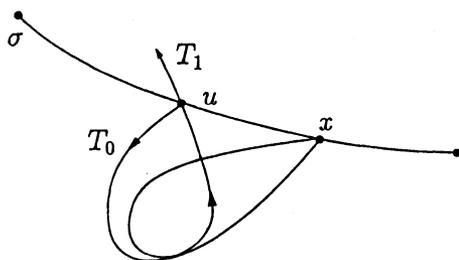


Figure 11

les extrémités de  $\sigma$  est inférieure à  $2\epsilon$ , d'où  $\text{longueur}(\sigma) \leq 2\epsilon$ , car  $c$  est minimisante.

On conclut que tout intervalle de longueur  $2\epsilon$  sur  $c$  rencontre  $V^+$ . On peut placer sur  $c$  des points en nombre longueur  $(c)/4\epsilon$ , deux à deux espacés d'au moins  $2\epsilon$ , et où le rayon d'injectivité est au moins égal à  $\epsilon$ . Les boules de rayon  $\epsilon$  centrées en ces points sont deux à deux disjointes. Sachant que la courbure est inférieure à 1, le Théorème de comparaison de Rauch minore l'aire de chacune des boules de rayon  $\epsilon$  centrées en ces points par  $2\pi(1 - \cos \epsilon)$ . Comme ces boules sont disjointes, on a

$$\text{longueur}(c) \leq \frac{4\epsilon}{2\pi(1 - \cos \epsilon)} \text{aire}(C) + 8\epsilon.$$

## 2. Construction d'un graphe attaché à une surface.

Dans cette partie, on fixe un  $\epsilon < \frac{\pi}{8}$ . On suppose toujours que  $V$  n'est pas un tore de diamètre inférieur à  $12\epsilon$ .

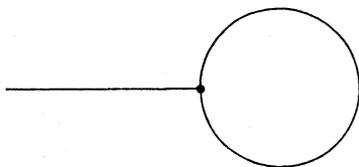
**2.1. Notation.** — On note  $V^-$  l'ensemble des points où le rayon d'injectivité est inférieur à  $\epsilon$ , et  $V^+ = V \setminus V^-$ . On notera aussi  $G = G(\epsilon)$  la réunion des géodésiques fermées de longueur inférieure à  $2\epsilon$ .

**DÉFINITION.** — Deux courbes simples sont dites courtement homotopes s'il existe une isotopie  $c_t$  entre elles telle que, pour tout  $t$ ,

$$\text{longueur}(c_t) \leq 2\epsilon.$$

2.3. — A peu de choses près, les classes d'isotopie courte sont exactement représentées par les géodésiques de longueur inférieure à  $2\epsilon$ . En effet, toute classe d'isotopie courte non triviale contient une géodésique courte. Inversement, deux géodésiques fermées courtement isotopes  $c$  et  $c'$  sont disjointes si  $\epsilon < \pi/8$  (lemme 1.10); elles bordent un anneau qui ne rencontre pas  $V^+$ . En effet, par tout point  $x$  de  $C$ , il passe une des courbes  $c_t$ . Celle-ci n'est pas homotope à zéro dans  $C$ . En la raccourcissant ([6], page 15), on obtient un lacet géodésique en  $x$ , de longueur inférieure à  $2\epsilon$ , donc le rayon d'injectivité en  $x$  est inférieur à  $\epsilon$ . Un tel anneau ne joue aucun rôle dans la construction qui va suivre. On remplace donc l'ensemble de toutes les géodésiques courtes  $G$  par un sous-ensemble  $G' = G'(\epsilon)$  contenant exactement un représentant de chaque classe d'isotopie courte. Par construction, chaque composante  $C$  de  $V \setminus G'$  rencontre  $V^+$ . En fait,  $C^+ = C \cap V^+$  sépare toutes les composantes du bord de  $C$ . En effet, s'il existe un chemin  $c$  reliant deux géodésiques  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $G'$ , le long duquel le rayon d'injectivité est toujours inférieur à  $\epsilon$ , alors, d'après 1.8, l'unique lacet géodésique minimisant  $\gamma_t$  au point  $c(t)$  réalise une isotopie courte de  $\gamma$  à  $\gamma'$ .

2.4. — La construction du graphe  $\Gamma$  attaché à surface  $V$  commence enfin. Les sommets de  $\Gamma$  sont les composantes de  $V \setminus G'$ . A chaque géodésique de  $G'$  correspond une arête reliant les sommets-composantes qu'elle sépare. Si une géodésique n'est adhérente qu'à une composante de  $V \setminus G'$ , il lui correspond une boucle (figure 12)



Boucle  
Figure 12

attachée au sommet correspondant à cette composante. Enfin, on attache à chaque sommet autant d'arêtes infinies que la composante correspondante - si elle n'est pas compacte - a de bouts. Noter que

la structure combinatoire de  $\Gamma$  peut varier avec la métrique de  $V$ , le paramètre  $\epsilon$ . Pour munir  $\Gamma$  d'une métrique polyédrale, il suffit de fixer les longueurs des arêtes. Pour cela, on choisit un point  $x(C)$  dans  $C \cap V^+$  pour chaque composante  $C$ . A l'arête de sommets  $C$  et  $C'$ , correspondant à la géodésique fermée  $c$ , on affecte une longueur égale à la borne inférieure des longueurs des chemins reliant  $x(C)$  à  $x(C')$  et rencontrant  $c$ . Dans la suite, on désignera par  $\Gamma$  la donnée d'un graphe muni d'une métrique polyédrale.

2.5. — Il y a des contraintes sur le graphe  $\Gamma$ , i.e., des inégalités entre d'une part, le genre et l'aire de la surface  $V$ , et d'autre part, les nombres  $F$  d'arêtes finies  $I$  d'arêtes infinies  $S$  de sommets  $\kappa = F - S + 1$ . Le nombre  $\kappa$  s'appelle la connectivité (ou le nombre de cycles) du graphe.

La première contrainte est purement combinatoire. Notons  $d(v)$  le degré d'un sommet  $v$  du graphe  $\Gamma$ , i.e., le nombre d'arêtes qui en sont issues, notons  $g(v)$  le genre de la composante correspondante de  $V \setminus G'$ . On vérifie que

$$\sum_v d(v) = 2F + I,$$

d'où

$$\chi(V) = \sum_C \chi(C) = \sum_v (2 - 2g(v) - d(v))$$

soit

$$2 - 2g(V) - I = 2S - 2F - I - 2 \sum_v g(v).$$

Il vient

$$(*) \quad g(V) = \sum_v g(v) + \kappa \geq \kappa.$$

2.6. — D'autre part, la formule de Gauss-Bonnet donne

$$\text{aire}(V) \geq |2\pi\chi(V)|,$$

ce qu'on peut écrire

$$2\pi I \leq \text{aire}(V) + 2\pi(2 - 2g(V)),$$

et, si le genre est nul,

$$2\pi I \geq 4\pi - \text{aire}(V).$$

Mais on peut avoir une inégalité plus fine en combinant la formule de Gauss-Bonnet avec les résultats de [3] relatifs au volume minimal de  $\mathbf{R}^2$ . Notons  $E$  le nombre de sommets de  $\Gamma$  de degré 1. Parmi ceux-ci,  $E_0$  ont un genre nul (le genre d'un sommet est défini en 2.5), et  $E_1$  ont un genre non nul, soit

$$E = E_0 + E_1.$$

Les  $E_0$  composantes  $C$  de degré 1 et de genre nul sont homéomorphes à des disques. La surface  $V_0$  obtenue en retirant ces disques a même genre que  $V$ . La formule de Gauss-Bonnet donne

$$\begin{aligned} \text{aire}(V_0) &\geq -2\pi(2 - 2g(V) - E_0 - I) \\ &= -2\pi\chi(V) + 2\pi E_0. \end{aligned}$$

Pour  $i > 0$ , notons  $MV(i)$  la borne inférieure des aires des disques à courbure comprise entre  $-1$  et  $+1$ , à bord géodésique de longueur inférieure à  $2i$  (d'après [3], remarque 17, on a

$$MV(i) = 2\pi + (8\pi^2 - 8i^2)^{1/2},$$

mais cette valeur exacte n'est pas indispensable). Chaque disque  $C$  de  $V \setminus G'$  a une aire supérieure ou égale à  $MV(\epsilon)$ , donc

$$\text{aire}(V) \geq -2\pi\chi(V) + (MV(\epsilon) + 2\pi)E_0.$$

Or, par la formule (\*) et la définition de  $E_1$ ,

$$E_1 \leq \sum_v g(v) = g(V) - \kappa,$$

d'où

$$E_0 \geq (E + \kappa - g(V))^+ = \max\{0, E + \kappa - g(V)\}.$$

On conclut que

$$(**) \quad (MV(\epsilon) + 2\pi)(E + \kappa - g(V))^+ \leq \text{aire}(V) + 2\pi\chi(V).$$

2.7. — Remarquer que l'utilisation faite dans le paragraphe précédent de la formule de Gauss-Bonnet n'est optimale que dans le cas où  $\chi(V_0) \leq 0$ . Dans le cas contraire, on a nécessairement

$$g(V) = \kappa = E_1 = 0, \quad E + I \leq 1.$$

Un graphe de connectivité nulle avec moins d'un bout, il n'y en a qu'un, c'est le graphe réduit à un point. Comme  $E = 0$ , [3] ne donne

rien de plus que la formule de Gauss-Bonnet :  $\text{aire}(V) \geq 4\pi$ , ce qu'on peut exprimer comme une contrainte sur le graphe  $\Gamma$  :

$$(***) \quad g(V) = 0 \Rightarrow I \geq 2 - \text{aire}(V)/2\pi.$$

**2.8. PROPOSITION.** — *Soit  $\epsilon < \pi/8$ . Pour toute surface orientable  $V$ , complète, d'aire finie, à courbure comprise entre  $-1$  et  $+1$ , de diamètre supérieur à  $12\epsilon$ , il existe un graphe  $\Gamma$  muni d'une métrique polyédrale, dont la distance de Hausdorff-Gromov à  $V$  est au plus*

$$\text{Const}(\epsilon) \text{aire}(V).$$

Sa connectivité  $\kappa$ , le nombre d'extrémités finies  $E$  et le nombre d'arêtes infinies  $I$  satisfont

$$(*) \quad \kappa \leq \text{genre}(V).$$

$$(**) \quad (MV(\epsilon) + 2\pi)(E + \kappa - g(V))^+ \leq \text{aire}(V) + 2\pi\chi(V).$$

$$(***) \quad g(V) = 0 \Rightarrow I \geq 2 - \text{aire}(V)/2\pi.$$

Plongeons le graphe abstrait  $\Gamma$  dans  $V$ , en envoyant chaque arête  $\alpha$  d'extrémités  $C$  et  $C'$ , correspondant à une géodésique fermée  $c$ , sur un segment géodésique de longueur minimum parmi les chemins de  $x(C)$  à  $x(C')$ , rencontrant la courbe  $c$ .

Tout point de  $V$  est proche d'un point de l'image  $\Gamma_V$  du plongement. En effet, si  $x \in V^-$ , le lacet géodésique minimisant en  $x$  est courtement isotope à une géodésique fermée  $c$  de  $G'$  (car celles-ci représentent toutes les classes d'isotopie courte, voir 2.3. Celle-ci rencontre un segment  $\gamma$  de  $\Gamma_V$ . Comme l'isotopie a lieu dans  $V^-$  (cf.paragraphe 2.3), le lacet court en  $x$  rencontre aussi  $\gamma$ , et

$$d(x, \Gamma_V) \leq \epsilon.$$

Si un point  $y$  de  $V^+$  est dans la composante  $C$  de  $V \setminus G'$ , alors, d'après le lemme 1.12,

$$d(y, x(C)) \leq \text{diamètre}(C \cap V^+) \leq \text{const}(\epsilon) \text{aire}(V),$$

d'où

$$\text{dist}_H(V, \Gamma_V) \leq \text{const}(\epsilon) \text{aire}(V).$$

Il reste à évaluer la distance de Hausdorff entre  $\Gamma$  (muni de la métrique polyédrale  $d_\Gamma$  définie en 2.4) et  $\Gamma_V$  (muni de la distance  $d_V$  induite par  $V$ ). Soient  $x, y$  deux points de  $\Gamma_V$ , soit  $\gamma$  une géodésique minimisante de  $x$  à  $y$ . Soient  $C_1 \ni x, C_2, \dots, C_k \ni y$  les composantes de  $V \setminus G'$  rencontrées par  $\gamma$ . Pour  $i = 2, \dots, k - 1$ , la courbe  $\gamma$  relie deux composantes du bord de  $C_i$ , donc (voir paragraphe 2.3) rencontre  $C_i^+ = C_i \cap V^+$ . On choisit un point  $z_i$  dans  $\gamma \cap C_i^+$ , et on note  $x_i = x(C_i)$ . Si, de plus,  $\gamma$  rencontre  $C_1^+$  (resp.  $C_k^+$ ), on choisit aussi un  $z_1 \in \gamma \cap C_1^+$  (resp. un  $z_k \in \gamma \cap C_k^+$ ), et on note  $x_0 = z_0 = x, x_1 = x(C_1)$  (resp.  $x_{k+1} = z_{k+1} = y, x_k = x(C_k)$ ). Sinon, on pose  $x_1 = z_1 = x$  (resp.  $x_k = z_k = y$ ).

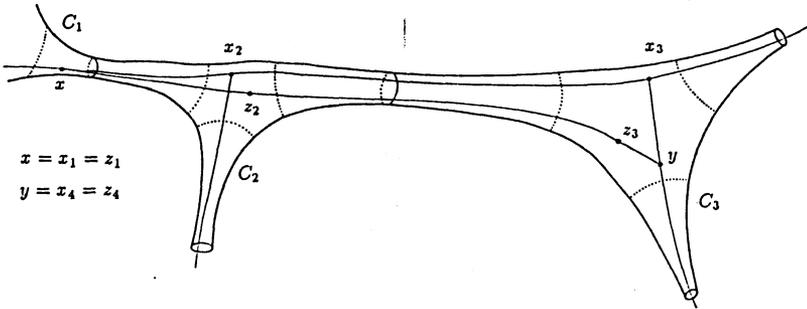


Figure 13

Dans tous les cas,

$$d_V(x, y) = \sum_i d(z_i, z_{i+1})$$

et

$$d_\Gamma(x, y) \leq \sum_i d(x_i, x_{i+1}),$$

d'où

$$0 \leq d_\Gamma(x, y) - d_V(x, y) \leq 2 \sum_i \text{diamètre}(C_i^+)$$

$$\leq 2 \sum_i \text{const}(\epsilon) \text{aire}(C_i)$$

(par le lemme 1.12)

$$\leq 2 \text{const}(\epsilon) \text{aire}(V).$$

□

### 3. Construction d'une surface attachée à un graphe.

**3.1. PROPOSITION.** — *Considérons l'espace  $M_A^g$  des surfaces orientables de genre  $g$ , complètes, à courbure comprise entre  $-1$  et  $+1$ , d'aire inférieure à  $A$ , muni de la distance de Hausdorff-Gromov (cf. paragraphe 0.2). Il admet un cône tangent à l'infini, c'est le sous-espace  $T_A^g$  de l'espace des graphes muni de la distance de Hausdorff-Gromov, défini par les conditions suivantes sur la connectivité  $\kappa$ , le nombre d'extrémités finies  $E$  et le nombre d'arêtes infinies  $I$ :*

- (i)  $\kappa \leq g$ ,
- (ii)  $E + \kappa + (1 - \sqrt{2}/2)I \leq (1 - \sqrt{2}/2)A/2\pi + (\sqrt{2} - 1)g + 2 - \sqrt{2}$ .
- (iii)  $I < 2 - 2g + A/2\pi$ , et si  $g = 0$ ,  $I > 2 - A/2\pi$ .

Les inégalités (i) à (iii) ne sont autres que (\*) à (\*\*), où on a fait  $\epsilon = 0$ , remplacé l'aire de  $V$  par  $A$  et la caractéristique d'Euler par  $2 - 2g - I$ . Cela signifie que, pour chaque surface  $V$  de  $M_A^g$ , le graphe  $\Gamma_\epsilon$  qui lui est attaché (proposition 2.8) est dans  $T_A^g$  pour  $\epsilon$  assez petit. On n'a pas besoin d'un  $\epsilon$  très petit. Considérons l'inégalité (\*\*), et remplaçons l'aire de  $V$  par  $A$ :

$$(+) \quad (MV(\epsilon) + 2\pi)(E + \kappa - g) < A + 2\pi(2 - 2g - I).$$

Sachant que, à  $A$  et  $g$  fixés, cette inéquation n'a qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers  $E$ ,  $\kappa$  et  $I$ , il existe un nombre  $\epsilon(A, g)$  tel que, si  $\epsilon < \epsilon(A, g)$ , l'inégalité (+) entraîne (ii). On conclut que l'espace des surfaces  $M_A^g$  se trouve dans un  $\delta$ -voisinage de l'espace des graphes  $T_A^g$ , où  $\delta \leq \text{const}A/\epsilon(A, g)$ .

Inversement, montrons que tout graphe de  $T_A^g$  est proche d'une surface de  $M_A^g$ . Etant donné un graphe  $\Gamma$ , on affecte chacune de ses arêtes finies  $\alpha$  d'un poids  $i(\alpha) > 0$  et chaque arête infinie d'un poids nul. La surface approchante comportera, pour chaque arête  $\alpha$  de  $\Gamma$ , un cylindre à courbure  $-1$ , de rayon d'injectivité  $i(\alpha)$ .

On va d'abord se ramener aux graphes tels que - les sommets sont de degré 1 ou 3, - tout sommet de degré 1 est contigu à un sommet de degré 3.

Si  $\Gamma$  a une arête finie dont un sommet  $v$  est de degré 2, on l'élimine, faisant ainsi disparaître le sommet  $v$ . Cela permet de faire disparaître tous les sommets de degré 2, sauf pour l'unique graphe comportant seulement deux arêtes infinies, et la boucle.

Ce procédé a amené tous les sommets de degré 1 à être contigus à un sommet de degré  $\geq 3$ , sauf si on a obtenu le graphe à une seule arête infinie.

Enfin, on ne peut pas faire grand chose pour le graphe réduit à un sommet de degré 0.

On vérifie aisément que chacun des quatre graphes exceptionnels (figure 14) est dans  $T_A^g$  si et seulement si on peut l'approcher par une surface de  $M_A^g$ .



Graphes exceptionnels

Figure 14

Si  $\Gamma$  a des sommets de degré  $d(v) > 3$ , on les éclate en  $d(v) - 2$  sommets de degré 3, sans augmenter la connectivité. On affecte chacune des  $d(v) - 3$  arêtes ainsi créées du poids  $\pi$ . On obtient un graphe pondéré  $\Gamma'$  qui va servir à construire une surface, voir figure 15.

A chaque sommet de degré 3 du graphe pondéré  $\Gamma'$ , on attache un pantalon  $P(i_1, i_2, i_3)$  (où  $i_1, i_2, i_3$  sont les poids des trois arêtes), surface orientable de genre 0, à courbure  $-1$ , à bord géodésique ayant trois composantes de longueur respective  $2i_1, 2i_2, 2i_3$  (remplacées par des pointes infinies si le poids est nul). On recolle deux à deux, par des isométries préservant l'orientation, les composantes des bords de ces pantalons, suivant les règles dictées par le graphe  $\Gamma'$  (cf. figure 2). On obtient une surface  $V_0$  à courbure  $-1$ , à bord géodésique ayant  $E$  composantes, de genre  $\kappa$ . Son aire est égale à  $2\pi(E + 2\kappa + I - 2)$ .

Il s'agit de boucher les  $E$  trous.

*Premier cas.* Si  $E \geq g - \kappa$ , on bouche  $g - \kappa$  trous avec un pantalon  $P(i, \pi, \pi)$  recollé à lui-même, et les  $E + \kappa - g$  trous restant avec un disque  $\mathcal{P}(i)$ , moitié de la surface  $\mathcal{S}(i)$  décrite au paragraphe 0.1. La surface  $V$  obtenue a un genre égal à  $g$  et une aire

$$\begin{aligned} \text{aire}(V) &\leq 2\pi(2g + E + I - 2) + MV(0)(E + \kappa - g) \\ &\leq A \end{aligned}$$

si le graphe  $\Gamma$  satisfait l'hypothèse (ii).

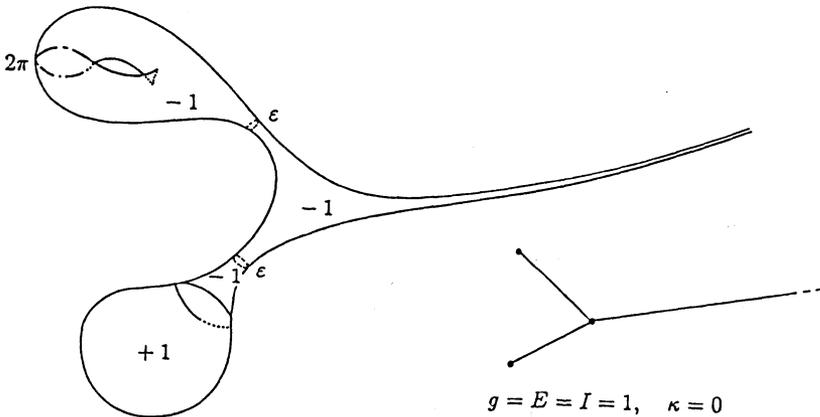


Figure 15

*Deuxième cas.* Si  $E < g - \kappa$ , on bouche les trous avec des surfaces orientables fermées, à courbure  $-1$ , dans lesquelles toute courbe de longueur inférieure à  $\pi$  est homotope à zéro ou au bord, et dont la somme des genres est égale à  $g - \kappa$ . La surface  $V$  obtenue a un genre égal à  $g$ , une courbure constante  $-1$ , elle a  $I$  pointes, donc son aire est

$$\begin{aligned} \text{aire}(V) &= -2\pi(2 - 2g - I) \\ &< A \end{aligned}$$

si le graphe  $\Gamma$  satisfait l'hypothèse (iii).

Il reste à montrer que presque toutes les métriques polyédrales sur  $\Gamma$  peuvent être obtenues par ajustement des poids  $i(\alpha)$ . Pour chaque sommet  $v$  on choisit un point  $x(v)$  de rayon d'injectivité maximum dans le pantalon  $P(i_1, i_2, i_3)$  ou le disque  $\mathcal{P}(i)$ . Ceci définit une métrique sur  $\Gamma'$  comme en 2.4 : la longueur d'une arête de sommets  $v$  et  $v'$  est la distance de  $v$  à  $v'$  dans la surface  $V(\Gamma')$ . D'après la proposition 2.8, on a

$$\text{dist}_H(\Gamma', V) \leq \text{const}(A, g).$$

Les longueurs des arêtes figurant initialement dans le graphe  $\Gamma$  peuvent prendre toutes les valeurs supérieures à  $D =$  deux fois la distance de  $x(v)$  au bord de  $P(\pi, \pi, \pi)$ . Inversement, les longueurs des arêtes créées artificiellement dans  $\Gamma'$  sont bornées par  $\Delta =$  deux fois la distance de  $x(v)$  au bord de  $P(\pi, 0, 0)$ .

Résumons toute la discussion. Notons  $T^+$  l'ensemble des graphes de  $T_A^g$  munis de métriques telles que toutes les arêtes ont une longueur supérieure à  $D$ . Notons  $N(A, g)$  le nombre maximum d'arêtes d'un graphe de  $T_A^g$  (on a  $N \leq 10(A + g)$ ). Si  $\Gamma \in T^+$ , on éclate ses points de degré  $> 3$ ; on affecte aux arêtes créées des longueurs inférieures à  $\Delta$ ; parmi les graphes obtenus  $\Gamma'$ , tous sont à distance de  $\Gamma$  inférieure à  $N\Delta$ , un au moins est à distance  $\leq \text{const}(A, g)$  d'une surface de  $M_A^g$ . Comme

$$\text{dist}_H(T_A^g, T^+) \leq N \cdot D,$$

on conclut que les espaces  $M_A^g$  et  $T_A^g$  ont une distance de Hausdorff-Gromov finie. Comme  $T_A^g$  est homothétique à lui-même, il est cône tangent à l'infini à  $M_A^g$ .  $\square$

**3.2. Remarque.** — L'espace  $T_A^g$  est stratifié. La plus grande strate a pour dimension le nombre maximum d'arêtes finies dans un graphe de  $T_A^g$  n'ayant pas de sommets de degré 2. A  $I$  fixé, i.e., dans une composante connexe de  $T_A^g$ , on calcule cette dimension comme suit. Si  $d(v) \neq 2$  pour tout sommet  $v$ , il vient

$$E + 3(S - E) \leq \sum_v d(v) = 2F + I,$$

soit

$$\begin{aligned} F &\leq 3\kappa + 2E - 3 + I \\ &= \kappa + 2(E + \kappa) - 3 + I \\ &\leq (1 + 2\sqrt{2})g + (2 - \sqrt{2})A/2\pi + (\sqrt{2} - 1)I + 1 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La dimension de la  $I$ -ième composante de  $T_A^g$  est la partie entière de ce nombre.

**3.3. Exemple.** — Considérons la composante  $I = 0$  de l'espace des graphes  $T_A^0$ , i.e., le cône tangent à l'infini de l'espace des sphères  $S^2$  à courbure  $|K| \leq 1$ , d'aire inférieure à  $A$ . Pour  $A < 4\pi$ , le cône est vide. Pour  $4\pi \leq A < 4\pi(1 + \sqrt{2})$ , il est réduit à un point. Ensuite, lorsque  $A$  passe par une valeur de la forme  $(3 + \sqrt{2})\pi E - 2\pi$ , où  $E$  est un entier  $\geq 2$ , il s'ajoute une strate de dimension  $2E - 3$ . Celle-ci (c'est l'espace des arbres ayant  $E$  extrémités libres) est homéomorphe au quotient de  $\mathbf{R}_+^{2E-3}$  par un groupe fini de permutations.

#### 4. Démonstration du théorème 0.3.

**4.1.** — Notons  $\mathbf{PM}_A^g$  l'espace des surfaces orientables, de genre  $g$ , satisfaisant

$$\text{aire} \cdot \sup |K| \leq A,$$

quotienté par les homothéties. Notons  $\mathbf{PT}_A^g$  l'espace quotient de  $T_A^g$  par les homothéties. Pour la topologie quotient de la distance de Hausdorff-Gromov, la réunion  $\mathbf{PM}_A^g \cup \mathbf{PT}_A^g$  est quasi-compacte. Traitons d'abord le cas des surfaces compactes. Soit  $V_j$  une suite de surfaces fermées satisfaisant

$$\text{aire}(V_j) \cdot \sup |K(V_j)| \leq A,$$

normalisée par la condition diamètre  $(V_j) = 1$ . Si  $\text{aire}(V_j) \geq \alpha > 0$ , alors les  $V_j$  ont une courbure bornée par  $A/\alpha$ , et on peut extraire une sous-suite convergeant, au sens de Hausdorff-Gromov, vers une surface riemannienne ([9], page 130). Si, au contraire, les aires tendent vers 0, on multiplie la métrique de  $V_j$  par  $\alpha_j = A/\text{aire}(V_j)$ . La surface  $\bar{V}_j$  obtenue a une courbure comprise entre  $-1$  et  $+1$ , une aire inférieure à  $A$ , elle est à distance bornée d'une suite  $T_j \in T_A^g$ . Les graphes  $\alpha_j^{-1}T_j$  ont un diamètre qui tend vers 1, donc une sous-suite des  $\alpha_j^{-1}T_j$  et, par conséquent, des  $V_j$ , converge vers un graphe.

Dans le cas des surfaces non compactes, on ne peut plus normaliser le diamètre. A la place, on va normaliser le diamètre de

$V^+$ . Fixons un  $\epsilon < \pi/8$ , et notons  $\lambda_j = \sup |K|$  sur  $V_j$ . Notons  $V_j^+$  l'ensemble des points de  $V_j$  où le rayon d'injectivité est supérieur à  $\epsilon/\lambda_j$ . Normalisons la métrique de façon que

$$\text{diamètre}(V_j^+) = 1.$$

Si  $\text{aire}(V_j^+) \geq \alpha > 0$ , alors les  $V_j$  ont une courbure bornée par  $A/\alpha$ . Le rayon d'injectivité est borné inférieurement dans l'enveloppe convexe  $W_j$  de  $V_j^+$  (i.e., la réunion de  $V_j^+$  et des composantes bornées de  $V_j^-$ ) par [9], page 121, et on peut extraire une sous-suite telle que

$$U_j = W_j \text{ privée du } \epsilon\text{-voisinage de son bord}$$

converge, au sens de Hausdorff-Gromov, vers une surface riemannienne ([9], page 130). Soit  $j_0$  l'entier tel que, pour  $j \geq j_0$ ,

$$\text{dist}_H(U_j, U_{j_0}) \leq \epsilon.$$

Toute composante  $C$  de  $V_j \setminus W_j$  est un anneau infini, qu'on peut balayer par des lacets géodésiques de longueur inférieure à  $\epsilon$ . Donc la distance de Hausdorff-Gromov entre  $C$  et une demi-droite est inférieure à  $\epsilon$ . On conclut que, pour  $j \geq j_0$ ,

$$\text{dist}_H(V_j, V_{j_0}) < 5\epsilon.$$

Par un procédé diagonal, on peut donc extraire une sous-suite convergente vers une surface riemannienne. Si, au contraire, l'aire de  $V_j$  tend vers 0, il n'y a rien à changer par rapport au cas des surfaces fermées.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] CH. BAVARD. — Thèse de troisième cycle, Université Paris XI, Orsay, 1984.
- [2] CH. BAVARD. — Le rayon d'injectivité des surfaces à courbure majorée, *J. Diff. Geom.*, 20(1984), 137-142.
- [3] CH. BAVARD, P. PANSU. — Sur le volume minimal de  $\mathbb{R}^2$ , *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris.*, 19(1986), 479-490.
- [4] G.B. BIRKHOFF. — Dynamical systems, *Colloq. Publ. Vol. 9. Amer. Math. Soc.*, 1927.
- [5] P. BUSER. — Riemansche Flächen und Längespectrum vom Trigonometrischen Standpunkt aus, *Habilitationsschrift, Univ. Bonn*, 1980.

- [6] P. BUSER, H. KARCHER. — Gromov's almost flat manifolds, *Astérisque*, Soc. Mat de France, Paris, n°81 (1981).
- [7] J. CHEEGER, D. EBIN. — Comparison theorems in Riemannian geometry, North Holland, Amsterdam, 1975.
- [8] D. GROMOLL, W. KLINGENBERG, W. MEYER. — Riemannsche Geometrie im Grossen, *Lecture Notes*, Springer Verlag, Berlin, n°55, 1968.
- [9] M. GROMOV. — Structures métriques pour les variétés riemanniennes, *Textes Mathématiques*, CEDIC-Fernand Nathan, Paris, 1981.
- [10] E. HEINTZE. — Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung, preprint Univ. Bonn, 1976.
- [11] W. KLINGENBERG. — Riemannian Geometry, De Gruyter, Berlin - New-York, 1982.
- [12] G.A. MARGULIS. — Groupes discrets d'isométries des variétés à courbure négative, *Proc. Intern. Cong. Math. at Vancouver*, Vol. 2, pp. 21-34, *Canad. Math. Cong.*, 1974.
- [13] W. THURSTON. — Geometry and topology of 3-manifolds, Chapter 5, *Preprint Inst. Adv. Study*, Princeton, 1979.

Manuscrit reçu le 10 avril 1985  
révisé le 9 octobre 1987.

Ch. BAVARD,  
Département de Mathématiques  
Ecole Normale Supérieure de Lyon  
Place Antonin Perrin  
69007 LYON (France)  
&  
P. PANSU,  
Centre de Mathématiques  
UA 169 au CNRS  
Ecole Polytechnique  
91128 PALAISEAU (France).