Annales de l'institut Fourier

Krzysztof Kurdyka

Points réguliers d'un sous-analytique

Annales de l'institut Fourier, tome 38, nº 1 (1988), p. 133-156
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_1_133_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 1 (1988), 133-156

POINTS REGULIERS D'UN SOUS-ANALYTIQUE

par Krzysztof KURDYKA

Nous allons donner une nouvelle démonstration du fait que l'ensemble des points réguliers d'un ensemble sous-analytique est sous-analytique. Ce théorème a été prouvé par Tamm [T] qui a utilisé essentiellement le théorème de désingularisation de Hironaka. Notre preuve est basée sur la théorie des ensembles sous-analytiques développée par Prof. Łojasiewicz et son groupe à Cracovie (voir [D.L.S.1] et [D.L.S.2] pour les résultats fondamentaux). Une brève exposition de cette théorie se trouve dans [D]. La théorie n'utilise pas la désingularisation ; elle peut être vue comme un prolongement naturel de la théorie des ensembles semi-analytiques (voir [L1], [L2]).

J'exprime ma reconnaissance à S. Łojasiewicz pour sa disponibilité et sa collaboration fructueuse. Je suis très reconnaissant à B. Malgrange qui a consacré de son temps à lire cet article. J'adresse mes remerciements à W. Pawlucki pour les très nombreuses discussions que nous avons eues ensemble et les remarques qui m'ont permis de raccourcir cet article. Je remercie vivement Z. Denkowska pour son amicale aide à la rédaction de ce texte.

Mots-clés : Stratifications sous-analytiques - Fonctions sous-analytiques - Développement de Puiseux - Différentielle de Gateaux - Fonction distance.

Table des matières

Dans cet article M et N désignent des variétés analytiques réelles de dimension finie. Rappelons que $A \subset M$ est sous-analytique dans M, si et seulement si pour chaque $x \in M$, il existe un voisinage U, un espace vectoriel Z et F semi-analytique et relativement compact dans $M \times Z$ tel que

$$A \cap U = \pi(F)$$

où $\pi : M \times Z \to M$ est la projection canonique.

Désignons par SUB (M) la famille de tous les ensembles sous-analytiques de M. Soit $f : X \to Y$ une fonction, pour $A \subset X$, on désigne la restriction de f à A par $f|_A$.

DÉFINITION. — *Un sous-ensemble $A \subset M$ est dit une feuille sous-analytique s'il est à la fois un ensemble sous-analytique de M et une sous-variété analytique de M (nous n'exigeons pas qu'une sous-variété soit fermée dans M).*

1. Stratifications sous-analytiques.

Par une stratification sous-analytique de M on entend une décomposition localement finie

$$M = \bigcup \Gamma_\nu$$

où les Γ_ν sont des feuilles sous-analytiques, connexes, disjointes, telles que si $\Gamma_\mu \cap (\overline{\Gamma}_\nu \setminus \Gamma_\nu) \neq \emptyset$, alors $\Gamma_\mu \subset \overline{\Gamma}_\nu \setminus \Gamma_\nu$ et $\dim \Gamma_\mu < \dim \Gamma_\nu$.

On appelle les Γ_ν les strates de la stratification.

On dit qu'une stratification est compatible avec une famille $\{E_i\}_{i\in I}$ de sous-ensembles de M , si pour chaque Γ_ν et chaque E_i on a $\Gamma_\nu \subset E_i$ ou bien $\Gamma_\nu \cap E_i = \emptyset$.

Dans la suite, on dira tout court stratification au lieu de dire stratification sous-analytique.

Rappelons les propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques (voir [DLS1], [DLS2], [DS]).

(1.1) THÉORÈME. — i) *La famille* SUB (M) *est fermée par rapport à l'union, l'intersection localement finie, et la différence des ensembles.*

ii) *Si* $E \in$ SUB (M) *et* $F \in$ SUB (N) , *alors* $E \times F \in$ SUB $(M \times N)$.

iii) *Si* $E \in$ SUB (M) , *alors Int* E , $\overline{E} \in$ SUB(M) ; *de plus, chaque composante connexe de* E *appartient à* SUB (M) .

iv) *Pour chaque famille* $\{E_i\}_{i\in I}$ *localement finie d'ensembles sous-analytiques, il existe une stratification sous-analytique, compatible avec la famille* $\{E_i\}_{i\in I}$.

v) *Soit* $\varphi : M \to N$ *une application analytique, et soit* $E \subset$ SUB (M) *tel que* $\varphi|_{\overline{E}}$ *soit propre; alors* $\varphi(E) \in$ SUB (N) . *Evidemment,* $\varphi^{-1}(F) \in$ SUB (M) *pour chaque* $F \in$ SUB (N) .

Maintenant on va donner quelques lemmes sur les stratifications sous- analytiques.

(1.2) DÉFINITION. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une famille de feuilles sous-analytiques de* M . *Nous dirons que* $\mathcal{A}$ *est une famille stratifiante si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

α) *si* $\Gamma \in \mathcal{A}$ *et* T *est une feuille sous-analytique contenue dans* Γ , *alors* $T \in \mathcal{A}$;

β) *pour chaque feuille sous-analytique* Δ *de* M , *il existe une feuille* $\Gamma \in \mathcal{A}$, *tel que* Γ *est ouvert et dense dans* Δ ; *autrement dit* $\Delta \setminus \Gamma$ *est fermé dans* Δ *et* $\dim(\Delta \setminus \Gamma) < \dim \Delta$.

La dimension d'un ensemble sous-analytique E est définie comme le maximum des dimensions des sous-variétés analytiques contenues dans E .

(1.3) LEMME. — *Soit $\mathcal{A}$ une famille stratifiante d'ensembles sous-analytiques de M , et $\{E_i\}_{i\in I}$ une famille localement finie d'ensembles sous-analytiques dans M ; alors il existe une stratification $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ (tous les strates de $\mathcal{T}$ appartiennent à $\mathcal{A}$) de M compatible avec la famille $\{E_i\}_{i\in I}$.*

Comme la preuve de ce lemme est analogue à la construction d'une stratification semi-analytique (voir [L]) ou sous-analytique (voir [DS]), nous allons seulement l'esquisser. Prenons une stratification $\mathcal{R}$ compatible avec la famille. Nous allons construire la stratification $\mathcal{T}$ par récurrence. Posons $\mathcal{T}_m = \mathcal{R}$, $m = \dim M$. Supposons que les stratifications $\mathcal{T}_m, \ldots, \mathcal{T}_k$ sont déjà construites, et de plus si $T \in \mathcal{T}_i$ et $\dim T > i$, alors $T \in \mathcal{A}$.

Pour chaque strate $T \in \mathcal{T}_k$ de dimension k , il existe un $A_T \in \mathcal{A}$ ouvert et dense dans T . Pour obtenir $\mathcal{T}_{k-1}$ il suffit de prendre une stratification compatible avec $\mathcal{T}_k$ et $\{A_T : T \in \mathcal{T}_k, \dim T = k\}$. Il est clair que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$ est notre stratification cherchée, puisque les ensembles qui ne contiennent qu'un point appartiennent à $\mathcal{A}$.

Dans la suite, nous aurons besoin d'un résultat de Hardt sur la stratification d'une application analytique.

(1.4) DÉFINITION. — *Soit $f : M \to N$ une application analytique, $\mathcal{T}$ une stratification de la variété M , $\mathcal{L}$ une stratification de la variété N . On dit que la paire de stratifications $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ est compatible avec l'application f , si et seulement si*

i) *pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $f(T) \in \mathcal{L}$;*

ii) *pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $t \in T$, $\operatorname{rang}_t f|_T = \dim f(T)$;*

iii) *si $f|_T$ est une immersion ($\operatorname{rang} f|_T = \dim f|_T$) , alors $f|_T$ est une injection.*

(1.5) THÉORÈME (Hardt). — *Soit $f : M \to N$ une application analytique. Etant donné deux familles localement finies*

$\mathcal{B} \subset$ SUB(M) et $\mathcal{C} \subset$ SUB(N) et un ensemble ouvert $K \in$ SUB(M) , tel que $f|_{\overline{K}}$ soit propre, il existe une stratification $\mathcal{L}$ compatible avec $\mathcal{C}$ et une stratification $\mathcal{T}$ compatible avec $\mathcal{B}$ et K telles que la paire $(\mathcal{T}_K, \mathcal{L})$ soit compatible avec $f|_K$, où $\mathcal{T}_K = \{T \in \mathcal{T}, T \subset K\}$.

La preuve de ce résultat dans [Ha] est basée sur les propriétés des ensembles semi-analytiques.

(1.5A) COROLLAIRE. — *Soit $\pi : M \times \mathbf{R} \to M$ la projection canonique et soit $K \in$ SUB$(M \times \mathbf{R})$ ouvert dans $M \times \mathbf{R}$, tel que $\pi|_{\overline{K}}$ soit propre. Supposons que $\mathcal{B} \subset$ SUB$(M \times \mathbf{R})$ et $\mathcal{C} \subset$ SUB(M) soient des familles localement finies. Alors, il existe une stratification $\mathcal{T}$ de la variété $M \times \mathbf{R}$ compatible avec $\mathcal{B}$ et K est une stratification $\mathcal{L}$ de la variété M compatible avec $\mathcal{C}$ vérifiant la propriété suivante :*

si $L \in \mathcal{L}$, alors $\pi^{-1}(L) \cap \overline{K} = \bigcup_{i=0}^{k} G_i \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} P_i$, *G_i et P_i sont des strates de la stratification $\mathcal{T}$ de la forme suivante :*

G_i est le graphe d'une fonction analytique $g_i : L \to \mathbf{R}$, $i = 0, \ldots, k$. Les fonctions g_i sont ordonnées de façon croissante. Les strates P_i sont de la forme

$$P_i = \{(x,t) \in L \times \mathbf{R} : g_i(x) < t < g_{i+1}(x)\} \quad i = 0, \ldots, k-1 .$$

(1.6) DÉFINITION. — *Soit $\mathcal{T}$ une stratification de $M \times N$ et $\mathcal{L}$ une stratification de M ; on dit que la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ vérifie la condition (+), si pour chaque $L \in \mathcal{L}$, il existe un ensemble $W_L \neq \emptyset$ ouvert dans N et une strate $T \in \mathcal{T}$, tels que $L \times W_L \subset T$.*

(1.7) PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{T}$ une stratification de $M \times N$ et $\mathcal{L}$ une stratification de M ; alors il existe une stratification $\mathcal{L}'$ de M compatible avec L , telle que la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L}')$ vérifie la condition (+).*

Preuve. — Observons d'abord que si N' est un ouvert sous-analytique dans N et si la condition (+) est vérifiée par $(\mathcal{T}', \mathcal{L})$ ($\mathcal{T}'$ = composantes connexes de $T \cap N'$, $T \in \mathcal{T}$) alors la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L})$ vérifie la condition (+) aussi. Donc, il suffit de prouver cette proposition pour $N = \mathbf{R}^n$ sous la forme suivante :

(1.7A) PROPOSITION. — *Soient $M, \mathcal{T}$ et $\mathcal{L}$ comme ci-dessus, $N = \mathbf{R}^n$. Alors il existe une stratification $\mathcal{L}'$ de M compatible avec $\mathcal{L}$ telle que pour chaque $L \in \mathcal{L}'$ il existe un ouvert $V_L \neq \emptyset$ dans $]0,1[^n$ tel que*

$$L \times V_L \subset T \quad \textit{pour un} \quad T \in \mathcal{T} .$$

Preuve de la Proposition (1.7a). — On va procéder par récurrence sur n . Selon le théorème 1.5, on peut admettre que la paire $(\mathcal{T}_{M\times]0,1[}, \mathcal{L})$ est compatible avec la projection

$$\pi : M\times]0,1[\longrightarrow M .$$

En effet, si la proposition 1.7a est vraie pour une stratification $\mathcal{T}'$ compatible avec $\mathcal{T}$, alors elle est vraie pour $\mathcal{T}$. Dans la suite, on va appliquer le lemme 1.3. La famille de feuilles $\mathcal{A} \subset \mathrm{SUB}(M)$ est définie de la manière suivante :

$L \in \mathcal{A} \Longleftrightarrow$ pour chaque composante connexe S de la feuille L , il existe un ouvert non vide $V_S \subset]0,1[^n$ tel que $S \times V_S \subset T$ pour un $T \in \mathcal{T}$.

Pour se convaincre que $\mathcal{A}$ est une famille stratifiante, il suffit de vérifier la condition (β) de la Définition 1.2, car (α) est évident.

Soit donc L une feuille sous-analytique. Il faut prouver qu'il existe un ensemble $E_L \in \mathrm{SUB}(M)$ fermé et rare dans L , tel que $(L \setminus E_L) \in \mathcal{A}$. Evidemment, il suffit de le prouver pour des feuilles connexes. En plus, on peut admettre que la feuille L est contenue dans une feuille de la stratification $\mathcal{L}$; en effet, il suffit de se limiter aux composantes connexes de l'ensemble

$$\bigcup L \cap \Gamma : \{\Gamma \in \mathcal{L} : \dim \Gamma \cap L = \dim L\}$$

parce que le complémentaire de cet ensemble dans L est fermé et rare. Il résulte de ceci qu'on peut admettre, à cause de la condition (α), que $L \in \mathcal{L}$. On a donc, selon le corollaire 1.5a,

$$L \times [0,1] = \bigcup_{i=0}^{k} G_i \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} P_i$$

où toutes G_i, P_i sont des strates de stratification $\mathcal{T}$. Rappelons les notations : G_i est le graphe d'une fonction analytique $g_i : L \to \mathbf{R}$ et

$P_i = \{(x,t) \in L \times \mathbf{R} : g_i(x) < t < g_{i+1}(x)\}$; enfin, les fonctions g_i sont ordonnées de façon croissante, donc $g_0 \equiv 0$ et $g_k \equiv 1$.

Maintenant on va partager l'intervalle $(0,1)$ en k intervalles $W_i =]\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}[$, $i = 1, \ldots, k$. Observons que pour chaque $x \in L$ il existe un $i \in [1,k]$ tel que

$$g_j(x) \notin W_i \quad \text{pour chaque} \quad j = 1, \ldots, k-1 .$$

Posons $G_i = \{x \in L : g_j(x) \notin W_i \text{ pour chaque } j = 1, \ldots, k-1\}$, $i = 1, \ldots, k$. Les G_i sont sous-analytiques et on a

$$L = \bigcup_{i=1}^{k} G_i .$$

Posons $E_L = \bigcup_{i=1}^{k} (\overline{G}_i \setminus G_i)$. Soit S une composante connexe de $L \setminus E_L$, alors $S \subset G_i$ pour un $i \in [1,k]$, donc

$$S \times W_i \subset P_j \text{ pour un } j \in [0, k-1]$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 1.7a pour $n = 1$.

Supposons que la proposition 1.7a soit vraie pour n .

Soient $\mathcal{T}$ une stratification de $M \times \mathbf{R}^{n+1}$ et $\mathcal{L}$ une stratification de M . Posons $M' = M \times \mathbf{R}$. Selon l'hypothèse de récurrence, il existe une stratification $\mathcal{S}$ de M' , telle que la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ vérifie la condition (+); par suite, il existe $\mathcal{L}'$, une stratification de M , telle que la paire $(\mathcal{S}, \mathcal{L}')$ vérifie la condition (+); on peut choisir $\mathcal{L}'$ de telle façon qu'elle soit compatible avec $\mathcal{L}$. La paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L}')$ vérifie (+).

2. Les fonctions sous-analytiques.

(2.1) DÉFINITION. — *Soit $f : U \to N$ une fonction, où U est un sous-ensemble de M . On dit que f est sous-analytique si et seulement si $f \subset$* SUB$(M \times N)$. (*)

(*) Dans cet article on considère les fonctions comme des sous-ensembles des produits correspondants.

La composée de deux fonctions sous-analytiques n'est pas toujours sous- analytique, mais on a le lemme suivant (voir [DLS1]).

(2.2) LEMME. — *Soient $U \subset L$ et $V \subset M$, $f : U \to M$ et $g : V \to N$ des fonctions sous-analytiques. Supposons que pour chaque K relativement compact dans N , l'ensemble $g^{-1}(K) \cap f(U)$ est relativement compact dans M , alors la fonction $g \circ f$ est sous-analytique.*

Preuve. — Considérons l'ensemble

$$E = \{(x,y,z) \in L \times M \times N : y = f(x),\ z = g(y)\} = (f \times N) \cap (L \times g).$$

Evidemment $E \in \mathrm{SUB}(L \times M \times N)$. Notons par π la projection naturelle $L \times M \times N \to L \times N$. Du théorème 1.1, il résulte que

$$\pi(E) = g \circ f \in \mathrm{SUB}(L \times N) .$$

Notons $\tau : \mathbf{R} \ni t \to \mathbf{R} \cdot (t,1) \in \mathbf{P}^1$ le plongement de $\mathbf{R}$ dans son adhérence projective. On va étudier la classe suivante de fonctions qui a été considérée par Bierstone et Schwarz [Bi-Sc].

(2.3) DÉFINITION. — *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction, $U \subset M$. On dit que $f \in \mathrm{SUBB}(M)$ (f est de la classe SUBB) si et seulement si $\tau \circ f : U \to \mathbf{P}^1$ est sous-analytique. Ceci équivaut à dire que f et $\frac{1}{f}$ (défini sur $U \setminus f^{-1}(0)$) sont sous-analytiques.*

Remarque. — Cette classe a été considérée aussi par Tamm [T], mais sa définition est ambiguë, car si on remplace τ par un autre plongement $\mathbf{R} \to \mathbf{P}^1$ qui n'a pas un graphe sous-analytique, on obtient une classe différente de SUBB (M) .

Voici des propriétés élémentaires des fonctions de la classe SUBB .

(2.4) THÉORÈME. — *Soit U un sous-ensemble d'une variété M .*

i) *Si $f : U \to \mathbf{R}$, $f \in \mathrm{SUBB}\ (M)$, alors $U \in \mathrm{SUB}\ (M)$; de plus, il existe une stratification $\mathcal{T}$ de M , compatible avec U , telle que pour $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U$, la fonction $f|_T$ est analytique.*

ii) *Si* $f \in$ SUBB (M) , *alors l'ensemble des points de continuité de* f *est sous-analytique dans* M .

iii) *Supposons que* $f : U \to \mathbf{R}$ *soit sous-analytique et que pour chaque* $x \in M$, *il existe un voisinage* Ω *tel que* $f|_{\Omega \cap U}$ *soit bornée; alors* $f \in$ SUBB(M) .

iv) *Si* $f, g : U \to \mathbf{R}$; $f, g \in$ SUBB(M) , *alors* $(f+g), (fg) \in$ SUBB(M) .

v) *Soit* $f : V \to \mathbf{R}$, $f \in$ SUBB$(M \times \mathbf{R})$, *où* V *est un voisinage ouvert de* $U \times \{0\}$ *dans* $U \times \mathbf{R}$, U *étant un sous- ensemble de* M . *Alors l'ensemble*

$$V_k = \{(x,s) \in V \subset U \times \mathbf{R} : \frac{d^k}{dt^k}(t \to f(x, s+t)) \text{ existe pour } t = 0\}$$

est sous-analytique pour chaque $k \in \mathbf{N}$; *de plus, la fonction*

$$\frac{\partial^k f}{\partial t^k} : V_k \ni (x,t) \longrightarrow [\frac{d^k}{dt^k}(t \to f(x, s+t)(0)] \in \mathbf{R}$$

est de classe SUBB$(M \times \mathbf{R})$.

vi) *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$, $f \in$ SUBB$(\mathbf{R}^n)$; *pour chaque* $\alpha \in \mathbf{N}^n$ $\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha}$ *(définie sur son domaine d'existence)est de la classe* SUBB$(\mathbf{R}^n)$.

Démonstration. — (i) – (iii) s'obtiennent facilement à partir des théorèmes 1.1 et 1.5. Montrons (iv). Posons

$$(+) : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \ni (x,y) \longrightarrow (x+y) \in \mathbf{R} .$$

Observons que

$$\tau \circ (+) \circ (\tau^{-1} \times \tau^{-1}) : (\mathbf{P}^1 \setminus \infty) \times (\mathbf{P}^1 \setminus \infty) \longrightarrow \mathbf{P}^1$$

est sous-analytique (et même semi-analytique), où $\infty = \mathbf{R} \cdot (1,0)$. Il nous faut vérifier qu'on a $(f+g) = (+) \circ (f,g) \in$ SUBB(M)

$$\tau \circ (+) \circ (f,g) = [\tau \circ (+) \circ (\tau^{-1} \times \tau^{-1})] \circ [(\tau \circ f), (\tau \circ g)] .$$

Les fonctions dans les crochets sont sous-analytiques ; alors, en vertu du lemme 2.2, on obtient $(f+g) \in$ SUBB(M) . De la même façon, on montre que $(f \cdot g) \in$ SUBB(M) .

(iv) implique (v). En effet, la fonction

$$\varphi : \tilde{V} \ni (x,t,s) \longrightarrow \frac{f(x,t+s) - f(x,t)}{s} \in \mathbf{R}$$

$\varphi \in \mathrm{SUBB}(M \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, où $\tilde{V} = \{(x,t,s) \in (M \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}) : (x,t) \in V \, , s \neq 0 \, , (x, t+s) \in V\}$. Supposons que $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ existe; alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \overline{\varphi} \cap (V \times \{0\} \times \mathbf{R})$$

on a aussi

$$\tau \circ \frac{\partial f}{\partial t} = \overline{\tau \circ \varphi} \cap (V \times \{0\} \times \mathbf{P}^1 \in \mathrm{SUBB}(M \times \mathbf{R} \times \mathbf{P}^1) \, ,$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in \mathrm{SUBB}(M \times \mathbf{R})$. En procédant de manière analogue, on montre le résultat pour chaque $k \in \mathbf{N}$. De (v) on déduit immédiatement (vi).

(2.5) LEMME. — *Soit L une feuille sous-analytique relativement compacte dans M . Soit $g_i : L \to \mathbf{R}$, $i \in I$ une famille de fonctions analytiques et sous-analytiques. Alors, il existe $i_1, \dots, i_s \in I$ tels que*

$$\bigcap_{i \in I} g_i^{-1}\{0\} = g_{i_1}^{-1}(0) \cap \ldots \cap g_{i_s}^{-1}(0) \, .$$

Preuve. — La feuille L possède un nombre fini des composantes connexes. Il suffit donc de prouver ce lemme pour L connexe. On va procéder par récurrence sur la dimension de L . Pour $\dim L = 0$ le lemme est trivial.

Supposons que $\dim L = n$. Si $g_i \equiv 0$ pour chaque $i \in I$, le lemme est vérifié. Si non, $g_k \not\equiv 0$ pour un $k \in I$. Observons que $g_k^{-1}(0)$ est rare et fermé, car g_k est analytique dans l'ensemble connexe L . D'où $\dim g_k^{-1}(0) < n$ ($g_k^{-1}(0)$ est évidemment sous-analytique). Prenons une stratification compatible avec $g_k^{-1}(0)$, alors

$$g_k^{-1}(0) = \bigcup \Gamma_\nu \quad \text{la réunion étant finie.}$$

Toutes les feuilles Γ_ν sont de dimension plus petite que n . Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour chacune de ces feuilles.

Rappelons maintenant le théorème de Puiseux et quelques corollaires qui en résultent.

(2.6) LEMME. — *Soit $f : [0, \delta) \to \mathbf{R}$ une fonction sous-analytique et continue. Alors, il existe $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbf{N}$ et $h(t) =$*

$\sum_{0}^{\infty} \alpha_i \cdot t^i$ *une fonction analytique dans un voisinage de* $0 \in \mathbf{R}$ *tels que*

$$f(t) = h(t^{1/k}) \quad pour \quad t \in [0, \varepsilon) .$$

Par conséquent, on a une développement de f en série de Puiseux

$$f(t) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_i t^{i/k} \quad \text{convergent uniformément.}$$

On appelle ce lemme, le théorème de Puiseux "réel". On le déduit du théorème de Puiseux "complexe" et du fait que chaque ensemble sous-analytique de dimension 1 est semi-analytique (voir [L1] p. 127). Le théorème de Puiseux "complexe" est un résultat classique : pour sa preuve, voir par exemple [W] p. 31. Dans [Pa] se trouve une généralisation du lemme 2.6 que l'on va appliquer dans la suite.

Du lemme 2.6, on déduit

(2.7) COROLLAIRE. — *Si* $f : (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}$ *est une fonction sous-analytique et continue, alors il existe* $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbf{N}$ *et des fonctions* $h_1(t) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_i \cdot t^i$ *et* $h_2(t) = \sum_{0}^{\infty} \beta_i \cdot t^i$ *analytiques dans un voisinage de* $0 \in \mathbf{R}$ *tels que*

$$f(t) = h_1(t^{1/k}) = \sum_{0}^{\infty} \alpha_i \cdot t^{i/k} \quad pour \quad t \in [0, \varepsilon)$$

$$f(t) = h_2((-t)^{1/k}) = \sum_{0}^{\infty} \beta_i \cdot (-t)^{i/k} \quad pour \quad t \in (-\varepsilon, 0]$$

d'où on obtient

(2.8) COROLLAIRE. — *Avec les notations ci-dessus,* f *est de classe* C^s *dans* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *si et seulement si le système des équations suivantes est vérifié :*

$$(P_s) \begin{cases} \alpha_i = \beta_i = 0 & pour \quad \{i \in \mathbf{N} : i < k \cdot s, i/k \notin \mathbf{N}\} \\ \alpha_i - \beta_i = 0 & pour \quad \{i \in \mathbf{N} : i \leq k \cdot s, i/k \in 2\mathbf{N}\} \\ \alpha_i + \beta_i = 0 & pour \quad \{i \in \mathbf{N} : i \leq k \cdot s, i/k \in 2\mathbf{N} + 1\} \end{cases}$$

où par 2N *et* 2N + 1 *on a désigné les nombres pairs et impairs.*

(2.9) Corollaire. — *Soit f comme ci-dessus; alors f est de classe C^∞ dans $(-\varepsilon, \varepsilon)$ si et seulement si f est analytique dans $(-\varepsilon, \varepsilon)$.*

3. Théorème de Bochnak et Siciak.

Rappelons la définition de la différentielle de Gateaux.

(3.1) Définition. — *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction définie dans un ouvert U de $\mathbf{R}^n$. Supposons que, pour chaque $x \in \mathbf{R}^n$, la fonction $t \to f(a + tx)$ possède une dérivée k-ième en $t = 0$. Par $\delta_a^k f$, on désigne l'application suivante :*

$$\delta_a^k f : \mathbf{R}^n \ni x \longrightarrow \frac{d^k}{dt^k} f(a + tx)(0) \in \mathbf{R}$$

si $\delta_a^k f$ est un polynôme homogène du degré k , on appelle $\delta_a^k f$ la k-ième différentielle de Gateaux de la fonction f au point a . On dit que f est de classe $G^p (f \in G^p(U))$ si f possède des différentielles de Gateaux pour $k = 1, \ldots, p$ en chaque point $a \in U$. On écrit $f \in G^\infty(U)$ lorsque $f \in G^p(U)$ pour chaque $p \in \mathbf{N}$.

(3.2) Théorème (Bochnak, Siciak [B.S]). — *Supposons que $f \in G^\infty(U)$, où U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et que de plus f soit analytique dans chaque intervalle contenu dans U ; alors f est analytique dans U .*

4. Propriétés différentielles des fonctions de classe SUBB.

Dans cette partie, on va donner des résultats concernant les fonctions de classe SUBB . Les preuves de ces résultats se trouvent dans les paragraphes 5 et 6.

Les corollaires obtenus en 5 et 6 seront utilisés dans la preuve du théorème sur les points réguliers d'un sous-analytique.

(4.1) THÉORÈME. — *Soient* U *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$, *et* $f : U \to \mathbf{R}$, *avec* $f \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n)$. *Alors, il existe un entier* $r \in \mathbf{N}$ *tel que si* f *est de classe* G^r *au voisinage de* $x \in U$, *alors* f *est analytique au point* x .

Ce théorème est un renforcement du résultat de Tamm (théorème 2.3.3 dans [T]) qui, après reformulation, s'énonce ainsi :

(4.2) THÉORÈME. — *Soient* U *et* f *comme ci-dessus; alors il existe un entier* $k \in \mathbf{N}$ *possédant la propriété suivante :*

Si f *est de classe* C^k *dans un voisinage de* $x \in U$, *alors* f *est analytique au point* x .

Observons d'abord qu'en vue du théorème 2.4 (ii), on peut admettre que dans le théorème 4.1, f est continue. Il résulte du théorème 3.2 (Bochnak, Siciak) que pour prouver le théorème 4.1 il nous suffit de démontrer les propositions suivantes.

(4.3) PROPOSITION. — *Soit* $f : U \to \mathbf{R}$, $f \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n)$ *une fonction continue;* U *étant un ouvert, borné de* $\mathbf{R}^n$; *alors il existe un entier* $m \in \mathbf{N}$ *possédant la propriété suivante :*

Si I *est un intervalle ouvert de* U *et si* f *est de classe* C^m *sur* I , *alors* f *est analytique sur* I .

(4.4) PROPOSITION. — *Soient* f *et* U *comme ci-dessus, alors il existe un entier* $i \in \mathbf{N}$ *possédant la propriété suivante :*

Si V *est un ouvert de* U *et si* $f|_V \in G^i(V)$, *alors* $f|_V \in G^\infty(V)$.

5. Démonstration de la Proposition 4.3.

Considérons l'application suivante :

$$\mathcal{E} : \mathbf{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbf{R} \ni (x,p,t) \longrightarrow (x+tp) \in \mathbf{R}^n$$

où par S^{n-1} on a désigné la sphère $\{y \in \mathbf{R}^n : |y| = 1\}$. Observons que l'ensemble

$$\mathcal{E}^{-1}(U) \cap (U \times S^{n-1} \times \mathbf{R})$$

est un voisinage dans $U \times S^{n-1} \times \mathbf{R}$ de $U \times S^{n-1} \times \{0\}$, alors l'ensemble

$$E = \mathcal{E}^{-1}(U) \cap (U \times S^{n-1} \times \{t \geq 0\})$$

est un voisinage dans $U \times S^{n-1} \times \{t \geq 0\})$ de $U \times S^{n-1} \times \{0\}$. Posons $\tilde{f} = f \circ \mathcal{E}|_E$. Bien sûr, $\tilde{f} \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$, car $E \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ et $\mathcal{E}$ est analytique dans la sous-variété fermée $\mathbf{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbf{R}$.

On a le lemme suivant :

(5.1) LEMME. — *Il existe une stratification $\mathcal{T}$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, compatible avec $U \times S^{n-1}$ et un entier $k \in 2\mathbf{N}$ tels que pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$ la fonction*

$$E_T \ni (x,p,t) \longrightarrow \tilde{f}(x,p,t^k) = f(x + t^k p) \in \mathbf{R}$$

où $E_T = \{(x,p,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} : (x,p) \in T, (x,p,|t|) \in E\}$ est analytique dans un voisinage dans $T \times \mathbf{R}$ de $T \times \{0\}$.

Preuve du lemme 5.1. — En utilisant le théorème 1.5 et le théorème 2.4 (i), on obtient une stratification $\mathcal{S}$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ et une stratification $\mathcal{T}'$ de $\mathbf{R}^n$ telles que :

- $\mathcal{T}'$ est compatible avec $U \times S^{n-1}$;
- $\mathcal{S}$ est compatible avec E et $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times (-1,1)$;
- pour chaque $S \in \mathcal{S}$, $S \subset E$ la fonction $\tilde{f}|_S$ est analytique;
- la paire $(\mathcal{S}, \mathcal{T}')$ est compatible avec la projection $\pi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times (-1,1) \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Pour obtenir la stratification désirée $\mathcal{T}$ dans le lemme 5.1, on va appliquer le lemme 1.3. On va définir la famille $\mathcal{A}$ de la manière suivante :

Une feuille $\Gamma \in \mathcal{A} \iff$ pour chaque composante connexe T de $\mathrm{Int}_\Gamma \Gamma \cap (U \times S^{n-1})$ il existe un entier $r(T) \in 2\mathbf{N}$, tel que la fonction

$$\{(x,p,t) \in T \times \mathbf{R} : (x,p,|t|) \in E\} \ni (x,p,t) \longrightarrow \tilde{f}(x,p,t^{r(T)}) \in \mathbf{R}$$

est analytique dans un voisinage dans $T \times \mathbf{R}$ de $T \times \{0\}$.

On obtient donc une stratification $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ qui vérifie la conclusion du lemme 5.1. L'entier k égale le plus petit commun multiple des $r(T)$; $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$.

Dans le lemme 1.3, il nous suffit de montrer que la famille $\mathcal{A}$ vérifie les conditions (α) et (β) de la définition (1.2). La condition (α) est remplie trivialement. Considérons la condition (β). Il nous faut démontrer que pour chaque feuille $\Gamma \in \mathrm{SUB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ il existe un $A_\Gamma \in \mathrm{SUB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ fermé et rare dans Γ tel que $\Gamma \setminus A_\Gamma \in \mathcal{A}$.

Remarquons qu'il suffit de traiter le cas où $\Gamma \in \mathcal{T}'$, $\Gamma \subset U \times S^n$, car $\bigcup\{T \in \mathcal{T}' : T \subset \overline{U \times S^{n-1}}, \dim T < \dim \Gamma\}$ est fermé et rare dans Γ . Supposons que $T \in \mathcal{T}'$ et $T \subset U \times S^{n-1}$. Selon le corollaire 1.5a, il existe une fonction analytique dans T , $g \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ telle que

$$P(0,g) = \{(x,p,t) : (x,p) \in T \ , \ 0 < t < g(x,p)\} \in \mathcal{S}$$

en plus $P(0,g) \subset E$. L'application

$$h : T \times \mathbf{R} \ni (x,t) \longrightarrow (x, g(x,p) \cdot t) \in T \times \mathbf{R}$$

est un difféomorphisme analytique et sous-analytique.

Il résulte du lemme 2.2 que

$$\psi = \tilde{f} \circ h|_{T \times (0,1)} \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) \ .$$

La fonction ψ est analytique. Posons

$$\iota : \mathbf{P}^1 \ni \mathbf{R} \cdot x \longrightarrow \left(\frac{x_i x_j}{|x|^2}, \ i,j = 1,2\right) \in \mathbf{R}^4$$

le plongement du $\mathbf{P}^1$ dans $\mathbf{R}^4$. On appelle τ le plongement $\mathbf{R} \ni t \to \mathbf{R} \cdot (t,1) \in \mathbf{P}^1$.

La fonction

$$\iota \circ \tau \circ \psi : T \times (0,1) \to \mathbf{R}^4$$

est analytique, bornée et sous-analytique. L'ensemble cherché A_T , s'obtient à partir du théorème de Puiseux pour les applications sous-analytiques [Pa]. Ce théorème s'énonce ainsi :

Soient X et Y des espaces vectoriels réels, $\Gamma \in \mathrm{SUBB}(X)$ une feuille relativement compacte, et $\varphi : \Gamma \times (0,1) \to Y$ une application analytique, bornée et sous-analytique; alors il existe un ensemble fermé $A_\Gamma \in \mathrm{SUB}(X)$, avec $\dim A_\Gamma < \dim \Gamma$ (donc A_Γ est rare dans Γ), et un entier $r \in \mathbf{N}$, tels que pour chaque $a \in \Gamma \setminus A_\Gamma$ l'application $(x,t) \to \varphi(x,t^r)$ possède une extension analytique dans un voisinage de $(a,0)$ dans $\Gamma \times \mathbf{R}$.

L'exposant $r \in \mathbf{N}$ peut être remplacé par un multiple. Il convient de prendre $r \in 2\mathbf{N}$ pair.

Nous avons donc A_T rare et fermé dans T tel que :

$$(T \setminus A_T) \times (-1,1) \ni (x,p,t) \longrightarrow \iota \circ \tau \circ \psi(x,p,t^{r(T)}) \in \mathbf{R}$$

est analytique. D'où $T \setminus A_T \in \mathcal{A}$, car ι et τ sont des plongements et h est un difféomorphisme. Ceci termine la preuve du lemme 5.1.

Remarque. — La stratification $\mathcal{T}$ dans le lemme 5.1 peut être choisie de telle façon que la fonction

$$\{(x,p,t) \in T\times : (x,p,|t|) \in E\} \ni (x,p,t) \longmapsto \tilde{f} \circ s(x,p,t^k) = f(x - t^k p) \in \mathbf{R}$$

soit aussi analytique dans un voisinage de $T \times \{0\}$ dans $T \times \mathbf{R}$ pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$. On a noté par s l'application

$$s : \mathbf{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbf{R} \ni (x,p,t) \to (x,-p,t) \in \mathbf{R}^n \times S^{n-1} \times \mathbf{R} .$$

Les fonctions

$$g_1(x,p,t) = f(x + t^k p) \quad \text{et} \quad g_2(x,p,t) = f(x - t^k p)$$
$$g_1, g_2 : \{(x,p,t) : (x,p,|t|) \in E\} \to \mathbf{R}$$

appartiennent à la classe $\mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$. Il résulte du théorème 2.4 (v) que

$$\alpha_i(x,p) = \frac{1}{i!}\frac{\partial^i g_1}{\partial t^i}(x,p,0) \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) , \quad i \in \mathbf{N}$$
$$\beta_i(x,p) = \frac{1}{i!}\frac{\partial^i g_2}{\partial t^i}(x,p,0) \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) , \quad i \in \mathbf{N}$$

et aussi $(\alpha_i \pm \beta_i) \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ pour $i \in \mathbf{N}$.

A présent, on va prouver la proposition 4.3. Fixons $x \in \mathbf{R}^n$ et $p \in S^{n-1}$. Notons par $l = x + \mathbf{R}p$ la droite affine correspondante. La fonction $f|_l$ est de classe C^s dans un voisinage de x si et seulement si la fonction $t \to f(x+tp)$ est de classe C^s dans un voisinage de $0 \in \mathbf{R}$ ce qui équivaut au fait que $\alpha_i(x,p)$, $\beta_i(x,p)$, $i = 1, \ldots, k \cdot s$ vérifient le système d'équations P_s (voir le corollaire 2.8). Observons que toutes les fonctions dans le système P_s sont analytiques et sous-analytiques dans chaque strate $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$ (il n'y a qu'un nombre fini de ces strates car U est relativement compact).

Appliquons pour le système infini d'équations P_s , $s \in \mathbf{N}$ dans chaque $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$ le lemme 2.5. On obtient pour chaque $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$ un entier $m(T) \in \mathbf{N}$ tel que pour chaque $(x,p) \in T$ on a la propriété suivante :

Si $\alpha_i(x,p), \beta_i(x,p)$ vérifient le système $P_{m(T)}$, alors $\alpha_i(x,p)$, $\beta_i(x,p)$ vérifient le système P_s pour chaque $s \in \mathbf{N}$.

Désignons par m le plus grand des nombres $m(T)$, $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$. Selon les corollaires 2.8 et 2.9 m vérifient la conclusion de la proposition 4.3.

Avec les mêmes notations qu'au théorème 4.1, on a :

COROLLAIRE 5.2. — *Il existe un ensemble sous-analytique ouvert* $U_1 \subset U$ *tel que :*

- *Si* I *est un intervalle ouvert de* U_1 , *alors* $f|_I$ *est analytique.*
- *Si* f *est analytique en* x , *alors* $x \in U_1$.

Preuve. — Posons

$U_1' = \{(x,p) \in U \times S^{n-1} : \alpha_i(x,p), \beta_i(x,p)$ vérifient le système P_s pour chaque $s \in \mathbf{N}\}$.

En vue de ce qu'on a déjà démontré, on a :

$U_1' = \{(x,p) \in U \times S^{n-1} : \alpha_i(x,p), \beta_i(x,p)$ vérifient le système P_s pour $s \leq m\}$. Il en résulte que U_1' est sous-analytique.

Observons que : si f est analytique dans un ouvert V , alors $V \times S^{n-1} \subset U_1'$.

L'ensemble

$$\widetilde{U}_1 = U \setminus \pi(U \times S^{n-1} \setminus U_1')$$

est aussi sous-analytique, avec $\pi : \mathbf{R}^n \times S^{n-1} \to \mathbf{R}^n$ la projection canonique.

On pose alors

$$U_1 = \operatorname{Int} \widetilde{U}_1 .$$

6. Démonstration de la Proposition 4.4.

D'abord on va énoncer un lemme qui implique la proposition 4.4.

(6.1) LEMME. — *Soit $f : U_1 \to \mathbf{R}$ la restriction de la fonction f à l'ensemble U_1 défini dans le corollaire 5.2. Alors il existe une stratification $\mathcal{R}$ compatible avec $U_1 \times S^{n-1}$ et des fonctions*

$$w_i : U_1 \times S^{n-1} \to \mathbf{R}\ , \quad i \in \mathbf{N}$$

sous-analytiques et analytiques dans chaque strate de la stratification $\mathcal{R}$ contenue dans $U_1 \times S^{n-1}$ telles que f possède au point $z \in U_1$ une i-ème différentielle de Gateaux si et seulement si $w_i \equiv 0$ dans $\{z\} \times S^{n-1}$.

Appliquons le lemme 2.5 pour la famille des fonctions w_i , $i \in \mathbf{N}$, dans chaque strate $R \in \mathcal{R}$, $R \subset U_1 \times S^{n-1}$ (il y en a un nombre fini). On obtient donc un entier $l \in \mathbf{N}$ tel que $l \geq m$ (*) et

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\{w_i = 0\} = \bigcap_{i=1}^{l}\{w_i = 0\}\ .$$

Bien sûr l'entier l vérifie la conclusion de la proposition 4.4. Il nous reste à démontrer le lemme 6.1.

On commence la preuve du lemme 6.1 par une simple remarque sur des polynômes homogènes. Notons par $P_d(\mathbf{R}^n)$ l'espace des polynômes homogènes du degré d sur $\mathbf{R}^n$. Soit $\mu(d) = \dim P_d(\mathbf{R}^n)$.

(6.2) Remarque. — Soit $\Omega \neq \emptyset$ un ouvert de S^{n-1} ; pour chaque $d \in \mathbf{N}$ il existe des points $p_1, \ldots, p_{\mu(d)} \in \Omega$ possédant la propriété suivante :

Pour chaque suite de nombres $t_1, \ldots, t_{\mu(d)} \in \mathbf{R}$ il existe exactement un polynôme $v \in P_d(\mathbf{R}^n)$ tel que

$$v(p_i) = t_i \quad pour \quad i = 1, \ldots, \mu(d)\ .$$

De plus, les coefficients de v dépendent linéairement de $t_1, \ldots, t_{\mu(d)}$.

(*) l'entier m est celui de la proposition 4.3.

Maintenant, on va prouver le lemme 6.1.

Soient $\mathcal{T}$ une stratification compatible avec $U \times S^{n-1}$ et $k \in 2\mathbf{N}$ un entier pair vérifiant les conclusions du lemme 5.1.

La stratification cherchée $\mathcal{R}$, compatible avec $U_1 \times S^{n-1}$, est construite de la manière suivante :

1) Selon la proposition 1.6, il existe une stratification $\mathcal{L}'$ de $\mathbf{R}^n$ compatible avec U_1 telle que la paire $(\mathcal{T}, \mathcal{L}')$ vérifie la condition (+) (voir la définition 1.6).

2) Il résulte du théorème 1.4 qu'il existe une stratification $\mathcal{R}$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ compatible avec $\mathcal{T}$ et une stratification $\mathcal{L}$ de $\mathbf{R}^n$ compatible avec $\mathcal{L}'$ telles que la paire $(\mathcal{R}_{S^{n-1}}, \mathcal{L})$ est compatible avec la restriction de la projection

$$\pi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \ni (x,y) \to x \in \mathbf{R}^n \quad \text{sur} \quad \mathbf{R}^n \times S^{n-1}$$

où $\mathcal{R}_{S^{n-1}} = \{R \in \mathcal{R} : R \subset \mathbf{R}^n \times S^{n-1}\}$.

Rappelons que les fonctions de classe SUBB($\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$)

$$\alpha_{ik} : U \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbf{R}$$

définies au paragraphe 5 sont analytiques dans chaque $T \in \mathcal{T}$, $T \subset U \times S^{n-1}$. La fonction f est analytique dans chaque intervalle contenu dans U_1 ; de plus, on a :

$$\frac{d^i}{dt^i}(t \to f(x+tp))(0) = i!\alpha_{ik}(x,p)$$

pour chaque $(x,p) \in U_1 \times S^{n-1}$.

A présent, on va définir les fonctions w_i , $i \in \mathbf{N}$. Fixons $i \in \mathbf{N}$. L'ensemble U_1 est une réunion de strates de la stratification $\mathcal{L}$. On va définir la fonction w_i sur chaque strate $L \times S^{n-1}$ séparément, $L \in \mathcal{L}$, $L \subset U_1$.

Fixons donc la strate $L \in \mathcal{L}$, $L \subset U_1$. La strate L est contenue dans une $L' \in \mathcal{L}'$. Il résulte de la condition (+) qu'il existe un ouvert $W_{L'} \neq \emptyset$ de S^{n-1} tel que

$$L' \times W_{L'} \subset T \quad \text{pour un} \quad T \in \mathcal{T} ,$$

donc $L \times W_{L'} \subset T$.

Choisissons des points $p_1, \ldots, p_{\mu(i)} \in W_{L'}$ selon la remarque 6.2. Alors il existe des fonctions linéaires $a_1, \ldots, a_{\mu(i)}$ (avec des coefficients ne dépendant que des $p_1, \dots, p_{\mu(i)}$) sur $\mathbf{R}^{\mu(i)}$ possédant la propriété suivante :

Le polynôme unique $v \in P_i(\mathbf{R}^n)$ qui vérifie les équations :

$$v(p_j) = t_j$$

est le polynôme $\sum_{j=1}^{\mu(i)} a_j(t_1, \dots, t_{\mu(i)}) e_j$ où les e_j sont les monômes de degré i . Posons

$$v_i : L \times S^{n-1} \ni (x,p) \longmapsto \sum_{j=1}^{\mu(i)} a_j(\alpha_{ik}(x,p_1), \dots, \alpha_{ik}(x,p_{\mu(i)})) e_j(p) \in \mathbf{R} .$$

En vue du théorème 2.4, $v_i \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$.

D'après la définition, f possède une i-ème différentielle de Gateaux dans $x \in U_1$ si et seulement si $\delta_x^i f$ est un polynôme homogène du degré i . On a déjà remarqué que :

$$\delta_x^i f|_{S^{n-1}} = i! \alpha_{i \cdot k}|_{\{x\} \times S^{n-1}} .$$

Alors, f possède une i-ème différentielle de Gateaux dans x si et seulement si $\alpha_{i \cdot k}|_{\{x\} \times S^{n-1}}$ est la restriction d'un polynôme homogène du degré i sur S^{n-1} ce qui équivaut à dire que

$$\alpha_{i \cdot k}(x,p) = v_i(x,p) \quad \text{dans} \quad \{x\} \times S^{n-1} .$$

On définit w_i sur $L \times S^{n-1}$ de la façon suivante :

$$w_i(x,p) = \alpha_{i \cdot k}(x,p) - v_i(x,p) .$$

L'ensemble $L \times S^{n-1}$ est une réunion de strates de la stratification $\mathcal{R}$. La fonction w_i est analytique dans chacune de ces strates. Selon le théorème 2.4, $w_i \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, ce qui termine la démonstration du lemme 6.1.

Remarque. — Observons que, des raisonnements qu'on a faits dans les paragraphes **5** et **6**, on peut déduire le corollaire suivant :

(6.3) COROLLAIRE. — *Soit $f \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n)$ et U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, alors pour chaque $k \in \mathbf{N}$ l'ensemble*

$$\{x \in U : f \text{ possède une } k\text{-ième différentielle de Gateaux en } x\}$$

est sous-analytique.

7. Points réguliers d'un ensemble sous-analytique.

Soit A un sous-ensemble de M . Posons

$R(A) = \{x \in A$: le germe A_x est le germe d'une sous-variété analytique de $M\}$.

Pour une fonction $f : U \to \mathbf{R}$, $U \subset M$ on pose

$$R(f) = \{x \in U : f \text{ est analytique en } x\} .$$

Maintenant on va montrer le résultat principal.

(7.1) THÉORÈME (Tamm [T]). — *Soit* $A \in \mathrm{SUB}(M)$, *alors* $R(A) \in \mathrm{SUB}(M)$.

D'abord, on va prouver le fait suivant :

(7.2) THÉORÈME (Tamm [T]). — *Soit* $f : U \to \mathbf{R}$ *une fonction sur un ouvert* U *de* M , *avec* $f \in \mathrm{SUBB}(M)$; *alors* $R(f) \in \mathrm{SUB}(M)$.

Preuve. — On peut admettre que $M = \mathbf{R}^n$ et U est borné. En éliminant l'ensemble des points où f n'est pas continue, on peut admettre que f est continue. Dans ce cas, $f : U \to \mathbf{R}$ vérifie l'hypothèse de la proposition 4.3, donc selon le corollaire 5.2, on obtient un $U_1 \in \mathrm{SUB}(\mathbf{R}^n)$ tel que f soit analytique dans chaque intervalle contenue dans U_1 , et que de plus, on ait $R(f) \subset U_1$.

Il résulte du lemme 6.1 qu'il existe une stratification $\mathcal{R}$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, compatible avec $U_1 \times S^{n-1}$ et des fonctions

$$w_i : U_1 \times S^{n-1} \to \mathbf{R} , \quad i \in \mathbf{N}$$

sous-analytiques et analytiques dans chaque strate $R \in \mathcal{R}$, $R \subset U_1 \times S^{n-1}$. Les fonctions w_i possèdent les propriétés suivantes :

f possède au point $z \in U_1$ une i-ème différentielle de Gateaux si et seulement si $w_i \equiv 0$ sur $\{z\} \times S^{n-1}$.

Considérons l'ensemble

$$W_1' = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{w_i = 0\} .$$

D'après le lemme 2.5, on obtient un $l \in \mathbf{N}$ tel que

$$W_1' = \bigcap_{i=1}^{l} \{w_i = 0\} .$$

D'où on déduit que $W_1' \in \mathrm{SUB}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$. Soit $\pi : \mathbf{R}^n \times S^{n-1} \to \mathbf{R}^n$ la projection naturelle. L'ensemble

$$\widetilde{W}_1 = U_1 \setminus \pi(U_1 \times S^{n-1} \setminus W_1')$$

est sous-analytique, car π est propre. Alors l'ensemble

$$W_1 = \mathrm{Int}\, \widetilde{W}_1$$

est aussi sous-analytique. On va démontrer que

$$R(f) = W_1 .$$

L'inclusion $R(f) \subset W_1$ résulte de la construction de W_1 . L'inclusion réciproque se déduit du théorème de Bochnak-Siciak (théorème 4.1), car $f|_{W_1}$ est de classe G^∞ et f est analytique dans chaque intervalle contenu dans W_1 . Ceci achève la preuve du théorème 7.2.

Pour montrer le théorème 7.1, il nous faut deux lemmes.

(7.3) LEMME. — *Soit* $E \in \mathrm{SUB}(\mathbf{R}^n)$, *alors la fonction* $\rho(x) = \inf_{y \in E} |x - y|$ *de distance à l'ensemble* E *est sous-analytique.*

La preuve de ce fait est analogue à la preuve du théorème qui dit que la fonction distance à un ensemble semi-algébrique est semi-algébrique (voir [L1]); elle peut être trouvée par exemple dans [B.R].

(7.4) LEMME (Poly et Raby [P.R]). — *Soit* A *un sous-ensemble localement fermé de* $\mathbf{R}^n$. *Soit* $\delta(x) = \inf\limits_{y \in A} |x - y|^2$ *le carré de la fonction distance à l'ensemble* A . *Soit* $x \in A$, *alors le germe* A_x *est le germe d'une variété sous-analytique si et seulement si la fonction* δ *est analytique en* x .

Revenons à la preuve du théorème 7.1. On peut admettre que $M = \mathbf{R}^n$. L'ensemble

$$A' = A \setminus (\overline{\overline{A} \setminus A})$$

est localement fermé dans $\mathbf{R}^n$, et de plus $R(A) \subset A'$. Considérons la fonction

$$\delta(x) = \inf_{y \in A'} |x - y|^2 , \quad x \in \mathbf{R}^n .$$

Du lemme 7.3, on déduit que $\delta \in \mathrm{SUBB}(\mathbf{R}^n)$, car $\delta = \rho^2$ et ρ est localement bornée. D'après le lemme 7.4, on a

$$R(A) = R(\delta) \cap A' .$$

Selon le théorème 7.2, $R(\delta) \in \mathrm{SUB}(\mathbf{R}^n)$, donc $R(A) \in \mathrm{SUB}(\mathbf{R}^n)$.

BIBLIOGRAPHIE

[Bi.Sc] E. BIERSTONE, G.W. SCHWARZ. — Continuous linear division and extension of C^∞ functions, Duke Math. Journal, 50 , n° 1 (1983) , 233-271.

[B.S] J. BOCHNAK, J. SICIAK. — Analytic functions in topological vector spaces, Studia Math., 39 (1971), 77-112.

[B.R] J. BOCHNAK, J.J. RISLER. — Sur les exposants de Lojasiewicz, Comment. Math. Helvetici, 50(1975), 493-507.

[D] Z. DENKOWSKA. — Une présentation de la théorie des sous-analytiques sans désingularisation. Séminaire d'Analyse P. Lelong, P. Dalbeaut, H. Skoda, années 83/84, Lecture Notes in Maths, 1198 (1986), 105-115.

[D.L.S.1] Z. DENKOWSKA, S. ŁOJASIEWICZ, J. STASICA. — Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques, Bull. Ac. Pol. Math., 27 (1979), 529-535.

[D.L.S.2] Z. DENKOWSKA, S. ŁOJASIEWICZ , J. STASICA. — Sur le théorème du complémentaire pour les ensembles sous-analytiques , Bull . Ac. Pol. Math., 27 (1979), 537-539.

[D.S] Z. DENKOWSKA, J. STASICA. — Sur la stratification sous-analytique, Bull. Ac. Pol. Math., 30 (1982), 337-340.

[G] A.M. GABRIELOW. — Projection of semi-analytic set, Func. Analiz i Iego Prilorkenija, 2, n° 4 (1968), 18-30.

[Ha] R. HARDT. — Stratification of real analytic mappings and images, Invent. Math., 28 (1975), 193-208.

[L1] S. ŁOJASIEWICZ. — Ensembles semi-analytiques, Preprint I.H.E.S., 1965.

[L2] S. ŁOJASIEWICZ. — Sur la semi-analycité des images par l'application tangente, Bull. Ac. Pol. Math., 27 (1979), 525-527.

[Pa] W. PAWLUCKI. — Théorème de Puiseux pour une application sous-analytique, Bull. Ac. Pol. Math., 32 (1984), 555-559.

[P.R] J.B. POLY, G. RABY. — Fonction distance et singularités , Bull. Sc. Math. 2e série, 108 (1984), 187-195.

[T] M. TAMM. — Subanalytic sets in calculus of variation, Acta Math. Uppsala, 146 (1981), 167-199.

[W] H. WHITNEY. — Complex Analytic Varieties, Addison-Wesley Publ. Comp., 1972.

Manuscrit reçu le 10 avril 1985
révisé le 13 avril 1987.

Krzysztof KURDYKA,
Uniwersytet Jagiellonski
Instytut Matematyki
ul. Reymonta 4
30-050 KRAKOW (Pologne).