Annales de l'institut Fourier

André Haefliger

Des espaces homogènes à la résolution de Koszul

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 4 (1987), p. 5-13
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_4_5_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 4 (1987), 5-13.

DES ESPACES HOMOGÈNES A LA RÉSOLUTION DE KOSZUL

par André HAEFLIGER

J. L. Koszul a été un pionnier et un initiateur dans beaucoup de domaines. Voici quelques-uns des concepts qu'il a introduits et qui ont tous fait une très belle carrière. Bien des mathématiciens qui les utilisent aujourd'hui ne savent peut-être pas qu'ils sont dus à Koszul.

- Suite spectrale associée à un complexe filtré en 1947 (1) (construction algébrique inspirée des travaux de Leray)
- Homologie des algèbres de Lie
- Algèbre et sous-algèbre de Lie réductive
- Transgression

  } 1947-1949 (2)
- Résolution de Koszul (1950) (3)
- Connexion définie à partir des propriétés de la dérivée covariante (1951), aussitôt utilisée par Nomizu notamment
- « Slice » pour une action différentiable d'un groupe de Lie compact (1953) (4)
- Cohomologie des espaces simpliciaux calculée à l'aide d'un complexe double (1957) (5), construction qui a été reprise plus tard par divers auteurs dans toutes sortes de contextes analogues.

(1) Sur les opérateurs de dérivations dans un anneau, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 225 (1947), 217-219.
(2) Thèse : Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, *Bull. Soc. Math. France*, 78 (1950), 1-63.
(3) *Colloque de Topologie*, Bruxelles (1950), 73-81.
(4) Sur certains groupes de transformations de Lie, *Coll. Int. de Géom. différ.*, Strasbourg (1958), 137-141.
(5) Multiplicateurs et classes caractéristiques, *Trans. Am. Math. Soc.*, 89 (1958), 256-266.

Mots-clés : Groupes et algèbres de Lie - Espaces homogènes - Cohomologie des algèbres de Lie - Transgression - Connexions - Résolution de Koszul

Aujourd'hui je me propose de replacer la thèse de Koszul dans le courant des idées d'avant et d'après guerre, ne parlant ainsi que d'une période très courte (1947-1950) de sa production mathématique ([1]).

Tout remonte au mémoire fondamental d'Élie Cartan : « Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos » (Ann. Soc. Pol. de Math., 8 (1929) p. 181-225). Cartan venait de conjecturer que la cohomologie réelle $H^*(M)$ d'une variété différentiable M pouvait se calculer à l'aide du complexe des formes différentielles $\mathcal{A}^*(M)$ de M. D'ailleurs il ajoute après coup dans une note de bas de page que G. de Rham vient de démontrer cette conjecture. Il montre que si M est un espace homogène symétrique sous l'action d'un groupe de Lie compact connexe G, alors la cohomologie de M est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{A}^*(M)^G$ des formes différentielles G-invariantes (l'isomorphisme étant induit par l'inclusion de $\mathcal{A}^*(M)^G$ dans $\mathcal{A}^*(M)$, la différentielle extérieure étant nulle sur $\mathcal{A}^*(M)^G$). En particulier G lui-même est un espace symétrique sous l'action de $G \times G$ opérant par translations à droite et à gauche, donc $H^*(G)$ s'identifie à l'algèbre des formes bi-invariantes sur G, i.e. à l'algèbre des formes multilinéaires alternées sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, invariantes par la représentation adjointe, notée ici $C^*(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Ainsi le calcul de la cohomologie réelle $H^*(G)$ de G est ramenée à un problème d'invariants. En utilisant H. Weyl, il montre en particulier que la dimension de $H^*(G)$ est 2^{ℓ}, où ℓ est le rang de G.

En 1939 (Über die Topologie der Gruppen-Manigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen », 42 (1941), p. 22-52), H. Hopf montre que la cohomologie réelle d'un groupe de Lie compact connexe G est une algèbre extérieure $\Lambda(x_1, \ldots, x_\ell)$ engendrée par des générateurs x_i de dimension impaire. Hopf considérait en fait l'homologie $H_*(G)$ de G avec la structure multiplicative induite par l'intersection des cycles, ce qui correspond exactement par dualité de Poincaré à l'algèbre de cohomologie $H^*(G)$ de G. L'idée est d'utiliser la structure supplémentaire sur $H^*(G)$ donnée par la comultiplication $\Delta : H^*(G) \to H^*(G) \otimes H^*(G)$, transposée du produit de Pontrjagin $H_*(G) \otimes H_*(G) \to H_*(G)$ induit par la multiplication $G \times G \to G$ dans G. La comultiplication est un homomorphisme d'algèbres et cette structure algébrique supplémentaire sur $H^*(G)$, appelée plus tard structure d'algèbre de Hopf, suffit pour impliquer le théorème. Peu après, H. Samelson dans sa thèse (Beiträge zur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeine-

([1]) L'auteur a profité de conversations très utiles avec A. Borel.

rungen, Ann. of Math., Vol. 43 (1941), p. 22-52) précise le théorème de Hopf et étudie la cohomologie des espaces homogènes.

Le but que se propose Koszul dans sa thèse est le suivant : puisque d'après Élie Cartan la cohomologie d'un groupe de Lie G compact connexe ne dépend que de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et plus généralement la cohomologie d'un espace homogène G/H ne dépend que de la paire d'algèbres de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, on doit pouvoir retrouver de manière purement algébrique à partir de $\mathfrak{g}$ (ou de la paire $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$) les théorèmes de Hopf et Samelson.

Dans un article paru en 1948 (« Cohomology of Lie groups and Lie algebras », Trans. AMS, 63 (1948), p. 85-124) présenté en décembre 1946 à l'AMS, C. Chevalley et S. Eilenberg avaient déjà donné une définition purement algébrique de la cohomologie d'une algèbre de Lie abstraite à valeur dans l'espace V d'une représentation de $\mathfrak{g}$ inspirée directement de E. Cartan, le corps de base étant supposé de caractéristique zéro à cause de dénominateurs artificiels dans la définition de la différentielle des formes multilinéaires alternées sur $\mathfrak{g}$ (dénominateurs qui figurent malheureusement encore aujourd'hui dans certaines publications, mais qui n'apparaissent pas dans la thèse de Koszul). En utilisant les théorèmes mentionnés ci-dessus de E. Cartan et H. Hopf, ces deux auteurs étendent le théorème de Hopf à la cohomologie des algèbres de Lie semi-simples quelconque, en utilisant le « unitary trick » de H. Weyl. Dans les démonstrations, il n'y a d'algébrique que les définitions, les théorèmes étant démontrés par voie transcendante.

Il en va tout autrement dans la thèse de Koszul. Dans une première partie, il commence par donner une définition de l'homologie et de la cohomologie d'une algèbre de Lie sur un corps K de caractéristique différente de deux, à coefficient dans K (analogue à celle de Chevalley-Eilenberg). En fait Koszul n'a eu connaissance du travail de Chevalley-Eilenberg que lors de son séjour à Princeton en 1948, alors qu'il avait déjà conçu la majeure partie de sa thèse.

Par définition, l'homologie $H_*(\mathfrak{g})$ (sous-entendu à coefficient dans K) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'homologie du complexe $C_*(\mathfrak{g})$ de l'algèbre extérieure $\Lambda(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ avec un opérateur bord ∂ de degré -1 donné par

$$\begin{aligned}\partial(x^1 \wedge \cdots \wedge x^p) \\ = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1}[x^i, x^j] \wedge x^1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}^i \wedge \cdots \wedge \hat{x}^j \wedge \cdots \wedge x^p.\end{aligned}$$

Par dualité, on obtient sur l'algèbre des formes multilinéaires alternées $C^*(\mathfrak{g})$ sur $\mathfrak{g}$ une différentielle d de degré $+1$ qui est une antidérivation, et donne donc une structure d'algèbre graduée sur la cohomologie $H^*(\mathfrak{g})$ de $C^*(\mathfrak{g})$, alors qu'on n'a pas en général de structure multiplicative sur $H_*(\mathfrak{g})$, le produit extérieur de deux cocycles n'étant pas en général un cocycle.

Koszul commence par montrer qu'on a une dualité de Poincaré entre homologie et cohomologie si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie et unimodulaire (en considérant des coefficients non triviaux, sa démonstration donne toujours une dualité de Poincaré à condition de tordre les coefficients avec la représentation modulaire).

Ensuite il démontre le théorème de Hopf pour la cohomologie des algèbres de Lie réductives $\mathfrak{g}$ de caractéristique 0, réductive signifiant que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Pour un tel $\mathfrak{g}$, il démontre d'abord que, comme dans le théorème d'Élie Cartan, la cohomologie ou l'homologie de $\mathfrak{g}$ est donnée par le sous-complexe (avec différentielle nulle) des cochaînes ou des chaînes annulées par l'action de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ (on dira invariantes par $\mathfrak{g}$). Il définit l'analogue du produit de Pontrjagin $H_*(\mathfrak{g}) \otimes H_*(\mathfrak{g}) \to H_*(\mathfrak{g})$ en montrant que le produit extérieur de deux chaînes invariantes (donc cycles) est homologue à une chaîne invariante. Ceci définit par transposition une comultiplication $\Delta : H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(\mathfrak{g}) \otimes H^*(\mathfrak{g})$ qui fait de $H^*(\mathfrak{g})$ une algèbre de Hopf, d'où en explicitant les arguments algébriques de Hopf et Samelson un isomorphisme d'algèbres de Hopf

$$H^*(\mathfrak{g}) \approx \Lambda(x_1, \ldots, x_1)$$

les x_i étant des éléments de degré impair primitifs, i.e. tels que $\Delta x_i = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_1$.

Dans la seconde partie de sa thèse, Koszul redémontre et généralise des résultats de Samelson sur la cohomologie des espaces homogènes G/H. Dans son cadre algébrique, il considère une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et il définit la cohomologie relative $H^*(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ (comme dans Chevalley-Eilenberg) comme celle du sous-complexe $C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ de $C^*(\mathfrak{g})$ formé des cochaînes $\mathfrak{h}$-basiques, i.e. annulées par les produits intérieurs et les dérivées de Lie par les éléments de $\mathfrak{h}$ (elles correspondent aux formes différentielles G-invariantes sur G/H lorsque $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont les algèbres de Lie de G et de H). L'analogue de la condition que H est compact est la réductivité de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$ si la représentation adjointe de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

La sous-algèbre $C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ définit une filtration naturelle de $C^*(\mathfrak{g})$ telle que la suite spectrale correspondante (selon la construction exposée par Koszul dans sa deuxième note aux C.R. Acad. Sc. Paris, 225 (1947), p. 217-219), a pour deuxième terme

$$E_2^{p,q} \approx H^p(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \otimes H^q(\mathfrak{h})$$

et converge vers un gradué associé à $H^*(\mathfrak{g})$.

Si $\mathfrak{h}$ n'est pas homologue à zéro dans $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire si l'homomorphisme $H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(\mathfrak{h})$ induit par l'inclusion de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est surjectif, alors la suite spectrale dégénère et on a même un isomorphisme d'algèbres de $H^*(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \otimes H(\mathfrak{g})$ sur $H^*(\mathfrak{g})$ (généralisant ainsi un résultat de Samelson).

Cette partie de la thèse de Koszul a été réexposée quatre ans plus tard dans un article de Hochschild-Serre [1], la différence essentielle étant que ces deux auteurs considèrent d'emblée la cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeur dans un $\mathfrak{g}$-module V comme dans Chevalley-Eilenberg, alors que chez Koszul ceci n'apparaît que dans les démonstrations. Les constructions sont les mêmes que chez Koszul, mais la présentation est plus ramassée, la suite spectrale ayant eu le temps de se roder, de sorte que cet article est devenu une référence standard qui a fait souvent oublier le rôle de Koszul (il contient aussi une autre suite spectrale relative à un idéal de $\mathfrak{g}$).

Revenons au dernier paragraphe de la thèse de Koszul. Il y introduit la notion importante de *transgression*, inspirée d'une construction de G. Hirsch dans le cadre des espaces fibrés.

Une classe $\alpha \in H^p(\mathfrak{h})$ est transgressive si α est représentée par un cocycle a qui est la restriction à $\mathfrak{h}$ d'une cochaîne $b \in C^p(\mathfrak{g})$ (appelée cochaîne de transgression) telle que db soit $\mathfrak{h}$-basique, i.e. $db \in C^{p+1}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. La classe de cohomologie $\tau(\alpha)$ de db dans $H^{p+1}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ est dite obtenue de α par transgression.

Koszul démontre alors le théorème suivant qui deviendra fondamental : toute classe de cohomologie primitive de $H^*(\mathfrak{h})$ est transgressive.

Il en tire des conséquences qui généralisent des résultats de Samelson.

La thèse de Koszul, soutenue au printemps 1949, va alors être le point de départ d'un développement extrêmement rapide, notamment

(1) Cohomology of Lie algebras, *Annals of Math.*, 57 (1953), 591-603.

sous l'impulsion de A. Weil, qu'on pourrait décrire schématiquement comme l'extension de la deuxième partie de la thèse de Koszul aux espaces fibrés principaux de groupes compacts (notamment l'espace fibré universel), et qui aboutira à la thèse de A. Borel (Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes compacts, Ann. of Math., 57 (1953), p. 115-207).

André Weil, qui était professeur à l'Université de Chicago, passe les mois d'avril à juin 1949 à Paris où il retrouve Chevalley, alors en congé de l'Université de Columbia. Il s'était intéressé aux espaces fibrés du point de vue de la géométrie différentielle et des connexions. Il avait eu des contacts avec Ehresmann avant la guerre, puis avec Chern en 1943-1944, Chern qui était devenu son collègue à Chicago depuis janvier 1949. Les préoccupations de A. Weil rejoignaient celles de Koszul et de Henri Cartan, et très vite une étroite collaboration s'établit entre Weil, Chevalley, Koszul et Cartan (voir André Weil, Œuvres Scientifiques, Springer Verlag, Vol. 1, p. 567-570).

Tout d'abord A. Weil donne la construction de ce qui sera appelé plus tard l'homomorphisme de Chern-Weil et il commande à Chevalley l'extension aux espaces fibrés différentiables du théorème de transgression de Koszul (cf. loc. cit., p. 422-436).

De ces intenses discussions du quatuor émaneront deux articles remarquables publiés au Colloque de topologie de Bruxelles de 1950. Le premier de Henri Cartan, en deux parties (p. 15-28 et p. 57-72), expose avec une clarté admirable le mécanisme algébrique des connexions, la construction de ce qu'il appelle l'algèbre de Weil, et il établit une série de théorèmes sur la cohomologie des espaces homogènes compacts. Le second, très original, de Koszul introduit la fameuse résolution qui porte son nom (loc. cit., p. 73-82).

Donnons tout d'abord l'énoncé du théorème de transgression qui étend celui de la thèse de Koszul. Soit $p : \mathrm{E} \to \mathrm{B}$ un espace fibré différentiable G-principal, où G est un groupe de Lie compact connexe. Soient $x_1, \ldots, x_1$ des générateurs de $\mathrm{H}^*(\mathrm{G})$ qui forment une base de l'espace des éléments primitifs. Il existe alors des formes différentielles G-invariantes ξ_i sur E (construites à l'aide d'une connexion), la restriction de ξ_i à une fibre G de E étant une forme bi-invariante représentant la classe x_i et telle que $d\xi_i$ soit l'image par p^* d'une forme de la base notée c_i (donc de degré pair).

On peut alors construire une algèbre différentielle

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_\ell) \otimes \mathcal{A}^*(\mathrm{B})$$

où $\mathcal{A}^*(\mathrm{B})$ désigne l'algèbre des formes différentielles de B, la différentielle d étant définie par $d(x_i \otimes 1) = 1 \otimes c_i$ et $d(1 \otimes b) = 1 \otimes db$.

Il existe un unique homomorphisme d'algèbres différentielles de cette algèbre dans $\mathcal{A}^*(\mathrm{E})$ envoyant $x_i \otimes 1$ sur ξ_i et $1 \otimes b$ sur $p^*(b)$. Cet homomorphisme induit un isomorphisme sur la cohomologie (résultat dû à Chevalley).

$\mathcal{A}^*(\mathrm{B})$ est un module différentiel sur l'anneau $\mathrm{S} = \mathbf{R}[c_1, \ldots, c_\ell]$ des polynômes dans les variables c_i (qui est isomorphe à la cohomologie réelle du classifiant BG).

Comme le remarque Koszul, dans certains cas, on peut remplacer $\mathcal{A}^*(\mathrm{B})$ par la cohomologie $\mathrm{H}^*(\mathrm{B})$, par exemple si B est un espace homogène symétrique d'un groupe compact, $\mathrm{H}^*(\mathrm{B})$ s'identifiant par E. Cartan à l'algèbre des formes différentielles invariantes sur B, les c_i étant choisis invariants (plus généralement si B est formel au sens de Sullivan).

On obtient dans ce cas un complexe homologiquement équivalent de la forme

$$\Lambda(x_1, \ldots, x_\ell) \otimes \mathrm{H}^*(\mathrm{B}), \qquad d(x_i \otimes b) = 1 \otimes c_i b$$

dont la cohomologie est celle de E. C'est précisément la résolution de Koszul du S-module $\mathrm{H}^*(\mathrm{B})$.

La cohomologie de ce complexe est notée maintenant $\mathrm{Tor}^{\mathrm{S}}(\mathbf{R}, \mathrm{H}^*(\mathrm{B}))$.

Koszul remarque que cette construction peut se faire pour tout S-module M, où S est un anneau de polynômes $\mathrm{K}[c_1, \ldots, c_\ell]$ et que si M est de plus gradué, les c_i étant homogènes de degré strictement positif, alors on peut construire une autre résolution libre minimale de M de sorte qu'en faisant son produit tensoriel avec le S-module K, on trouve un complexe avec différentielle nulle, qui est isomorphe à la cohomologie du complexe de Koszul, et que cette construction généralise celle des Syzygies de Hilbert.

En appliquant ceci à l'algèbre de Weil d'une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$, il montre que le fait que les formes anti-symétriques invariantes sur $\mathfrak{g}$ constituent une algèbre extérieure sur des générateurs de degré impair

$x_1, \ldots, x_\ell$ entraîne que l'algèbre des formes multilinéaires symétriques invariantes sur $\hat{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de polynômes dans des variables de degré pair $c_1, \ldots, c_\ell$, généralisant ainsi le résultat de sa toute première note aux C.R. Acad. Sc. Paris, 224 (1947), p. 251-253.

Ce travail qui a été le point de départ d'un chapitre très important de l'algèbre homologique se termine par des applications à la cohomologie des espaces symétriques.

En principe, les résultats obtenus par le quatuor Cartan-Chevalley-Koszul-Weil devait faire l'objet d'une rédaction détaillée, car dans les deux publications mentionnées ci-dessus, certains théorèmes de base, tel le théorème général de transgression dû à Chevalley, sont énoncés sans démonstration.

Mais en automne 1950, A. Borel annonce qu'il a réussi à transposer dans le cadre topologique toutes les constructions algébriques du quatuor qui utilisent essentiellement les algèbres différentielles graduées commutatives, en particulier la transgression et les constructions avec le fibré universel, et qu'il est ainsi capable d'obtenir des résultats sur la cohomologie entière ou modulo p des espaces homogènes en utilisant à fond la théorie de Leray.

Il est cependant regrettable que la rédaction prévue n'ait jamais vu le jour. A part les travaux de Thom ([1]) qui esquisse en 1954-1956 la théorie de l'homotopie rationnelle, la théorie des algèbres différentielles graduées commutatives a été éclipsée pendant près de vingt ans.

Mais cette théorie est revenue au premier plan de l'actualité à partir des années 70 et jusqu'à maintenant, notamment grâce au résultat de Bott ([2]) sur l'obstruction à la complète intégrabilité des champs de plans (1968), résultat qui s'est ensuite intégré naturellement dans le cadre de la cohomologie de Gelfand-Fuks ([3]) où les méthodes développées par Koszul dans sa thèse ont trouvé un terrain idéal d'applications (car il n'y a pas d'autres méthodes topologiques à disposition). Ceci a conduit à l'invariant de Godbillon-Vey ([4]) et à ses généralisations comme classes

([1]) « Opérations en cohomologie réelle », Séminaire Cartan, 1954-1955, exposé 17 et « L'homologie des espaces fonctionnels », Coll. Top. Alg., Louvain 1956, p. 29-39.

([2]) A topological obstruction to integrability, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. XVI (1970), 127-131.

([3]) The cohomology of the Lie algebra of formal vector fields, *Izvestia An. SSSR*, 34 (1970), 322-337.

([4]) Un invariant des feuilletages de codimension un, *C.R. Acad. Sc. Paris*, (1971), 92-95.

caractéristiques des feuilletages, l'invariant de Chern-Simons, etc. Les travaux de D. Quillen (1) et surtout de D. Sullivan (2) ont définitivement remis à l'honneur les algèbres différentielles graduées commutatives en topologie. En physique, leur rôle ne fait que s'amplifier.

Je n'ai eu le temps d'évoquer aujourd'hui qu'une toute petite partie de l'œuvre mathématique de Koszul, couvrant la période 1947-1950, passant ainsi complètement sous silence ses contributions fondamentales dans beaucoup d'autres domaines des mathématiques, tels la géométrie différentielle, les groupes de transformations, les espaces homogènes complexes, la cohomologie de Gelfand-Fuks et les supervariétés. Mais il en sera certainement question au cours de ce colloque.

Sa pensée mathématique a aussi eu un grand rayonnement dans le monde entier grâce aux cours remarquables qu'il a donnés en particulier au Brésil et au Tata Institute de Bombay, grâce aux nombreux jeunes étrangers qui sont venus travailler sous sa direction et qui lui doivent beaucoup, et enfin grâce à l'excellence de ses élèves Murakami, Luna, Vust, Helmstetter et le regretté Jacques Vey.

André HAEFLIGER,
Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4 rue du Lièvre
Code Postale 240
CH-1211 Genève 24.

(1) Rational homotopy theory, *Ann. of Math.*, 90 (1969), 205-295.

(2) Differential forms and the topology of manifolds, Manifolds-Tokyo, *Proc. of Int. Conf. on manifolds Tokyo*, 1973, U. of Tokyo Press (1975), 37-39 ; Infinitesimal computations in Topology, *Pulb. Math. IHES*, N. 47 (1977), 269-331.