ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL BARLET

L'espace des feuilletages d'un espace analytique compact

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 3 (1987), p. 117-130

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_3_117_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 3 (1987), 117-130

L'ESPACE DES FEUILLETAGES D'UN ESPACE ANALYTIQUE COMPACT

par
Daniel BARLET

PLAN

Introduction.

Le présent article a été motivé par la lecture de l'article "Deformations of coherent foliations on a compact normal space" de G. Pourcin, où elle utilise une construction "à la Douady" pour obtenir un espace universel associé aux feuilletages complexes d'un espace analytique compact normal donné.

En fait le point de vue adopté conduit à une difficulté : les points de l'espace universel construit correspondent à des feuilletages munis d'une "information supplémentaire" : l'application qui à un point associe le feuilletage correspondant n'est pas en général injective.

Il m'a semblé que le point de vue "espace des cycles" pouvait conduire à une construction dans laquelle on aurait une structure naturelle d'espace analytique réduit exactement sur l'ensemble des

Mots-clés : Feuilletage complexe – Espace des cycles – Compactification.

feuilletages complexes. Nous montrons alors l'holomorphie de l'application naturelle de l'espace (réduit) de G. Pourcin dans celui que nous construisons ici.

Nous terminons en donnant un résultat de compactification **C**-analytique des composantes irréductibles de l'espace des feuilletages de X pour X compact normal et dans la classe $\mathcal{C}$ de Fujiki (i.e. faiblement kählérien). Il est remarquable que les points frontières d'une composante irréductible donnent encore naissance à des feuilletages de X.

1.

1.1. Soit X un espace analytique réduit et irréductible de dimension n. Pour $\mathfrak{F}$ faisceau cohérent sur X nous noterons par $\mathfrak{F}^\vee$ le fibré linéaire sur X associé à $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{F}$ est localement libre sur l'ouvert U de X, $\mathfrak{F}^\vee|_U$ est simplement le fibré vectoriel holomorphe sur U dont le faisceau des sections holomorphes s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathfrak{F}, \mathcal{O}_U)$.

En général, si on a une présentation finie

$$\mathcal{O}_U^r \xrightarrow{M} \mathcal{O}_U^q \longrightarrow \mathfrak{F}|_U \longrightarrow 0$$

sur l'ouvert U où $M : U \longrightarrow L(\mathbf{C}^r, \mathbf{C}^q)$ est holomorphe, le fibré linéaire $\mathfrak{F}^\vee|_U$ est donné (dans la catégorie des fibrés linéaires) par

$$\mathfrak{F}^\vee|_U = \mathrm{Ker}\,({}^tM : U \times \mathbf{C}^q \longrightarrow U \times \mathbf{C}^r).$$

On consultera [4] pour plus de détails sur l'équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents sur X et celles des fibrés linéaires.

1.2. Pour $\mathfrak{F}$ faisceau cohérent sur X analytique réduit irréductible de dimension n, et pour $p > 0$ on définira la grassmannienne des p-plans du fibré linéaire $\mathfrak{F}^\vee$, notée $G_p(\mathfrak{F}^\vee)$ comme l'espace analytique réduit au-dessus de X défini localement comme suit :

Si $\mathfrak{F}^\vee|_U = \mathrm{Ker}\,({}^tM : U \times \mathbf{C}^q \longrightarrow U \times \mathbf{C}^r)$ comme plus haut, on définira

$$G_p(\mathfrak{F}^\vee)|_U = \{(u, P) \in U \times G_p(\mathbf{C}^q) \quad P \subset \mathrm{Ker}\,{}^tM(u)\}$$

où $G_p(\mathbf{C}^q)$ désigne la grassmannienne (usuelle) des p-plans vectoriels dans $\mathbf{C}^q$. Il est aisé de vérifier que cette construction se globalise et permet de définir un espace analytique (réduit) relatif

$$\pi : G_p(\mathcal{F}^\vee) \longrightarrow X$$

et que π est un morphisme propre.

Maintenant l'espace analytique réduit $G_p(\mathcal{F}^\vee)$ est muni d'un fibré vectoriel holomorphe de rang p tautologique qui est un sous fibré vectoriel du fibré linéaire $\pi^*(\mathcal{F}^\vee)$ sur $G_p(\mathcal{F}^\vee)$.

En effet considérons

$$F = \{(u, P, x) \in \pi^*(\mathcal{F}^\vee) / x \in P\}$$

il est clair que l'on obtient ainsi un fibré vectoriel holomorphe de rang p sur $G_p(\mathcal{F}^\vee)$.

De plus ce fibré vectoriel satisfait la propriété suivante :

Pour tout ouvert U de X et tout quotient $\mathcal{Q}_U = \mathcal{F}/\mathcal{G}_U$ de $\mathcal{F}|_U$ par un sous faisceau cohérent $\mathcal{G}_U$ sur U, quotient qui soit localement libre de rang p sur U, il existe une unique section holomorphe $\sigma : U \longrightarrow G_p(\mathcal{F}^\vee)$ de π telle que l'on ait $\mathcal{Q}_U^\vee \xrightarrow{\sim} \sigma^* F$, où $\mathcal{Q}_U$ désigne le fibré linéaire associé à $\mathcal{Q}_U$ sur U. Ceci revient à dire que les sous fibrés vectoriels de rang p du fibré linéaire $\mathcal{F}^\vee|_U$ sont classifiés par les sections holomorphes sur U de π.

1.3. Considérons maintenant un sous faisceau cohérent $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ tel que $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ soit localement libre de rang p sur un ouvert dense U(*) de X. Alors d'après ce qui précède on peut classifier le sous fibré vectoriel $(\mathcal{F}/\mathcal{G})^\vee|_U$ de $\mathcal{F}^\vee|_U$ par une section holomorphe $\sigma : U \longrightarrow G_p(\mathcal{F}^\vee)$ de π.

LEMME 1. — *Dans ces conditions* σ *est méromorphe sur* X *et l'adhérence* Y *de* $\sigma(U)$ *dans* $G_p(\mathcal{F}^\vee)$ *est un sous-ensemble analytique (fermé) irréductible* Y *de dimension pure* n *de* $G_p(\mathcal{F}^\vee)$. *La projection* $\pi|_Y : Y \longrightarrow X$ *est alors une modification propre de* X(**).

(*) On peut ici supposer que U est un ouvert de Zariski de X.

(**) Elle est donc propre et surjective et il existe H analytique fermé d'intérieur vide dans X tq $\pi|_{Y-\pi^{-1}(H)} : Y - \pi^{-1}(H) \xrightarrow{\sim} X - H$ soit un isomorphisme.

Démonstration. – Soit $G = \{(u, P) \in G_p(\mathcal{F}^\vee) / P \subset (\mathcal{F}/\mathcal{G})^\vee(u)\}$.

Alors G est un sous ensemble analytique fermé de $G_p(\mathcal{F}^\vee)$. Pour le voir considérons sur un ouvert V de X une résolution

$$\mathcal{O}_V^s \xrightarrow{N} \mathcal{O}_V^q \xrightarrow{\alpha} (\mathcal{F}/\mathcal{G})|_V \longrightarrow 0$$

supposée compatible avec la résolution

$$\mathcal{O}_V^r \xrightarrow{M} \mathcal{O}_V^q \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}|_V \longrightarrow 0$$

au sens que α s'obtient en composant β avec le quotient

$$\mathcal{F}|_V \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{G})|_V \longrightarrow 0 .$$

Alors

$$(\mathcal{F}/\mathcal{G})^\vee|_V = \operatorname{Ker}({}^tN : V \times \mathbf{C}^q \longrightarrow V \times \mathbf{C}^s)$$

et on a $G|_V = \{(u, P) \in G_p(\mathcal{F}^\vee) / P \subset \operatorname{Ker}{}^tN(u)\}$ ce qui montre notre assertion. Mais il est clair que $G|_U = \sigma(U)$. Soit donc Y la composante irréductible de G qui contient $G|_U = \sigma(U)$. Alors Y est irréductible égal à $\overline{\sigma(U)}$ dans $G_p(\mathcal{F}^\vee)$ et $\pi|_Y : Y \longrightarrow X$ est propre et induit un isomorphisme de $\sigma(U) = Y \cap \pi^{-1}(U)$ avec U. Ceci achève la preuve du lemme 1.

LEMME 2. – *On suppose toujours que* X *est réduit et irréductible. Alors pour tout* $Y \subset G_p(\mathcal{F}^\vee)$ *irréductible tel que* $\pi|_Y : Y \longrightarrow X$ *soit une modification propre il existe un unique sous faisceau cohérent* $\mathcal{G}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ *est localement libre de rang* p *sur un ouvert de Zariski dense* U *de* X

2) $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ *n'a pas de torsion*

3) *L'adhérence de l'image de la section holomorphe*

$$\sigma : U \longrightarrow G_p(\mathcal{F}^\vee)$$

définie par $(\mathcal{F}/\mathcal{G})^\vee|_U$ *est précisément* Y.

Démonstration. – Notons par F_Y la restriction du fibré tautologique de $G_p(\mathcal{F}^\vee)$ à Y et par F_Y^* le faisceau des sections du fibré dual sur Y. L'inclusion de fibrés linéaires

$$F_Y \longrightarrow \pi_Y^* \mathcal{F}^\vee$$

donne une surjection de faisceaux cohérents

$$\pi_Y^*(\mathcal{F}) \longrightarrow F_Y^* \longrightarrow 0 \quad \text{sur} \quad Y$$

et on a un morphisme génériquement surjectif

$$(\pi_Y)_*\,(\pi_Y^*\mathscr{F}) \longrightarrow (\pi_Y)_*\,(F_Y^*) \quad \text{sur} \quad X$$

entre faisceaux cohérents. En composant avec le morphisme naturel $\mathscr{F} \longrightarrow (\pi_Y)_*\,(\pi_Y^*\,\mathscr{F})$ qui est un isomorphisme générique puisque $\pi_Y : Y \longrightarrow X$ est une modification propre, on obtient une surjection générique

$$\alpha : \mathscr{F} \longrightarrow (\pi_Y)_*\,(F_Y^*)\,.$$

Posons $\mathscr{G}_0 = \operatorname{Ker}\alpha$. Alors $\mathscr{F}/\mathscr{G}_0$ vérifie les conditions 1) et 3). Pour obtenir 2) il suffit de remplace $\mathscr{G}_0$ par

$$\mathscr{G} = (n-1)\text{-ième gap sheaf}^{(*)} \quad \text{de} \quad \mathscr{G}_0 \subset \mathscr{F}$$

qui est cohérent sur X (voir [8] 2.7) et coïncide génériquement avec $\mathscr{G}_0$. Il vérifie donc 1), 2) et 3). De plus l'unicité est claire par définition du $(n-1)$-ième gap sheaf. Ceci achève la preuve du lemme 2.

2.

2.1. Soit X un espace analytique complexe réduit irréductible. On notera par n sa dimension et par $\Theta_X^\vee$ le fibré linéaire sur X associé au faisceau cohérent $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X) = \Theta_X$.

Pour $p > 0$ on notera par $G_p(X)$ la grassmannienne des p-plans du fibré linéaire $\Theta_X^\vee$.

DEFINITION. – *On appellera feuilletage (complexe) de codimension* p *de* X *la donnée d'un sous ensemble analytique fermé irréductible* $Y \subset G_p(X)$ *vérifiant* :

1) *la projection* $\pi_Y : Y \longrightarrow X$ *est une modification (propre) de* X

2) *il existe un ouvert de Zariski dense de points lisses de* Y *sur lequel le champ de* $(n-p)$*-plans défini par* Y *est intégrable.*

Remarque 1. – On repère ici les feuilletages par le champ des espaces conormaux aux feuilles dont le "graphe" est Y ; on doit donc revenir au champ de $(n-p)$-plans tangents dual pour écrire la condition d'intégrabilité de manière "naturelle". On remarquera que la condition habituelle portant sur les crochets de champs de vecteurs s'exprime sur le faisceau des sections holomorphes du fibré tangent

(*) n = dim X ; on utilise la terminologie de [8].

qui correspond au fibré (linéaire) cotangent dans la correspondance fibrés linéaires $\leftrightarrow$ faisceaux cohérents. Il est donc naturel de considérer le fibré linéaire cotangent $\Theta_X^\vee$ et sa grassmannienne des p-plans pour repérer des feuilletages de codimension p.

Remarque 2. – Si X est normal les lemmes 1 et 2 du § 1 montrent que notre définition équivaut à celle donnée dans [6].

2.2. LEMME 1. – *Soit* $Y \subset G_p(X)$ *un sous ensemble analytique fermé irréductible vérifiant la condition* 1) *de la définition précédente. Supposons qu'il existe* $x_0 \in X$ *qui soit lisse, tel que* $\pi_Y : Y \longrightarrow X$ *soit un isomorphisme au voisinage de* x_0, *et tel que* Y *définisse un feuilletage au voisinage de* x_0 *(c'est-à-dire que la condition d'intégrabilité* 2) *soit satisfaite près de* x_0). *Alors* Y *est un feuilletage de* X.

Démonstration. – Il s'agit simplement de voir que pour un sous fibré vectoriel du fibré tangent d'une variété complexe connexe la condition d'intégrabilité est satisfaite partout dès qu'elle est satisfaite au voisinage d'un point. Ceci résulte simplement du fait qu'un champ de vecteur holomorphe qui prend ses valeurs dans le sous fibré sur un ouvert non vide est automatiquement une section holomorphe du sous fibré sur un ouvert connexe. On conclut grâce à la connexité globale de la variété.

2.3. LEMME 2. – *Soit* X *un espace analytique complexe réduit supposé compact irréductible et de dimension* n. *Soit* $G_p(X)$ *la grassmannienne des p-plans du fibré linéaire cotangent (associé au faisceau cohérent* $\Theta_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$) *et notons par* $\mathcal{C}_n(G_p(X))$ *l'espace analytique réduit*(*) *des n-cycles compacts de* $G_p(X)$. *Alors l'ensemble des cycles* Y *de* $\mathcal{C}_n(G_p(X))$ *qui vérifient*

1) $Y = |Y|$ *(pas de multiplicité) et* $|Y|$ *est irréductible*

2) $\pi_Y : Y \longrightarrow X$ *est une modification*
est un ouvert de Zariski de $\mathcal{C}_n(G_p(X))$.

Démonstration. – L'ensemble des cycles irréductibles et sans multiplicité (condition 1)) est un ouvert de Zariski de l'espace des cycles de façon générale (voir [3] ch. 0, § 7, Prop. 2).

(*) Voir [1].

Pour des raisons de dimension $\pi_Y : Y \longrightarrow X$ est toujours génériquement finie sur X (éventuellement de degré générique 0). Le fait que le degré générique soit 1 est une condition fermée car elle se traduit simplement par l'égalité

$$\int_Y \pi^*(h^{\wedge n}) = \int_X h^{\wedge n}$$

pour une métrique hermitienne C^0 sur X. Mais $Y \longrightarrow \int_Y \pi^*(h^{\wedge n})$ est continue d'après [2] Th. 1.

Par ailleurs cette condition est aussi ouverte car on a de toute façon $\int_Y \pi^*(h^{\wedge n}) = k \int_X h^{\wedge n}$ où k est le degré générique de $\pi_Y : Y \longrightarrow X$. Ceci montre que la condition $\widetilde{2})$ d'être de degré générique = 1 définit une réunion de composantes connexes (donc un ouvert de Zariski) ; mais on a $1) + 2) \Longleftrightarrow 1) + \widetilde{2})$, ce qui achève la démonstration.

2.4. THEOREME 1. – *Soit* X *un espace analytique réduit que l'on suppose irréductible et compact, de dimension* n. *Soit*

$$\mathcal{F}_p(X) = \{Y \in \mathcal{C}_n(G_p(X)) / Y \text{ feuilletage de codimension } p \text{ de } X\}.$$

Alors $\mathcal{F}_p(X)$ *est un sous ensemble analytique fermé de l'ouvert de Zariski de* $\mathcal{C}_n(G_p(X))$ *considéré au lemme* 2.

Démonstration. – Notons par Ω l'ouvert de Zariski de $\mathcal{C}_n(G_p(X))$ considéré au lemme 2 (donc $Y \in \Omega$ si $Y = |Y|$, $|Y|$ est irréductible et $\pi_Y : Y \longrightarrow X$ est une modification (propre)). Montrons déjà que $\mathcal{F}_p(X)$ est fermé dans Ω. Soit $Y_\nu \longrightarrow Y \in \Omega$ avec $Y_\nu \in \mathcal{F}_p(X)$. Comme $Y \in \Omega$ on peut trouver $x_0 \in X_{reg}$ et U ouvert de X_{reg} contenant x_0 tel que $\pi : Y \cap \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ soit un isomorphisme. Alors comme $Y_\nu \longrightarrow Y$ au sens de topologie de $\mathcal{C}_n(G_p(X))$, quitte à prendre U assez petit, on aura

$$\pi : Y_\nu \cap \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

qui sera un isomorphisme pour ν assez grand. Notons par σ_ν et σ les sections sur U de $\pi : G_p(X) \longrightarrow X$ données par les inverses de ces isomorphismes.

Comme U est formé de points lisses de X, quitte à prendre U assez petit on peut trivialiser $\Theta_X^\vee$ le fibré cotangent à X sur U et interpréter U comme ouvert de $\mathbf{C}^n$ et σ_ν et σ comme des applications holomorphes de U dans $G_p(\mathbf{C}^n)$ avec $\sigma = \lim_{\nu \to \infty} \sigma_\nu$.

Il nous reste à voir que si σ_ν pour chaque ν définit un feuilletage de U (c'est-à-dire que le champ de $(n-p)$-plans associé par la dualité $G_{n-p}((\mathbf{C}^n)^*) \xrightarrow{\sim} G_p(\mathbf{C}^n)$ à σ_ν est intégrable $\forall \nu$) alors il en est de même pour σ : ceci sera suffisant grâce au lemme 1.

Mais comme la dualité $\delta : G_{n-p}((\mathbf{C}^n)^*) \longrightarrow G_p(\mathbf{C}^n)$ donnée par $\delta(\pi) = \pi^\perp$ (orthogonalité pour la dualité naturelle

$$(\mathbf{C}^n)^* \times \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C} \quad \text{qui est} \quad \mathbf{C}\text{-bilinéaire})$$

est holomorphe, il suffit de vérifier que l'intégrabilité d'un champ holomorphe de $(n-p)$-plans passe à la limite uniforme (sur tout compact) ce qui est clair.

Donc $\mathcal{F}_p(X)$ est fermé dans Ω. Montrons qu'il est localement analytique dans Ω : Pour cela on prend $Y \in \mathcal{F}_p(X)$ et on choisit $x_0 \in U \subset X_{\mathrm{reg}}$ comme précédemment. D'après le lemme 1 pour définir $\mathcal{F}_p(X)$ au voisinage de Y dans Ω il suffit d'écrire l'intégrabilité du champ de $(n-p)$-plans correspondant sur $U' \subset\subset U$ non vide. On peut alors considérer une application holomorphe $f : S \times U \longrightarrow L(\mathbf{C}^{n-p}, \mathbf{C}^p)$ si S est un ouvert assez petit contenant Y dans Ω et si U a été choisi assez petit pour que l'image de $\delta\sigma(U)$ dans $G_{n-p}((\mathbf{C}^n)^*)$ tombe dans l'ouvert de carte $L(\mathbf{C}^{n-p}, \mathbf{C}^p)$ de $G_{n-p}((\mathbf{C}^n)^*)$ correspondant à une décomposition $(\mathbf{C}^n)^* \cong \mathbf{C}^{n-p} \oplus \mathbf{C}^p$.

Alors f est la donnée de $(n-p)$-champs de vecteurs holomorphes sur U dépendant du paramètre $s \in S$ holomorphiquement et la condition d'intégrabilité sur $s \in S$ s'écrit en demandant que le rang en chaque point de U' du système formé par ces $(n-p)$-champs de vecteurs ainsi que leurs crochets 2 à 2 reste $\leqslant n-p$. Ceci est clairement une condition analytique fermée sur le paramètre s. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

3.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de faire le lien entre l'espace des feuilletages construit au théorème 1 et l'espace universel construit par G. Pourcin dans [6].

3.1. PROPOSITION 1. – *Soit* X *un espace analytique réduit;*

on suppose X *compact irréductible de dimension* n. *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau cohérent sur* X *et notons par* $G_p(\mathcal{F}^\vee)$ *la grassmannienne des* p*-plans du fibré linéaire* $\mathcal{F}^\vee$ *associé à* $\mathcal{F}$ *(voir § 1). Soit* S *un espace analytique réduit et soit* $\tau : S \times X \longrightarrow X$ *la projection. Soit* $\mathcal{G} \subset \tau^*(\mathcal{F})$ *un sous faisceau cohérent du faisceau* $\tau^*(\mathcal{F})$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $\tau^*(\mathcal{F})/\mathcal{G}$ *est* S*-plat*

2) *pour chaque* $s \in S$ $\tau^*(\mathcal{F})/\mathcal{G} \mid \{s\} \times X$ *est localement libre de rang* p *sur un ouvert dense de* X.

Alors pour chaque $s \in S$ *on peut associer à* $\tau^*(\mathcal{F})/\mathcal{G} \mid \{s\} \times X$ *un sous-ensemble analytique fermé* $Y(s) \subset G_p(\mathcal{F}^\vee)$ *comme au lemme* 1 *du* § 1.

L'application ainsi définie

$$S \longrightarrow \mathcal{C}_n(G_p(\mathcal{F}^\vee))$$

est holomorphe.

Démonstration. – En appliquant à $S \times X$ les considérations du § 1, lemme 1, et en remarquant que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G_p(\tau^*(\mathcal{F})^\vee) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & S \times G_p(\mathcal{F})^\vee \arrow[dl, "\mathrm{id}_S \times \pi"] \\
& S \times X &
\end{tikzcd}$$

est un isomorphisme au-dessus de $S \times X$, on obtient l'existence d'un ouvert de Zariski dense $U \subset S \times X$ qui rencontre $\{s\} \times X$ en un ouvert dense pour tout $s \in S$ (on utilise ici la S-platitude pour savoir que $\tau^*(\mathcal{F})/\mathcal{G} \mid \{s_0\} \times X$ localement libre en $x_0 \in X$ implique la locale liberté de $\tau^*(\mathcal{F})/\mathcal{G}$ en (s_0, x_0)) et d'une section holomorphe

$$\Sigma : U \longrightarrow S \times G_p(\mathcal{F}^\vee)$$

qui est méromorphe sur $S \times X$. Notons par Y l'adhérence de $\Sigma(U)$ dans $S \times G_p(\mathcal{F}^\vee)$. On a alors $Y(s) = Y \cap (\{s\} \times X)$ pour chaque $s \in S$. C'est-à-dire que Y est la graphe de la famille de cycles $(Y(s))_{s \in S}$ de $G_p(\mathcal{F}^\vee)$. Pour prouver que cette famille est analytique il suffit alors, d'après [1] ch. 4 critère à la fin du § 1, de vérifier que pour tout $s_0 \in S$ la famille est analytique locale en s_0 près des points génériques du cycle $Y(s_0)$. Mais celui-ci est irréductible et près du point générique de $Y(s_0)$ (dont la projection sur $S \times X$ est dans U) les cycles $Y(s)$ voisins sont obtenus comme graphes d'applications holomorphes dépendant analytiquement du paramètre s voisin de s_0 (explicitement on regarde $\Sigma \mid_{\{s\} \times X}$ pour (s, x) voisin de $(s_0, x_0) \in U$). On peut alors conclure en évoquant [1] ch. 4, Th. 6 (local) (mais en fait le résultat utile ici est un cas trivial de ce théorème où la définition directe de ce qu'est une famille analytique locale se vérifie immédiatement). Ceci achève la preuve de la proposition 1.

3.2. COROLLAIRE. – *Soit* X *un espace analytique réduit: on suppose* X *compact, connexe et normal. Alors notons par* $P\,\mathcal{F}_p(X)$ *l'espace analytique réduit sous-jacent aux composantes connexes de l'espace universel de G. Pourcin pour lesquelles les feuilletages sont de codimension* p (*). *L'application naturelle*

$$P\,\mathcal{F}_p(X) \longrightarrow \mathcal{F}_p(X)$$

est holomorphe et surjective.

Preuve. – Ceci est une conséquence immédiate de la proposition 1 avec $\mathcal{F} = \Theta_X$, du théorème 1 et de la caractérisation de l'espace universel de G. Pourcin.

4.

4.1. Commençons par rappeler que l'espace analytique réduit X, supposé compact, est dit appartenir à la classe $\mathcal{C}$ de Fujiki (voir [5]) s'il existe une variété kählérienne compacte V et un morphisme surjectif $f: V \longrightarrow X$. Il résulte des travaux de Varouchas (voir [9] et [10]) que cette condition est équivalente à l'existence d'une variété kählérienne compacte W et d'une application biméromorphe $g: W \longrightarrow X$.

Dans ces conditions, pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X et pour tout $p > 0$ l'espace analytique compact $G_p(\mathcal{F}^\vee)$ est aussi dans la classe $\mathcal{C}$ (voir [3] ch. 0, § 6, th. 2).

(*) Ceci revient à dire que le rang générique au-dessus d'une telle composante du faisceau quotient universel est p. La platitude sur $P\,\mathcal{F}_p(X)$ de ce faisceau assure que le rang générique est localement constant (X est irréductible).

En particulier si X est irréductible de dimension n l'espace analytique $\mathcal{C}_n(G_p(\mathcal{F}^\vee))$ des n-cycles compacts de $G_p(\mathcal{F}^\vee)$ aura des composantes irréductibles compactes (voir [3] ch. 0, § 6, Th. 3).

On obtient donc immédiatement sous ces hypothèses des compactifications naturelles pour les composantes irréductibles de l'espace des feuilletages $\mathcal{F}_p(X)$ pour chaque $p > 0$: en effet une composante irréductible de $\mathcal{F}_p(X)$ est un sous ensemble analytique localement fermé de $\mathcal{C}_n(G_p(X))$. Il est donc contenu dans une composante irréductible de cet espace (au moins). Son adhérence est donc compacte.

4.2. Ce qui est plus remarquable c'est que cette adhérence reste analytique.

PROPOSITION 2. — *Soit* X *un espace analytique réduit que l'on supposera compact irréductible et de dimension* n. *Supposons que* Γ *soit une composante irréductible de* $\mathcal{F}_p(X)$ *l'espace analytique réduit des feuilletages de codimension* $p > 0$ *de* X. *Alors l'adhérence* $\overline{\Gamma}$ *de* Γ *dans* $\mathcal{C}_n(G_p(X))$ *est analytique fermée.*

Démonstration. — Soit $Z \subset \mathcal{C}_n(G_p(X))$ l'ensemble des n-cycles de $G_p(X)$ qui sont de degré générique 1 sur X. Alors Z est ouvert et fermé dans $\mathcal{C}_n(G_p(X))$(*). Soit $\Xi \subset Z$ le sous ensemble formé des Y qui définissent un feuilletage au point générique de X. Il résulte immédiatement au lemme 1 du § 2 et de la preuve du Théorème 1 que Ξ est analytique fermé dans Z. Soit $\hat{\Gamma}$ une composante irréductible de Ξ qui contient Γ. Comme $\mathcal{F}_p(X)$ est un ouvert de Zariski de Ξ d'après le lemme 2 du § 2, Γ est un ouvert de Zariski dense de $\hat{\Gamma}$ et on a donc $\overline{\Gamma} = \hat{\Gamma}$ ce qui prouve la proposition 2.

4.3. Il est assez naturel de chercher à interpréter géométriquement les points de $\overline{\Gamma} - \Gamma$. La proposition suivante montre qu'à un tel point on peut encore associer un feuilletage de codimension p de X et que la topologie de la "compactification" s'interprète en terme de convergence "générique" de feuilletages.

(*) Voir le lemme 2 du § 2.

PROPOSITION 3. — *Soit* X *un espace analytique réduit irréductible de dimension* n, *supposé compact et dans la classe* $\mathcal{C}$. *Soit* Γ *une composante irréductible de l'espace* $\mathcal{F}_p(X)$ *des feuilletages de codimension* p *de* X. *Il existe une stratification holomorphe "naturelle" finie* $(\Gamma_\alpha|_{\alpha\in A})$ *de* $\overline{\Gamma}-\Gamma$ *et des applications holomorphes "naturelles"*

$$\Phi_\alpha : \Gamma_\alpha \longrightarrow \mathcal{F}_p(X)$$

telles que pour tout $a \in \Gamma_\alpha$ *il existe* $H(a)$ *sous espace analytique fermé d'intérieur vide dans* X *tel que pour toute suite*

$$(a_n)|_{n\in \mathbf{N}}\ a_n \in \Gamma$$

vérifiant $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *dans* $\overline{\Gamma}$ *on ait convergence sur tout compact de* $X - H(a)$ *des feuilletages* a_n *vers le feuilletage* $\Phi_\alpha(a)$.

Démonstration. — Commençons par préciser la topologie sur l'espace des feuilletages : c'est un exercice simple sur la topologie de l'espace des cycles (voir [1] ou [7] 2^{e} partie) de vérifier que

1) pour K compact de $G_p(X)$

$$U_K = \{Y \in \mathcal{F}_p(X)/Y \cap K = \emptyset\}$$

est un ouvert de $\mathcal{F}_p(X)$

2) les U_K forment une base de la topologie pour chaque composante irréductible de $\mathcal{F}_p(X)$.

Si Ω est un ouvert de X on appellera convergence sur tout compact de Ω d'une suite de feuilletage $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers un feuilletage a la convergence pour la topologie de $\mathcal{F}_p(X)$ définie par les ouverts U_K pour K compact de $G_p(X)$ tel que $\pi(K) \subset \Omega$.

Passons à la démonstration de la proposition 3 : Soit $Y \in \overline{\Gamma}-\Gamma$. Alors Y est un cycle de degré générique 1 sur X. Soit Y_0 la composante irréductible de Y qui se surjecte sur X (elle est unique et de degré générique 1 sur X). Alors Y_0 est un feuilletage de X et nous allons poser $\Phi(Y) = Y_0$; l'intégrabilité de Y_0 vient du fait que $Y \in \Xi$ et du lemme 1 du § 2. Considérons maintenant les composantes irréductibles $(\overline{\Gamma}_\alpha)_{\alpha\in A_1}$ de $\overline{\Gamma}-\Gamma$ et pour chaque $\alpha \in A_1$ posons

$$\widetilde{\mathcal{Y}}_\alpha = \{(Y,z) \in \overline{\Gamma}_\alpha \times G_p(X)/z \in |Y|\}.$$

On a alors $\widetilde{\mathcal{Y}}_\alpha = \mathcal{Y}_\alpha \cup \widetilde{\widetilde{\mathcal{Y}}}_\alpha$ où $\mathcal{Y}_\alpha$ est la composante irréductible de $\widetilde{\mathcal{Y}}_\alpha$ caractérisée par le fait que pour Y générique dans $\overline{\Gamma}_\alpha$ on a

$$Y_0 = \widetilde{\mathcal{Y}}_\alpha \cap (\{Y\} \times G_p(X)) \quad (*)$$

et notons par Γ_α l'ouvert de Zariski de $\overline{\Gamma}_\alpha$ sur lequel (*) est vérifié.

On peut alors itérer la construction en considérant toujours pour $\alpha \in A_1$ fixé les composantes irréductibles $(\overline{\Gamma}_\beta)_{\beta \in A_2}$ de $\overline{\Gamma}_\alpha - \Gamma_\alpha$ etc. On obtient ainsi après un nombre fini d'étapes la stratification (finie) désirée de $\overline{\Gamma} - \Gamma$.

L'application $\Phi : \overline{\Gamma} - \Gamma \longrightarrow \mathcal{F}_p(X)$ (qui n'est pas continue en général) est simplement donnée par $\Phi(Y) = Y_0$ et $\Phi|_{\Gamma_\alpha}$ est holomorphe car le graphe de la famille correspondante de cycles de $G_p(X)$ est analytique fermé (par construction de la stratification) et le critère de [1] ch. 4 § 1 s'applique comme dans la preuve du théorème 1.

Ceci achève la preuve de la proposition 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Barlet, Espace analytique réduit ... *Lecture Notes*, Springer n° 482 (Fonctions de plusieurs variables complexes II) (1975).

[2] D. Barlet, Convexité de l'espace des cycles, *Bull. Soc. Math. France*, t. 106 (1978).

[3] F. Campana, Application de l'espace des cycles ... *Revue Institut Elie Cartan*, Nancy, 2 (1980).

[4] G. Fischer, Complex analytic geometry, *Lecture Notes*, Springer n° 538 (1976).

[5] A. Fujiki, Closedness of the Douady space ... *Publ. RIMS*, (Kyoto) t. 14 (1978).

[6] G. Pourcin, Deformation of coherent foliations on a compact normal space, preprint, 1986, à paraître aux *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) (1987).

[7] Séminaire de Géométrie Analytique, *Revue Institut Elie Cartan*, Nancy, 5 (1982).

[8] Y.T. SIU et G. TRAUTMANN, Gap-sheaves and extension of coherent analytic subsheaves, *Lecture Notes*, Springer n° 172 (1971).

[9] J. VAROUCHAS, Stabilité de la classe des variétés kählériennes ... *Inventiones Math.*, 77 (1984).

[10] J. VAROUCHAS, Sur l'image d'une variété kählérienne compacte, *Lecture Notes*, Springer n° 1188 (Fonctions de plusieurs variables complexes V), (1986).

Manuscrit reçu le 4 juillet 1986.

Daniel BARLET,
CNRS UA 750
Institut Elie Cartan
Université de Nancy I
B.P. 239
54506 Vandoeuvre les Nancy Cedex (France).