

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PATRICK GÉRARD

JEFFREY RAUCH

## **Propagation de la régularité locale de solutions d'équations hyperboliques non linéaires**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 37, n° 3 (1987), p. 65-84

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1987\\_\\_37\\_3\\_65\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_3_65_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# PROPAGATION DE LA RÉGULARITÉ LOCALE DE SOLUTIONS D'ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES NON LINÉAIRES

par

P. GERARD et J. RAUCH

## 1. Introduction et énoncé des résultats.

Dans un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , soit  $u$  une solution de l'équation :

$$F(y, \partial^\alpha u) = 0. \quad (1)$$

Lorsque  $u$  est de classe  $H^s$  avec  $s > n/2 + d$  ( $d$  est un indice mesurant la non-linéarité de (1), et vaut  $m + 2$  si l'équation est complètement non-linéaire), le calcul symbolique paradifférentiel de J.-M. Bony, exposé dans [2], permet de montrer que, pour  $t \leq 2s - n/2 - d$ , les singularités microlocales  $H^t$  de  $u$  se propagent le long des bicaractéristiques de l'opérateur linéarisé  $P$  associé à (1). En particulier, pour tout  $r > s$ , la régularité locale  $H^r$  de  $u$  se propage à travers toute hypersurface que les bicaractéristiques réelles de  $P$  coupent transversalement (voir [3]).

Cependant, l'équation (1) peut avoir généralement un sens pour des solutions a priori beaucoup moins régulières : il suffit, par exemple, que toutes les dérivées de  $u$  soumises à une opération non linéaire soient  $L^\infty$ .

L'objet de cet article est de généraliser la propagation de la régularité locale à de telles solutions ; en revanche, la remarque 1.4 ci-dessous montre que l'on ne peut espérer la propagation de la régularité microlocale. Pour plus de simplicité, nous nous sommes restreints au cas d'une équation hyperbolique, mais cette hypothèse peut être affaiblie (voir les remarques 1.5 et 2.3).

*Notations.* – Dans la suite,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbf{R}^{n+1}$ ,  $S$  une hypersurface  $C^2$  de  $\Omega$ , divisant  $\Omega$  en deux composantes  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$ , et  $y_0$  est un point de  $S$ .

*Mots-clés :* Equations hyperboliques non linéaires – Opérateurs paradifférentiels.

a) *Cas des équations semi-linéaires.*

THEOREME 1. — Soit  $u \in L^\infty(\Omega)$  une solution du système

$$Lu = f(y, u) \quad (2)$$

où  $L$  est un opérateur différentiel matriciel d'ordre 1, strictement (ou symétrique) hyperbolique par rapport à  $S$  près de  $y_0$ , et où  $f$  est une fonction  $C^\infty$  de ses arguments.

On suppose que pour  $s > 0$ ,  $u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega^-)$ . Alors  $u \in H^s$  près de  $y_0$ .

Remarques :

1.1. Lorsque  $s > n/2$ , le théorème 1 est conséquence du résultat standard d'existence locale de solutions régulières. Précisément, on peut montrer, à l'aide des inégalités de Gagliardo-Nirenberg, que, pour  $t < 0$ , les traces de  $u$  parallèlement à  $S$  restent bornées dans  $H^s$ , ce qui permet de construire une solution  $w$  de (2)  $H^s$  près de  $y_0$ , égale à  $u$  pour  $t < 0$ . Enfin, l'unicité locale des solutions  $L^\infty$  de (2) entraîne que  $w = u$  près de  $y_0$ .

1.2. Pour  $s \in [0, 1]$ , on peut donner une démonstration analogue, une fois remarqué que,  $u$  étant bornée, on peut supposer  $f$  à support compact, et en particulier lipschitzienne : l'espace  $H^s$  est alors préservé par  $u \rightarrow f(u)$ , et on peut résoudre le problème de Cauchy dans cet espace.

1.3. L'intérêt principal du théorème réside donc dans le cas  $s \in ]1, n/2[$  ; l'exemple suivant montre qu'alors on ne peut plus espérer d'existence locale  $H^s$ , même si  $f \in C_0^\infty$ .

Supposons  $s$  entier, pour simplifier ; alors, si  $f$  n'est pas identiquement nulle, il existe  $\psi \in H^s(\mathbf{R}^n)$  telle que  $f(\psi) \notin H_{\text{loc}}^s$  (voir Dahlberg [6]). Dès lors le problème de Cauchy suivant :

pour  $u = (u_1, u_2)$ ,  $u_t = (0, f(u_1))$ ,  $u(0) = (\psi, 0)$

a pour solution  $(\psi, tf(\psi))$ , qui n'est pas dans  $H_{\text{loc}}^s$ .

1.4. Une légère modification de l'exemple ci-dessus montre que, pour des solutions dans  $L^\infty \cap H^s$ ,  $s \in ]0, n/2[$ , on n'a pas propagation de la régularité microlocale. Choisissons  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ , homogène de degré 0, telle qu'il existe  $(0, \xi) \in \text{WF}(\varphi^2) \setminus \text{WF}(\varphi)$ . Dans ce cas  $\varphi \in \bigcap_{s < n/2} H^s$ ,  $(0, \xi) \in \text{WF}_{n/2}(\varphi^2)$  (cf. [9], pp. 303-304).

Choisissons  $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $\chi \geq 0$ , telle que  $0 \in \text{supp } \chi \subset [0, \infty[$ . Alors la solution de  $u_t = \chi(t)(0, u^2)$ ,  $u = (\varphi, 0)$  pour  $t < 0$  est  $L^\infty \cap H^s$  pour tout  $s \in ]0, n/2[$ , et, le long de la bicaractéristique  $(t, 0, 0, \xi)$ , on a  $u \in C^\infty$  pour  $t < 0$  et  $u \notin H^{n/2}$  pour  $t \geq 0$ .

Pour montrer le théorème 1, nous linéariserons  $f(y, u)$  en nous inspirant des résultats de J.-M. Bony [2] améliorés par Y. Meyer [8]. L'opérateur linéarisé agissant dans  $H^s$  pour tout  $s > 0$ , le problème de Cauchy linéarisé est bien posé dans tous ces espaces, et la solution ainsi obtenue n'est autre que  $u$  (sachant que  $u$  est déjà dans  $H^1$ , voir 1.2).

1.5. Plutôt que de résoudre un problème de Cauchy et d'utiliser l'unicité, nous avons préféré, dans la présentation qui suit, recourir au procédé classique de régularisation de la solution, joint à des estimations a priori; l'avantage est que la preuve s'étend alors à tous les opérateurs  $L$  dont les bicaractéristiques coupent  $S$  transversalement, ce qui est la situation standard de propagation décrite au début de cet article, et, par exemple, dans [1] et [3]. Notons qu'alors le problème de Cauchy linéaire est en général mal posé. A la fin du paragraphe 2 (remarque 2.3), nous indiquerons brièvement comment modifier la preuve du théorème 1 pour traiter ce cas.

1.6. La démonstration du théorème 1 sera donnée au paragraphe 2. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'on montre, par la même méthode, le résultat analogue pour des équations d'ordre supérieur.

THEOREME 1 bis. — Soit  $u$  une solution de

$$Pu = F(y, \partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq p}, \quad (3)$$

vérifiant  $\partial^\alpha u \in L^\infty(\Omega)$  pour  $|\alpha| \leq p$ , où  $P$  est un système d'opérateurs différentiels d'ordre  $m \geq p + 1$ , strictement (ou symétrique) hyperbolique par rapport à  $S$  près de  $y_0$ ;  $F$  est  $C^\infty$  de ses arguments. On suppose que, pour  $s > p$ ,  $u \in H^s(\Omega^-)$ . Alors  $u \in H^s$  près de  $y_0$ .

b) Cas des équations quasi-linéaires.

THEOREME 2. — Soit  $u$  une solution lipschitzienne du système

$$\sum A_j(y, u) \partial_j u = f(y, u), \quad 1 \leq j \leq n + 1, \quad (4)$$

*l'opérateur  $\sum A_j(y, u) \partial_j$  étant strictement (ou symétrique) hyperbolique par rapport à  $S$  près de  $y_0$ ,  $f$  étant  $C^\infty$  de ses arguments. On suppose que, pour  $s > 1$ ,  $u \in H_{\text{loc}}^s(\Omega^-)$ . Alors  $u \in H^s$  près de  $y_0$ .*

*Remarques :*

1.7. Là encore, si  $s > n/2 + 1$ , le résultat est classique, (cf. Majda [7]) fondé à nouveau sur l'existence locale pour le problème de Cauchy. Notre méthode consiste à nouveau à linéariser l'équation ; on aboutit alors naturellement au calcul symbolique introduit par J.-M. Bony dans [2], avec les particularités liées au cadre lipschitzien.

1.8. Comme au a), on peut énoncer un résultat analogue pour des équations quasi-linéaires d'ordre supérieur, et même, sous réserve de dériver l'équation, pour des équations complètement non linéaires : la régularité a priori permettant de conclure est alors  $\partial^\alpha u \in L^\infty$  pour  $|\alpha| \leq m + 1$ , si  $m$  est l'ordre de l'équation.

1.9. De même que le théorème 1 permet de propager la régularité de solutions de (2) qui peuvent être a priori discontinues, le théorème 2 permet d'étudier des solutions de (4) dont la première dérivée peut admettre des discontinuités. Notons cependant que (4) a un sens pour des solutions non lipschitziennes, par exemple  $C^{1/2}$  ; un cas particulièrement intéressant est celui où (4) s'écrit sous forme conservative :

$$\sum \partial_j F_j(y, u) = 0. \quad (5)$$

Alors  $u \in L^\infty$  suffit à donner un sens à (5). En revanche, il est bien connu que, sous cette seule hypothèse, le théorème 2 est faux (par exemple pour l'équation de Burgers :  $u_t + (u^2/2)_x = 0$ ). Il peut y avoir alors apparition de discontinuités pour  $u$  (phénomène de choc). Il reste que l'on ignore si le théorème est vrai pour des solutions de (5) qui sont supposées a priori continues.

## 2. Démonstration du théorème 1.

Par une convexification standard, on se ramène à la situation suivante :  $\Gamma$  est le cylindre  $]0, T[ \times \Omega$ , où  $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n / |x| < r\}$ .  $u = u(t, x) \in L^\infty(\Gamma)$  et est solution de

$$Lu = f(t, x, u), \quad (2.1)$$

où  $L$  est strictement hyperbolique par rapport à  $t = \text{cste}$ . De plus, il existe  $\alpha > 0, \beta > 0$ , tels que :

$$u \in H^s \quad \text{dans} \quad \{(t, x) \in \Gamma \mid t < \alpha |x|^2 + \beta\}, \quad (2.2)$$

$$T < \alpha r^2 + \beta. \quad (2.3)$$

Il s'agit de montrer que  $u \in H^s$  près de  $(\beta, 0)$ , ce qui, comme nous allons le voir, est impliqué par le résultat suivant :

LEMME 2.1. —  $u \in L^2(0, T; H^s(\Omega))$ .

Supposons le lemme 2.1 prouvé. Alors  $u$  est microlocalement  $H^s$  en tout point  $(t, x, \tau, \xi) \in T^*\Gamma$  tel que  $\xi \neq 0$ . Il suffit donc d'étudier la régularité microlocale de  $u$  aux points  $\pm \rho$ , avec  $\rho = (\beta, 0, 1, 0)$ . Or  $L$  est elliptique aux points  $\pm \rho$ . Alors, puisque  $f(t, x, u) \in L^2(\Gamma)$  par hypothèse,  $u \in H^1(\pm \rho)$ , et donc  $u$  est globalement  $H^{\min(s, 1)}(\Gamma)$ . Si  $s \leq 1$  le théorème 1 est alors démontré ; si  $s > 1$ , on a  $f(t, x, u) \in H^1(\Gamma)$  (puisque  $u \in L^\infty \cap H^1$ ) et on réapplique le théorème de régularité elliptique microlocale pour en déduire  $u \in H^2(\pm \rho)$  puis  $u \in H^{\min(s, 2)}(\Gamma)$ , et ainsi de suite... On en déduit le théorème 1.

*Remarque.* —

2.1. Une autre méthode (plus fastidieuse) pour gagner la régularité par rapport à la dernière variable, consiste à changer légèrement la coordonnée  $t$  (par exemple  $t \rightarrow t + \delta x_1$ , avec  $\delta > 0$  assez petit) et à confronter les deux informations microlocales obtenues en appliquant le lemme 2.1 dans les deux systèmes de coordonnées.

Pour démontrer le lemme 2.1, il est commode de se ramener à un problème global dans les variables "spatiales". On prolonge donc  $L$  de façon standard (quitte à restreindre  $r$ ) en un opérateur hyperbolique sur  $[0, T] \times \mathbf{R}^n$ , à coefficients constants lorsque  $|x|$  est assez grand. Alors, si l'on note, pour  $v \in L^2(0, T; H^s(\mathbf{R}^n))$  :

$$\|v\|_s = \left( \int_0^T |v(t)|_s^2 dt \right)^{1/2},$$

(où  $\|\cdot\|_s$  désigne la norme  $H^s(\mathbf{R}^n)$ ) on a le lemme classique suivant (voir par exemple [4]) :

LEMME 2.2. — Pour  $s \in \mathbf{R}$ , il existe  $C > 0, \gamma_s > 0$ , tels que :  
 $\forall \gamma \geq \gamma_s, \forall v \in L^2(0, T; H^s(\mathbf{R}^n))$  vérifiant

$$Lv \in L^2(0, T; H^s(\mathbf{R}^n)), v(0) = 0 :$$

$$\gamma \|e^{-\gamma t} v\|_s \leq C \|e^{-\gamma t} Lv\|_s. \quad (2.4)$$

Soit alors  $\chi \in C^\infty(\Gamma)$  telle que :

$$\chi(t, x) = 0 \quad \text{pour} \quad t \leq \alpha |x|^2 + \beta_1, \quad (2.5)$$

$$\chi(t, x) = 1 \quad \text{pour} \quad t \geq \alpha |x|^2 + \beta_2, \quad (2.5)'$$

où  $\beta_1 < \beta_2 < \beta$ , et de plus :

$$T < \alpha r^2 + \beta_1. \quad (2.3)'$$

Notons  $v = \chi u$ . (2.3)' permet de considérer  $v$  comme un élément de  $L^\infty(0, T; L^\infty_{\text{comp}}(\mathbf{R}^n))$ . De plus, on a :

$$Lv = [L, \chi]u + \chi f(t, x, u).$$

D'après (2.5), (2.2),  $[L, \chi]u \in H^s([0, T] \times \mathbf{R}^n)$ , et, sur l'ouvert  $\{\chi \neq 1\}$ ,  $u \in L^\infty \cap H^s$ , donc aussi  $f(t, x, u)$ . On en déduit :

$$Lv = h(t, x, v) + g, \quad (2.6)$$

où  $g \in H^s([0, T] \times \mathbf{R}^n) \subset L^2(0, T; H^s(\mathbf{R}^n))$ , et où  $h$  est une fonction  $C^\infty$ , nulle pour  $|x|$  grand; on peut de plus supposer  $h(t, x, 0) = 0$ .

Nous allons appliquer l'inégalité (2.4) à des régularisées de  $v$  dans les variables spatiales. Pour  $\epsilon > 0$ , on pose  $\rho_\epsilon^s = (1 + \epsilon \Lambda^s)^{-1}$ , avec  $\Lambda^s = (-\Delta)^{s/2}$ ; ainsi  $\rho_\epsilon^s$  envoie  $H^\sigma(\mathbf{R}^n)$  dans  $H^{\sigma+s}(\mathbf{R}^n)$  pour tout  $\sigma$ , et, pour tout  $f \in H^\sigma$ ,  $\rho_\epsilon^s f \rightarrow f$  dans  $H^\sigma$  si  $\epsilon \rightarrow 0$ . On vérifie facilement, en outre, les propriétés suivantes :

$$\|\rho_\epsilon^s w\|_{\sigma+s} \leq \|w\|_\sigma / \epsilon \quad (2.7)$$

$$\|\rho_\epsilon^s w\|_\sigma \leq \|w\|_\sigma \quad (2.8)$$

$$\|w - \rho_\epsilon^s w\|_\sigma \leq \epsilon \|w\|_{\sigma+s}. \quad (2.9)$$

Posons  $v_\epsilon^s(t, \cdot) = \rho_\epsilon^s v(t, \cdot)$ . (2.4) suggère d'estimer  $\|Lv_\epsilon^s\|_s$ ; d'après (2.6), on a :

$$Lv_\epsilon^s = [L, \rho_\epsilon^s] v + \rho_\epsilon^s h(t, \cdot, v) + \rho_\epsilon^s g. \quad (2.10)$$

Le dernier terme de (2.10) ne pose évidemment pas de problème. Pour le premier terme, on a classiquement :

$$[L, \rho_\epsilon^s] v = [L, \rho_\epsilon^s] (1 + \epsilon \Lambda^s) v_\epsilon^s = -\epsilon \rho_\epsilon^s [L, \Lambda^s] v_\epsilon^s, \quad (2.11)$$

puisque

$$\begin{aligned} [L, \rho_\epsilon^s] (1 + \epsilon \Lambda^s) &= [L, \rho_\epsilon^s (1 + \epsilon \Lambda^s)] \\ &\quad - \rho_\epsilon^s [L, (1 + \epsilon \Lambda^s)] = -\epsilon \rho_\epsilon^s [L, \Lambda^s]. \end{aligned}$$

Il reste à étudier la contribution du terme non linéaire.

LEMME 2.3. — Soit  $h = h(x, w)$  une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ , telle que  $h(x, 0) = 0$ , et

$$N_{\alpha, \mathbf{R}}(h) = \sup \{ |\partial_{x, w}^\alpha h(x, w)|, x \in \mathbf{R}^n, |w| \leq \mathbf{R} \} < +\infty$$

pour tous  $\alpha, \mathbf{R}$ .

(i) Soit  $s \in ]0, 1]$ , et soit  $w \in L^\infty(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}^p$ . Alors il existe une constante  $C_1 = C_1(h) > 0$  telle que :

$$\forall \epsilon > 0, |\rho_\epsilon^s h(\cdot, w)|_s \leq C_1 |\rho_\epsilon^s w|_s. \quad (2.12)$$

(ii) Soient  $s > 0$ ,  $\delta \in ]0, s[$ , et soit  $w \in L^\infty(\mathbf{R}^n) \cap H^\delta(\mathbf{R}^n)$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}^p$ . Alors il existe une constante  $C_2 = C_2(h, s, \delta) > 0$  telle que :

$$\forall \epsilon > 0, |\rho_\epsilon^{s-\delta} h(\cdot, w)|_s \leq C_2 |\rho_\epsilon^{s-\delta} w|_s. \quad (2.13)$$

De plus, les constantes  $C_1$  et  $C_2$  restent bornées lorsque  $|w|_{L^\infty}$  et les semi-normes  $N_{\alpha, \mathbf{R}}(h)$  restent bornées.

Voyons d'abord comment le lemme 2.3 permet d'achever la démonstration du théorème.

Commençons par le cas  $s \in ]0, 1]$ , et montrons que  $\|v_\epsilon^s\|_s$  reste bornée lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, ce qui suffit à prouver le lemme 2.1. Compte tenu de l'inégalité (2.4) appliquée à  $v_\epsilon^s$ , il suffit de montrer que :

$$\|e^{-\gamma t} L v_\epsilon^s\|_s \leq C (1 + \|e^{-\gamma t} v_\epsilon^s\|_s) \quad (2.14)$$

(fixer ensuite  $\gamma$  suffisamment grand). Compte tenu de (2.10) et (2.11) on a, pour presque tout  $t$  :

$$\begin{aligned} |Lv_\epsilon^s(t)|_s &\leq |\rho_\epsilon^s g(t)|_s + |\epsilon \rho_\epsilon^s [L, \Lambda^s] v_\epsilon^s(t)|_s + |\rho_\epsilon^s h(t, \cdot, v)|_s \\ &\leq C(1 + |v_\epsilon^s(t)|_s) \end{aligned}$$

d'après (2.8), (2.7) et (2.12), respectivement (pour le deuxième terme, il suffit de remarquer que  $[L, \Lambda^s]$  est un opérateur d'ordre  $s$  dans les variables spatiales). L'estimation (2.14) s'obtient en intégrant la dernière inégalité par rapport à  $t$ .

Si  $s > 1$ , on sait d'après ci-dessus que  $v \in L^2([0, T]; H^1(\mathbf{R}^n))$ , et on étudie alors  $\|v_\epsilon^{s-1}(t)\|_s$ . Pour montrer que cette quantité reste bornée, il suffit là encore de prouver :

$$\|e^{-\gamma t} Lv_\epsilon^{s-1}\|_s \leq C(1 + \|e^{-\gamma t} v_\epsilon^{s-1}\|_s). \quad (2.14)'$$

En remplaçant  $s$  par  $s-1$  dans (2.10) et (2.11), on obtient pour presque tout  $t$  :

$$\begin{aligned} |Lv_\epsilon^{s-1}(t)|_s &\leq |\rho_\epsilon^{s-1} g(t)|_s + |\epsilon \rho_\epsilon^{s-1} [L, \Lambda^{s-1}] v_\epsilon^{s-1}(t)|_s \\ &\quad + |\rho_\epsilon^{s-1} h(t, \cdot, v)|_s \leq C(1 + |v_\epsilon^{s-1}(t)|_s) \end{aligned}$$

d'après (2.8), (2.7) et (2.13) avec  $\delta = 1$ . (2.14)' en découle.

q.e.d.

*Démonstration du lemme 2.3.* — Pour alléger les notations, nous omettrons la variable  $x$  et écrirons simplement  $h(w)$ .

(i) Cas où  $s \in [0, 1]$  : Puisque  $w$  est  $L^\infty$ , on peut supposer  $h$  à support compact en  $w$ , et en particulier que  $D_w h$  et  $D_{xw}^2 h$  sont bornées ; on peut donc appliquer le lemme suivant :

LEMME 2.4. — Soit  $h \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p)$  telle que  $h(0) = 0$  et  $|D_w h| \leq C$ ,  $|D_{xw}^2 h| \leq C'$ . Alors, pour tout  $s \in [0, 1]$ , pour tout  $f \in H^s(\mathbf{R}^n)$ , on a  $h(f) \in H^s(\mathbf{R}^n)$  et :

$$|h(f)|_s \leq C|f|_s. \quad (2.15)$$

*Preuve.* — Pour tout  $x$ , on a :  $|h(f)(x)| \leq C|f(x)|$ , ce qui donne (2.15) pour  $s = 0$ . Pour  $s > 0$ , on utilise les normes suivantes :

$$\begin{aligned} |f|_s^2 &= |f|_0^2 + \int_{\mathbf{R}^n} |\tau_y f - f|_0^2 dy / |y|^{n+2s}, \quad \text{si } s \in ]0, 1[, \\ |f|_1^2 &= |f|_0^2 + \sup_{y>0} |\tau_y f - f|_0^2 / |y|^2, \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\tau_y f(x) = f(x - y)$ .

Le lemme est alors conséquence de l'inégalité :

$$|\tau_y h(f) - h(f)| \leq C |\tau_y f - f| + C' |y| |f|.$$

q.e.d.

Revenons au lemme 2.3. On a, en posant  $w_\epsilon = \rho_\epsilon^s w$  :

$$\begin{aligned} |\rho_\epsilon^s h(w)|_s &\leq |\rho_\epsilon^s (h(w) - h(w_\epsilon))|_s + |\rho_\epsilon^s h(w_\epsilon)|_s \\ &\leq |\rho_\epsilon^s (h(w) - h(w_\epsilon))|_s + C |w_\epsilon|_s, \end{aligned} \quad (2.16)$$

d'après (2.8) et (2.15). D'autre part, (2.7) entraîne :

$$\begin{aligned} |\rho_\epsilon^s (h(w) - h(w_\epsilon))|_s \\ \leq C/\epsilon |(h(w) - h(w_\epsilon))|_0 \leq C/\epsilon |w - w_\epsilon|_0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

puisque  $h'$  est bornée. Maintenant

$$w - w_\epsilon = (1 - \rho_\epsilon^s) w = (1 - \rho_\epsilon^s) (1 + \epsilon \Lambda^s) w_\epsilon$$

et donc

$$1/\epsilon |w - w_\epsilon| \leq |(1 - \rho_\epsilon^s)/\epsilon w_\epsilon|_0 + |(1 - \rho_\epsilon^s) \Lambda^s w_\epsilon|_0 \leq C |w_\epsilon|_s$$

d'après (2.9) et (2.8). Revenant à (2.16), on obtient (2.12).

(ii) Cas où  $s > 1$ . On pose à nouveau  $w_\epsilon = \rho_\epsilon^{s-\delta} w$ . Nous allons utiliser la linéarisation dyadique de  $h(w)$ . Nous en rappelons ci-dessous brièvement le principe (voir par exemple Y. Meyer [8]).

On construit une partition de l'unité de l'espace des phases comme suit : soit  $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ ,  $\psi(\xi) = 1$  pour  $|\xi| \leq 1/2$  et  $\psi(\xi) = 0$  pour  $|\xi| \geq 1$  ; on pose  $\varphi(\xi) = \psi(\xi/2) - \psi(\xi)$ , de sorte que :

$$1 = \psi(\xi) + \sum_0^\infty \varphi(2^{-p} \xi),$$

avec  $\text{supp } \varphi(2^{-p}) \subset C_p = \{\xi, 2^{p-1} \leq |\xi| \leq 2^{p+1}\}$ .

On pose alors

$$\Delta_p = \varphi(2^{-p} D), S_p = \sum_0^p \Delta_q + \psi(D), S_{-1} = \psi(D).$$

Si  $u$  est une distribution tempérée, l'appartenance de  $u$  à  $H^s$  se

lit sur la croissance des "blocs dyadiques"  $\Delta_p u$  : précisément,  $u \in H^s$  si et seulement si  $\sum_0^\infty 2^{2ps} |\Delta_p u|_0^2 < +\infty$ . Ceci reste vrai dans le cas plus général d'une suite  $(u_p)$  de fonctions  $L^2$  dont les spectres sont localisés respectivement dans des couronnes

$$C_p(k) = \{\xi, 2^p/k \leq |\xi| \leq 2^p k\} \quad (k > 1),$$

et telles que  $\sum_0^\infty u_p = u$ . (Pour plus de précisions sur la description des espaces classiques à l'aide des blocs dyadiques, voir R. Coifman-Y. Meyer [5]).

On s'intéresse à des opérateurs du type

$$B = \sum_0^\infty m_p \Delta_p, \quad (2.18)$$

où  $(m_p)$  est une suite de fonctions  $L^\infty$ , vérifiant  $\|m_p\|_{L^\infty} \leq c$ . Si le spectre de  $m_p$  est localisé dans  $D_{p-2} = \{\xi, |\xi| \leq 2^{p-2}\}$  ( $p \geq 2$ ), alors celui de  $m_p \Delta_p u$  est contenu dans  $C_p(k)$  pour un certain  $k$ , et on en déduit facilement que  $B$  est borné sur tous les  $H^s$ . Le fait que  $\text{spec}(m_p) \subset D_{p-2}$  entraîne facilement :

$$\forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \| \partial^\alpha m_p \|_{L^\infty} \leq c_\alpha 2^{p|\alpha|} \quad (\text{inégalités de Bernstein}). \quad (2.19)$$

En fait, la continuité de  $B$  s'étend partiellement à des  $m_p$  vérifiant (2.19) (voir Y. Meyer [8]) :

**LEMME 2.5.** — *Soit  $(m_p)$  une suite de fonction  $C^\infty$  vérifiant (2.19). Alors l'opérateur  $B$  défini par (2.18) est borné sur  $H^\sigma$  pour tout  $\sigma > 0$ . De plus, sa norme est une fonction bornée des  $(c_\alpha)_{|\alpha| \leq [\sigma] + 1}$ .*

L'intérêt de la condition (2.19) par rapport à la condition de localisation spectrale est qu'elle est stable par les opérations non linéaires. Si  $f$  est une fonction  $C^\infty$ , et si  $(m_p)$  vérifie (2.19), alors, en développant :

$$\partial^\alpha f(m_p) = \sum f^{(q)}(m_p) \partial^{\alpha_1} m_p \dots \partial^{\alpha_q} m_q,$$

avec

$$|\alpha_1| + \dots + |\alpha_q| = |\alpha|,$$

on conclut que  $(f(m_p))$  vérifie (2.19).

Le lemme 2.6 s'applique à notre problème de la façon suivante:

De  $h(w) = \sum_0^\infty (h(S_p w) - h(S_{p-1} w)) + h(S_{-1} w)$ , on déduit :

$$h(w) = Bw + h(S_{-1} w), \tag{2.20}$$

B étant défini par (2.18), avec  $m_p \equiv \int_0^1 h'(S_{p-1} w + t\Delta_p w) dt$ .

Or, si  $w \in L^\infty$ , on a:  $\|S_p w\|_{L^\infty} \leq c \|w\|_{L^\infty}$ , et

$$\text{spec}(S_{p-1} w + t\Delta_p w) \subset D_p$$

par construction, donc  $(m_p)$  vérifie (2.19). Appliquant le lemme 2.5, on retrouve ainsi que  $L^\infty \cap H^s$  est stable par  $w \longrightarrow h(w)$  lorsque  $s > 0$ . Appliquant  $\rho_\epsilon^{s-\delta}$  à (2.20), on obtient :

$$\rho_\epsilon^{s-\delta} h(w) = \rho_\epsilon^{s-\delta} Bw + \rho_\epsilon^{s-\delta} h(S_{-1} w).$$

Le deuxième terme ne pose bien sûr pas de problèmes :

$$|\rho_\epsilon^{s-\delta} h(S_{-1} w)|_s \leq c |S_{-1} w|_s \leq c' |w|_0 \leq c'' |w_\epsilon|_{s-\delta},$$

puisque  $w = (1 + \epsilon\Lambda^{s-\delta}) w_\epsilon$ . Pour le premier terme, on écrit :

$$\begin{aligned} |\rho_\epsilon^{s-\delta} Bw|_s &\leq |\rho_\epsilon^{s-\delta} B(1 + \epsilon\Lambda^{s-\delta}) w_\epsilon|_s \leq |\rho_\epsilon^{s-\delta} Bw_\epsilon|_s \\ &\quad + |\epsilon\rho_\epsilon^{s-\delta} B\Lambda^{s-\delta} w_\epsilon|_s. \end{aligned} \tag{2.21}$$

D'après (2.8) et la continuité  $H^s$  de B (lemme 2.5), on a :

$$|\rho_\epsilon^{s-\delta} Bw_\epsilon|_s \leq c |w_\epsilon|_s. \tag{2.22}$$

D'après (2.7) et la continuité  $H^\delta$  de B (lemme 2.5), on a :

$$|\epsilon\rho_\epsilon^{s-\delta} B\Lambda^{s-\delta} w_\epsilon|_s \leq c |\Lambda^{s-\delta} w_\epsilon|_\delta \leq c' |w_\epsilon|_s. \tag{2.23}$$

Revenant à (2.21), on obtient l'inégalité annoncée (2.13).

q.e.d.

*Remarques :*

2.2. La méthode ci-dessus permettrait de prouver l'inégalité (2.12) pour tout  $s$  si l'on connaissait la continuité  $L^2$  de B; mais celle-ci n'est pas connue (\*): on sait qu'en général les opérateurs

(\*) G. Métivier vient de nous communiquer une démonstration de cette propriété, dont l'ingrédient essentiel est une estimation due à R. Coifman et Y. Meyer ([5], Th. 33, p. 144). On en déduit l'inégalité (2.12) pour tout  $s$ , ce qui permet d'éviter la discussion ( $s \leq 1$ )/( $s > 1$ ). Nous avons cependant préféré présenter la démonstration ci-dessus, plus élémentaire.

vérifiant les hypothèses du lemme 2.5 n'ont pas cette propriété (prendre par exemple  $m_p(x) = \exp(i2^p x)$ ). C'est pourquoi nous avons dû démontrer le théorème 1 en deux temps ( $s \leq 1, s > 1$ ).

2.3. Cas d'opérateurs  $L$  plus généraux (voir la remarque 1.5). Il s'agit à nouveau de montrer que  $v \in L^2(0, T; H^s)$ , où  $v \in L^\infty(0, T; L_{\text{comp}}^\infty(\mathbf{R}^n))$  et est solution de (2.6). Cette fois l'hypothèse sur  $L = \partial_t - iA$  est que les valeurs propres réelles de  $a_1(t, x, \xi)$  (symbole principal de  $A$ ) sont simples.  $a_1(t, x, \xi)$  est alors semblable à une matrice-bloc du type :

$$\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \text{ où : } \begin{array}{l} \partial_t - iH \text{ est strictement hyperbolique ;} \\ \partial_t - iE \text{ est elliptique.} \end{array}$$

En raisonnant comme dans [1], on en déduit l'inégalité a priori suivante :

$$\begin{aligned} \gamma \|(T-t)^{\gamma-1} w\|_s &\leq C (\|(T-t)^\gamma Lw\|_s \\ &+ \gamma \|\|(T-t)^{\gamma-1} Lw\|_{s-1} + \gamma^2 \|\|(T-t)^{\gamma-2} w\|_{s-1}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

pour  $\gamma$  assez grand ; ici  $\|\cdot\|_r$  désigne la norme  $H^r([0, T] \times \mathbf{R}^n)$ . Il est clair que l'on peut supposer  $v \in H^{s_0}([0, T] \times \mathbf{R}^n)$ , avec  $s \leq s_0 + 1$  ; on applique alors (2.24) à  $w = \rho_\epsilon^{s-s_0} v$  ; notant respectivement  $N_1, N_2, N_3$  les trois termes du second membre de (2.24), on estime  $N_1$  comme dans la démonstration ci-dessus ; on majore  $N_3$  et  $N_2$  (en utilisant l'équation) indépendamment de  $\epsilon$ , et on conclut en prenant  $\gamma$  assez grand.

### 3. Démonstration du théorème 2.

#### 3.1. Opérateurs paradifférentiels lipschitziens.

Dans cette section, nous présentons dans ses grandes lignes le calcul symbolique qui va nous permettre de linéariser l'équation quasilineaire (4) dans le même esprit qu'à la fin du paragraphe précédent, et d'obtenir une inégalité a priori, analogue à (2.4), pour l'opérateur linéarisé. Nous suivons de très près les paragraphes 2 et 3 de [2], avec des simplifications, puisque la faible régularité des fonctions lipschitziennes ne permet de définir qu'un symbole principal. Nous renvoyons à [2] pour les démonstrations complètes.

*Notations.* — Pour  $m \in \mathbf{R}$ , on pose :

$\beta^m$  : l'espace des opérateurs de  $S'(\mathbf{R}^n)$  dans lui-même qui sont continus de  $H^s(\mathbf{R}^n)$  dans  $H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$  pour tout  $s \in \mathbf{R}$ .

$\beta^{m,+}$  : l'espace des opérateurs de  $S'(\mathbf{R}^n)$  dans lui-même qui sont continus de  $H^s(\mathbf{R}^n)$  dans  $H^{s-m}(\mathbf{R}^n)$  pour tout  $s > m$ .

Pour  $a \in L^\infty$ , on note  $T_a$  l'opérateur "paraproduit" par  $a$ , défini par :

$$T_a = \sum_2^\infty S_{p-2}(a) \Delta_p. \quad (3.1)$$

Ainsi que nous l'avons remarqué au paragraphe précédent,  $T_a \in \beta^0$ , et sa norme est majorée par  $c \|a\|_{L^\infty}$ . Le lien avec le produit par  $a$  est donné par le lemme suivant :

LEMME 3.1. — Soit  $u \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ . Alors il existe  $B = B(u) \in \beta^{0,+}$  tel que, pour tout  $a \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ , on ait :

$$au = T_a u + Ba \quad (3.2)$$

la norme de  $B$  étant majorée par  $c \|u\|_{L^\infty}$ .

*Preuve.* — D'après (2.18),

$$a = S_{-1}(a) + \sum_p \Delta_p a, u = S_{-1}(u) + \sum_q \Delta_q u.$$

On en déduit (notant  $S_{-1} = \Delta_{-1}$ ):

$$\begin{aligned} au &= \sum_p \sum_q \Delta_p a \Delta_q u = \sum_{q=2}^\infty \left( \sum_{p < q-2} \Delta_p a \right) \Delta_q u \\ &\quad + \sum_{p=-1}^\infty \left( \sum_{q < p+2} \Delta_q u \right) \Delta_p a \end{aligned}$$

soit (3.2), avec  $B = \sum_{p=-1}^\infty S_{p+2}(u) \Delta_p$ , ce qui est bien dans  $\beta^{0,+}$ , d'après les inégalités de Bernstein et le lemme 2.5.

q.e.d.

Lorsque  $a \in \text{Lip}(\mathbf{R}^n)$ , l'opérateur  $T_a$  fait partie d'un calcul symbolique :

$$\forall a \in \text{Lip}, T_a^* = T_{a^*} \text{ mod } \beta^{-1} \quad (3.3)$$

(où  $a^*$  désigne le complexe conjugué de  $a$ )

$$\forall a \in \text{Lip}, \quad b \in \text{Lip}, T_a T_b = T_{ab} \text{ mod } \beta^{-1} \quad (3.4)$$

(3.3) et (3.4) sont conséquences du résultat élémentaire suivant :  
(voir les théorèmes 2.3 et 2.4 de [2]).

LEMME 3.2. — Si  $a \in \text{Lip}$ , posons

$$[a]_{\text{Lip}} = \sup_{x \neq y} |a(x) - a(y)| / |x - y|.$$

Alors on a :

$$\|\Delta_p a\|_{L^\infty} \leq c [a]_{\text{Lip}} 2^{-p}. \quad (3.5)$$

*Preuve.* — Soit  $h \in S(\mathbf{R}^n)$  telle que  $\mathbf{F}(h) = \varphi$  ( $\mathbf{F}$  désigne la transformation de Fourier), de sorte que :

$$\Delta_p a(x) = \int h(y) a(x - 2^{-p}y) dy. \quad (3.6)$$

Puisque  $\text{supp } \varphi \subset \{\xi, 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ , on a :  $\varphi(0) = 0 = \int h(y) dy$ , donc :

$$\Delta_p a(x) = \int h(y) (a(x - 2^{-p}y) - a(x)) dy,$$

soit :

$$\|\Delta_p a\|_{L^\infty} \leq \left( \int |y| |h(y)| dy \right) [a]_{\text{Lip}} 2^{-p}.$$

q.e.d.

Pour  $m \in \mathbf{R}$ , on définit  $\Sigma_1^m(\mathbf{R}^n)$  comme l'espace des fonctions  $l = l(x, \xi)$  définies sur  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ , lipschitziennes en  $x$ ,  $C^\infty$  et  $m$ -homogènes en  $\xi$ . A l'aide de la décomposition de  $l$  en harmoniques sphériques, on définit un opérateur  $T_l$  comme dans [2], § 3 : c'est une somme convergente d'opérateurs du type  $T_a h(D)$ , où  $a \in \text{Lip}(\mathbf{R}^n)$  et où  $h(D)$  est un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre  $m$ .  $T_l$  est alors dans  $\beta^m$ , et (3.3), (3.4) deviennent :

$$T_l^* = T_{l^*} \text{ mod } \beta^{m-1} \quad (3.3)'$$

$$T_l T_{l'} = T_{ll'} \text{ mod } \beta^{m-1}.$$

On note  $\text{Op } \Sigma_1^m(\mathbf{R}^n)$  l'espace vectoriel des opérateurs de la forme  $L = T_l + B$ , avec  $l \in \Sigma_1^m(\mathbf{R}^n)$  et  $B \in \beta^{m-1}$ . Pour un tel

opérateur,  $l$  est unique, et est appelé le symbole principal de  $L$ . On note  $l = \sigma(L)$ . Ainsi :

$$\sigma : \oplus_m \text{Op } \Sigma_1^m(\mathbf{R}^n) / \beta^{m-1} \longrightarrow \oplus_m \Sigma_1^m(\mathbf{R}^n) \quad (3.7)$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Notons que l'algèbre  $\oplus_m \text{Op } \Sigma_1^m(\mathbf{R}^n)$  des opérateurs paradifférentiels lipschitziens ainsi définie contient en particulier celle des opérateurs pseudodifférentiels classiques globaux sur  $\mathbf{R}^n$ , les notions d'ordre et de symbole principal étant les mêmes.

Grâce aux partitions de l'unité, on peut également donner une version locale des opérateurs paradifférentiels (voir [2], définition 3.8). Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ ,  $\Sigma_{1,\text{loc}}^m(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions  $l(x, \xi)$  sur  $\Omega \times \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $C^\infty$  et  $m$ -homogènes en  $\xi$ , localement lipschitziennes en  $x$ . On remplace alors de façon évidente  $\beta^m, \beta^{m,+}$  par des espaces d'opérateurs proprement supportés  $\beta_{\text{loc}}^m(\Omega), \beta_{\text{loc}}^{m,+}(\Omega)$ .

**DEFINITION 3.3.** — *Un opérateur  $L : D'(\Omega) \longrightarrow D'(\Omega)$ , proprement supporté, est un opérateur paradifférentiel lipschitzien d'ordre  $m$  sur  $\Omega$  (ce que l'on notera :  $L \in \text{Op } \Sigma_{1,\text{loc}}^m(\Omega)$ ) s'il existe  $l \in \Sigma_{1,\text{loc}}^m(\Omega)$  tel que, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , pour toute fonction  $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$  valant 1 près de  $K$ ,  $L - \chi T_{\chi l}$  applique continûment  $H_{\text{comp}}^s(K)$  dans  $H^{s-m+1}(\mathbf{R}^n)$  pour tout  $s \in \mathbf{R}$ .*

La fonction  $l$  est alors unique, appelée symbole principal de  $L$  et notée  $\sigma(L)$ ; on déduit de (3.7) un nouvel isomorphisme d'algèbres graduées :

$$\sigma : \oplus_m \text{Op } \Sigma_{1,\text{loc}}^m(\Omega) / \beta_{\text{loc}}^{m-1}(\Omega) \longrightarrow \oplus_m \Sigma_{1,\text{loc}}^m(\Omega).$$

Dans le même sens, la version locale des linéarisations (2.20) et (3.2) est donnée par les deux lemmes suivants :

**LEMME 3.4.** — *Soit  $f = f(x, u)$  une fonction  $C^\infty$  sur  $\Omega \times \mathbf{R}^p$  et soit  $u \in L^\infty(\Omega, \mathbf{R}^p)$ . Alors il existe  $B = B(u, f) \in \beta_{\text{loc}}^{0,+}(\Omega)$  tel que :*

$$f(x, u) - Bu \in C^\infty(\Omega). \quad (3.8)$$

**LEMME 3.2.** — *Soient  $a, u \in L^\infty(\Omega)$ . Alors il existe*

$$A \in \text{Op } \Sigma_{1,\text{loc}}^0(\Omega)$$

*de symbole  $a$ , et  $B = B(u) \in \beta_{\text{loc}}^{0,+}(\Omega)$ , tels que :*

$$au = Au + Ba. \quad (3.9)$$

Remarquons enfin que tous ces résultats s'étendent à des opérateurs paradifférentiels à valeurs matricielles, les symboles étant alors des fonctions à valeurs matricielles.

### 3.2. Fin de la démonstration du théorème 2.

Nous suivons exactement le même plan qu'au paragraphe 2. Il s'agit, en reprenant les mêmes notations, de prouver le lemme 2.1. Pour voir que ce lemme entraîne le théorème 2, on peut, par exemple, incliner légèrement la fonction temps (voir § 2, remarque 2.1). Si l'on veut appliquer plutôt la régularité elliptique microlocale, cf. remarque 3.2.

Linéarisons d'abord l'équation (4) :

LEMME 3.5. — Si  $u$  vérifie (4), on peut écrire :

$$Lu = Bu + g, \quad (3.10)$$

où  $B = B(t)$  est une famille  $L^\infty$  d'opérateurs  $\in \beta_{\text{loc}}^{0,+}(\Omega)$ ,

$$g \in L^\infty(0, T; C^\infty(\Omega)), \quad \text{et} \quad L = \partial_t - \sum_1^n \tilde{A}_j \partial_j,$$

où  $\tilde{A}_j = \tilde{A}_j(t)$  est une famille  $L^\infty$  d'opérateurs paradifférentiels d'ordre 0 sur  $\Omega$ , de symbole donné par :

$$\sigma(\tilde{A}_j(t))(x) = A_j(t, x, u(t, x)).$$

*Preuve.* — L'équation (4) s'écrit, après convexification :

$$\left\{ \partial_t - \sum_1^n A_j(t, x, u) \partial_j \right\} u = f(t, x, u). \quad (3.11)$$

Le lemme (3.4) donne, en considérant  $t$  comme un paramètre :

$$f(t, x, u) = B_0(t) u(t) + g_0(t). \quad (3.12)$$

D'autre part, en appliquant le lemme (3.2)' à  $A_j(t, \cdot, u)$  et à  $\partial_j u$  :

$$A_j(t, x, u) \partial_j u = \tilde{A}_j(t) \partial_j u + B_j(t) A_j(t, x, u), \quad (3.13)$$

avec  $\sigma(\tilde{A}_j(t)) = A_j(t, \cdot, u) \in \text{Lip}(C) \subset L^\infty(0, T; \text{Lip}(\Omega))$ .

Enfin, réappliquant le lemme 3.4 :

$$B_j(t) A_j(t, x, u) = B_j(t) B_j'(t) u(t) + g_j(t), \quad (3.14)$$

d'où le résultat en posant :  $B = B_0 + \sum_1^n B_j B_j', g = g_0 + \sum_1^n g_j$ .

q.e.d.

*Remarques :*

3.1. La dépendance  $L^\infty$  des opérateurs  $\tilde{A}_j(t)$  a été obtenue en remarquant que  $\text{Lip}(\Gamma) \subset L^\infty(0, T; \text{Lip}(\Omega))$  (et, bien sûr, que la quantification décrite au paragraphe 3.1 est uniforme par rapport à un éventuel paramètre). On peut également noter que  $\text{Lip}(\Gamma) \subset \text{Lip}(0, T; L^\infty(\Omega))$ , ce qui permet de considérer  $\tilde{A}_j$  comme une famille lipschitzienne d'opérateurs  $\in \beta_{\text{loc}}^0(\Omega)$ . Cela nous sera utile dans la démonstration de l'inégalité d'énergie (lemme 3.7).

3.2. On peut bien sûr effectuer la linéarisation précédente sans privilégier la variable  $t$ , et obtenir ainsi :

$$Lu = Bu + g, \quad (3.15)$$

avec cette fois  $L \in \beta_{\text{loc}}^1(\Gamma)$ ,  $\sigma(L) = i(\tau - \sum A_j(t, x, u(t, x)) \xi_j)$ ,  $B \in \beta_{\text{loc}}^{0,+}(\Gamma)$ , et  $g \in C^\infty(\Gamma)$ .  $L$  est elliptique aux points où  $\xi \neq 0$ , et on peut donc l'inverser microlocalement grâce à l'isomorphisme (3.7)', modulo  $\beta_{\text{loc}}^{-1}(\Gamma)$ . On peut ainsi terminer la démonstration du théorème 2 par le même argument de bootstrap qu'au paragraphe 2.

Comme au paragraphe 2, on se ramène à un problème global en  $x$ , en prolongeant  $L$  en un opérateur paradifférentiel strictement (ou symétrique) hyperbolique sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ , à coefficients constants pour  $|x|$  assez grand. (Ainsi les  $\tilde{A}_j(t)$  sont dans la classe globale définie au paragraphe 3.1.) Pour un tel opérateur, l'inégalité d'énergie (2.4) subsiste :

LEMME 3.7. — Pour  $s \in \mathbb{R}$ , il existe  $C > 0, \gamma_s > 0$ , tels que :  $\forall \gamma \geq \gamma_s, \forall v \in L^2(0, T; H^s(\mathbb{R}^n))$  vérifiant  $Lv \in L^2(0, T; H^s(\mathbb{R}^n))$  et  $v(0) = 0$  :

$$\gamma \|e^{-\gamma t} v\|_s \leq C \|e^{-\gamma t} Lv\|_s. \quad (3.16)$$

*Preuve.* — Connaissant le calcul symbolique global (3.7), la démonstration est standard, à quelques détails près.

Notons

$$a(t, x, \xi) = \sum A_j(t, x, u(t, x)) \xi_j \in \Sigma_1^1(\mathbf{R}^n), \pi_k(t, x, \xi) \in \Sigma_1^0(\mathbf{R}^n)$$

le projecteur spectral de  $a$  sur le  $k^{\text{ième}}$  espace propre, et posons :  
 $s(t, x, \xi) = \sum \pi_k(t, x, \xi)^* \pi_k(t, x, \xi) \in \Sigma_1^0(\mathbf{R}^n)$ .  $s$  est lipschitzienne en  $(t, x)$ , et :

$$(i) s = s^*, (ii) s \geq cI \quad \text{avec } c > 0, (iii) sa = a^*s.$$

On en déduit une famille

$$S = S(t) \in L^\infty(0, T; \text{Op } \Sigma_1^0(\mathbf{R}^n)) \cap \text{Lip}(0, T; \beta^0(\mathbf{R}^n))$$

telle que :

$$(i)' S(t)^* = S(t), (ii)' (S(t)v, v) \geq C \|v\|_0^2,$$

$$(iii)' S(t) \tilde{A}(t) = \tilde{A}(t)^* S(t) + Q(t), \quad \text{où } \tilde{A}(t) = \sum \tilde{A}_j(t) \partial_j, \\ Q \in L^\infty(0, T; \beta^0(\mathbf{R}^n)).$$

(ii)' est l'inégalité de Garding classique déduite de (ii) (conséquence directe du calcul symbolique (3.7)), quitte à ajouter à  $S(t)$  un terme d'ordre inférieur.

De là, on suit la preuve habituelle :

$$\text{par (ii)' } \|e^{-\gamma t} v\|_0^2 \leq C \int_0^T (S(t)v(t), v(t)) e^{-2\gamma t} dt \equiv C J.$$

Mais, en intégrant par parties :

$$J = 1/2 \gamma \left( \int_0^T (S'(t)v(t), v(t)) e^{-2\gamma t} dt \right. \\ \left. + \int_0^T 2 \text{Re} (S(t)v'(t), v(t)) e^{-2\gamma t} dt \right) \\ \equiv 1/2 \gamma (J_1 + J_2).$$

Utilisant la dépendance lipschitzienne de  $S(t)$  :

$$J_1 \leq C \|e^{-\gamma t} v\|_0^2.$$

$$J_2 = \int_0^T 2 \text{Re} (S(t) Lv(t), v(t)) e^{-2\gamma t} dt \\ + \int_0^T 2 \text{Re} (iS(t) \tilde{A}(t)v(t), v(t)) e^{-2\gamma t} dt \\ \leq C (\|e^{-\gamma t} Lv\|_0 \|e^{-\gamma t} v\|_0 + \|e^{-\gamma t} v\|_0^2),$$

par (iii)'. L'inégalité (3.16) pour  $s = 0$  en découle. Pour  $s$  quelconque, il suffit d'appliquer l'inégalité précédente à l'opérateur  $\Lambda_x^s L \Lambda_x^{-s}$ .

q.e.d.

On définit alors  $\chi$  et  $v = \chi u$  comme en (2.5), (2.5)'. Du lemme 3.5, on déduit :

$$Lv = [L, \chi] u + \chi (Bu + g).$$

Ecrivant  $u = v + w$ , avec  $w \in H^s(\Gamma)$ , et remarquant que  $K = [L, \chi] + \chi B$  est une famille  $L^\infty$  d'opérateurs  $\in \beta^{0,+}$ , on obtient finalement :

$$Lv = Kv + g', \quad \text{avec } g' \in L^2(0, T; H^s(\mathbf{R}^n)). \quad (3.17)$$

$u$  étant lipschitzienne, on sait déjà que  $v \in L^2(0, T; H^1(\mathbf{R}^n))$ . On estime alors  $v_\epsilon^{s-1} = \rho_\epsilon^{s-1} v$  comme en (2.11) :

$$\begin{aligned} Lv_\epsilon^{s-1} &= [L, \rho_\epsilon^{s-1}] v + \rho_\epsilon^{s-1} Kv + \rho_\epsilon^{s-1} g' \\ &= -\epsilon \rho_\epsilon^{s-1} [L, \Lambda^{s-1}] v_\epsilon^{s-1} + \rho_\epsilon^{s-1} Kv + \rho_\epsilon^{s-1} g'. \end{aligned}$$

Or  $[L, \Lambda^{s-1}]$  est une famille  $L^\infty$  d'opérateurs  $\in \beta^{s-1}(\mathbf{R}^n)$ . Donc, par (2.7) :

$$|\epsilon \rho_\epsilon^{s-1} [L, \Lambda^{s-1}] v_\epsilon^{s-1}|_s \leq C |v_\epsilon^{s-1}|_s.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} |\rho_\epsilon^{s-1} Kv|_s &= |\rho_\epsilon^{s-1} K(1 + \epsilon \Lambda^{s-1}) v_\epsilon^{s-1}|_s \\ &\leq |\rho_\epsilon^{s-1} K v_\epsilon^{s-1}|_s + |\epsilon \rho_\epsilon^{s-1} K \Lambda^{s-1} v_\epsilon^{s-1}|_s \\ &\leq C |v_\epsilon^{s-1}|_s, \end{aligned}$$

puisque  $K \in \beta^{0,+}$ , et compte tenu de (2.7) et (2.8).

On conclut par l'inégalité (3.16), en prenant  $\gamma$  assez grand.

q.e.d.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ALINHAC, G. METIVIER, Propagation de l'analyticité des solutions d'équations non linéaires de type principal, *Comm. in P.D.E.*, (1984), 523-537.
- [2] J.-M. BONY, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations non linéaires, *Ann. Scient. E.N.S.*, 14 (1981), 209-246.

- [3] J.-M. BONY, *Propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, n° 22, 1979-1980, Ecole Polytechnique, Paris.
- [4] J. CHAZARAIN, A. PIRIOU, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthier-Villars, 1981.
- [5] R. COIFMAN, Y. MEYER, Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Astérisque*, vol. 57 (1978).
- [6] B.E. DAHLBERG, A note on Sobolev spaces, in Harmonic Analysis in Euclidean spaces, *Proc. Symp. in Pure Mathematics (A.M.S.)*, vol. 35, Part 1 (1979), 183-185.
- [7] A. MAJDA, Compressible fluid flows and systems of conservation laws in several variables, *Applied Mathematical Sciences* 33, Springer, 1984.
- [8] Y. MEYER, Remarque sur un théorème de J.-M. Bony, *Suppl. ai Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, Atti del Seminario di Analisi Armonica, Pisa, Serie 2, n° 1, 1981.
- [9] J. RAUCH, Singularities of solutions of semilinear wave equations, *J. Math. Pures et Appliquées*, 58 (1979), 299-308.

Manuscrit reçu le 23 juillet 1986.

P. GERARD,  
Université de Paris-Sud  
Mathématiques  
91405 Orsay Cedex  
&  
Ecole Normale Supérieure  
45 rue d'Ulm  
75230 Paris Cedex 05.

J. RAUCH,  
Mathematics Department  
University of Michigan  
Ann Arbor, MI 48109 (USA).