

ANNE DUVAL

## **Opérateurs intégro-différentiels méromorphes et opérateurs aux différences**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 37, n° 1 (1987), p. 45-80

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1987\\_\\_37\\_1\\_45\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_1_45_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# OPÉRATEURS INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELS MÉROMORPHES ET OPÉRATEURS AUX DIFFÉRENCES

par Anne DUVAL

La transformation de Mellin permet de “ramener” l’étude d’un opérateur aux différences algébrique à celle d’une équation différentielle. La manière “classique” de procéder (*Nörlund* [8], *Pincherle* [9] ou *Galbrun* [3]) nécessite une connaissance globale des solutions de l’équation différentielle : il faut suivre une solution d’un point singulier à un autre ou autour d’un point singulier. Pour cette raison seuls les cas génériques les plus simples ont été abordés par les auteurs cités : essentiellement le cas “normal”, c’est-à-dire celui qui conduit à une équation différentielle fuchsienne. Galbrun a étudié le cas irrégulier le plus simple mais l’étude devient vite inabordable (voir [1]). Récemment J.P. Ramis a proposé une autre voie d’approche, toujours dans le cas algébrique, qui présente l’intérêt de fournir certains résultats à partir de l’étude locale de l’opérateur différentiel [12]. Sa méthode s’applique aux opérateurs aux différences sans restriction sur la nature de leurs polygones de Newton. Il dégage également, au moins génériquement, une notion canonique de base du  $C(e^{2i\pi x})$ -espace vectoriel des solutions holomorphes dans un demi-plan vertical, à croissance verticale au plus exponentielle d’ordre 1 dans ce demi-plan.

Nous proposons ici une généralisation de ces résultats à des opérateurs qui ne sont plus algébriques mais dont on suppose seulement les coefficients développables en séries de factorielles convergentes dans un demi-plan  $\operatorname{Re} x > \lambda$  (voir aussi *Fitzpatrick-Grimm* [2]). La transformation de Pincherle conduit alors naturellement à une classe d’opérateurs intégro-différentiels d’ordre infini dont l’étude, algébrique puis analytique, nous permet de généraliser certains des résultats de J.P. Ramis. Pour des raisons techniques on utilise les opérateurs

*Mots clés* : Opérateur aux différences – Opérateur d’ordre infini – Transformée de Mellin – Indice – Développement asymptotique – Séries de factorielles.

$x^{-n} (d/dx)^{-n}$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) alors que l'opérateur d'Euler et son "inverse" paraîtraient peut-être plus naturels. On retrouve d'ailleurs cet opérateur (ou plutôt l'opérateur  $(d/dx)x$ ) lorsqu'on suppose les coefficients holomorphes à l'infini. Sous cette hypothèse il existe un travail de *Horn* ([4]) qui se situe dans une perspective comparable à la nôtre.

Je ne dirai jamais assez combien cet article doit aux encouragements et à l'écoute patiente de J.P. Ramis. Je l'en remercie bien vivement. La version définitive a été établie pendant un séjour à l'University of Southern California (Los Angeles).

## 0. NOTATIONS ET DEFINITIONS

### a. Notations.

Pour  $x \in \mathbf{C}$  et  $n \in \mathbf{N}$  on pose :

$$(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1) \quad \text{si } n \neq 0 \quad \text{et} \quad (x)_0 = 1$$

$$\langle x \rangle_n = x(x+1)\dots(x+n-1) \quad \text{si } n \neq 0 \quad \text{et} \quad \langle x \rangle_0 = 1.$$

Pour  $x \in \mathbf{C}$  et  $p \in \mathbf{Z}$  :

$$[x]_p = \Gamma(x)/\Gamma(x+p) = 1/\langle x \rangle_p \quad \text{si } p > 0; (x-1)_{-p} \quad \text{si } p < 0.$$

Pour  $\lambda \in \mathbf{R}$  on note  $\Pi_\lambda = \{u \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} u > \lambda\}$ .

On note  $\mathbf{C}[[u]]$  l'espace des séries formelles et  $\mathbf{C}\{u\}$  celui des séries convergentes.

L'espace des germes de fonctions holomorphes en 0 est noté  $\mathcal{O}$ .

L'espace des germes de fonctions méromorphes en 0 est noté  $\mathfrak{M}$ .

Si  $U$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbf{C}$ ,  $\mathcal{O}(U)$  désigne l'ensemble des fonctions holomorphes dans  $U$ ,  $\mathfrak{M}(U)$  celui des fonctions méromorphes dans  $U$ .

## b. Définitions.

DEFINITION 0.b.1. — On appelle opérateur intégro-différentiel formel de degré fini un élément de l'ensemble :

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}[[\theta]][\theta^{-1}] = \left\{ P = \sum_{s \geq s_0} \varphi_s(u) \theta^{-s} \mid s_0 \in \mathbf{Z}, \varphi_s(u) \in \mathfrak{K} \right\}.$$

Ici  $\theta$  est une indéterminée, à laquelle correspondra la dérivation  $d/du$ ,  $\theta^{-1}$  étant alors une primitive fixée.

DEFINITION 0.b.2. — Le degré d'un élément  $P$  de  $\mathfrak{K}$  est :

$$s_0 = -\sup \{s \in \mathbf{Z} \mid \varphi_s(u) \neq 0\}.$$

On note  $\mathfrak{E}$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{K}$  :

$$\mathfrak{E} = \{P \in \mathfrak{K} \mid \forall s \in \mathbf{Z}, \varphi_s(u) = a_s(u) u^{-s} \text{ avec } a_s(u) \in \mathfrak{O}\}.$$

DEFINITION 0.b.3. — Pour  $P \in \mathfrak{E}$  et  $s \geq s_0$ , la fonction  $a_s(u)$  est appelée coefficient du terme de degré  $-s$ .

DEFINITION 0.b.4. — Si  $V$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbf{C}$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on dit que la suite  $(a_n(u))_{n \in \mathbf{N}^*}$  vérifie la condition  $(C_\lambda)$  dans  $V$  si :

- (i)  $a_n(u) \in \mathfrak{O}(V)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$
- (ii)  $\forall \bar{W} \subset V$ , ( $\bar{W}$  voisinage de 0),  $\exists M > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbf{N}^*$

$$\sup_{u \in \bar{W}} |a_n(u)| \leq M n! n^\lambda.$$

Pour  $\lambda \in \mathbf{R}$  on définit le sous-ensemble de  $\mathfrak{E}$  :

$\mathfrak{E}_\lambda = \{P \in \mathfrak{E} \mid \exists V$  voisinage de 0 tel que la suite des coefficients de  $P$  d'indice positif vérifie  $(C_\lambda)$  dans  $V\}$ .

Si  $\lambda < \mu$  alors  $\mathfrak{E}_\lambda \subset \mathfrak{E}_\mu$ .

On pose :  $\mathfrak{E}_\infty = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}} \mathfrak{E}_\lambda$  et  $\mathfrak{E}_{-\infty} = \bigcap_{\lambda \in \mathbf{R}} \mathfrak{E}_\lambda$ . Ce dernier ensemble contient les opérateurs finis (tels que  $a_s(u) \equiv 0$  pour  $s > s_1$ ).

## 1. ETUDE ALGEBRIQUE

### a. Définition de la composition.

DEFINITION 1.a.1. — Si  $P$  et  $Q$  sont deux éléments de  $\mathfrak{K}$  on pose :

$$P \circ Q = \sum_{j \geq 0} (j!)^{-1} (\partial^j P / \partial \theta^j) \cdot (\partial^j Q / \partial u^j)$$

où le calcul se fait formellement dans

$$\mathbf{C} \{u\} [u^{-1}] [[\theta^{-1}]] [\theta]$$

c'est-à-dire :

$$\left( \sum_{s \geq s_0} \varphi_s(u) \theta^{-s} \right) \circ \left( \sum_{t \geq t_0} \psi_t(u) \theta^{-t} \right) = \sum_{\sigma \geq s_0 + t_0} \chi_\sigma(u) \theta^{-\sigma}$$

$$\text{où} \quad \chi_\sigma(u) = \sum_{j+s+t=\sigma} (j!)^{-1} (-s)_j \varphi_s(u) \psi_t^{(j)}(u).$$

Cette définition est calquée sur celle du produit de deux opérateurs pseudo-différentiels ([13]).

On vérifie immédiatement que l'addition évidente et ce produit font de  $\mathfrak{K}$  un corps non commutatif unitaire, dont  $\mathfrak{E}$  est un sous-anneau.

Un calcul direct permet d'obtenir un premier résultat pour  $\mathfrak{E}_\infty$ .

LEMME 1.a.2. — Supposons  $\lambda$  et  $\mu$  non entiers négatifs, le composé de l'opérateur  $\sum_{k \geq 1} \Gamma(k + \lambda) u^{-k} \theta^{-k}$  et de l'opérateur

$\sum_{k \geq 1} \Gamma(k + \mu) u^{-k} \theta^{-k}$  est l'opérateur  $\sum_{s \geq 2} c_s(\lambda, \mu) u^{-s} \theta^{-s}$  où

$$c_s(\lambda, \mu) = [\Gamma(\mu + 1) \Gamma(s + \lambda) - \Gamma(\lambda + 1) \Gamma(s + \mu)] / (\lambda - \mu) \text{ si } \lambda \neq \mu$$

et

$$c_s(\lambda, \lambda) = \Gamma'(s + \lambda) \Gamma(\lambda + 1) - \Gamma'(\lambda + 1) \Gamma(s + \lambda) \text{ si } \lambda = \mu.$$

On constate qu'ici  $P \in \mathcal{E}_{\lambda-1}, Q \in \mathcal{E}_{\mu-1}, P \circ Q \in \mathcal{E}_{\max(\lambda, \mu)-1}$  si  $\lambda \neq \mu$  et  $P \circ Q \in \mathcal{E}_{\lambda-1+\epsilon} \forall \epsilon > 0$  si  $\lambda = \mu$  puisqu'alors

$$c_s = O(s! s^{\lambda-1} \log s) \text{ quand } s \rightarrow \infty.$$

*Remarque 1.a.3.* — On peut remplacer l'inégalité de la condition  $(C_\lambda)$  par la suivante :

$$\sup_{u \in W} |a_s(u)| \leq M_1 \Gamma(s + \lambda + 1) \text{ pour tout } s > -\lambda - 1.$$

**PROPOSITION 1.a.4.** — *L'ensemble  $\mathcal{E}_\infty$  est un sous-anneau de  $\mathcal{E}$ , plus précisément si  $P \in \mathcal{E}_\lambda$  et  $Q \in \mathcal{E}_\mu$  alors  $P + Q \in \mathcal{E}_{\max(\lambda, \mu)}$  et  $P \circ Q \in \mathcal{E}_\nu$  avec*

$$\nu \leq \max(\nu_0(\lambda, \mu), \lambda + d^0 Q, \mu + d^0 P) \text{ où}$$

$$\nu_0(\lambda, \mu) = \max(-2, \lambda, \mu) \text{ si } \lambda \neq \mu$$

$$\nu_0(\lambda, \lambda) = -2 \text{ si } \lambda < -2 \text{ et } \nu_0(\lambda, \lambda) = \lambda + \epsilon (\epsilon > 0 \text{ arbitraire}) \text{ si } \lambda \geq -2.$$

*Démonstration.* — Par définition du produit si

$$P = \sum_{k \geq s_0} a_k(u) u^{-k} \theta^{-k} \text{ et } Q = \sum_{k \geq s_1} b_k(u) u^{-k} \theta^{-k}$$

on a

$$P \circ Q = \sum_{s \geq s_0 + s_1} c_s(u) u^{-s} \theta^{-s} \text{ où}$$

$$c_s(u) = \sum_{j+k+h=s} (j!)^{-1} (-k)_j a_k(u) \sum_{i=0 \dots j} (j_i) (-h)_{j-i} u^i b_h^{(i)}(u)$$

et on voit déjà que  $c_s(u) \in \mathbf{C}\{u\}$ .

Il suffit d'étudier les trois cas suivants :

- a)  $s_0$  et  $s_1 > 0$  (on peut supposer  $s_0 = s_1 = 1$ )
- b)  $P$  opérateur différentiel et  $s_0 \geq 1$
- c)  $Q$  opérateur différentiel et  $s_1 \geq 1$ .

a) On commence par se ramener au cas où les coefficients sont constants. Soit  $V$  un voisinage de  $0$  dans lequel les conditions  $(C_\lambda)$  et  $(C_\mu)$  sont vérifiées et soit  $R > 0$  un réel tel que  $B(0, 2R) \subset V$ .

Fixons  $W$  (compact) dans  $B(0, 2R)$ . La formule de Cauchy montre qu'il existe  $\rho > R$  tel que :

$$\forall k \geq s_1 \quad \sup_{u \in W} |u^t b_k^{(t)}(u)| \leq \eta^t i! \quad \sup_{u \in 2W} |b_k(u)|$$

où  $\eta = R/\rho$ .

En posant :  $\alpha_k = \sup_{u \in W} |a_k(u)|$  et  $\beta_k = \sup_{u \in 2W} |b_k(u)|$  on en déduit :

$$\begin{aligned} \sup_{u \in W} |c_s(u)| &\leq \sum_{j+k+h=s} (j!)^{-1} \langle k \rangle_j \alpha_k \beta_h \sum_{i=0 \dots j} (j)_i \langle h \rangle_{j-i} \eta^i \\ &\leq (1-\eta)^{-1} \sum_{j+k+h=s} (j!)^{-1} \langle k \rangle_j \langle h \rangle_j \alpha_k \beta_h \end{aligned}$$

et ceci (au terme  $(1-\eta)$  près) représente le coefficient du terme de degré  $s$  du produit de deux opérateurs à coefficients constants.

Dans ce cas :

$$c_s = \sum_{j+k+h=s} (j!)^{-1} \langle k \rangle_j \langle h \rangle_j a_k b_h.$$

i) Si  $\lambda$  ou  $\mu \leq -2$ , les conditions  $(C_\lambda)$  et  $(C_\mu)$  permettent de montrer :

$$\begin{aligned} |c_s| &\leq M(s-2)! \sum_{k+h \leq s} k^{\lambda+1} h^{\mu+1} \\ &= O(s! s^{-2+\max(\lambda+2,0)+\max(\mu+2,0)}) \quad \text{si } \lambda \text{ et } \mu \neq -2 \\ &= O(s! s^{-2+\max(\lambda+2)} \log s) \quad \text{si } \mu = -2 \text{ et } \lambda \neq -2 \\ &= O(s! s^{-2} \log^2 s) \quad \text{si } \lambda = \mu = -2. \end{aligned}$$

On ne peut en général améliorer cette estimation.

ii) Si  $\lambda$  et  $\mu > -2$ , on prend les conditions  $(C_\lambda)$  et  $(C_\mu)$  sous la forme indiquée dans la Remarque 1.a.3 et l'on obtient (notations du lemme 1.a.2):

$$|c_s| < M \sum_{k+j+h=s} (j!)^{-1} \langle k \rangle_j \langle h \rangle_j \Gamma(k + \lambda + 1) \Gamma(h + \mu + 1) \\ = M c_s(\lambda + 1, \mu + 1)$$

d'où le résultat.

b) et c) Si  $P$  est un opérateur différentiel (appartenant à  $\mathfrak{E}_\infty$ ) et  $Q$  un opérateur de degré  $-1$  ( $Q \in \mathfrak{E}_\lambda$ ) alors  $P \circ Q$  et  $Q \circ P$  appartiennent à  $\mathfrak{E}_{\lambda+d \circ P}$  comme on le voit en remarquant qu'un monôme  $u^p \theta^p$  ( $p \in \mathbf{N}$ ) contribue par au plus  $p$  termes à  $c_s(u)$ .

*Remarques 1.a.5.* - 1) Il résulte de la démonstration que si  $U$  est un ouvert sur lequel  $P$  vérifie  $(C_\lambda)$  et  $V$  un ouvert sur lequel  $Q$  vérifie  $(C_\mu)$ ,  $P \circ Q$  vérifie  $(C_\nu)$  sur  $U \cap (1/2)V$ .

2) Supposer  $d^0 P < -1$  ou  $d^0 Q < -1$  ne permet pas en général d'améliorer la valeur trouvée pour  $\nu$ : en particulier si  $P \in \mathfrak{E}_\lambda$  et  $p \in \mathbf{N}$ , en général  $\theta^{-p} \circ P \notin \mathfrak{E}_{\lambda-p}$  alors que  $P \circ \theta^{-p} \in \mathfrak{E}_{\lambda-p}$ .

On vérifie immédiatement le

LEMME 1.a.6. - Si  $p \in \mathbf{Z}$  et si  $P$  et  $Q$  appartenant à  $\mathfrak{E}$  sont liés par la relation:  $P = u^{-p} \circ Q \circ \theta^{-p}$  on a:

$$Q \in \mathfrak{E}_\lambda \Leftrightarrow P \in \mathfrak{E}_{\lambda-p}.$$

### b. Eléments inversibles.

LEMME 1.b.1. - Pour tout  $k \in \mathbf{Z}$  l'opérateur

$$J_k = \sum_{j \geq 0} (j!)^{-1} (k)_j^2 u^{k-j} \theta^{k-j}$$

appartient à  $\mathfrak{E}_{-k-2}$  et est l'inverse de l'opérateur  $u^{-k} \theta^{-k}$ .

*Démonstration.* — Dans  $\mathfrak{K}$  et en fait dans  $\mathfrak{E}$  l'inverse de  $u^{-k} \theta^{-k}$  est  $\theta^k u^k$  qui, développé par la formule donnant le produit, est  $J_k$ . Il reste à voir que  $J_k$  appartient à  $\mathfrak{E}_\infty$ , ce qui est immédiat.

Les éléments inversibles de  $\mathfrak{E}$  sont aisément déterminés :

LEMME 1.b.2. — Si  $P \in \mathfrak{E}$  et si  $d^0 P \leq -1$ , l'opérateur  $1 - P$  est inversible dans  $\mathfrak{E}$ , d'inverse :  $\sum_{n \geq 0} P^n$ .

On en déduit comme d'habitude la

PROPOSITION 1.b.3. — Les éléments inversibles de  $\mathfrak{E}$  sont ceux dont le coefficient du terme de plus haut degré est de valuation nulle dans  $\mathbf{C}[[u]][u^{-1}]$ .

Le même résultat est valable dans  $\mathfrak{E}_\infty$  : à partir de la Proposition 1.a.4 on peut établir la convergence dans  $\mathfrak{E}_\infty$  de la série  $\sum_{n \geq 0} P^n$  pour  $P \in \mathfrak{E}_\infty$  et  $d^0 P \leq -1$ , mais on préfère utiliser ici une méthode plus rapide basée sur l'étude préalable des opérateurs particuliers déjà rencontrés.

LEMME 1.b.4. — Pour  $\lambda \in \mathbf{R} \setminus (-\mathbf{N}^*)$

i) L'opérateur  $P_\lambda$  de  $\mathfrak{E}_{\lambda-1}$  défini par

$$P_\lambda = 1 - \sum_{k \geq 1} \Gamma(k + \lambda) u^{-k} \theta^{-k}$$

est inversible dans  $\mathfrak{E}_\infty$  d'inverse

$$Q_\lambda = 1 + \Gamma(\lambda + 1) \sum_{k \geq 1} \langle \lambda + 1 + \Gamma(\lambda + 1) \rangle_{k-1} u^{-k} \theta^{-k}$$

qui appartient à  $\mathfrak{E}_{\lambda + \Gamma(\lambda + 1) - 1}$ .

ii) L'opérateur  $P'_\lambda$  de  $\mathfrak{E}_{\lambda-1}$  défini par

$$P'_\lambda = 1 + \sum_{k \geq 1} \Gamma(k + \lambda) u^{-k} \theta^{-k}$$

a pour inverse

$$Q'_\lambda = 1 - \Gamma(\lambda + 1) \sum_{k \geq 1} \langle \lambda + 1 - \Gamma(\lambda + 1) \rangle_{k-1} u^{-k} \theta^{-k}$$

qui est fini si  $\lambda \in \mathbf{N}$  et qui appartient à  $\mathcal{E}_{\lambda-1-\Gamma(\lambda+1)}$  sinon.

PROPOSITION 1.b.5. — Si  $R$  est un élément de  $\mathcal{E}_\infty$  de degré  $\leq -1$ ,  $P = 1 + R$  est inversible dans  $\mathcal{E}_\infty$ .

Démonstration. — Si  $P = 1 - \sum_{k \geq 1} a_k(u) u^{-k} \theta^{-k}$  son inverse dans  $\mathcal{E}$  est  $Q = 1 + \sum_{k \geq 1} b_k(u) u^{-k} \theta^{-k}$  où les  $b_k$  vérifient le système différentiel triangulaire :

$$b_s(u) - a_s(u) - \sum_{h+k+j=s} (j!)^{-1} \langle k \rangle_j b_k(u) \sum_{i=0 \dots j} (-1)^i (j!) \langle h \rangle_{j-i} u^i a_h^{(i)}(u) = 0 \quad (s \geq 1).$$

Ce système définit par récurrence  $b_s(u)$  et si  $V$  est un voisinage ouvert de  $0$  tel que pour tout  $k \geq 1, a_k(u) \in \mathcal{O}(V)$ , on a aussi  $b_s(u) \in \mathcal{O}(V), \forall s \geq 1$ .

Reste à étudier la croissance en  $s$  des  $b_s(u)$ . On reprend les notations de la Proposition 1.a.4. En posant,  $\forall s \geq 1$ ,

$$\beta_s = \sup_{u \in W} |b_s(u)| \quad \text{et} \quad \alpha_s = \sup_{u \in 2W} |a_s(u)|,$$

les coefficients  $\beta_s$  vérifient le système d'inéquations :

$$\beta_s \leq \alpha_s + (1 - \eta)^{-1} \sum_{h+k+j=s} (j!)^{-1} \langle k \rangle_j \langle h \rangle_j \alpha_k \beta_h \quad (s \geq 1).$$

En écrivant la condition  $(C_{\lambda-1})$  vérifiée par  $P$  sous la forme de la remarque 1.a.2. (en supposant  $\lambda > -1$ ) il vient :

$$\beta_s \leq M [\Gamma(s + \lambda) + \Gamma(\lambda + 1) \sum_{k=1 \dots s-1} \langle \lambda + k + 1 \rangle_{s-k-1} \beta_k].$$

Posons

$$\forall s \geq 1, B_s = \Gamma(s + \lambda) + \Gamma(\lambda + 1) \sum_{k=1 \dots s-1} \langle k + \lambda + 1 \rangle_{s-k-1} \beta_k$$

(donc  $B_1 = \Gamma(\lambda + 1)$ ).

On a  $B_{s+1} = (s + \lambda) B_s + \Gamma(\lambda + 1) \beta_s$  d'où :

$$B_{s+1} \leq (s + \lambda + M\Gamma(\lambda + 1)) B_s$$

et finalement

$$\beta_s \leq M\Gamma(\lambda + 1) (\lambda + 1 + M\Gamma(\lambda + 1))_{s-1}$$

qui est un  $O(s! s^{\lambda + M\Gamma(1+\lambda) - 1})$  quand  $s \rightarrow +\infty$ .

En comparant avec le lemme 1.b.2. on en déduit :

**CORROLLAIRE 1.b.6.** — Si  $P \in \mathcal{E}_\infty$  avec  $d^0 P \leq -1$ , la série de terme général  $P^n$  converge dans  $\mathcal{E}_\infty$  vers l'inverse de  $1 - P$ .

Le lemme 1.b.1 et ces résultats démontrent donc la

**PROPOSITION 1.b.7.** — Les éléments inversibles de  $\mathcal{E}_\infty$  sont ceux dont le coefficient du terme de plus haut degré est de valuation nulle.

**CORROLLAIRE - DEFINITION 1.b.8.** — Le sous-ensemble

$$\mathcal{F} = \{P \in \mathcal{E}_\infty \mid \forall s, a_s(u) \in \mathbf{C}\}$$

est un corps.

On note  $\mathcal{F}_\lambda$  l'intersection de  $\mathcal{F}$  et de  $\mathcal{E}_\lambda$ .

### c. Théorème de division. Théorème de préparation.

L'exemple le plus simple d'opérateur non inversible est  $u^p$  ( $p \in \mathbf{Z}^*$ ) pour lequel on établit la proposition :

**PROPOSITION 1.c.1.** — Pour  $S \in \mathcal{E}_\lambda$  et pour  $p \in \mathbf{N}^*$ , il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathcal{E}_\lambda^2$  tel que

$$\text{i) } d^0 Q \leq d^0 S$$

$$\text{ii) } R = \sum_{j=0 \dots p-1} u^j R_j \text{ où } R_j \in \mathcal{F}_\lambda \text{ et } d^0 R_j \leq d^0 S.$$

$$\text{iii) } S = Q \circ u^p + R.$$

*Démonstration.* — Soit  $(b_s(u))_{s \geq s_0}$  la suite des coefficients de  $S$  et  $V$  un voisinage de 0 dans lequel  $(C_\lambda)$  est vérifiée. Les

coefficients  $(c_{s,j})_{s \geq s_0}$  de  $R_j$  sont donnés par :

$$c_{s,j} = b_s^{(j)}(0)/j!$$

On en déduit aisément que  $R_j \in \mathfrak{F}_\lambda$ .

Comme  $\chi_s(u) = u^{-p} \left[ b_s(u) - \sum_{j=0 \dots p-1} c_{s,j} u^j \right]$  est holo-

morphe dans  $V$ , le principe du maximum permet de montrer que la suite  $(\chi_s(u))_{s > 0}$  vérifie  $(C_\lambda)$  dans l'intérieur de tout compact  $K \subset V$ .

Les coefficients  $(q_s(u))$  de  $Q$  se déduisent des  $\chi_s$  par le système triangulaire:

$$\chi_{s_0} = q_{s_0}$$

...

$$\chi_s = q_s + \sum_{k=0 \dots K_s} (-1)^k \binom{s-1}{k} (p)_k q_{s-k} \text{ où } K_s = \inf(p, s - s_0).$$

Quand  $s \rightarrow \infty$  on a pour tout  $k, \binom{s-1}{k} (s-k)! = O(s!)$ . Chaque équation faisant intervenir au plus  $(p+1)$  termes, on voit par récurrence que  $Q$  appartient à  $\mathfrak{E}_\lambda$ .

Le théorème de division dans le cas général s'en déduit par une méthode d'approximations successives.

**THEOREME 1.c.2 (division).** — Soit  $P$  un opérateur dont le coefficient du terme de plus haut degré est de valuation  $p \in \mathbf{N}^*$ , alors, pour tout  $S \in \mathfrak{E}_\infty$ , il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathfrak{E}_\infty^2$ , tel que

$$S = Q \circ P + R \text{ avec } d^0 R \leq d^0 S, d^0 Q \leq d^0 S - d^0 P$$

et

$$R = \sum_{j=0 \dots p-1} u^j R_j \text{ où } R_j \in \mathfrak{F} \text{ (ce qu'on notera } R \in \mathfrak{F}[u]_{p-1}).$$

*Démonstration.* — L'unicité est immédiate. On constate ensuite facilement qu'il suffit de traiter le cas où

$$P = u^p + P_1 \text{ avec } d^0 P_1 \leq -1.$$

Dans ce cas la Proposition 1.c.1 montre qu'il existe  $Q_1$  et  $R_1$  avec  $d^0 Q_1$  (resp.  $d^0 R_1$ )  $\leq d^0 S$  tels que :

$$S = Q_1 \circ u^p + R_1 \text{ et } R_1 \in \mathfrak{F}[u]_{p-1}.$$

L'opérateur  $Q_1 \circ P_1$  est de degré inférieur ou égal à  $d^0 S - 1$  et sa division par un  $u^p$  fournit un couple  $(Q_2, R_2)$  (de degré inférieur ou égal à  $d^0 S - 1$ ) tel que :

$$-Q_1 \circ P_1 = Q_2 \circ u^p + R_2 \quad \text{et} \quad R_2 \in \mathfrak{F}[u]_{p-1}.$$

Par récurrence on construit ainsi une suite  $(Q_k, R_k)$  telle que :

a)  $d^0 Q_k$  (resp.  $d^0 R_k$ )  $\leq d^0 S - (k - 1)$

b)  $R_k \in \mathfrak{F}[u]_{p-1}$

c)  $-Q_k \circ P_1 = Q_{k+1} \circ u^p + R_{k+1}$ .

La condition sur les degrés assure que les sommes formelles

$$\sum_{k \geq 1} Q_k \quad \text{et} \quad \sum_{k \geq 1} R_k$$

définissent des éléments  $Q$  et  $R$  de  $\mathcal{E}$ . On établit que  $Q$  et  $R$  appartiennent à  $\mathcal{E}_\infty$  en montrant que  $Q_k$  et  $R_k$  vérifient sur un ouvert  $U$  indépendant de  $k$  une condition  $(C_\nu)$  avec  $\nu$  indépendant de  $k$ .

Si  $S \in \mathcal{E}_\mu$  et si  $B(0, R)$  est une boule ouverte sur laquelle la condition  $(C_\mu)$  est vérifiée et telle que  $P_1$  vérifie une condition  $(C_\lambda)$  sur  $B(0, 2R)$ , la démonstration de la Proposition 1.c.1 montre que  $Q_1 \in \mathcal{E}_\mu$  et vérifie  $(C_\mu)$  sur toute boule  $B(0, R - \epsilon_1)$  ( $\epsilon_1 > 0$  arbitraire) et que  $R_1 \in \mathcal{E}_\mu$  et vérifie  $(C_\mu)$  sur toute boule ouverte (vu sa forme).

La Proposition 1.a.4 montre que  $Q_1 \circ P_1$  vérifie sur  $B(0, R - \epsilon_1)$  une condition  $(C_\nu)$  avec  $\nu \leq \max(\nu_0(\lambda, \mu), \lambda + d^0 S - 1, \mu - 1)$ . Fixons  $\nu'$  strictement supérieur à cette dernière quantité. Par récurrence on montre que  $\forall k \geq 1$  si  $Q_k$  vérifie  $(C_{\nu'})$  sur

$$B\left(0, R - \sum_{i=0 \dots k} \epsilon_i\right),$$

$Q_{k+1}$  vérifie  $(C_{\nu'})$  sur

$$B\left(0, R - \sum_{i=0 \dots k+1} \epsilon_i\right),$$

pour toute suite de réels positifs  $(\epsilon_i)$ . En effet la proposition 1.a.4 montre que  $\nu_0(\lambda, \mu) \geq -2$  donc  $\nu' > -2$ . D'autre part

$$\lambda \leq \nu_0(\lambda, \mu) < \nu'$$

d'où l'on déduit  $\max(\nu_0(\lambda, \nu'), \lambda + d^0 Q_k, \nu' - 1) = \nu'$ .

D'autre part  $R_{k+1}$  vérifie  $(C_{\nu'})$  sur tout ouvert de  $\mathbf{C}$ .

On choisit la suite  $(\epsilon_i)$  telle que  $\sum_{i \geq 1} \epsilon_i < R/2$ ; alors  $Q_k$  vérifie  $(C_{\nu'})$  sur  $B(0, R/2)$  et  $R_k$  vérifie  $(C_{\nu'})$  sur tout ouvert de  $\mathbf{C}$ .

On en déduit comme d'habitude le

**COROLLAIRE 1.c.3 (Théorème de Préparation).** — Soit  $P \in \mathcal{E}_\infty$  un opérateur dont le terme de plus haut degré est de valuation  $p$ , alors  $P$  se décompose dans  $\mathcal{E}_\infty$  de manière unique en  $P = E \circ W$  où  $E$  est inversible et  $W$  de la forme :

$$W = u^p + \sum_{j=0 \dots p-1} u^j R_j \text{ où } R_j \in \mathcal{F} \text{ et } d^0 R_j \leq -1.$$

## 2. ETUDE ANALYTIQUE

### a. Action de $\mathcal{E}_\infty$ sur certains espaces de séries et de fonctions.

#### i) Séries

Pour  $s \in \mathbf{Z}$  et  $k \in \mathbf{N}$  on pose:  $\theta^{-s}(u^k) = [k + 1]_s u^{k+s}$ . Lorsque  $s$  est négatif, c'est la définition de la dérivation d'ordre  $-s$ ; pour  $s > 0$ , la formule impose le choix de l'intégration.

Si  $P = \sum_{s \geq s_0} a_s(u) u^{-s} \theta^{-s}$  appartient à  $\mathcal{E}_\infty$  et si

$\varphi = \sum_{n \geq 0} \alpha_n u^n$  est une série formelle, on pose, lorsque cela a un

sens:  $P(\varphi) = \sum_{n > 0, s \geq s_0} \alpha_n [n + 1]_s a_s(u) u^n$ .

PROPOSITION 2.a.1. — Désignons par  $\mathfrak{J}$  l'idéal maximal de  $\mathbf{C}[[u]]$ . Alors

i) si  $\lambda \notin [-1, 0]$ ,  $\mathfrak{E}_\lambda$  opère sur  $\mathfrak{J}^n$  pour tout  $n$  supérieur à  $\lambda + 1$

ii) si  $\lambda \in [-1, 0]$ ,  $\mathfrak{E}_\lambda$  opère sur  $\mathfrak{J}^2$ .

En particulier si  $\lambda < -1$ ,  $\mathfrak{E}_\lambda$  opère sur  $\mathbf{C}[[u]]$ .

Démonstration. — La condition  $(C_\lambda)$  assure que la série de factorielles  $\sum_{s \geq s_0} a_s(u) [z + 1]_s$  est (uniformément sur tout  $\bar{W} \subset V$ ) convergente dans  $\Pi_{\lambda+1}$  si  $\lambda \notin [-1, 0]$ , dans  $\Pi_1$  si  $\lambda \in [-1, 0]$ .

On note  $\mathbf{C}[[u]]_{p,A}$  l'espace des séries Gevrey d'ordre précisé  $(p, A)$  (terminologie de Ramis [11]):

$$\mathbf{C}[[u]]_{p,A} = \left\{ \sum_{n \geq 0} \alpha_n u^n \in \mathbf{C}[[u]] \mid \exists C > 0 \text{ tel que } \forall n \geq 0, |\alpha_n| \leq C(n!)^{p-1} A^n \right\}.$$

Le cas  $p = 1$  correspond aux séries convergentes de rayon de convergence supérieur à  $1/A$ .

PROPOSITION 2.a.2. — Si  $\lambda \notin [-1, 0]$ ,  $\mathfrak{E}_\lambda$  opère sur

$$\mathbf{C}[[u]]_{p,A} \mathfrak{J}^n \text{ pour } n > \lambda + 1.$$

Si  $\lambda \in [-1, 0]$ ,  $\mathfrak{E}_\lambda$  opère sur  $\mathbf{C}[[u]]_{p,A} \mathfrak{J}^2$ . En particulier si  $\lambda < -1$ ,  $\mathfrak{E}_\lambda$  opère sur  $\mathbf{C}[[u]]_{p,A}$ .

ii) Fonctions

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  étoilé par rapport à 0. Pour  $f \in \mathcal{O}(U)$  et  $s \geq 1$  posons :

$$(*) \quad \theta^{-s} f(u) = \int_0^u [(u-t)^{s-1} / (s-1)!] f(t) dt$$

où l'intégrale est prise le long du segment  $[0, u]$ . Alors  $\theta^{-s} f \in \mathcal{O}(U)$  et cette définition est cohérente avec la précédente en ce sens que dans tout disque d'origine 0 inclus dans  $U$  le développement en série entière de  $\theta^{-s} f$  est identique à l'image par  $\theta^{-s}$  (au sens du *i*) du développement en série de  $f$ . En particulier on peut énoncer :

PROPOSITION 2.a.3. — Pour  $\lambda < -1$ ,  $\mathcal{E}_\lambda$  opère sur l'anneau  $\mathcal{O}$  des germes de fonctions holomorphes en 0.

Remarque. — Dans cette perspective on notera  $\mathcal{O}_c$  le complété de  $\mathcal{O}$  ( $\mathcal{O}_c$  s'identifie à  $\mathbf{C}[[u]]$  si  $\mathcal{O}$  est identifié à  $\mathbf{C}\{u\}$ ) et  $\mathcal{J}_c$  (resp.  $\mathcal{J}$ ) désignera l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_c$  (resp.  $\mathcal{O}$ ).

Si  $\Sigma$  est un secteur ouvert de sommet 0, la définition (\*) a encore un sens lorsque  $f \in \mathcal{O}(\Sigma)$  à condition que, lorsque  $t \rightarrow 0$  dans  $\Sigma$ , la fonction  $f(t)$  soit intégrable sur tout segment d'origine 0 tracé dans  $\Sigma$ .

DEFINITION 2.a.4. — Soit  $V$  un secteur ouvert de sommet 0, on note  $\mathcal{A}_0(V)$  l'ensemble des fonctions holomorphes dans  $V$  ayant un développement asymptotique nul en 0.

Pour  $p > 1$ , si  $V$  est d'ouverture inférieure ou égale à  $\pi/k$  où  $k$  est défini par  $p = 1 + 1/k$  on pose (Ramis [10]):

$\mathcal{A}_{0,p}(V) = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid f \text{ vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes:}$

i)  $\forall \bar{W} \subset V, \exists C' > 0 \text{ et } A' > 0 \text{ tels que}$

$$\forall q \in \mathbf{N} \sup_{t \in \bar{W}} |t^{-q} f(t)| < C' (q!)^{p-1} A'^q$$

ii)  $\forall \bar{W} \subset V, \exists a > 0 \text{ et } K > 0 \text{ tels que}$

$$\forall t \in \bar{W}, |f(t)| < \exp(-a/|t|^k)$$

iii)  $f \in \mathcal{A}_0(V)$  et  $\forall \bar{W} \subset V, \exists C > 0 \text{ et } A > 0 \text{ tels que}$

$$\forall q \in \mathbf{N} \sup_{t \in \bar{W}} |f^{(q)}(t)| < C (q!)^p A^q, \}$$

PROPOSITION 2.a.5. — Un élément  $P \in \mathcal{E}_\infty$  opère sur  $\mathcal{A}_{0,p}(V)$  si le rayon de  $V$  est assez petit.

Démonstration. — Pour  $s > 0$  et  $f \in \mathcal{A}_{0,p}(V)$  on a :

$$u^{-s} \theta^{-s} f(u) = \int_0^1 [(1-t)^{s-1}/(s-1)!] f(tu) dt$$

d'où :  $|u^{-s} \theta^{-s} f(u)| \leq (s!)^{-1} K \exp(-a/|u|^k) \forall u \in \bar{W}$  (compact de  $V$ ).

Lorsque  $P \in \mathcal{E}_\lambda$  où  $\lambda < -1$ , on en déduit :  $\exists V$  voisinage de 0,  $\forall \bar{W} \subset V, \exists M > 0$  tel que

$$|Pf(u)| \leq M \xi(-\lambda) \exp(-a/|u|^k) \quad \forall u \in \bar{W}.$$

Donc  $Pf \in \mathcal{A}_{0,p}(V)$ .

Lorsque  $\lambda \geq -1$ , en intégrant  $q$  fois par parties ( $q$  tel que  $\lambda - q < -1$ ) on a :

$$u^{-s} \theta^{-s} f(u) = u^q \int_0^1 [(1-t)^{s+q-1} / (s+q-1)!] f^{(q)}(tu) dt.$$

Comme  $f^{(q)} \in \mathcal{A}_{0,p}(V)$  on conclut comme précédemment.

On démontre de même la

PROPOSITION 2.a.6. — Un élément  $P \in \mathcal{E}_\infty$  opère sur  $\mathcal{A}_0(V)$  si le rayon de  $V$  est assez petit.

COROLLAIRE 2.a.6. — L'espace  $\mathcal{E}_\infty$  opère sur  $\mathcal{A}_0$  (resp.  $\mathcal{A}_{0,p}$ ), faisceau sur l'éclaté réel de  $0 \in \mathbf{C}$  associé au préfaisceau  $\mathcal{A}_0(V)$  (resp.  $\mathcal{A}_{0,p}(V)$ ).

## b. Composition.

En général si  $f$  appartient à  $\mathcal{O}(U)$  (ou à  $\mathbf{C}[[u]]$ ) on a :

$$\theta^p (\theta^{-p} f(u)) = f(u) \quad \text{mais} \quad \theta^{-p} (\theta^p f(u)) \neq f(u).$$

Cependant pour les opérateurs de  $\mathcal{E}_\infty$  la composition définie au 1.a. correspond à la composition en tant qu'opérateurs (sur les espaces où ils opèrent). Ceci se démontre comme dans *Sato-Kawai-Kashiwara* [13] en utilisant le

LEMME 2.b.1. — Pour  $p \geq 1, k \geq 1, f \in \mathcal{O}(U)$  ( $U$  voisinage étoilé de  $0$  dans  $\mathbf{C}$ ) (resp.  $f \in \mathcal{A}_0(V)$ , resp.  $f \in \mathcal{A}_{0,p}(V)$ , resp.  $f \in \mathbf{C}[[u]]$ , resp.  $f \in \mathbf{C}[[u]]_{\alpha, \Lambda}$ ) on a :

$$\theta^{-p} (u^{-k} \theta^{-k} f(u)) = (\theta^{-p} \circ u^{-k} \theta^{-k}) (f(u)).$$

Démonstration. — Pour  $f \in \mathcal{O}(U)$ ,

$$\begin{aligned} \theta^{-p} (u^{-k} \theta^{-k} f(u)) \\ = u^{p-k} \int_0^1 [(1-t)^{p-1} / (p-1)!] t^{-k} \theta^{-k} f(tu) dt \end{aligned}$$

qui s'écrit après  $(p+k)$  intégrations par parties :

$$\sum_{j \geq 0} [(p+j-1)! (k+j-1)! / j! (p-1)! (k-1)!] u^{-k-j} \theta^{-(p+k+j)} f(u)$$

et ceci représente l'action sur  $f$  de l'opérateur  $\theta^{-p} \circ u^{-k} \theta^{-k}$ . Les autres cas sont analogues.

**PROPOSITION 2.b.2.** - 1) Soit  $P \in \mathcal{E}_\lambda$ ,  $Q \in \mathcal{E}_\mu$  et  $p \in \mathbf{N}$  tel que  $p \geq 1 + \max(\lambda, \mu)$ , alors  $P \circ Q$  opère sur  $\mathcal{Y}_c^p$  (resp.  $\mathcal{Y}^p$ , resp.  $\mathbf{C}[[u]]_{\alpha, \lambda} \mathcal{Y}_c^p$ ) et  $\forall f \in \mathcal{Y}_c^p$  on a  $P \circ Q(f) = P(Q(f))$ .

En particulier si  $\max(\lambda, \mu) < -1$ ,  $P \circ Q$  opère sur  $\mathcal{O}_c$  (resp.  $\mathcal{O}$ ) et  $P \circ Q(f) = P(Q(f))$ .

2) Soient  $P$  et  $Q \in \mathcal{E}_\infty$ ,  $f \in \mathcal{A}_0(V)$  (resp.  $\mathcal{A}_{0,p}(V)$ ) où  $V$  est un secteur de rayon assez petit (resp. et d'ouverture  $< \pi/k$  avec  $p = 1 + 1/k$ ) on a  $P \circ Q(f) = P(Q(f))$ .

### c. Théorèmes d'indice.

#### i) Indice formel

En recopiant la démonstration de Malgrange [5] et en utilisant le fait que les zéros d'une fonction holomorphe développable en séries de factorielles ne s'accroissent pas à l'infini dans la direction de  $\mathbf{R}^+$  on prouve la

**PROPOSITION 2.c.1.** - Soit  $P = \sum_{s \geq s_0} a_s(u) u^{-s} \theta^{-s}$  appartenant à  $\mathcal{E}_\lambda$  avec  $\lambda < -1$ , alors  $P : \mathcal{O}_c \longrightarrow \mathcal{O}_c$  est à indice, d'indice  $-\inf_{s \geq s_0} v(a_s)$ .

Plus généralement :

**PROPOSITION 2.c.2.** - Soient  $P \in \mathcal{E}_\lambda$  et  $p \in \mathbf{N}$  tel que  $p > \lambda + 1$ , alors  $P : \mathcal{Y}_c^p \longrightarrow \mathcal{Y}_c^p$  est à indice, d'indice  $-\inf_{s \geq s_0} v(a_s)$ .

#### ii) Indice analytique

Pour  $p \in \mathbf{N}$  et  $R$  réel positif, on note  $\Delta_R = \{u \in \mathbf{C} \mid |u| \leq R\}$  et  $B^p(\Delta_R)$  l'espace de Banach des fonctions holomorphes dans  $\text{int}(\Delta_R)$ , de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $\Delta_R$ , muni de la norme :

$$\|f\|_p = \sum_{t=0 \dots p} \sup_{u \in \Delta_R} |f^{(t)}(u)|.$$

LEMME 2.c.3. — Pour  $s \in \mathbf{N}$  et  $k \in \mathbf{N}$  l'opérateur  $D = u^{-s} \theta^{-s}$  est un isomorphisme (topologique) de  $B^k(\Delta_R)$  sur  $B^{k+s}(\Delta_R)$ .

*Démonstration.* — L'inverse algébrique de  $D$  dans  $\mathcal{E}_\infty$  est l'opérateur différentiel  $\theta^s u^s$  dont on sait (Malgrange [5]) qu'il réalise un isomorphisme de  $B^{k+s}(\Delta_R)$  dans  $B^k(\Delta_R)$  (les résultats du b s'étendant ensuite sans difficultés à ces espaces). Or

$$\begin{aligned} Df(u) &= u^{-s} \int_0^u [(u-t)^{s-1}/(s-1)!] f(t) dt \\ &= \int_0^1 [(1-t)^{s-1}/(s-1)!] f(tu) dt. \end{aligned}$$

La deuxième formule montre que  $Df$  est holomorphe dans  $\text{int}(\Delta_R)$  et la première que  $Df$  est  $(k+s)$ -fois dérivable sur  $|u| = R$  si  $f$  l'est  $k$  fois.

LEMME 2.c.4. — Pour  $p \in \mathbf{Z}$  et  $k \geq \max(0, -p)$  l'opérateur  $u^{-s} \theta^{-s} : B^k(\Delta_R) \longrightarrow B^{k+p}(\Delta_R)$  est compact pour tous  $s > p$ .

*Démonstration.* — On factorise

$$u^{-s} \theta^{-s} : B^k(\Delta_R) \longrightarrow B^{k+p}(\Delta_R)$$

en  $u^{-s} \theta^{-s} : B^k(\Delta_R) \longrightarrow B^{k+s}(\Delta_R)$  qui est continue d'après le lemme précédent, suivie de l'inclusion :

$$B^{k+s}(\Delta_R) \longrightarrow B^{k+p}(\Delta_R)$$

qui est compacte lorsque  $p < s$ .

LEMME 2.c.5. — Soit  $s_0 \leq 0$  et  $P = \sum_{s \geq s_0+1} a_s(u) u^{-s} \theta^{-s}$  un élément de  $\mathcal{E}_\lambda$  avec  $\lambda < -1$ , alors si  $R$  est assez petit l'application  $P : B^{-s_0}(\Delta_R) \longrightarrow B^0(\Delta_R)$  est compacte.

*Démonstration.* — On commence par établir que  $P$  agit entre les espaces indiqués.

Le lemme 2.c.4. montre ensuite que  $\forall s \geq s_0 + 1$  l'application :  $a_s(u) u^{-s} \theta^{-s} : B^{-s_0}(\Delta_R) \rightarrow B^0(\Delta_R)$  est compacte. Pour  $N \in \mathbf{N}$  ( $N \geq s_0 + 1$ ) il en est donc de même de :

$$P_N = \sum_{s=(s_0+1)\dots N} a_s(u) u^{-s} \theta^{-s}.$$

Mais  $P = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N$  comme il ressort de la majoration :

$$|(P - P_N)(f(u))| \leq M \|f\|_{-s_0} \sum_{s \geq N+1} s^\lambda \text{ et de } \lambda < -1.$$

PROPOSITION 2.c.6. — Soit  $P = \sum_{s \geq s_0} a_s(u) u^{-s} \theta^{-s}$  un opérateur de  $\mathcal{E}_\lambda$  avec  $\lambda < -1$ , de degré  $-s_0 \geq 0$ . Alors  $P : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  est à indice, d'indice  $-v(a_{s_0})$ .

Démonstration. — On écrit  $P = a_{s_0}(u) u^{-s_0} \theta^{-s_0} + P_1$  avec  $d^0 P_1 \leq -s_0 - 1$ . Pour  $R$  assez petit ( $\Delta_R \subset V$  et  $a_{s_0}$  ne s'annule pas sur  $\Delta_R - \{0\}$ ) l'application :

$$a_{s_0}(u) u^{-s_0} \theta^{-s_0} : B^{-s_0}(\Delta_R) \rightarrow B^0(\Delta_R)$$

est à indice, d'indice  $-s_0 - [v(a_{s_0}) - s_0] = -v(a_{s_0})$  (Malgrange [5]).

D'autre part le lemme 2.c.5 montre que

$$P_1 : B^{-s_0}(\Delta_R) \rightarrow B^0(\Delta_R)$$

est compacte.

On obtient le résultat en passant à la limite inductive sur  $R \rightarrow 0$ , en utilisant le fait que les applications définissant la limite inductive sont injectives et d'image dense, ce qui permet d'appliquer le lemme 1.3.8 de Ramis [11].

On établit de même la

PROPOSITION 2.c.7. — Soit  $P \in \mathcal{E}_\lambda$  de degré  $-s_0 \geq 0$  et  $p \in \mathbf{N}$  tel que  $p > \lambda + 1$ . Alors  $P : \mathcal{Y}^p \rightarrow \mathcal{Y}^p$  est à indice, d'indice  $-v(a_{s_0})$ .

On règle ensuite le cas  $-s_0 < 0$  en décomposant  $P$  en

$P = u^{-s_0} \circ P_1 \circ \theta^{-s_0}$  où  $P_1 \in \mathcal{E}_{\lambda+s}$  et  $d^0 P_1 = 0$ , le terme constant de  $P_1$  étant  $a_{s_0}(u)$ . Le résultat général s'énonce donc :

PROPOSITION 2.c.8. — Soit  $P \in \mathcal{E}_\lambda$  de degré  $-s_0$  et  $p \in \mathbf{N}$  tel que  $p > \lambda + 1$ . Alors  $P: \mathcal{J}^p \longrightarrow \mathcal{J}^p$  est à indice, d'indice  $-v(a_{s_0})$ .

En particulier si  $\lambda < -1$ ,  $P: \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$  est à indice, d'indice  $-v(a_{s_0})$ .

On déduit de ces résultats, de manière standard (Malgrange [5]) la

PROPOSITION 2.c.9. — Si  $P \in \mathcal{E}_\lambda$  est de degré  $-s_0$  et si  $p \in \mathbf{N}$  est tel que  $p > \lambda + 1$  alors :

- 1)  $\text{Coker}(P, \mathcal{J}_c^p / \mathcal{J}^p) = 0$
- 2)  $\dim \text{Ker}(P, \mathcal{J}_c^p / \mathcal{J}^p) = v(a_{s_0}) - \inf_{s \geq s_0} v(a_s)$ .

En particulier si  $P \in \mathcal{E}_\lambda$  avec  $\lambda < -1$  on a :

- 1)  $\text{Coker}(P, \mathcal{O}_c / \mathcal{O}) = 0$
- 2)  $\dim \text{Ker}(P, \mathcal{O}_c / \mathcal{O}) = v(a_{s_0}) - \inf_{s \geq s_0} v(a_s)$ .

Cette proposition a pour corollaire la généralisation suivante d'un théorème de Perron :

PROPOSITION 2.c.10. — Si  $P$  appartenant à  $\mathcal{E}_\lambda$  (avec  $\lambda < -1$ ) est de degré  $-s_0$  alors  $\dim \text{Ker}(P, \mathcal{O}) \geq \sup(0, -v(a_{s_0}))$ .

DEFINITION 2.c.11. — On appelle irrégularité de  $P$  le nombre  $i(P) = v(a_{s_0}) - \inf_{s \geq s_0} v(a_s)$  (où  $-s_0 = d^0 P$ ).

On dit que  $P$  est fuchsien s'il est d'irrégularité nulle.

iii) Polygone de Newton

Il est naturel de généraliser aux opérateurs de  $\mathcal{E}_\infty$  la définition du polygone de Newton (Malgrange [6]).

Si  $P = \sum_{s \geq s_0} a_s(u) u^{-s} \theta^{-s}$  où  $a_s(u) = \sum_{n \geq s_0} \alpha_{s,n} u^n$  au

voisinage de 0, on marque dans le plan les points de coordonnées  $(-s, n)$  si  $\alpha_{s,n} \neq 0$ . Soit  $M(P)$  l'enveloppe convexe de l'ensemble de points ainsi obtenu. Soit  $d$  la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point  $(-s_0, v(a_{s_0}))$ .  $\mathcal{R}_d^+$  le demi-plan situé au-dessus de  $d$  et  $\mathcal{R}_d^-$  le demi-plan complémentaire.

On appelle *polygone de Newton* de  $P$  et on note  $N(P)$  le polygone convexe obtenu de la manière suivante :

i) on conserve les côtés de  $\mathcal{R}_d^+ \cap M(P)$  de pente  $\leq 0$ , et l'éventuel morceau de la droite  $y = -s_0$ , on remplace les (éventuels) côtés de pente  $> 0$  par une parallèle à l'axe des abscisses.

ii) on conserve les côtés de  $\mathcal{R}_d^- \cap M(P)$  de pente  $\geq 0$ , en remplaçant les (éventuels) côtés de pente  $< 0$  par une parallèle à l'axe des abscisses (cette situation ne peut se produire que si  $P$  est fini).

On appelle *invariant de Katz* la plus grande pente de  $N(P)$ .

On note :  $N^-(P) = \mathcal{R}_d^+ \cap N(P)$  et  $N^+(P) = \mathcal{R}_d^- \cap N(P)$ .

Les résultats des numéros précédents se traduisent par :

PROPOSITION 2.c.12. — Si  $[\alpha, \beta]$  est la projection de  $N^+(P)$  sur l'axe des ordonnées, l'indice formel de  $P$  est  $-\beta$ , l'indice analytique est  $-\alpha$  et l'irrégularité est  $\beta - \alpha$ .

#### d. Théorème fondamental des développements asymptotiques.

Puisque  $\mathcal{E}_\infty$  opère sur  $\mathcal{A}_0$  il est naturel de chercher à étendre le théorème des développements asymptotiques qui est valable pour les opérateurs différentiels, donc aussi pour les opérateurs finis de  $\mathcal{E}_\infty$ .

L'étude algébrique permet d'obtenir un premier résultat :

PROPOSITION 2.d.1. — Tout opérateur fuchsien définit une surjection de  $\mathcal{A}_0$  (resp.  $\mathcal{A}_{0,p}$ ) sur lui-même.

*Démonstration.* — Dire que  $P$  est fuchsien c'est dire que :  $v = v(a_{-d^0 P}) = \inf v(a_s)$  ce qui permet d'écrire  $P$  sous la forme :  $P = P_1 \circ P_2$  où  $P_2 = u^{v+p} \theta^p$  ( $p = d^0 P$ ) est fini donc surjectif tandis que  $P_1$  est de degré 0 et inversible par la proposition 1.b.7.

THEOREME 2.d.2. — Soit  $P \in \mathcal{E}_\infty$  et  $g \in \mathcal{A}_0(V)$  où  $V$  est un secteur ouvert, il existe  $W \subset V$ , de même bissectrice et  $f \in \mathcal{A}_0(W)$  tel que  $Pf = g$  dans  $W$ .

Démonstration. —  $P = P_0 + u P_1$

où  $P_0 \in \mathfrak{F}$  et  $d^0 P_1 = d^0 P > d^0 P_0$ .

Comme  $P_0$  est inversible, il suffit d'établir le résultat pour  $P_0 \circ P_0^{-1}$  qui est de la forme :  $1 + u P'$  avec  $\sigma = d^0 P' > 0$ .

Si  $P' \in \mathcal{E}_\lambda$ , soit  $q$  tel que  $\lambda - q < -1$ . Décomposons  $1 + u P'$  en  $1 + u P_1 + u P_2$  avec  $d^0 P_2 < -q$ ,  $P_1$  comprenant tous les termes de  $P'$  de degré supérieur ou égal à  $-q$ .

Soit  $n = q + \sigma$ . Posons :

$$y_1 = \theta^{-q} f \quad \text{et pour } i = 2 \dots n$$

$$y_n = \theta y_{n-1}.$$

En désignant par  $Y$  le vecteur de composantes  $y_1, \dots, y_n$ , l'équation :  $(1 + u P')f = g$  équivaut au système d'ordre  $n$  :  $u^{k+1} \theta Y = A(u) Y + B + u \mathcal{R}(u, \theta^{-1}) Y$  où :

i)  $k = \sigma + v(a_{-\sigma})$  où  $a_{-\sigma}$  est le coefficient de degré  $\sigma$  de  $P_1$

ii)  $A(u)$  est une matrice  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathbf{C}\{u\}$  (correspondant à l'opérateur fini  $1 + u P_1$ )

iii)  $B \in \mathcal{A}_0(V)^n$

iv)  $\mathcal{R}(u, \theta^{-1}) = -(a'_{-\sigma})^{-1} P_2 E_{n,q}$  où  $a'_{-\sigma} = u^{-v(a_{-\sigma})} a_{-\sigma}$  et  $E_{n,q}$  est la matrice complexe constituée de zéros sauf à l'intersection de la nième ligne et de la qième colonne où il y a 1. C'est donc une matrice  $n \times n$  à coefficients dans  $\mathcal{E}_{\lambda, -q-1}$  ensemble des opérateur de  $\mathcal{E}_\lambda$  de degré  $\leq -q - 1$ .

Le problème se résoud par la méthode classique en regardant  $u \mathcal{R}(u, \theta^{-1}) Y$  comme une perturbation du système différentiel : ceci est légitime puisque si  $V$  est assez petit et  $\bar{W} \subset V$ ,  $\exists K_{\bar{W}}$  tel que  $\forall f \in \mathcal{A}_0(V)$  on ait :

$$\|P_2 f\|_{\bar{W}} \leq K_{\bar{W}} \zeta(-\lambda + q) \|f\|_{\bar{W}}$$

d'où l'on déduit que  $u \mathcal{R}(u, \theta^{-1})$  est contractante lorsque  $W$  a un rayon assez petit.

Lorsque  $A(0)$  n'a pas de valeur propre nulle, il suffit de recopier la démonstration classique en ajoutant aux termes perturbatifs le terme :  $u \mathfrak{R}(u, \theta^{-1}) Y$ .

Sinon on se ramène à ce cas par des transformations de la forme  $Y = G(u) Z$  où  $G(u) \in G1(n, \mathbf{C}\{u\})$  ou de la forme  $u = t^m$ . Dans chaque cas on vérifie que la méthode s'applique encore.

Ce théorème et les résultats du 2. ont pour conséquence la proposition suivante (*Malgrange* [7]).

Notons  $\mathcal{A}_{0,P}$  le noyau de l'application  $P: \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_0$  qui est surjective d'après le théorème précédent.

**PROPOSITION 2.d.3.** —  $\dim_{\mathbf{C}} H^1(S; \mathcal{A}_{0,P}) = l(P)$  (où  $S$  désigne l'éclaté réel de 0).

*Remarque 2.d.4.* — On peut, toujours en modifiant convenablement la démonstration classique, préciser que le secteur  $V$  du théorème 2.d.2 peut être pris d'ouverture  $\pi/k$  si  $k$  est l'invariant de Katz de  $P$ .

### 3. OPERATEURS AUX DIFFERENCES A COEFFICIENTS SERIES DE FACTORIELLES

#### a. Transformée de Pincherle.

Notons  $\mathfrak{H}$  l'ensemble des opérateurs aux différences de la forme :

$$\Delta = \sum_{i=1 \dots r} A_{r-i}(x) \tau^i \quad \text{où } \tau \text{ désigne la translation de pas } +1 :$$

$\tau f(x) = f(x+1)$  et où les coefficients  $A_{r-i}$  sont holomorphes et développables en séries de factorielles convergentes dans un demi-plan  $\Pi_{\mu}$ , sous la forme :

$$A_{r-i}(x) = \sum_{s \geq s_0} \alpha_{s,r-i} [x+i+1]_s \quad (s_0 \in \mathbf{Z}).$$

Si  $f(x)$  est la *transformée de Pincherle* de  $\varphi$  i.e. si

$$f(x) = \int_{\gamma} u^{-x-1} \varphi(u) du$$

on constate que, si le contour  $\gamma$  est bien choisi,  $f$  sera solution de  $\Delta f = 0$  dès que  $\varphi$  vérifie  $P\varphi = 0$  où

$$P = \sum_{s \geq s_0} B_s(u) u^{-s} \theta^{-s} \quad \text{avec} \quad B_s(u) = \sum_{i=0 \dots r} \alpha_{s,r-i} u^{r-i}.$$

**DEFINITION 3.a.1.** — *Sous les conditions précédentes on dit que l'opérateur  $P$  est le transformé de Pincherle inverse de l'opérateur aux différences  $\Delta$ , et que  $\Delta$  est le transformé de Pincherle de  $P$ . On écrit :  $P = \mathfrak{P}^{-1}(\Delta)$  et  $\Delta = \mathfrak{P}(P)$ .*

**PROPOSITION 3.a.2.** — *Soient  $\mu_i$  ( $i = 0 \dots r$ ) les abscisses de convergence absolue des séries  $\sum_{s \geq 0} \alpha_{s,r-i} [x]_s$  et  $\mu = \max_i \mu_i$ . Alors l'opérateur  $\mathfrak{P}^{-1}(\Delta)$  appartient à  $\mathfrak{E}_{\lambda}$  pour tout  $\lambda > \mu$ , la condition  $(C_{\lambda})$  étant vérifiée sur tout voisinage de 0.*

**Remarque 3.a.3.** — En multipliant  $\Delta$  par une fonction rationnelle de  $x$  on peut modifier arbitrairement le degré de  $\mathfrak{P}^{-1}(\Delta)$ .

Les transformés de Pincherle inverses des opérateurs de  $\mathfrak{H}$  sont exactement les opérateurs de  $\bigcup_{p \in \mathbf{N}} \mathfrak{F}[u]_p$ .

Le théorème de préparation a pour conséquence le

**THEOREME 3.a.4.** — *Soit  $P \in \mathfrak{E}_{\infty}$  de degré  $p$ , alors à élément inversible près  $P$  est le transformé de Pincherle inverse d'un opérateur aux différences d'ordre :  $v(a_p) = -$  indice analytique de  $P$ .*

“Malgré” ce résultat, il est naturel de chercher à interpréter tous les opérateurs de  $\mathfrak{E}_{\infty}$  comme transformé de Pincherle inverse d'opérateurs aux différences d'ordre infini. La généralisation naturelle consiste à définir la transformée de Pincherle formelle par linéarité à partir de :

$$\mathfrak{P}(u^{k-s} \theta^{-s}) = [x - k + 1]_s \tau^{-k}$$

c'est-à-dire à associer à

$$P = \sum_{s \geq s_0} a_s(u) u^{-s} \theta^{-s}$$

l'opérateur d'ordre infini :

$$\mathfrak{R}(P) = \sum_{k \geq 0} A_k(x) \tau^{-k}$$

$$\text{où } A_k(x) = \sum_{s \geq s_0} \alpha_{k,s} [x - k + 1]_s \quad \text{si } a_s(u) = \sum_{k \geq 0} \alpha_{k,s} u^k.$$

Malheureusement cette écriture n'a pas grand sens puisque si  $P \in \mathfrak{E}_\lambda$  la série de factorielles définissant  $A_k$  est convergente dans  $\Pi_{\lambda+1}$ , ce qui pour  $x$  fixé n'autorise qu'un nombre fini de valeurs de  $k \dots$  On peut pallier cet inconvénient en décidant d'écrire les opérateurs aux différences sous la forme :

$$\Delta = \sum_{k \geq 0} \tau^{-k} A'_k(x). \quad (*)$$

Cette fois les  $A'_k(x)$  ont pour abscisse de convergence  $\lambda + 1$  qui est indépendant de  $k$ , et l'opérateur  $\Delta$  a un sens, au moins formel.

En remarquant que :

$$\mathfrak{R}(P_1 \circ P_2) = \mathfrak{R}(P_1) \circ \mathfrak{R}(P_2)$$

le théorème de préparation se transcrit en un théorème de finitude :

**THEOREME 3.a.5.** — Soit un opérateur aux différences de la forme (\*), il existe un opérateur inversible  $\Delta_1$  et un opérateur d'ordre fini  $\Delta_2$  tels que :

$$\Delta = \Delta_1 \circ \Delta_2.$$

*Remarque 3.a.6.* — Malheureusement les opérateurs de la forme (\*) n'opèrent en général que sur un espace très réduit de fonctions (ne contenant même pas en général les constantes) puisque  $\tau^{-k} A_k(x)$  peut n'être défini que pour un nombre fini de valeurs de  $k$ .

Cependant sous l'hypothèse plus restrictive que  $A_k(x)$  est holomorphe à l'infini, elle admet aussi un développement en séries de factorielles de la forme :

$$A'_k(x) = \sum_s \beta_{k,s} 1/x(x-1)\dots(x-s)$$

convergeant pour  $\operatorname{Re} x < \lambda_1$  ( $\lambda_1$  indépendant de  $k$ ). Les coefficients  $\alpha_{k,s}$  et  $\beta_{k,s}$  sont liés par la relation :

$$\alpha_{k,s+1} = \sum_{i=0 \dots s} \binom{s}{i} (s)_{s-i} \beta_{k,i}.$$

Cette fois  $\Delta$  opère sur un espace de fonctions holomorphes dans un demi-plan  $\operatorname{Re} x < \lambda$  avec une condition de croissance convenable dépendant de la croissance en  $k$  des coefficients  $\beta_{k,s}$ .

Si  $\Delta = \sum_{i=0 \dots r} A_{r-i}(x) \tau^i$  est un élément de  $\mathcal{H}$  on définit la valuation de

$$A_{r-i}(x) = \sum_{s \geq s_0} \alpha_{s,r-i} [x+i+1]_s,$$

par :  $v(A_{r-i}) = \inf \{s \mid \alpha_{s,r-i} \neq 0\}$ .

DEFINITION 3.a.7. — On appelle polygone de Newton de  $\Delta$  et on note  $N(\Delta)$  l'enveloppe convexe des  $r$  points  $(i, v(A_{r-i}))$ .

PROPOSITION 3.a.8. — Si  $P$  est le transformé de Pincherle inverse de  $\Delta$ ,  $M(P)$  se déduit de  $N(\Delta)$  par symétrie par rapport à la deuxième bissectrice, suivie de la translation  $+r$  parallèlement à l'axe des ordonnées.

Remarque 3.a.9. — Un changement d'inconnue dans  $\Delta$  de la forme :  $f(x) = \Gamma(x)^\sigma g(x)$  (transformation de Poincaré) permet, par un choix convenable de  $\sigma \in \mathbf{Z}$  de ramener le cas général au cas où  $N(\Delta)$  a toutes ses pentes strictement positives. Dans ce cas on a :

PROPOSITION 3.a.10. — Lorsque  $N(\Delta)$  a toutes ses pentes strictement positives,  $i(\mathcal{Q}^{-1}(\Delta)) = d^0 \Delta$ .

**b. Solutions d'un opérateur de  $\mathcal{H}$ .**

Les résultats précédents permettent de supposer que le transformé de Pincherle inverse  $P$  de l'opérateur  $\Delta$  a les propriétés suivantes :

i)  $P \in \mathcal{E}_\lambda$  et vérifie  $(C_\lambda)$  dans tout ouvert de  $\mathbf{C}$ .

ii) Le terme de plus haut degré de  $P$  est de la forme :  $cu^{r+p} \theta^p$  avec  $c \in \mathbf{C}^*$  ; et le polygone de Newton de  $P$  est constitué de la partie négative de l'axe des abscisses puis de segments tous de pente strictement positive.

D'après la proposition 3.a.3 on a alors :  $\dim_{\mathbf{C}} H^1(S; \mathcal{A}_{0,p}) = r$ .

i) *Base privilégiée de  $H^1(S; \mathcal{A}_{0,p})$*

Dans le cas différentiel, Ramis ([12]) définit la notion de "base privilégiée" et de "base semi-canonique" (voir ci-dessous) et montre l'existence d'une telle base dans l'espace  $H^1(S; \mathcal{A}_{0,D})$  pour tout opérateur différentiel  $D$ . Cette démonstration, délicate dans le cas général, est simple dans le cas générique où le polygone de Newton de  $D$  n'a qu'une pente (dans ce cas les deux notions "générique" et "semi-canonique" coïncident).

Pour les opérateurs de  $\mathcal{E}_\infty$  le même résultat est très vraisemblablement exact mais nous nous contenterons ici du cas générique où  $N(P)$  n'a qu'une pente positive et où la démonstration du cas différentiel s'étend sans difficulté.

La décomposition formelle ci-dessous (Propositions 3.b.1 et 3.b.3) met en évidence un opérateur différentiel dont les solutions formelles ont même partie irrégulière que celles de  $P$ . On peut, comme dans le cas différentiel, (Ramis [12]) en déduire l'existence d'une *base privilégiée* dans  $H^1(S; \mathcal{A}_{0,p})$  c'est-à-dire d'une base constituée d'*éléments élémentaires*  $(U_i, \varphi_i)$  ( $i = 1 \dots r$ ) : classe de cohomologie du 1-cocycle défini par un secteur ouvert de rayon assez petit  $U_i$ , et une fonction  $\varphi_i \in \mathcal{A}_0(U_i)$  vérifiant  $P\varphi_i = 0$  les fonctions  $\varphi_i$  étant de la forme :  $\varphi_i(u) = \exp[\pi_i(u^{-1/m})] \Psi_i(u^{1/m})$  où  $m \in \mathbf{N}$ ,  $\pi_i$  est un polynôme et  $\Psi_i$  est "asymptotiquement à croissance lente" sur  $U_i$ . (Une fonction  $\Psi$  est dite asymptotiquement à croissance lente sur  $U$  si elle s'écrit :

$$\Psi = \sum_{i=1 \dots m} u^{\alpha_i} \sum_{j=0 \dots n_i} \Psi_{ij}(u) \log^j u$$

où  $\alpha_i \in \mathbf{C}$  et  $\Psi_{ij} \in \mathcal{A}(U)$ .

Cette base est dite *semi-canonique* si, de plus,  $U_i$  contient une ligne singulière pour  $\pi_i$  i.e. la bissectrice d'un secteur de décroissance du facteur  $\exp \pi_i$ .

Comme dans le cas différentiel il est facile d'établir l'existence d'une base semi-canonique lorsque  $P$  n'a qu'une pente (Ramis [12]).

On introduit les ensembles suivants : pour  $V$  secteur ouvert de sommet 0

$$\mathcal{E}_a(V) = \left\{ \sum_{s \geq s_0} a_s(u) u^{-s} \theta^{-s} \mid a_s(u) \in \mathcal{A}(V) \right\}$$

$\mathcal{O}_a(V) = \{\text{opérateurs différentiels à coefficients dans } \mathcal{A}(V)\}$ .

La composition se prolonge à ces espaces.

En travaillant d'abord formellement puis en utilisant le théorème fondamental des développements asymptotiques (différentiel) on obtient une décomposition formelle de  $P = P_1 + D_1$  ( $d^0 P_1 \leq -1$ ,  $D_1$  opérateur différentiel dont le polygone de Newton a toutes ses pentes positives) en le produit d'un opérateur infini inversible et d'un opérateur différentiel.

PROPOSITION 3.b.1. — Soit  $P = P_1 + D_1$  où  $P_1 \in \mathcal{E}_a(V)$  est de degré  $\leq -1$  et  $D_1 \in \mathcal{O}_a(V)$  est de la forme :

$$D_1 = 1 + \rho_0(u) + \sum_{i=1 \dots p-1} \rho_i(u) u^i \theta^i + c u^{k+p} \theta^p$$

avec  $c \in \mathbf{C}^*$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$  et  $v(\rho_i) \geq 1$  pour  $i = 0 \dots p-1$ .

Alors il existe un opérateur

$$D = c u^{k+p} \theta^p + D_2 \in \mathcal{O}_a(V) \quad (d^0 D_2 \leq p-1)$$

ayant le même polygone de Newton que  $D_1$  et un opérateur  $Q \in \mathcal{E}_a(V)$  de la forme  $Q = 1 + Q_1$  avec  $d^0 Q_1 \leq -1$  tels que :  $P = Q \circ D$ .

Si, de plus,  $P$  appartient à  $\mathcal{E}_\infty$  les coefficients de  $Q$  vérifient une condition de croissance qu'on obtient à partir du lemme suivant (qui remplace pour les fonctions de  $\mathcal{A}(V)$  la formule de Cauchy).

Tous les secteurs sont de sommet 0. On note  $R(V)$  le rayon du secteur  $V$ . Pour  $\delta > 0$  on note  $V^\delta$  le secteur de même bissectrice et de même rayon que  $V$ , d'ouverture celle de  $V$  augmentée de  $\delta$ .

LEMME 3.b.2. — Soient  $V, W_1$  et  $W_2$  trois secteurs et  $\delta > 0$  tels que :

- i)  $\overline{W_1^\delta} \subset \overline{W_2} \subset V$
- ii)  $R(W_1)(1 + \sin \delta) < R(W_2)$ .

Alors pour tout  $f \in \mathcal{O}(V)$  et tout  $n \in \mathbf{N}$  on a :

$$\sup_{u \in \overline{W_1}} |u^n f^{(n)}(u)| \leq (n! / \sin^n \delta) \sup_{u \in \overline{W_2}} |f(u)|.$$

PROPOSITION 3.b.3. — Avec les notations de la Proposition 3.b.1 supposons de plus que  $P \in \mathfrak{E}_\lambda$  et que la condition  $(C_\lambda)$  soit vérifiée sur la boule de centre 0 de rayon  $R(V)$ , alors les coefficients de  $Q$  vérifient la conditions:  $\forall \delta > 0$ , il existe un secteur  $W$  tel que :

- i)  $\overline{W^\delta} \subset V$
- ii)  $R(W) < \inf(\sin \delta, R(V)/(1 + \sin \delta))$
- iii)  $\forall S$  sous-secteur fermé de  $W$ ,  $\exists M > 0$  tel que  $\forall \delta > 0$

on ait :

$$\forall u \in S, |q_{\sigma+p}(u)| \leq M(\sigma + p)! \exp[(N - p + c^{-1}|u|^{-k}) \log \sigma]$$

où  $N \geq \max(\lambda + 1, p - 1)$ .

ii) Base de solutions

Reprenons les notations du i). Les  $r$  fonctions holomorphes dans  $\mathbf{C}$ :  $f_i(x) = \int_0^{a(i)} u^{-x-1} \varphi_i(u) du$  où  $a(i) \in U_i$  sont de bons candidats pour obtenir une "base" (au sens de Ramis [12]) de solutions de l'opérateur aux différences et on peut, dans le cas générique, en préciser le comportement asymptotique.

Le premier des deux lemmes ci-dessous donne le comportement asymptotique de ces fonctions  $f_i$  lorsque  $\text{Re } x \rightarrow +\infty$  et le deuxième indique que le "terme tout intégré" de  $f(x)$  est à croissance lente.

LEMME 3.b.4. — Soit  $U$  un secteur ouvert de sommet  $0$  (assez petit),  $\beta(U)$  un rayon de  $U$ ,  $\varphi \in \check{\mathcal{A}}_0(U)$  de la forme :

$$\varphi(u) = \exp[\pi(u^{-1/m})] \Psi(u^{1/m})$$

où  $m \in \mathbf{N}$ ,  $\pi$  est un polynôme de degré  $q$  tel que  $\beta(U)$  est bissectrice d'un secteur de décroissance de  $\exp[\pi(u^{-1/m})]$  et  $\Psi$  est asymptotiquement à croissance lente sur  $U$ .

$$\text{Soit } a \in \beta(U) \text{ et } f(x) = \int_0^a u^{-x-1} \varphi(u) du.$$

Alors

$$f(x) = g(x) x^{m x/q} \exp[\Lambda_0 x + \Lambda_1 x^{1-1/q} + \dots + \Lambda_{q-1} x^{1/q}]$$

où  $g(x)$  est de la forme :  $\sum_{i=1 \dots N} x^{\alpha_i} \sum_{j=0 \dots n_i} g_{ij}(x) \log^j x$  chaque fonction  $g_{ij}(x)$  admettant quand  $|x| \rightarrow \infty$  dans un demi-plan convenable un développement asymptotique en puissance de  $x^{-1/q}$ .

LEMME 3.b.5. — Soit  $P$  un opérateur de  $\mathfrak{F}[u]_r$ ,  $\varphi \in \mathcal{A}_0(V)$  telle que  $P\varphi = 0$  et  $a \in V$ , alors si  $f(x) = \int_0^a u^{-x-1} \varphi(u) du$  et si  $\Delta$  est l'opérateur aux différences d'ordre  $r$  transformé de Pincherle de  $P$  on a :

$$\Delta f(x) = O(a^{-x} x^\sigma) \quad \text{quand} \quad \operatorname{Re} x \rightarrow +\infty \quad (\sigma = d^0 P).$$

Démonstration. — Comme  $P$  vérifie  $(C_\lambda)$  sur tout ouvert de  $\mathbf{C}$ ,  $P$  opère sur  $\mathcal{A}_0(V)$  sans restriction sur le rayon de  $V$ .

$$\text{Si } P = \sum_{k=0}^r B_s(u) u^{-s} \theta^{-s} \quad \text{avec} \quad B_s(u) = \sum_{s \geq s_0} \alpha_{s,r-k} u^{r-k}$$

on montre par une suite d'intégrations par parties et en utilisant la condition  $P\varphi = 0$  que pour  $\operatorname{Re} x$  assez grand on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s_0} \sum_{k=0}^r \alpha_{-s,r-k} \sum_{i=0}^{s-1} [x+k+i]_{-s+i+1} a^{-x-k+i} \varphi^{(i)}(a) \\ + \sum_{s \geq 1} \sum_{k=0}^r \alpha_{s,r-k} \sum_{i=1}^{s+1} [x+k+i]_{s-i+1} a^{-x-i-k} \theta^{-i} \varphi(a).$$

La première somme est finie et c'est un  $O(x^{s_0} a^{-x})$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ .

La condition  $(C_\lambda)$  montre immédiatement que la deuxième somme a un sens pour  $\operatorname{Re} x$  assez grand et qu'elle est majorée par :  $K |a^{-x}| \zeta(q - \lambda)$  ( $q$  tel que  $\lambda - q < -1$ ).

Pour  $\Lambda \in \mathbf{R}$  on définit :

$\mathcal{O}_{\Lambda,0} = \{f \in \mathcal{O}(\Pi_\lambda) \text{ à croissance lente quand } \operatorname{Re} x \rightarrow \infty$   
i.e. telles que :  $\exists A > 0$  et  $C > 0$  tels que pour  $\operatorname{Re} x > \Lambda$ ,  
 $|f(x)| \leq C A^{\operatorname{Re} x}\}$ .

Les éléments de  $\mathfrak{H}\mathcal{E}$  opèrent sur  $\mathcal{O}_{\Lambda,0}$  (pour  $\Lambda$  assez grand) et on déduit de ce qui précède :

**COROLLAIRE 3.b.6.** — Soit  $\Delta$  un élément de  $\mathfrak{H}\mathcal{E}$  d'ordre  $r$  dont le polygone de Newton a toutes ses pentes positives, les  $r$  fonctions

$$f_i(x) = \int_0^{a^{(i)}} u^{-x-1} \varphi_i(u) du$$

obtenues à partir d'une base convenable de  $H^1(S; \mathfrak{A}_{0,P})$  où  $P$  est le transformé de Pincherle inverse de  $\Delta$  induisent  $r$  éléments du noyau de :  $\Delta : \mathcal{O}_\Lambda / \mathcal{O}_{\Lambda,0} \rightarrow \mathcal{O}_\Lambda / \mathcal{O}_{\Lambda,0}$  admettant un développement asymptotique du type indiqué dans le lemme 3.b.4. En particulier ces fonctions sont à croissance exponentielle d'ordre 1 verticalement.

En utilisant la transformation de Cauchy-Heine comme dans Ramis [10] on peut aussi obtenir :

**COROLLAIRE 3.b.7.** — Les  $r$  séries formelles :  $\sum_{n \geq 0} f_i(n) u^n$  constituent une base de  $\ker P$  où  $P : \mathbf{C}[[u]]/\mathbf{C}\{u\} \rightarrow \mathbf{C}[[u]]/\mathbf{C}\{u\}$  et cette base est formée de fonctions ayant quand  $n \rightarrow \infty$  le développement asymptotique donné par le lemme 3.b.4 (dans lequel on remplace  $x$  par  $n$ ).

On peut en fait travailler globalement et obtenir de "vraies" solutions de l'opérateur  $\Delta$ .

**PROPOSITION 3.b.8.** — Soient  $P$  le transformé de Pincherle inverse de  $\Delta$ ,  $U$  un secteur ouvert de sommet  $O$  et  $\varphi_0 \in \mathfrak{A}_0(U)$  telle

que  $P\varphi_0 = 0$  dans  $U$ . Soit  $V$  un secteur ouvert de même ouverture que  $U$  et tel que  $V \supset U$ , il existe une unique fonction  $\varphi \in \mathcal{A}_0(V)$  telle que  $P\varphi = 0$  dans  $V$  et  $\varphi|_U = \varphi_0$ .

*Démonstration.* — L'opérateur  $\theta^n$  étant bijectif sur  $\mathcal{A}_0(V)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , on peut supposer que  $P$  est de degré 0 et s'écrit :

$$P = u^k + \sum_{s \geq 1} a_s(u) u^{-s} \theta^{-s}.$$

Si  $P \in \mathcal{E}_\lambda$  et  $q \in \mathbf{N}$  est tel que  $\lambda - q < -1$  on a :  $\forall \varphi \in \mathcal{A}_0(V)$  et  $\forall t \in V - \{0\}$ ,

$$P\varphi(t) = t^k \varphi(t) + \int_0^t K(t, \tau) \varphi^{(q)}(\tau) d\tau$$

où

$$K(t, \tau) = \sum_{s \geq 1} \frac{a_s(t) t^{-s} (t - \tau)^{s+q-1}}{(s + q - 1)!}.$$

Si  $t \in V - \{0\}$  et si  $t_0$  est un point du segment  $[0, t]$  appartenant à  $U - \{0\}$ , on peut écrire :

$$(*) P\varphi(t) = t^k \varphi(t) + \int_0^{t_0} K(t, \tau) \varphi^{(q)}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t K(t, \tau) \varphi^{(q)}(\tau) d\tau.$$

En posant  $\varphi|_U = \varphi_0$ , l'équation  $P\varphi = 0$  est équivalente à l'équation intégrale :

$$\varphi(t) = F(t) + \int_{t_0}^t K_1(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (1)$$

où

$$F(t) = -t^{-k} \int_0^{t_0} K(t, \tau) \varphi_0^{(q)}(\tau) d\tau + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{\partial^j K}{\partial \tau^j}(t, t_0) \varphi_0^{(q-j-1)}(t_0)$$

et

$$K_1(t, \tau) = - \sum_{s \geq 1} \frac{1}{(s-1)!} a_s(t) t^{-s-k} (t - \tau)^{s-1}.$$

La majoration :

$$\left| \frac{1}{(s-1)!} a_s(t) t^{-s-k} (t - \tau)^{s-1} \right| \leq M s^{\lambda+1} |t_0|^{-k-1} \left(1 - \left|\frac{t_0}{t}\right|\right)^{s-1}$$

montre que (1) a une solution unique.

En prenant  $t$  dans  $U$  on en déduit que  $\varphi(t) = \varphi_0(t)$  et la formule (\*) montre alors que  $P\varphi = 0$  dans  $V$ .

THEOREME 3.b.9. — Il existe  $r$  secteurs  $U_i$  de la forme  $\omega_{i,0} < \arg u < \omega_{i,1}$  et  $r$  fonctions  $\varphi_i$  holomorphes dans  $U_i$  telles que si  $\alpha_i \in ]\omega_{i,0}, \omega_{i,1}[$  les  $r$  fonctions

$$f_i(x) = \int_{\gamma_i} u^{-x-1} \varphi_i(u) du$$

( $\gamma_i$  demi-droite de direction  $\alpha_i$ , d'origine 0) constituent une base du  $\mathbf{C}(e^{2i\pi x})$ -espace vectoriel des solutions méromorphes de  $\Delta$  à croissance verticale au plus exponentielle d'ordre 1.

*Démonstration.* — Les secteurs  $U_i$  sont les prolongements jusqu'à l'infini des secteurs figurant dans une base convenable de  $H^1(S; \mathcal{A}_{0,P})$ .

La proposition 3.b.8 permet de construire dans  $U_i$  une solution  $\varphi_i$  de  $P$  qui prolonge la solution "élémentaire" correspondante. Le lemme 3.b.5 et un argument classique de convergence montrent qu'il existe  $\Lambda$  tel que les  $r$  intégrales :

$f_i(x) = \int_{\gamma_i} u^{-x-1} \varphi_i(u) du$  soient des solutions de  $\Delta$ , holomorphes dans  $\text{Re } x > \Lambda$ .

A ce point il n'y a plus qu'à recopier l'étude de *Ramis* [12]. En particulier le Casoratien  $C(x)$  des  $r$  solutions est à croissance verticale au plus exponentielle d'ordre 1 dans  $\Pi_\lambda$  ( $\lambda$  convenable). Pour établir que  $C^{-1}(x)$  a la même propriété on peut utiliser l'argument suivant. Le Casoratien vérifie l'équation aux différences d'ordre 1 :

$$(\epsilon) A_0(x) C(x+1) = (-1)^r A_r(x) C(x).$$

Il est facile d'exhiber une solution  $C_1(x)$  de cette équation dont le comportement asymptotique est connu : en effet en mettant en facteur dans  $A_r/A_0$  une fraction rationnelle  $q(x)$  convenable, le changement de fonction :

$$C(x) = [\Pi(x - \beta_i)/\Pi(x - \delta_i)] D(x)$$

où les  $\beta_i$  (resp.  $\delta_i$ ) sont les zéros (resp. les pôles) de  $q(x)$ , conduit à une équation du type étudié dans *Fitzpatrick-Grimm* [2]. On en déduit que toute solution de  $(\epsilon)$  à croissance verticale au plus exponentielle d'ordre 1 est de la forme  $\pi(x) C_1(x)$  avec  $\pi(x) \in \mathbf{C}(e^{2i\pi x})$  et le résultat s'en déduit aisément.

Enonçons pour terminer le résultat établi pour un opérateur  $\Delta$  de  $\mathcal{H}$  (on reprend intentionnellement la formulation de *Ramis* [12]).

**THEOREME 3.b.10.** — *Il existe un système  $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$  de fonctions méromorphes sur  $\mathbf{C}$ , à croissance verticale au plus exponentielle d'ordre 1, solutions de  $\Delta f = 0$  telles que :*

i) *Les fonctions  $f_1, \dots, f_r$  sont holomorphes dans  $\Pi_\lambda$  pour  $\lambda$  convenable.*

ii) *Il existe un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$  le déterminant de Casorati  $C(f_1(n), \dots, f_r(n))$  ne s'annule pas.*

iii)  *$\{f_1, \dots, f_r\}$  est une base de  $\mathbf{C}(e^{2i\pi x})$ -espace vectoriel des solutions de  $\Delta$  à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 verticalement.*

iv) *Les fonctions  $f_1, \dots, f_r$  admettent dans  $\Pi_\lambda$  des représentations intégrales de la forme :*

$$f(x) = \Gamma(x)^\sigma \int_\gamma u^{-x-1} \varphi(u) du$$

où  $\sigma \in \mathbf{Z}$ ,  $\varphi$  est une fonction holomorphe dans un secteur d'origine 0 de  $\mathbf{C}$ , admettant un développement asymptotique nul en 0 dans ce secteur, et  $\gamma$  est une demi-droite d'origine 0 tracée dans le secteur.

v) *Si, de plus, le polygone de Newton de  $\Delta$  n'a qu'une pente, les fonctions  $f_1, \dots, f_r$  admettent dans  $\Pi_\lambda$  des développements asymptotiques généralisés de la forme indiquée dans le corollaire 3.b.4, au facteur  $\Gamma(x)^\sigma$  près.*

La restriction du v) est probablement inutile mais la démonstration du cas général semble demander d'établir pour les opérateurs de  $\mathcal{E}_\infty$  un théorème des développements asymptotiques Gevrey et des résultats de  $k$ -sommabilité.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DUVAL, Solutions irrégulières d'équations aux différences polynomiales, *Springer Lecture Notes in Math.*, N° 1015 (1983), 64-101.
- [2] W.J. FITZPATRICK, L.J. GRIMM, Convergent factorial series solutions of linear difference equations, *J. Diff. Equations*, 29 (1978), 345-361.
- [3] H. GALBRUN, Sur la représentation des solutions d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable, *Acta Math.*, 36 (1913), 1-68. Sur certaines solutions exceptionnelles d'une équation linéaire aux différences finies, *Bull. S.M.F.*, 49 (1921), 206-241.
- [4] J. HORN, Zur Theorie der linearen Differenzgleichungen, *J. der deutschen Math. Vereinigung*, 24 (1915), 210-225.
- [5] B. MALGRANGE, Sur les points singuliers des équations différentielles, *L'Enseignement Math.*, 20,1-2 (1974), 147-176.
- [6] B. MALGRANGE, Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières, Preprint, Grenoble, 1979.
- [7] B. MALGRANGE, Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers, *Springer Lecture Notes Math.*, N° 712 (1979), 77-86.
- [8] N.E. NORLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Springer Verlag, Berlin, 1924.
- [9] S. PINCHERLE, Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle, *Acta Math.*, 16 (1892), 341-363.
- [10] J.P. RAMIS, Les séries  $k$ -sommables et leurs applications, *Springer Lecture Notes in Physics*, N° 126 (1980).
- [11] J.P. RAMIS, Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles, *Memoirs of the A.M.S.*
- [12] J.P. RAMIS, Etude des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires algébriques, En préparation.

- [13] M. SATO, T. KAWAI, M. KASHIWARA, Hyperfunctions and pseudo-differential equations, *Springer Lecture Notes in Math.*, N° 287 (1973).

Manuscrit reçu le 23 août 1985  
révisé le 22 avril 1986.

Anne DUVAL,  
Université Louis Pasteur  
Département de Mathématiques  
7 rue René Descartes  
67084 Strasbourg Cedex.