

JACQUES MARION

**Mesures de Hausdorff et théorie de Perron-Frobenius des matrices non-négatives**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 35, n° 4 (1985), p. 99-125

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1985\\_\\_35\\_4\\_99\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_4_99_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MESURES DE HAUSDORFF ET THÉORIE DE PERRON-FROBENIUS DES MATRICES NON-NEGATIVES

par Jacques MARION

---

Les ensembles parfaits homogènes de  $\mathbf{R}^N$ , c'est-à-dire les compacts  $E \subset \mathbf{R}^N$  décomposables en un nombre fini de portions disjointes géométriquement semblables à  $E$  dans un même rapport, ont été étudiés par divers auteurs du point de vue de leur dimension et de leur mesure de Hausdorff. Des résultats à ce sujet, dont certains s'appliquent aussi à des ensembles plus généraux (tels les ensembles parfaits de translation et les ensembles parfaits isotypiques) sont donnés dans [4], [5], [6] et [7].

Cet article porte sur le calcul de la mesure de Hausdorff (i.e. de la mesure en dimension de Hausdorff) d'ensembles parfaits (suggérés par J. Peyrière) qui généralisent d'une façon différente les ensembles parfaits homogènes. La structure d'un ensemble parfait de ce type dépend d'une matrice carrée à coefficients entiers  $\geq 0$ , et les méthodes que nous employons font appel à la théorie de Perron-Frobenius des matrices non-négatives.

### 1. Les A-parfaits relatifs à une matrice carrée primitive $A$ .

Soient  $E_1, \dots, E_v$  des compacts de  $\mathbf{R}^N$  ayant la propriété suivante : il existe  $\xi > 0$  tel que pour tout  $j = 1, \dots, v$ ,  $E_j$  est la réunion disjointe de  $a_{1j}$  portions semblables à  $E_1$  dans le rapport  $\xi$ , de  $a_{2j}$  portions semblables à  $E_2$  dans le rapport  $\xi$ , ... et de  $a_{vj}$  portions semblables à  $E_v$  dans le rapport  $\xi$  (i.e.  $E_j$  est constitué par ces  $\sum_{i=1}^v a_{ij}$

*Mots-clés* : Mesure de Hausdorff - Dimension de Hausdorff - Fractal - Matrices primitives - A-parfaits.

portions disjointes). De plus, on suppose que la matrice  $A = \{a_{ij}\}$  à coefficients entiers  $\geq 0$  est primitive (i.e.  $A^m > 0$  à partir d'un certain entier  $m \geq 1$ ). Nous dirons que  $\{E_{jj}\}_{j=1}^v$  est une *famille de A-parfaits*. Si  $v = 1$ , le compact de  $\mathbf{R}^N$  est un ensemble parfait homogène.

## 2. Détermination de la dimension de Hausdorff des A-parfaits.

La matrice  $A^t$  transposée de  $A$  est primitive. De ce fait elle possède, d'après le théorème de Perron-Frobenius [3], une valeur propre réelle positive  $\lambda$  supérieure aux modules de toutes les autres valeurs propres de  $A^t$ . De plus  $\lambda$  est une racine simple du polynôme caractéristique de  $A^t$ , et tous les vecteurs propres de  $A^t$  associés à  $\lambda$  sont des multiples scalaires d'un vecteur positif (i.e. dont toutes les composantes sont  $> 0$ ). Posons

$$\alpha = -(\log \lambda) / \log \xi$$

de sorte que  $\lambda \xi^\alpha = 1$ . Ainsi,

$$A^t \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_v \end{pmatrix},$$

où le vecteur propre  $(z_1, \dots, z_v)$  de  $A^t$  est positif.

Désignons par  $|\Delta|$  le diamètre d'un ensemble  $\Delta$ , et notons par  $\mathcal{C}_{k,\rho}$  la famille des recouvrements finis de  $E_k$  par des ouverts de diamètre  $< \rho$ .

PROPOSITION 1. — Pour  $k = 1, \dots, v$  et  $\rho > 0$ , posons

$$H_\rho^\alpha(E_k) = \inf \{ \sum |\Delta_i|^\alpha : \{\Delta_i\} \in \mathcal{C}_{k,\rho} \}.$$

Alors  $H_\rho^\alpha(E_k)$  est indépendant de  $\rho$  (c'est-à-dire reste constant lorsque  $\rho \downarrow 0$ ), et  $H^\alpha(E_k) < \infty$ .

*Démonstration.* — Soit  $\rho > 0$ . Pour  $j = 1, \dots, v$  soit  $\{\Delta_i^j\}$  un membre de  $\mathcal{C}_{j,\rho}$ . Notons  $a_{jk}^{(n)}$  l'élément de la  $j$ -ième ligne et  $k$ -ième colonne de la matrice  $A^n$ . Pour  $k = 1, \dots, v$ ,  $E_k$  est composé de  $a_{jk}^{(n)}$  portions semblables à  $E_j$  ( $j = 1, \dots, v$ ) dans le rapport  $\xi^n$ . Au recouvrement  $\{\Delta_i^j\}$  on associe ses  $a_{jk}^{(n)}$  homothétiques notés  $\{\delta_{i,1}^j\}, \dots, \{\delta_{i,a_{jk}^{(n)}}^j\}$  respective-

ment, qui sont des « réductions » de  $\{\Delta_i^j\}$  dans le rapport  $\xi^n$  de telle sorte que

$$\bigcup_{j=1}^{\nu} [\{\delta_{i,1}^j\} \cup \dots \cup \{\delta_{i,a_{jk}^{(n)}}^j\}]$$

soit un recouvrement, noté  $\Omega_k^{(n)}$ , de  $E_k$ . De cette façon, pour tout  $\delta \in \Omega_k^{(n)}$  on a

$$|\delta| < \xi^n \rho \text{ et } \sum_{\delta \in \Omega_k^{(n)}} |\delta|^\alpha = a_{1k}^{(n)} \xi^{n\alpha} \sum_i |\Delta_i^1|^\alpha + \dots + a_{\nu k}^{(n)} \xi^{n\alpha} \sum_i |\Delta_i^\nu|^\alpha.$$

Par conséquent

$$H_{\xi^n \rho}^\alpha(E_k) \leq \xi^{n\alpha} \left( a_{1k}^{(n)} \sum_i |\Delta_i^1|^\alpha + \dots + a_{\nu k}^{(n)} \sum_i |\Delta_i^\nu|^\alpha \right)$$

pour tous les recouvrements  $\{\Delta_i^j\} \in \mathcal{C}_{j,\rho}$ . Prenant les infima on obtient

$$H_{\xi^n \rho}^\alpha(E_k) \leq \xi^{n\alpha} \sum_{j=1}^{\nu} a_{jk}^{(n)} H_\rho^\alpha(E_j) = k\text{-ième composante de}$$

$$\lambda^{-n} (A')^n \begin{pmatrix} H_\rho^\alpha(E_1) \\ \vdots \\ H_\rho^\alpha(E_\nu) \end{pmatrix}.$$

Comme  $A'$  est une matrice primitive,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-n} (A')^n = B$ , où  $B = (b_{kj})$  est une matrice positive ([3], p. 81). De plus l' $\alpha$ -mesure de Hausdorff de  $E_k$  étant définie par  $H^\alpha(E_k) = \lim_{\eta \downarrow 0} H_\eta^\alpha(E_k)$ , on obtient (pour  $n \rightarrow \infty$ )

$$(1) \quad H^\alpha(E_k) \leq \sum_{j=1}^{\nu} b_{kj} H_\rho^\alpha(E_j).$$

Puisque trivialement  $H_\rho^\alpha(E_j) < \infty$  pour  $j = 1, \dots, \nu$ , on a

$$(2) \quad H^\alpha(E_k) < \infty, \quad (\text{pour } k = 1, \dots, \nu).$$

D'autre part,  $E_k$  étant composé de  $a_{jk}^{(n)}$  portions disjointes semblables à  $E_j$  ( $j = 1, \dots, \nu$ ) dans le rapport  $\xi^n$ , on a

$$(3) \quad H^\alpha(E_k) = \xi^{n\alpha} \sum_{j=1}^{\nu} a_{jk}^{(n)} H^\alpha(E_j), \quad (k = 1, \dots, \nu).$$

Alors puisque  $\xi^{n\alpha} a_{jk}^{(n)} = \lambda^{-n} a_{jk}^{(n)} \rightarrow b_{kj}$ , on obtient pour  $k = 1, \dots, \nu$

$H^\alpha(E_k) = \sum_{j=1}^v b_{kj} H^\alpha(E_j)$ , ce qui combiné avec (1) donne

$$\sum_{j=1}^v b_{kj} H^\alpha(E_j) \leq \sum_{j=1}^v b_{kj} H_\rho^\alpha(E_j).$$

Mais pour tout  $\rho > 0$ , on a par définition  $H^\alpha(E_j) \geq H_\rho^\alpha(E_j)$  pour  $j = 1, \dots, v$ . Par conséquent  $H^\alpha(E_j) = H_\rho^\alpha(E_j)$  pour  $j = 1, \dots, v$ , ce qui achève la démonstration.

Appelons *portion fondamentale* de  $E_k$  d'ordre  $n$  et de type  $j$  chacune des  $a_{jk}^{(n)}$  portions disjointes de  $E_k$  semblables à  $E_j$  dans le rapport  $\xi^n$ . Appelons *partie simple* de  $E_k$  d'ordre  $n$  toute réunion (finie) de portions fondamentales de  $E_k$  d'ordre  $n$ . Notons par  $\mathcal{F}_n^{(k)}$  la famille des parties simples de  $E_k$  d'ordre  $n$ . On remarque que  $E_k \in \mathcal{F}_1^{(k)}$  et que  $\mathcal{F}_1^{(k)} \subset \mathcal{F}_2^{(k)} \subset \dots$ . Pour chaque  $P \in \mathcal{F}_n^{(k)}$  désignons par  $\Phi_P^n$  la famille des portions fondamentales d'ordre  $n$  composant  $P$ .

Soit  $\mathcal{R}_{k,n}$  la famille des recouvrements finis de  $E_k$  par des parties simples d'ordre  $n$ .

PROPOSITION 2. — Pour  $k = 1, \dots, v$ , on a

$$H^\alpha(E_k) = \inf \left\{ \sum_{P \in \Gamma} |P|^\alpha : \Gamma \in \mathcal{R}_{k,n}, n \geq 1 \right\}.$$

*Démonstration.* — Soit  $\Omega$  un recouvrement fini de  $E_k$  par des ouverts. Il existe alors un nombre de Lebesgue  $\varepsilon > 0$  associé à  $\Omega$  tel que tout ensemble contenu dans  $E_k$  et de diamètre  $\leq \varepsilon$  soit contenu dans au moins un des ouverts de  $\Omega$ . Prenant  $n$  suffisamment grand, le diamètre de chacune des portions fondamentales  $K \in \mathcal{F}_n^{(k)}$  est  $\leq \varepsilon$ . Donc si l'on fait correspondre à chaque ouvert  $G \in \Omega$  la plus grande (i.e. celle qui contient le plus de portions fondamentales d'ordre  $n$ ) partie simple qu'il contient, on obtient un recouvrement fini  $\Gamma$  de  $E_k$  par des parties simples d'un ordre commun  $n$  tel que  $\sum_{P \in \Gamma} |P|^\alpha \leq \sum_{G \in \Omega} |G|^\alpha$ . Par conséquent, puisque par définition  $H^\alpha(E_k) = \lim_{\rho \downarrow 0} H_\rho^\alpha(E_k)$  et compte tenu de la proposition 1, le résultat est démontré.

Soit  $(z_1, \dots, z_v)$  l'unique vecteur propre de  $A^t$  associé à  $\lambda$  tel que  $z_k = 1$ . Si  $K$  est une portion fondamentale d'ordre  $n$  et de type  $j$ , posons  $f_k(K) = \lambda^{-n} z_j$ . Si  $P \in \mathcal{F}_n^{(k)}$ , posons  $f_k(P) = \sum_{K \in \Phi_P^n} f_k(K)$ . On

remarque que  $f_k$  est une fonction bien définie sur la famille de toutes les parties simples de  $E_k$ . En effet, si on décompose une portion fondamentale  $K$  d'ordre  $n$  et de type  $j$  en ses  $\sum_{i=1}^v a_{ij}^{(\ell)}$  portions fondamentales d'ordre  $n + \ell$ , d'après la définition de  $f_k$ , on obtient

$$\begin{aligned} f_k(K) &= \sum_{i=1}^v a_{ij}^{(\ell)} \lambda^{-(n+\ell)} z_i = \lambda^{-n-\ell} \{j\text{-ième ligne de } (A')^\ell\} \cdot (z_1, \dots, z_v) \\ &= \lambda^{-n-\ell} \lambda^\ell z_j = \lambda^{-n} z_j, \end{aligned}$$

tel que posé au départ. Par conséquent, pour tout  $P \in \mathcal{F}_n^{(k)} \subset \mathcal{F}_{n+1}^{(k)} \subset \dots$  on a  $f_k(P) = \sum_{K \in \Phi_P^{n+\ell}} f_k(K)$ , pour tout  $\ell \geq 0$ .

De plus, on observe que

$$f_k(E_k) = \lambda^{-1} \sum_{j=1}^v a_{jk} z_j = \lambda^{-1} \{k\text{-ième ligne de } A^1\} \cdot (z_1, \dots, z_v) = z_k = 1.$$

LEMME 1. — Soit  $p$  le plus petit entier  $\geq 1$  tel que  $A^p > 0$ . Notons par  $\mathcal{F}_n^{*(k)}$  la famille des parties simples  $P \in \mathcal{F}_n^{(k)}$  telles que  $P$  n'est pas contenue dans une portion fondamentale d'ordre  $p + 1$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\min \{ |P|^\alpha / f_k(P) : P \in \mathcal{F}_n^{(k)} \} = \min \{ |P|^\alpha / f_k(P) : P \in \mathcal{F}_n^{*(k)} \}.$$

Démonstration. — Si une partie simple  $P \in \mathcal{F}_n^{(k)}$  est contenue dans une portion fondamentale d'ordre  $p + 1$  et de type  $j$ , alors  $P$  est semblable dans le rapport  $\xi$  à une partie simple  $P' \in \mathcal{F}_{n-1}^{(k)}$  contenue dans une portion fondamentale d'ordre  $p$  et de type  $j$  (dont l'existence dans  $E_k$  est assurée car  $A^p > 0$ ). Alors  $|P|^\alpha = \xi^\alpha |P'|$  et  $f_k(P) = \lambda^{-1} f_k(P') = \xi^\alpha f_k(P')$ , d'où

$$|P|^\alpha / f_k(P) = |P'|^\alpha / f_k(P').$$

Si  $P'$  à son tour est contenue dans une portion fondamentale d'ordre  $p + 1$  on répète le raisonnement précédent pour obtenir, après au maximum  $n - p$  répétitions, une partie simple  $\tilde{P} \in \mathcal{F}_{n'}^{*(k)}$  pour un certain  $n' < n$  telle que  $|P|^\alpha / f_k(P) = |\tilde{P}|^\alpha / f_k(\tilde{P})$ .

PROPOSITION 3. — On a  $0 < H^\alpha(E_k) < \infty$  pour  $k = 1, \dots, v$ .

Démonstration. — Seule l'inégalité  $H^\alpha(E_k) > 0$  reste à démontrer.

Pour tout  $P \in \mathcal{F}_n^{(k)}$  on a  $\Phi_P^n \subset \Phi_{E_k}^n$ , d'où  $f_k(P) \leq f_k(E_k) = 1$ . Posons

$$h = \inf \{ |P|^\alpha / f_k(P) : P \in \mathcal{F}_n^{(k)}, n \geq 1 \}.$$

Alors  $hf_k(P) \leq |P|^\alpha$  pour tout  $P \in \mathcal{F}_n^{(k)}$  et  $n \geq 1$ . Donc si  $\Gamma \in \mathcal{R}_{k,n}$  ( $n$  quelconque), on a

$$\sum_{P \in \Gamma} |P|^\alpha \geq h \sum_{P \in \Gamma} f_k(P) \geq hf_k(E_k) = h,$$

et par conséquent,  $H^\alpha(E_k) \geq h$  en vertu de la proposition 2. Soit  $\tau$  la distance minimale entre deux portions fondamentales de  $E_k$  d'ordre  $p + 1$ . D'après le lemme 1, et comme  $f_k(P) \leq 1$ , on a

$$h = \min \{ |P|^\alpha / f_k(P) : P \in \mathcal{F}_n^{*(k)}, n \geq 1 \} \geq \tau^\alpha > 0.$$

D'où  $H^\alpha(E_k) \geq \tau^\alpha > 0$ .

**COROLLAIRE 1.** — Soit  $\dim E_k$  la dimension de Hausdorff de  $E_k$  définie par

$$\dim E_k = \inf \{ \beta : H^\beta(E_k) < \infty \} = \sup \{ \beta : H^\beta(E_k) > 0 \}.$$

On a

$$\dim E_k = \alpha = -(\log \lambda) / \log \xi, \quad (k = 1, \dots, \nu).$$

*Remarque 1.* — La relation (3) signifie alors que  $(H^\alpha(E_1), \dots, H^\alpha(E_\nu))$  est un vecteur propre de  $A'$  associé à  $\lambda$ .

### 3. Calcul de l' $\alpha$ -mesure de Hausdorff des A-parfaits.

Le théorème principal qui permettra le calcul de l' $\alpha$ -mesure de Hausdorff des  $E_k$  est le suivant :

**THÉORÈME 1.** — Pour  $k = 1, \dots, \nu$

$$(4) \quad \inf \{ |P|^\alpha / H^\alpha(P) : P \in \mathcal{F}_n^{(k)}, n \geq 1 \} = 1.$$

*Démonstration.* — Fixons  $k$ . Posons pour tout borélien  $S \subset \mathbb{R}^N$

$$H(k, S) = H^\alpha(S \cap E_k) / H^\alpha(E_k),$$

définissant ainsi une mesure de probabilité portée par  $E_k$ . La relation (4)

qu'il nous faut démontrer peut donc s'écrire sous la forme

$$H^\alpha(E_k) = \inf \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_n^{(k)}, n \geq 1 \},$$

ou encore

$$(5) \quad H^\alpha(E_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_n^{(k)} \}$$

car  $\mathcal{F}_n^{(k)} \subset \mathcal{F}_{n+1}^{(k)}$  pour tout  $n \geq 1$ .

Notons toujours par  $(z_1, \dots, z_\nu)$  l'unique vecteur propre de  $A^t$  associé à  $\lambda$  pour lequel  $z_k = 1$ . Comme  $(H^\alpha(E_1), \dots, H^\alpha(E_\nu))$  est aussi un vecteur propre de  $A^t$  associé à  $\lambda$ , on a

$$(H^\alpha(E_k))^{-1} (H^\alpha(E_1), \dots, H^\alpha(E_\nu)) = (z_1, \dots, z_\nu).$$

Si  $K$  est une portion fondamentale de  $E_k$  d'ordre  $n$  et de type  $j$ , alors  $K$  est semblable à  $E_j$  dans le rapport  $\xi^n$ . D'où (utilisant la notation du lemme 1),

$$\begin{aligned} H(k, K) &= H^\alpha(K) / H^\alpha(E_k) \\ &= \xi^{n\alpha} H^\alpha(E_j) / H^\alpha(E_k) \\ &= \lambda^{-n} z_j = f_k(K). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $H(k, P) = f_k(P)$  pour tout  $P \in \mathcal{F}_n^{(k)}$ . Alors, comme à la démonstration de la proposition 3, on obtient  $H^\alpha(E_k) \geq h$ , où  $h$  est égal au second membre de (5).

Reste à démontrer l'inégalité inverse. Soit  $q$  un entier  $\geq 1$  et  $Q \in \mathcal{F}_q^{(k)}$  une partie simple d'ordre  $q$ . Montrons que  $H^\alpha(Q) \leq |Q|^\alpha$ , i.e.  $H^\alpha(E_k) \leq |Q|^\alpha / H(k, Q)$ . Pour tout entier  $\ell \geq 1$  il y a dans  $E_k$  exactement  $a_{kk}^{(\ell q)}$  portions fondamentales d'ordre  $\ell q$  semblables à  $E_k$  dans le rapport  $\xi^{\ell q}$ . A chacune de ces  $a_{kk}^{(\ell q)}$  portions correspond une partie simple d'ordre  $(\ell + 1)q$  semblable à  $Q$  dans le rapport  $\xi^{\ell q}$ . Notons par  $\mathcal{S}(\ell q)$  la famille de ces  $a_{kk}^{(\ell q)}$  parties simples, avec la convention que  $\mathcal{S}(0) = \{Q\}$ . On a immédiatement  $H(k, P) = \xi^{\ell q \alpha} H(k, Q)$  pour tout  $P \in \mathcal{S}(\ell q)$ . Soit  $S(\ell q)$  la partie simple d'ordre  $(\ell + 1)q$  définie par  $S(\ell q) = \bigcup_{P \in \mathcal{S}(\ell q)} P$ . Alors  $H(k, S(\ell q)) = a_{kk}^{(\ell q)} \xi^{\ell q \alpha} H(k, Q)$ .

Soit  $E_k^*$  l'ensemble des points de  $E_k$  qui appartiennent à  $S(\ell q)$  pour une infinité de valeurs de  $\ell$ . Montrons que  $H(k, E_k^*) = 1$ . Pour simplifier, écrivons  $S_\ell$  à la place de  $S(\ell q)$  obtenant ainsi une suite  $\{S_\ell\}_{\ell=1}^\infty$  « d'événements » ayant chacun une probabilité donnée relativement à la mesure  $H(k, \cdot)$ . Pour démontrer qu'avec probabilité 1 il y a parmi les  $S_\ell$  une infinité d'événements qui se « réalisent » (i.e. que  $H(k, E_k^*) = 1$ ) il suffit

d'après une extension du second lemme de Borel-Cantelli ([1] p. 272) de vérifier que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$a) \sum_{\ell=1}^{\infty} H(k, S_{\ell}) = \infty, \quad b) \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j,s=1}^n H(k, S_j \cap S_s)}{\left( \sum_{j=1}^n H(k, S_j) \right)^2} = 1.$$

La condition a) est facilement vérifiée car

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} H(k, S_{\ell}) &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_{kk}^{(\ell q)} \xi^{\ell q \alpha} H(k, Q) \\ &= b_{kk} H(k, Q) > 0 \end{aligned}$$

puisque  $\xi^{\ell q \alpha} A^{\ell q} = \lambda^{-\ell q} A^{\ell q} \rightarrow B' > 0$  quand  $\ell \rightarrow \infty$ . Vérifions b).

Par définition de Q, il existe des entiers  $x_i \geq 0$  ( $i=1, \dots, v$ ) tels que

$$(6) \quad H(k, Q) = \sum_{i=1}^v x_i z_i \xi^{q \alpha}$$

(en fait  $x_i$  est le nombre de portions fondamentales dans Q semblables à  $E_i$  dans le rapport  $\xi^q$  où  $z_i = H^{\alpha}(E_i)/H^{\alpha}(E_k)$ ). La réunion des  $x_1$  « réductions » de  $E_1$ ,  $x_2$  « réductions » de  $E_2$ , ... et  $x_v$  « réductions » de  $E_v$  dans le rapport  $\xi^q$  composant Q engendre le nombre de portions fondamentales de type  $k$  et d'ordre  $\ell q$  donné par le produit de la  $k$ -ième ligne de  $A^{(\ell-1)q}$  par le vecteur  $(x_1, \dots, x_v)$ . D'après la définition de  $S_{\ell}$  on a donc

$$H(k, Q \cap S_{\ell}) = \sum_{i=1}^v x_i a_{ki}^{((\ell-1)q)} \xi^{\ell q \alpha} H(k, Q),$$

d'où

$$(7) \quad \begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{H(k, Q \cap S_{\ell})}{H(k, S_{\ell})} &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^v x_i a_{ki}^{((\ell-1)q)} \xi^{\ell q \alpha} H(k, Q)}{b_{kk} H(k, Q)} \\ &= \sum_{i=1}^v x_i b_{ik} b_{kk}^{-1} \xi^{q \alpha} \end{aligned}$$

car  $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi^{m \alpha} a_{ij}^{(m)} = b_{ji}$ . D'après la définition de la matrice B, on a  $A'B = \lambda B$  et le produit de B par un vecteur quelconque est alors un vecteur propre de  $A'$  associé à  $\lambda$ , donc un multiple scalaire du vecteur  $(z_1, \dots, z_v)$ . En particulier le produit de B par le vecteur  $(0, \dots, 0, b_{kk}^{-1}, 0, \dots, 0)$  (où  $b_{kk}^{-1}$  est la  $k$ -ième composante) donne le

vecteur propre  $(b_{1k}b_{kk}^{-1}, \dots, b_{vk}b_{kk}^{-1})$  dont la  $k$ -ième composante est  $b_{kk}b_{kk}^{-1} = 1$ . On en conclut donc que  $b_{ik}b_{kk}^{-1} = z_i$  pour  $i = 1, \dots, v$ . Alors la relation (7) devient  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} H(k, Q \cap S_\ell) / H(k, S_\ell) = H(k, Q)$ , d'après (6).

De plus, étant donné les « similitudes internes » de  $E_k$  on a pour tout  $j < s$ ,

$$H(k, S_j \cap S_s) = a_{kk}^{(jq)} \xi^{jq\alpha} H(k, Q \cap S_{s-j}).$$

Pour simplifier la notation posons  $e_{js} = H(k, S_j \cap S_s)$  et  $\gamma_s = H(k, S_s)$  de sorte que  $e_{js} = e_{sj}$  et  $e_{ss} = \gamma_s$  pour tout  $j, s \geq 1$  avec  $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma_s = b_{kk} H(k, Q) > 0$ . Pour vérifier la condition b) montrons qu'en fait on a

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j,s=1}^n e_{js} \right) / \sum_{j,s=1}^n \gamma_j \gamma_s = 1.$$

Posons  $a_n = \sum_{j,s=1}^n e_{js}$  et  $b_n = \sum_{j,s=1}^n \gamma_j \gamma_s$ . Alors (8) s'écrit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / b_n = 1$ . Puisque  $b_n \uparrow \infty$ , il suffit de montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) / (b_{n+1} - b_n) = 1$  (cf. [2], p. 153). On a

$$\begin{aligned} (a_{n+1} - a_n) / (b_{n+1} - b_n) &= \left( \sum_{s=1}^{n+1} e_{(n+1)s} + \sum_{j=1}^n e_{j(n+1)} \right) / \left( \sum_{s=1}^{n+1} \gamma_{n+1} \gamma_s + \sum_{j=1}^n \gamma_j \gamma_{n+1} \right) \\ &= \left( \gamma_{n+1} + 2 \sum_{j=1}^n e_{j(n+1)} \right) / \left( \gamma_{n+1}^2 + 2\gamma_{n+1} \sum_{j=1}^n \gamma_j \right). \end{aligned}$$

Puisque  $\gamma_{n+1}$  est borné et que  $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j = \infty$  il nous suffit de vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n e_{j(n+1)} \right) / \left( \gamma_{n+1} \sum_{j=1}^n \gamma_j \right) = 1.$$

On a

$$\begin{aligned} e_{j(n+1)} &= H(k, S_j \cap S_{n+1}) = a_{kk}^{(jq)} \xi^{jq\alpha} H(k, Q \cap S_{n+1-j}) \\ &= \gamma_j H(k, Q)^{-1} H(k, Q \cap S_{n+1-j}). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^n e_{j(n+1)} \right) / \left( \gamma_{n+1} \sum_{j=1}^n \gamma_j \right) &= \left( \sum_{j=1}^n \gamma_{n+1-j} H(k, Q \cap S_j) \right) / \left( H(k, Q) \gamma_{n+1} \sum_{j=1}^n \gamma_j \right). \end{aligned}$$

D'une part, en vertu de (7)

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} H(k, Q \cap S_j) &= (\lim_{j \rightarrow \infty} H(k, Q \cap S_j) / H(k, S_j)) (\lim_{j \rightarrow \infty} H(k, S_j)) \\ &= b_{kk} H(k, Q)^2 \end{aligned}$$

et d'autre part  $\gamma_n / \sum_{j=1}^n \gamma_j \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Par conséquent, selon le lemme de Toeplitz (cf. [1], p. 270) on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n \gamma_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^n \gamma_{n+1-j} H(k, Q \cap S_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} H(k, Q \cap S_j) = b_{kk} H(k, Q)^2.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n e_{j(n+1)} \right) / \left( \gamma_{n+1} \sum_{j=1}^n \gamma_j \right) = b_{kk} H(k, Q)^2 / (H(k, Q) \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{n+1}) = 1.$$

La condition b) est donc vérifiée. On peut alors conclure que  $H(k, E_k^*) = 1$  c'est-à-dire que  $H^\alpha(E_k^*) = H^\alpha(E_k)$ .

Pour chaque entier  $N \geq 1$ , définissons la famille  $\Omega_N = \bigcup_{\ell \geq N} \mathcal{S}(\ell q)$ .

On extrait de  $\Omega_N$  une sous-famille  $\Omega'_N$  de parties simples deux à deux disjointes en éliminant les parties simples qui sont contenues dans d'autres parties simples de  $\Omega_N$  d'ordre inférieur. De cette façon  $\Omega'_N$  demeure un recouvrement de  $E_k^*$  car toute partie simple  $P \in \Omega_N$  est contenue dans (ou égale à) au moins une partie simple de  $\Omega'_N$ . De plus, pour tout  $P \in \mathcal{S}(\ell q)$  on a  $|P|^\alpha = \xi^{\ell q \alpha} |Q|^\alpha$  et  $H(k, P) = \xi^{\ell q \alpha} H(k, Q)$  car  $P$  est semblable à  $Q$  dans le rapport  $\xi^{\ell q}$ , et par conséquent

$$|P|^\alpha = H(k, P) |Q|^\alpha / H(k, Q).$$

Donc

$$\sum_{P \in \Omega'_N} |P|^\alpha = \frac{|Q|^\alpha}{H(k, Q)} \sum_{P \in \Omega'_N} H(k, P) = \frac{|Q|^\alpha}{H(k, Q)} H(k, E_k^*) = \frac{|Q|^\alpha}{H(k, Q)}.$$

De plus, pour  $\rho > 0$  quelconque on a  $\max_{P \in \Omega'_N} |P| < \rho$  si  $N$  est suffisamment grand. Par conséquent  $|Q|^\alpha / H(k, Q) \geq H_\rho^\alpha(E_k^*)$  pour tout  $\rho > 0$ , et faisant  $\rho \downarrow 0$ , on obtient

$$|Q|^\alpha / H(k, Q) \geq H^\alpha(E_k^*) = H^\alpha(E_k), \text{ d'où } h \geq H^\alpha(E_k).$$

On peut donc conclure que  $h = H^\alpha(E_k)$  et le théorème est démontré.

En vertu du lemme 1 on a donc

COROLLAIRE 2. — Pour  $k = 1, \dots, v$

$$H^\alpha(E_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_n^{*(k)} \}.$$

PROPOSITION 4. — Si  $\alpha < 1$  (c'est-à-dire si  $\lambda \xi < 1$ ) alors

$$H^\alpha(E_k) = \min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_{n_k}^{*(k)} \} \quad (\text{pour } k = 1, \dots, v)$$

où

$$n_k = \min \{ n \geq 1 : \xi^{n(\alpha-1)} \geq \xi^{-1} \tau^{-1} (\max_{1 \leq i \leq v} z_i^{-1}) (\max_{1 \leq j \leq v} |E_j|) \},$$

$\tau$  désignant toujours la distance minimale entre deux portions fondamentales d'ordre  $p + 1$ , et  $(z_1, \dots, z_v)$  l'unique vecteur propre de  $A^t$  associé à  $\lambda$  tel que  $z_k = 1$ .

*Démonstration.* — On procède par récurrence. Fixons  $k$ .

*Hypothèse de récurrence :* Pour un certain entier  $m \geq n_k + 1$  on a

$$(9) \quad \min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_{n_k}^{*(k)} \} = \min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_{m-1}^{*(k)} \}.$$

*Étape de récurrence :* Soit  $P_0 \in \mathcal{F}_{m-1}^{*(k)}$ . A partir de  $P_0$  on construit des suites finies  $\{P_i\}$  de parties simples d'ordre  $m$  de la manière suivante : Pour un entier  $i \geq 0$ , supposons la partie simple (d'ordre  $m$ )  $P_i$  déjà définie et telle que  $P_i$  contienne au moins deux portions fondamentales  $K_{1,i}$  et  $K_{2,i}$  provenant d'une même portion fondamentale  $K'_i$  (pas nécessairement contenue dans  $P_i$ ) d'ordre  $m - 1$ . Nous supposons également que  $|P_i|^\alpha / H(k, P_i) \geq M$ , où  $M$  est le membre gauche de (9). Ces hypothèses sont immédiatement vérifiées pour  $i = 0$  car  $P_0 \in \mathcal{F}_{m-1}^{*(k)} \subset \mathcal{F}_m^{*(k)}$  et, en vertu de l'hypothèse de récurrence (sur l'ordre des parties simples), on a bien  $|P_0|^\alpha / H(k, P_0) \geq M$ . Posons  $P_{i+1} = P_i \setminus K_{1,i}$ .

Nous montrerons que  $|P_{i+1}|^\alpha / H(k, P_{i+1}) \geq M$ , et alors, puisque toute partie simple  $P \in \mathcal{F}_m^{*(k)}$  se retrouve comme élément d'une de ces suites de parties simples  $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$  (avec  $P_0 \in \mathcal{F}_{m-1}^{*(k)}$ ) décrites ci-dessus, nous pourrions conclure que

$$|P|^\alpha / H(k, P) \geq M \quad \text{pour tout } P \in \mathcal{F}_m^{*(k)}.$$

On a

$$P_i = (P_{i+1} \cup K_{1,i}) \subset (P_{i+1} \cup K'_i)$$

avec  $P_{i+1} \cap K_{1,i} = \emptyset$  et  $P_{i+1} \cap K'_i \neq \emptyset$  car  $(P_{i+1} \cap K'_i) \supset K_{2,i}$ .  
Supposons que  $K_{1,i}$  soit de type  $j_1$  et  $K'_i$  de type  $j_2$ , de sorte que

$$|K_{1,i}| = \xi^m |E_{j_1}| \quad \text{et} \quad |K'_i| = \xi^{m-1} |E_{j_2}|.$$

Posons  $y = \xi^m$ . Alors on a

$$H(k, P_i) = H(k, P_{i+1}) + H(k, K_{1,i}) = H(k, P_{i+1}) + y^\alpha z_{j_1}$$

et

$$|P_i| = |P_{i+1} \cup K_{1,i}| \leq |P_{i+1} \cup K'_i| \leq |P_{i+1}| + |K'_i| = |P_{i+1}| + y |E_{j_2}| \xi^{-1}$$

d'où

$$(10) \quad |P_i|^\alpha / H(k, P_i) \leq (|P_{i+1}| + y |E_{j_2}| \xi^{-1})^\alpha / (H(k, P_{i+1}) + y^\alpha z_{j_1}).$$

Posons

$$\psi(t) = (|P_{i+1}| + t |E_{j_2}| \xi^{-1})^\alpha / (H(k, P_{i+1}) + t^\alpha z_{j_1}),$$

où  $t \in [0, y]$ . Alors la dérivée  $\psi'(t) \leq 0$  si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \alpha (|P_{i+1}| + t |E_{j_2}| \xi^{-1})^{\alpha-1} |E_{j_2}| \xi^{-1} (H(k, P_{i+1}) + t^\alpha z_{j_1}) \\ \leq (|P_{i+1}| + t |E_{j_2}| \xi^{-1})^\alpha \alpha t^{\alpha-1} z_{j_1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$|E_{j_2}| \xi^{-1} z_{j_1}^{-1} H(k, P_{i+1}) |P_{i+1}|^{-1} \leq t^{\alpha-1},$$

ce qui est immédiatement vérifié car (tenant compte des inégalités  $H(k, P_{i+1}) \leq 1$  et  $|P_{i+1}| \geq \tau$ ) on a

$$\begin{aligned} |E_{j_2}| \xi^{-1} z_{j_1}^{-1} H(k, P_{i+1}) |P_{i+1}|^{-1} &\leq |E_{j_2}| \xi^{-1} z_{j_1}^{-1} \tau^{-1} \\ &\leq \xi^{n_k(\alpha-1)} < \xi^{m(\alpha-1)} = y^{\alpha-1} \leq t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent  $\psi(y) \leq \psi(0)$ , c'est-à-dire

$$(11) \quad (|P_{i+1}| + y |E_{j_2}| \xi^{-1})^\alpha / (H(k, P_{i+1}) + y^\alpha z_{j_1}) \leq |P_{i+1}|^\alpha / H(k, P_{i+1}).$$

En combinant (10) et (11) on obtient  $|P_{i+1}|^\alpha / H(k, P_{i+1}) \geq M$ , ce qui complète l'étape de récurrence et termine la démonstration.

#### 4. Sur les familles de A-parfaits de $\mathbf{R}$ .

Nous pouvons élargir quelque peu la définition d'une famille de A-parfaits *linéaires*, c'est-à-dire inclus dans  $\mathbf{R}$ .

*Notion de portions « essentiellement disjointes »* : Deux parties  $S_1$  et  $S_2$  d'un ensemble  $S \subset \mathbf{R}$  seront appelées des portions essentiellement disjointes de  $S$  s'il existe deux intervalles fermés  $I_1$  et  $I_2$  tels que  $S_1 = S \cap I_1$  et  $S_2 = S \cap I_2$  avec  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ . Donc en particulier  $S_1 \cap S_2$  est soit vide, soit réduit à un seul point.

*Famille de A-parfaits « au sens large »* : Dans le cas des familles de A-parfaits de  $\mathbf{R}$  on peut, dans la définition initiale, remplacer le qualificatif « disjointes » attribué aux portions fondamentales par « essentiellement disjointes ». Nous parlerons alors de familles de A-parfaits « au sens large » de  $\mathbf{R}$  (par opposition à la notion de A-parfaits « au sens strict » qui correspondra à la définition originale).

Soit  $\{E_k\}_{k=1}^v$  une famille de A-parfaits au sens large de  $\mathbf{R}$ . Une partie simple  $P \in \mathcal{F}_n^{(k)}$  est formée de portions fondamentales *consécutives* si  $|P \cup K| > |P|$  pour toute portion fondamentale  $K$  d'ordre  $n$  telle que  $K \not\subset P$ . Notons par  $\mathcal{F}_n^{*(k)}$  la sous-famille de  $\mathcal{F}_n^{(k)}$  des parties simples formées de portions fondamentales consécutives. Alors  $f_k(P)$  étant défini comme pour les A-parfaits au sens strict, on a

$$\min \{ |P|^\alpha / f_k(P) : P \in \mathcal{F}_n^{(k)} \} = \min \{ |P|^\alpha / f_k(P) : P \in \mathcal{F}_n^{*(k)} \}$$

car pour tout  $P \in \mathcal{F}_n^{*(k)}$  il existe  $P' \in \mathcal{F}_n^{(k)}$  telle que  $|P'| = |P|$  et  $f_k(P') \geq f_k(P)$ .

La démonstration de la proposition 3 n'est valable que pour les A-parfaits au sens strict. L'énoncé, qui toutefois demeure vrai pour les A-parfaits au sens large, est démontré maintenant comme suit :

**PROPOSITION 5.** — Soit  $\{E_k\}_{k=1}^v$  une famille de A-parfaits au sens large sur la droite réelle. Conservant les notations des paragraphes précédents établies pour les A-parfaits au sens strict, on a  $0 < H^\alpha(E_k) < \infty$  (d'où  $\dim E_k = \alpha$ ) pour  $k = 1, \dots, v$ .

*Démonstration.* — Fixons  $k$ . En vertu de la proposition 1 (valable pour les A-parfaits au sens large) on a  $H^\alpha(E_k) < \infty$ . Montrons que  $H^\alpha(E_k) > 0$ .

Arrangeons en ordre décroissant les diamètres respectifs des portions fondamentales de  $E_k$ :

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3 \geq \dots$$

Soit  $P$  une partie simple de diamètre  $d$ , et  $r$  un indice vérifiant

$$\gamma_r \geq d \geq \gamma_{r+1}.$$

Soit  $I$  un intervalle fermé de rayon  $2d$  centré en un point quelconque de  $P$ . Notons  $m$  le plus petit entier  $\geq 2$  tel que  $\xi^{1-m} \geq \max_{1 \leq r, s \leq v} |E_r|/|E_s|$ .

Considérons la famille des portions fondamentales  $K \subset I$  telles que

$$(12) \quad \gamma_{r+1} \geq |K| \geq \gamma_{r+1} \xi^m$$

et choisies selon la règle suivante : si  $K$  et  $K'$  vérifient (12), et si  $K \subset K'$ , nous ne retenons que  $K'$ .

Notons  $\{K_i\}_{i=1}^q$  cette famille de portions fondamentales essentiellement disjointes. Montrons qu'elle constitue un recouvrement de  $P$ . En effet, pour un point quelconque  $x \in P$ , soit  $K_x$  une portion fondamentale de  $E_k$  d'ordre minimal contenant  $x$  et de diamètre  $\leq \gamma_{r+1}$ . Notons par  $n$  l'ordre de  $K_x$ .

Si  $\gamma_{r+1} \xi^m > |K_x|$ , appelons  $K'_x$  la portion fondamentale d'ordre  $n-1$  qui engendre  $K_x$ . Il existe alors deux indices  $j_1$  et  $j_2$  tels que  $|K'_x| = \xi^{n-1} |E_{j_1}|$  et  $|K_x| = \xi^n |E_{j_2}|$ , d'où (vu la définition de  $m$ )

$$|K'_x| = |K_x| \xi^{-1} |E_{j_1}| / |E_{j_2}| \leq |K_x| \xi^{-m}.$$

Par conséquent

$$\gamma_{r+1} \xi^m > |K_x| \geq \xi^m |K'_x|,$$

d'où  $\gamma_{r+1} > |K'_x|$ , contredisant le caractère minimal de l'ordre de  $K_x$ . Donc  $|K_x| \geq \gamma_{r+1} \xi^m$ , d'où  $K_x$  appartient à la famille  $\{K_i\}_{i=1}^q$ .

Si  $K_i$  est de type  $j$  et d'ordre  $n$ , on a  $|K_i| = \xi^n |E_j|$ , et  $f_k(K_i) = \xi^{n\alpha} z_j = z_j |K_i|^\alpha / |E_j|^\alpha$ . D'où

$$f_k(K_i) \leq C_1 |K_i|^\alpha \leq C_1 \gamma_{r+1}^\alpha, \text{ où } C_1 = \max_{1 \leq j \leq v} z_j / |E_j|^\alpha,$$

compte tenu de (12). D'autre part, puisque les  $K_i$  sont essentiellement disjointes, et d'après (12), on a

$$q \gamma_{r+1} \xi^m \leq \sum_{i=1}^q |K_i| \leq |I| = 4d,$$

d'où

$$(13) \quad q \leq 4d/(\gamma_{r+1}\xi^m).$$

D'autre part  $\gamma_r$  est le diamètre d'une portion fondamentale  $K$  que nous supposerons d'ordre  $\ell$  et de type  $j$ . Alors  $\gamma_r = \varepsilon' |E_j|$ . Soit  $\tilde{K}$  une portion fondamentale d'ordre  $\ell + 1$  et de type  $s$  engendrée par  $K$ . Alors, par définition de  $\gamma_{r+1}$ , on a

$$\gamma_{r+1} \geq |\tilde{K}| = \xi^{\ell+1} |E_s| = \gamma_r \xi |E_s| / |E_j|,$$

d'où

$$(14) \quad \gamma_r / \gamma_{r+1} \leq C_2 \xi^{-1},$$

où  $C_2 = \max_{1 \leq s, j \leq v} |E_j| / |E_s|$ .

Comme  $P \subset \bigcup_{i=1}^q K_i$ , et en vertu de (12), (13) et (14) on obtient

$$\begin{aligned} f_k(P) &\leq \sum_{i=1}^q f_k(K_i) \leq q C_1 \gamma_{r+1}^\alpha \leq 4d C_1 \gamma_{r+1}^\alpha / (\gamma_{r+1} \xi^m) \\ &\leq 4\gamma_r C_1 d^\alpha / (\gamma_{r+1} \xi^m) \leq 4C_1 C_2 \xi^{-m-1} |P|^\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$|P|^\alpha / f_k(P) \geq \xi^{m+1} / (4C_1 C_2) > 0.$$

De plus, comme pour les A-parfaits au sens strict (voir la démonstration de la proposition 3), on a

$$H^\alpha(E_k) \geq h = \inf \{ |P|^\alpha / f_k(P) : P \in \mathcal{F}_n^{(k)}, n \geq 1 \}.$$

D'où  $H^\alpha(E_k) \geq \xi^{m+1} / (4C_1 C_2) > 0$ .

*Remarque 2.* — Cette méthode est utilisée par P.A.P. Moran [7] pour les parfaits isotypiques. La proposition 3 (sur les A-parfaits au sens strict de  $\mathbf{R}^N$ ) peut se démontrer aussi par cette technique et donc sans faire intervenir la distance  $\tau$ .

Les résultats précédents, sauf la proposition 4, demeurent les mêmes, qu'il s'agisse de A-parfaits linéaires au sens strict ou au sens large. Pour ces derniers, toutefois, nous avons plus spécifiquement le résultat suivant :

**PROPOSITION 6.** — Soit  $\{E_k\}_{k=1}^v$  une famille de A-parfaits au sens large de  $\mathbf{R}$ . Pour  $k = 1, \dots, v$ , notons par  $[a_k, b_k]$  l'enveloppe convexe de  $E_k$ . Soit  $\theta_k$  la longueur maximale d'un sous-intervalle ouvert de  $[a_k, b_k]$  contigu

à  $E_k$ . Supposons que pour  $k = 1, \dots, v$ , les deux portions fondamentales de  $E_k$  d'ordre 1 contenant  $a_k$  et  $b_k$  respectivement soient de type  $k$ . Posons  $\theta = \max_k \theta_k$ . Alors

$$(15) \quad H^\alpha(E_k) = \min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_{n_k}^{(k)} \}, \quad (k=1, \dots, v)$$

où

$$n'_k = \min \{ n \geq 1 : \xi^{n(\alpha-1)} \geq \xi^{-p-2} (\max_j |E_j|^{-1}) (\max_i z_i^{-1}) (\theta \xi^{-1} + \max_j |E_j|) \},$$

( $z_1, \dots, z_v$ ) désignant le vecteur propre de  $A^t$  associé à  $\lambda$  tel que  $z_k = 1$ .

*Remarque 3.* — Si  $\{E_k\}_{k=1}^v$  n'est pas réduit à une famille d'intervalles, c'est-à-dire si au moins deux des portions fondamentales d'un  $E_k$  (et donc de chaque  $E_k$ ) sont « strictement » disjointes alors  $\alpha$  (qui est la dimension de Hausdorff des  $E_k$ ) est  $< 1$ . En effet dans cette hypothèse, il existe  $n$  tel que

$$|E_k| > \sum_{j=1}^v a_{jk}^{(n)} \xi^n |E_j| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \xi^{-n} > \sum_{j=1}^v a_{jk}^{(n)} |E_j| |E_k|^{-1}$$

pour  $k = 1, \dots, v$ . D'autre part  $\lambda^n$ , la valeur propre réelle maximale de  $A^n$ , possède la caractérisation suivante ([8]) :

$$\lambda^n = \inf \left\{ \max_k \sum_{j=1}^v a_{jk}^{(n)} x_j x_k^{-1} : (x_1, \dots, x_v) \text{ positif quelconque} \right\}.$$

Par conséquent  $\lambda < \xi^{-1}$ , d'où  $\alpha < 1$ . Nous considérerons donc toujours des  $A$ -parfaits « non-dégénérés » de  $\mathbf{R}$ , qui sont alors de dimension  $\alpha < 1$ .

*Démonstration de la proposition.* — Posons

$$\mathcal{L}_n^{(k)} = \{ P \in \mathcal{F}_n^{(k)} : |P| \geq \xi^{p+2} \min_i |E_i| \}.$$

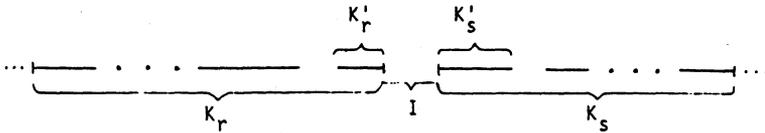
Montrons que pour  $n \geq 1$  et  $k = 1, \dots, v$  on a

$$(16) \quad \min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_n^{(k)} \} = \min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{L}_n^{(k)} \}.$$

Soient  $K_r$  et  $K_s$  deux portions fondamentales consécutives de  $E_k$  d'ordre  $p+1$  de types  $r$  et  $s$  respectivement.

Soit  $K'_r$  la portion fondamentale d'ordre  $p+2$  contenant l'extrémité droite de  $K_r$ , et soit  $K'_s$  la portion fondamentale d'ordre  $p+2$

contenant l'extrémité gauche de  $K_s$ . Par hypothèse  $K'_r$  et  $K'_s$  sont de types  $r$  et  $s$  respectivement.



Dans le diagramme ci-dessus les segments représentent les portions fondamentales.  $I$  désigne l'intervalle ouvert séparant  $K_r$  et  $K_s$  lorsque ces derniers sont disjoints ou bien l'ensemble vide si  $K_r$  et  $K_s$  sont contigus. Soit  $P \in \mathcal{F}_n^{(k)}$  vérifiant  $P \subset K'_r \cup K'_s$  avec  $P \cap K'_r \neq \emptyset$  et  $P \cap K'_s \neq \emptyset$ . Posons  $P_1 = P \cap K'_r$  et  $P_2 = P \cap K'_s$ . Alors, en posant  $\delta = \text{dist}(P_1, P_2)$  (de sorte que  $\delta \geq |I|$ ) on a  $|P| = |P_1| + |P_2| + \delta$  et  $H(k, P) = H(k, P_1) + H(k, P_2)$ . Pour  $i = 1$  et  $2$ ,  $P_i$  est la réduction dans le rapport  $\xi$  d'une partie simple  $\tilde{P}_i \in \mathcal{F}_{n-1}^{(k)}$  avec  $\tilde{P}_1 \subset K_r$  et  $\tilde{P}_2 \subset K_s$ . Par conséquent

$$|P|^\alpha / H(k, P) = (\xi|\tilde{P}_1| + \xi|\tilde{P}_2| + \delta)^\alpha / (\xi^\alpha H(k, \tilde{P}_1) + \xi^\alpha H(k, \tilde{P}_2))$$

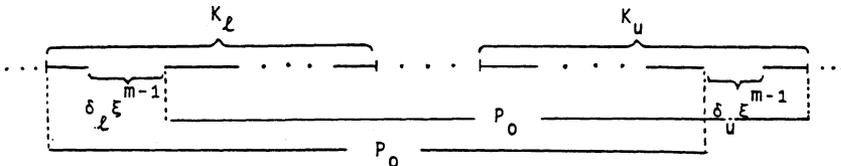
$$= (|\tilde{P}_1| + |\tilde{P}_2| + \delta \xi^{-1})^\alpha / (H(k, \tilde{P}_1) + H(k, \tilde{P}_2)) \geq |\tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2|^\alpha / H(k, \tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2)$$

(l'égalité ne prévalant dans la troisième relation que si  $I = \emptyset$ ), où  $\tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2 \in \mathcal{F}_{n-1}^{(k)} \subset \mathcal{F}_n^{(k)}$ . Si  $|\tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2| < \xi^{p+2} \min |E_i|$ , on répète le même raisonnement avec  $\tilde{P}_1 \cup \tilde{P}_2$  comme nouveau  $P$ , et après un nombre fini de répétitions, la partie simple finalement obtenue « touchera » au moins 3 portions fondamentales consécutives d'ordre  $p + 2$ , ce qui démontre (16). Pour démontrer (15) procédons par récurrence. Fixons  $k$ .

*Hypothèse de récurrence :* pour un certain entier  $m \geq n'_k + 1$  on a

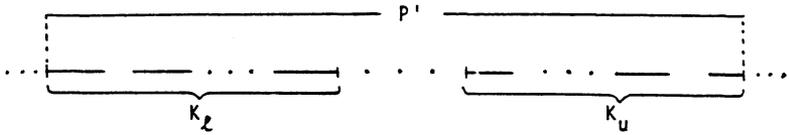
$$\min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{L}_{n'_k}^{(k)} \} = \min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{L}_{m-1}^{(k)} \}.$$

*Étape de récurrence :* 1) Soit  $P_0 \in \mathcal{L}_m^{(k)}$  une partie simple occupant l'une ou l'autre des deux positions symétriques suivantes :



où  $K_\ell$  et  $K_u$  sont des portions fondamentales d'ordre  $m - 1$  et de types  $\ell$  et  $u$  respectivement. De plus,  $\delta_\ell$  (respectivement  $\delta_u$ ) est la distance

entre les deux premières (respectivement dernières) portions fondamentales consécutives d'ordre 1 de  $E_\ell$  (respectivement  $E_u$ ). Soit  $P' \in \mathcal{L}_{m-1}^{(k)}$  la partie simple définie par le diagramme suivant :



Donc on a, selon l'une ou l'autre des deux positions considérées de  $P_0$ ,  $|P'| = |P_0| + \xi^m |E_j| + \delta_j \xi^{m-1}$  pour  $j = \ell$  ou  $u$ . Posons  $y = \xi^m$ . Alors pour  $j = \ell$  ou  $u$ ,

$$|P'|^\alpha / H(k, P') = (|P_0| + (|E_j| + \delta_j \xi^{-1})y)^\alpha / (H(k, P_0) + y^\alpha z_j).$$

Posons  $\psi(t) = (|P_0| + (|E_j| + \delta_j \xi^{-1})t)^\alpha / (H(k, P_0) + t^\alpha z_j)$  où  $t \in [0, y]$ . Alors  $\psi'(t) \leq 0$  si et seulement si

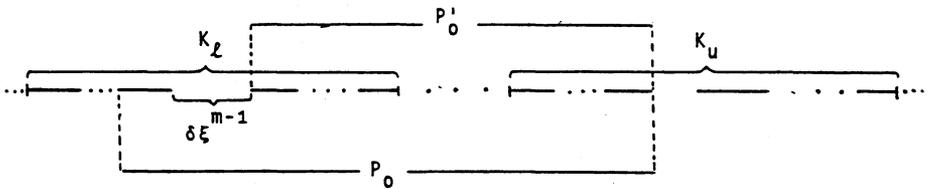
$$H(k, P_0)(|E_j| + \delta_j \xi^{-1})z_j^{-1} / |P_0| \leq t^{\alpha-1},$$

ce qui est vérifié car

$$\begin{aligned} & H(k, P_0)(|E_j| + \delta_j \xi^{-1})z_j^{-1} / |P_0| \\ & \leq (\max_j |E_j| + \theta \xi^{-1})(\max_i z_i^{-1}) / \xi^{p+2} \min_i |E_i| \leq \xi^{nk(\alpha-1)} < y^{\alpha-1} \leq t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent  $\psi(y) \leq \psi(0)$ , c'est-à-dire  $|P'|^\alpha / H(k, P') \leq |P_0|^\alpha / H(k, P_0)$ . Par hypothèse de récurrence on a donc  $|P_0|^\alpha / H(k, P_0) \geq M$ , où  $M$  désigne le membre droit de (15).

2) Pour compléter l'étape de récurrence, il faut considérer la situation suivante : soient  $P_0$  et  $P'_0 \in \mathcal{L}_m^{(k)}$  des parties simples situées comme suit (ou dans la position symétrique) :



Supposons que  $|P_0|^\alpha / H(k, P_0) \geq M$ . Alors pour un certain indice  $r$  et un certain nombre  $\delta > 0$  (qui est la longueur d'un sous-intervalle ouvert de

$[a_r, b_r]$  contigu à  $E_r$ ,

$$|P_0| = |P'_0| + \xi^m |E_r| + \xi^{m-1} \delta.$$

En posant  $y = \xi^m$ , on a

$$|P_0|^\alpha / H(k, P_0) = (|P'_0| + (|E_r| + \delta \xi^{-1}) y)^\alpha / (H(k, P'_0) + y^\alpha z_r).$$

Par le même calcul qu'en partie 1) on obtient

$$|P'_0|^\alpha / H(k, P'_0) \geq |P_0|^\alpha / H(k, P_0).$$

Par conséquent,

$$\min \{|P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{L}_m^{(k)}\} = M,$$

et compte tenu du corollaire 2, la proposition est démontrée.

*Remarque 4.* — Puisqu'en vertu de la proposition 1, pour tout  $\rho > 0$  on a  $H_\rho^\alpha(E_k) = H^\alpha(E_k)$ , alors  $H^\alpha(E_k) \leq |E_k|^\alpha$ ,  $k = 1, \dots, v$ . Compte tenu de la proposition suivante,  $|E_k|^\alpha$  est donc la valeur maximale (possible) de  $H^\alpha(E_k)$ .

**PROPOSITION 7.** — Soit  $\{E_k\}_{k=1}^v$  une famille de  $A$ -parfaits au sens large de  $\mathbf{R}$  pour laquelle  $(|E_1|^\alpha, \dots, |E_v|^\alpha)$  est un vecteur propre de  $A'$  associé à  $\lambda$ . Alors on a les relations simultanées  $H^\alpha(E_k) = |E_k|^\alpha$ ,  $k = 1, \dots, v$ , c'est-à-dire

$$(H^\alpha(E_1), \dots, H^\alpha(E_v)) = (|E_1|^\alpha, \dots, |E_v|^\alpha)$$

si et seulement si

$$(17) \quad \min \{|P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_1^{(k)}\} = |E_k|^\alpha, \quad (k=1, \dots, v).$$

*Remarque 5.* — Quand  $(|E_1|^\alpha, \dots, |E_v|^\alpha)$  est un vecteur propre de  $A'$  associé à  $\lambda$ , il est impossible d'avoir  $H^\alpha(E_i) = |E_i|^\alpha$  pour un indice  $i$  sans l'avoir pour tous car  $(H^\alpha(E_1), \dots, H^\alpha(E_v))$  est aussi un vecteur propre de  $A'$  associé à  $\lambda$ .

*Démonstration de la proposition.* — On a d'après le corollaire 2 et la définition de  $\mathcal{F}_n^{(k)}$

$$H^\alpha(E_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min \{|P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_n^{(k)}\}, \quad (k=1, \dots, v).$$

Donc si  $|P|^\alpha / H(k, P) < |E_k|^\alpha$  pour un certain  $P \in \mathcal{F}_1^{(k)}$ , alors  $H^\alpha(E_k) < |E_k|^\alpha$ . Réciproquement montrons que (17) implique que

$H^\alpha(E_k) = |E_k|^\alpha$  pour  $k = 1, \dots, v$ . On procède par récurrence. Fixons  $k$ .

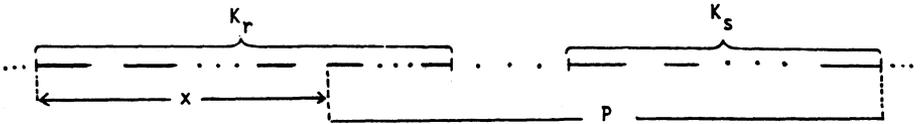
*Hypothèse de récurrence* : Soit  $m \geq 1$  un entier fixé tel que

$$\min \{ |P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_m^{(k)} \} = |E_k|^\alpha.$$

Ayant supposé (17), cette hypothèse est vérifiée pour  $m = 1$ .

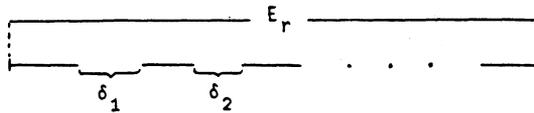
*Étape de récurrence* : Montrons que  $|P|^\alpha / H(k, P) \geq |E_k|^\alpha$  quel que soit  $P \in \mathcal{F}_{m+1}^{(k)} \setminus \mathcal{F}_m^{(k)}$ .

1) Supposons qu'une seule des deux extrémités de l'enveloppe convexe de  $P$  coïncide avec une extrémité de portion fondamentale d'ordre  $m$ , tel qu'indiqué sur le diagramme suivant :



où  $K_r$  et  $K_s$  sont des portions fondamentales d'ordre  $m$  et de types  $r$  et  $s$  respectivement.

Soit  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\ell$  les longueurs des intervalles ouverts (énumérés de gauche à droite) situés dans  $E_r$  et séparant les portions fondamentales d'ordre 1. En l'occurrence,  $\ell = \left( \sum_{j=1}^v a_{j,r} \right) - 1$ .



Alors pour un certain choix d'indices  $j_i \in \{1, \dots, v\}$ , la distance  $x$  est donnée par  $x = \xi^m (\xi |E_{j_1}| + \dots + \xi |E_{j_q}| + \delta_1 + \dots + \delta_q)$  pour un certain  $q \geq 1$ . Posons  $y = \xi^{(m+1)\alpha} (z_{j_1} + \dots + z_{j_q})$ , où  $(z_1, \dots, z_v)$  est le vecteur propre de  $A^t$  associé à  $\lambda$  tel que  $z_k = 1$ . Posons également  $V = |P|$  et  $v = H(k, P)$ . Par hypothèse de récurrence on a

$$(V + x)^\alpha / (v + y) \geq |E_k|^\alpha,$$

c'est-à-dire,

$$(18) \quad V \geq |E_k| (v + y)^{1/\alpha} - x.$$

Il nous faut vérifier que  $V^\alpha/v \geq |E_k|^\alpha$ , c'est-à-dire que  $V \geq |E_k|v^{1/\alpha}$ . En vertu de (18) il suffira de vérifier que

$$|E_k|(v+y)^{1/\alpha} - x \geq |E_k|v^{1/\alpha},$$

c'est-à-dire,

$$|E_k|((v+y)^{1/\alpha} - v^{1/\alpha}) \geq x$$

qui s'écrit aussi

$$|E_k|([v + \xi^{(m+1)\alpha} \sum_{i=1}^q z_{j_i}]^{1/\alpha} - v^{1/\alpha}) \geq x$$

ou encore

$$(19) \quad |E_k|\{[v\xi^{-m\alpha} + \xi^\alpha \sum_{i=1}^q z_{j_i}]^{1/\alpha} - (v\xi^{-m\alpha})^{1/\alpha}\} \geq x\xi^{-m}.$$

La partie simple  $P$  contient des portions fondamentales de diamètres  $\xi^{m+1}|E_{j_{q+1}}|, \dots, \xi^{m+1}|E_{j_{\ell+1}}|$  de sorte que  $v \geq \xi^{(m+1)\alpha}(z_{j_{q+1}} + \dots + z_{j_{\ell+1}})$ , c'est-à-dire

$$(20) \quad v\xi^{-m\alpha} \geq \xi^\alpha(z_{j_{q+1}} + \dots + z_{j_{\ell+1}}).$$

Par ailleurs, on observe que pour toute constante  $C > 0$  la fonction  $(t+C)^{1/\alpha} - t^{1/\alpha}$  est croissante sur  $[0, \infty[$ . Pour démontrer (19) il suffit donc en vertu de (20) de vérifier que

$$|E_k|\{[\xi^\alpha(z_{j_{q+1}} + \dots + z_{j_{\ell+1}}) + \xi^\alpha \sum_{i=1}^q z_{j_i}]^{1/\alpha} - [\xi^\alpha(z_{j_{q+1}} + \dots + z_{j_{\ell+1}})]^{1/\alpha}\}$$

est  $\geq x\xi^{-m}$ , c'est-à-dire

$$|E_k|\{(\xi^\alpha \sum_{i=1}^{\ell+1} z_{j_i})^{1/\alpha} - \xi^\alpha(z_{j_{q+1}} + \dots + z_{j_{\ell+1}})^{1/\alpha}\} \geq x\xi^{-m},$$

ce qui s'écrit plus simplement

$$(21) \quad |E_k|z_r^{1/\alpha} - |E_k|\xi(z_{j_{q+1}} + \dots + z_{j_{\ell+1}})^{1/\alpha} \geq x\xi^{-m}$$

car  $\sum_{i=1}^{\ell+1} \xi^\alpha z_{j_i} = \sum_{i=1}^{\ell+1} \xi^\alpha H^\alpha(E_{j_i})/H^\alpha(E_k) = H^\alpha(E_r)/H^\alpha(E_k) = z_r$ .

D'autre part, d'après l'hypothèse (17),  $|P'|^\alpha/H(r, P') \geq |E_r|^\alpha$  pour tout  $P' \in \mathcal{F}_1^{(r)}$ . Donc, en particulier, si  $P' \in \mathcal{F}_1^{(r)}$  est la partie simple de

diamètre  $\sum_{i=q+1}^{\ell} (\xi|E_{j_i}| + \delta_i) + \xi|E_{j_{\ell+1}}|$  semblable à  $P \cap K_r$  dans le rapport  $\xi^m$ , on a

$$(22) \quad \left[ \sum_{i=q+1}^{\ell} (\xi|E_{j_i}| + \delta_i) + \xi|E_{j_{\ell+1}}| \right]^{\alpha} / \xi^{\alpha} z_r^{-1} (z_{j_{q+1}} + \dots + z_{j_{\ell+1}}) \geq |E_r|^{\alpha}$$

car si  $K$  est une portion fondamentale de  $E_r$  d'ordre 1 et de type  $j$ ,  $H(r, K) = H^{\alpha}(K)/H^{\alpha}(E_r) = \xi^{\alpha} H^{\alpha}(E_j)/(z_r H^{\alpha}(E_k)) = \xi^{\alpha} z_r^{-1} z_j$ . De plus, compte tenu de l'hypothèse de l'énoncé, on a

$$(|E_1|^{\alpha}, \dots, |E_v|^{\alpha}) = |E_k|^{\alpha} (z_1, \dots, z_v) \quad \text{car} \quad z_k = 1.$$

D'où, en particulier,  $|E_k|^{\alpha} = z_r^{-1} |E_r|^{\alpha}$ . Par conséquent (22) s'écrit

$$\left[ \sum_{i=q+1}^{\ell} (\xi|E_{j_i}| + \delta_i) + \xi|E_{j_{\ell+1}}| \right]^{\alpha} \geq |E_k|^{\alpha} \xi^{\alpha} (z_{j_{q+1}} + \dots + z_{j_{\ell+1}})$$

c'est-à-dire

$$- |E_k| \xi (z_{j_{q+1}} + \dots + z_{j_{\ell+1}})^{1/\alpha} \geq - \sum_{i=q+1}^{\ell} (\xi|E_{j_i}| + \delta_i) - \xi|E_{j_{\ell+1}}|$$

d'où

$$|E_k| z_r^{1/\alpha} - |E_k| \xi (z_{j_{q+1}} + \dots + z_{j_{\ell+1}})^{1/\alpha} \geq |E_k| z_r^{1/\alpha} - \sum_{i=q+1}^{\ell} (\xi|E_{j_i}| + \delta_i) - \xi|E_{j_{\ell+1}}|.$$

Donc (21) sera démontré si l'on vérifie

$$|E_k| z_r^{1/\alpha} - \sum_{i=q+1}^{\ell} (\xi|E_{j_i}| + \delta_i) - \xi|E_{j_{\ell+1}}| \geq x \xi^{-m},$$

c'est-à-dire (puisque  $x \xi^{-m} = \sum_{i=1}^q (\xi|E_{j_i}| + \delta_i)$ ),

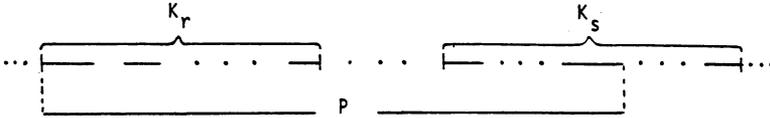
$$|E_k| z_r^{1/\alpha} \geq \sum_{i=1}^{\ell} (\xi|E_{j_i}| + \delta_i) + \xi|E_{j_{\ell+1}}|$$

ce qui s'écrit simplement

$$|E_k| z_r^{1/\alpha} \geq |E_r|$$

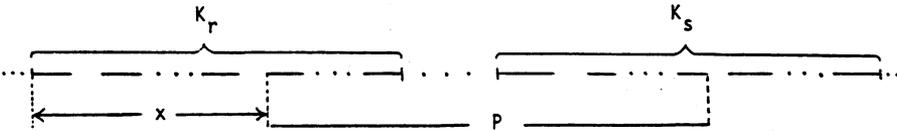
et est immédiatement vérifié car  $|E_k|^{\alpha} z_r = |E_r|^{\alpha}$ .

Lorsque la position de P est symétrique à la précédente, tel qu'illustré par le diagramme



il suffit de changer l'ordre d'indexation des  $E_{j_i}$  et des  $\delta_i$ , et le raisonnement ci-dessus s'applique tel quel.

2) Supposons maintenant qu'aucune des extrémités de l'enveloppe convexe de P ne coïncide avec une extrémité de portion fondamentale d'ordre  $m$ , tel que représenté sur le diagramme



où  $x = \xi^m \sum_{i=1}^q (\xi |E_{j_i}| + \delta_i)$  pour un certain  $q \geq 1$  et un certain choix d'indices  $j_i \in \{1, \dots, v\}$ . Posons de nouveau

$$y = \xi^{(m+1)\alpha} (z_{j_1} + \dots + z_{j_q}) \quad \text{avec } V = |P| \quad \text{et } v = H(k, P).$$

En vertu de la partie 1) de la démonstration, on a

$$(V + x)^\alpha / (v + y) \geq |E_k|^\alpha.$$

Pour en déduire que  $V^\alpha / v \geq |E_k|^\alpha$  on applique directement le même raisonnement qu'en 1), ce qui complète l'étape de récurrence et termine la démonstration.

### 5. Exemples de A-parfaits linéaires.

I) *A-parfaits de mesure de Hausdorff maximale.* Considérons la matrice symétrique  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  de polynôme caractéristique  $t^2 - 3t + 1$ . Pour cette matrice,  $\lambda = (3 + \sqrt{5})/2$ . L'espace  $V_\lambda$  des vecteurs propres associés à  $\lambda$  est engendré par le vecteur  $\vec{v} = (1, \lambda - 1) = (1, \theta)$ , où

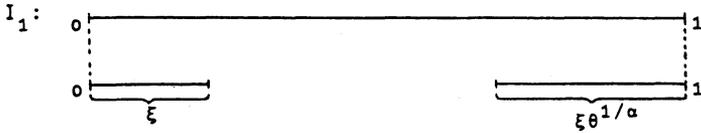
$\theta = (1 + \sqrt{5})/2$ , le nombre d'or. Posons

$$\alpha = \log \lambda / \log \xi^{-1} = \log (\theta + 1) / \log \xi^{-1} = 2 \log \theta / \log \xi^{-1}.$$

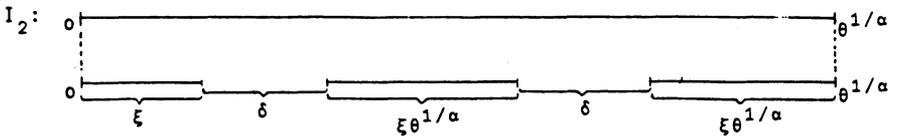
Déterminons une famille de deux A-parfaits  $\{E_1, E_2\}$  telle que  $(|E_1|^\alpha, |E_2|^\alpha) \in V_\lambda$ .

Nous construisons  $E_1$  et  $E_2$  à partir des intervalles  $I_1 = [0, 1]$  et  $I_2 = [0, \theta^{1/\alpha}]$  respectivement de sorte que  $(|E_1|^\alpha, |E_2|^\alpha) = (1, \theta) \in V_\lambda$ .

A la suite d'une dissection qui consiste à enlever de  $I_1$  un intervalle ouvert (noir, selon la terminologie de [4]),  $I_1$  engendre deux intervalles (blancs, selon [4]), l'un semblable à  $I_1$  et l'autre à  $I_2$  dans le rapport  $\xi$  (où  $\xi < \lambda^{-1}$ ), et dans les positions indiquées ci-dessous :



Par une dissection d'un type différent qui consiste cette fois à enlever de  $I_2$  deux intervalles noirs disjoints de même longueur,  $I_2$  engendre 3 intervalles blancs dont deux sont semblables à  $E_2$  et un à  $E_1$  dans le rapport  $\xi$ , et dans les positions indiquées ci-après.



où  $\delta = (\theta^{1/\alpha} - \xi - 2\xi\theta^{1/\alpha})/2$ . En répétant indéfiniment ces dissections (toujours des deux mêmes types) de sorte que chaque intervalle blanc de type 1 engendre à son tour un intervalle blanc de type 1 et un intervalle blanc de type 2, et chaque intervalle blanc de type 2 engendre à son tour un intervalle blanc de type 1 et deux intervalles blancs de type 2, on obtient à la limite (i.e. comme l'intersection d'une suite de compacts emboîtés) une famille  $\{E_1, E_2\}$  de A-parfaits de dimension  $\alpha$ . On peut alors vérifier directement par un calcul algébrique que

$$\min \{|P|^\alpha / H(k, P) : P \in \mathcal{F}_1^{(k)}\} = |E_k|^\alpha$$

pour  $k = 1$  et  $2$ , et conclure (en vertu de la proposition 7) que

$$(H^\alpha(E_1), H^\alpha(E_2)) = (|E_1|^\alpha, |E_2|^\alpha) = (1, (1 + \sqrt{5})/2).$$

II) *A-parfaits « convergeant » vers un parfait homogène.* Soit  $\xi < \frac{1}{3}$ .

Construisons un parfait homogène au sens large  $\mathcal{E}$  de type  $(3, \xi)$  (cf. [4], [5]) sur l'intervalle  $[0, 1]$  comme suit : soient  $\Psi_1, \Psi_2$  et  $\Psi_3$  des similitudes de  $\mathbf{R}$  de rapport  $\xi$  telles que

$$\Psi_1([0, 1]) = [0, \xi], \quad \Psi_2([0, 1]) = [\xi, 2\xi], \quad \Psi_3([0, 1]) = [1 - \xi, 1].$$

Posons, pour  $m \geq 1$

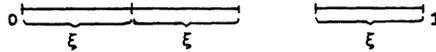
$$\mathcal{E}_m = \bigcup_{j_1, \dots, j_m=1}^3 \Psi_{j_1} \circ \Psi_{j_2} \circ \dots \circ \Psi_{j_m}([0, 1]),$$

et

$$\mathcal{E} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_m.$$

Géométriquement,  $\mathcal{E}_m$  est la réunion des  $3^m$  intervalles blancs (deux à deux essentiellement disjoints) d'ordre  $n$ , de sorte que  $\mathcal{E}_m \subset \mathcal{E}_{m-1}$  pour tout  $m \geq 2$ .

diagramme de  $\mathcal{E}_1$  :



On sait (cf. [4], [7]) que  $\mathcal{E}$  est de dimension  $-\log 3/\log \xi$ .

D'autre part, pour chaque entier  $n \geq 2$ , on construit un parfait  $\mathcal{E}^{(n)}$  en modifiant légèrement la position des intervalles blancs initiaux. Soient  $\Psi_{1,n}, \Psi_{2,n}$  et  $\Psi_{3,n}$  des similitudes de  $\mathbf{R}$  de rapport  $\xi$  telles que

$$\Psi_{1,n} = \Psi_1, \quad \Psi_{2,n}([0, 1]) = [\xi - \xi^n, 2\xi - \xi^n], \quad \Psi_{3,n} = \Psi_3.$$

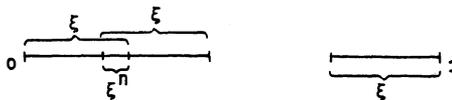
Posant

$$\mathcal{E}_m^{(n)} = \bigcup_{j_1, \dots, j_m=1}^3 \Psi_{j_1,n} \circ \dots \circ \Psi_{j_m,n}([0, 1]), \quad m \geq 1$$

on définit

$$\mathcal{E}^{(n)} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{E}_m^{(n)}.$$

diagramme de  $\mathcal{E}_1^{(n)}$  :



Les deux premiers (à partir de la gauche) intervalles blancs d'ordre 1 se

chevauchent sur une longueur de  $\xi^n$ . On note que l'on a  $\mathcal{E}^{(n)} \subset \mathcal{E}^{(n+1)}$  (car  $\mathcal{E}_m^{(n)} \subset \mathcal{E}_m^{(n+1)}$ , pour tout  $m \geq 1$ ) et que  $\bigcup_{n \geq 2} \mathcal{E}^{(n)} = \mathcal{E}$ .

Montrons que  $\mathcal{E}^{(n)}$  appartient à une famille de  $A_n$ -parfaits  $\{E_k\}_{k=1}^{2n-2}$  relatifs à une certaine matrice primitive  $A_n$  d'ordre  $2n - 2$ . Prenons pour  $E_1$  la portion de  $\mathcal{E}^{(n)}$  portée par tous les intervalles blancs constituant  $\mathcal{E}_{n-1}^{(n)}$  sauf celui qui contient 1 (i.e. le dernier à droite) et qui est disjoint des autres. Posons également  $E_2 = \mathcal{E}^{(n)}$ . De plus, on choisit  $E_3$  comme étant une réduction de  $E_1$  dans le rapport  $\xi$ ,  $E_4$  une réduction de  $E_2$  dans le rapport  $\xi$ , ...,  $E_{2n-3}$  une réduction de  $E_1$  dans le rapport  $\xi^{n-2}$  et  $E_{2n-2}$  une réduction de  $E_2$  dans le rapport  $\xi^{n-2}$ .

Étant donné la position des intervalles blancs d'ordre  $n - 1$  qui constituent  $\mathcal{E}_{n-1}^{(n)}$ , la matrice d'ordre  $2n - 2$  associée à la famille  $\{E_k\}_{k=1}^{2n-2}$  est

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que  $A_n^n > O$ . Par récurrence sur  $n$  on montre que le polynôme caractéristique de  $A_n$  est

$$p_n(t) = t^{n-2}(t^n - 3t^{n-1} + 1).$$

La valeur propre réelle maximale  $\lambda_n$  de  $A_n$  vérifie donc  $\lambda_n^n - 3\lambda_n^{n-1} + 1 = 0$ , c'est-à-dire  $\lambda_n = 3 - \lambda_n^{-n+1}$ . De plus, puisque  $p_n(2) < 0$  et  $p_n(t) \geq 1$  si  $t \geq 3$ , on a  $2 < \lambda_n < 3$  et par conséquent  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{-n+1} = 0$ . Donc  $\lambda_n \rightarrow 3$  si  $n \rightarrow \infty$ . En vertu du corollaire 1,

$$\dim \mathcal{E}^{(n)} = -\log \lambda_n / \log \xi,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dim \mathcal{E}^{(n)} = -\log 3 / \log \xi = \dim \mathcal{E}.$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. B. ASH, *Real Analysis and Probability*, Academic Press, 1972.
- [2] W. L. FERRAR, *Convergence*, Oxford, 1969.
- [3] F. R. GANTMACHER, *Theory of Matrices*, Chelsea, 1959.
- [4] J. P. KAHANE et R. SALEM, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris, Hermann, 1963.
- [5] J. MARION, *Mesures de Hausdorff*, Université d'Ottawa, 1978.
- [6] J. MARION, Calcul de la mesure de Hausdorff des sous-ensembles parfaits isotypiques de  $\mathbf{R}^m$ , *C.R.A.S.*, Paris, 289, série A (1979), 65-68.
- [7] P. A. P. MORAN, *Proc. Camb. phil. Soc.*, 42 (1946), 15-23.
- [8] H. SCHNEIDER, Note on the Fundamental Theorem on Irreducible Non-negative Matrices, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 11 (2) (1958), 127-130.

Manuscrit reçu le 21 novembre 1983.

Jacques MARION,  
690, rue Filiatrault  
Sainte-Dorothée  
Québec, Canada H7X 2J4.