

PHILIPPE ROBBA

Indice d'un opérateur différentiel p -adique IV. Cas des systèmes. Mesure de l'irrégularité dans un disque

Annales de l'institut Fourier, tome 35, n° 2 (1985), p. 13-55

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_2_13_0

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INDICE D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL p -ADIQUE — IV. CAS DES SYSTÈMES. MESURE DE L'IRRÉGULARITÉ DANS UN DISQUE

par Philippe ROBBA

1. Introduction.

Dans un article précédent [14], nous avons montré comment calculer l'indice d'un opérateur différentiel linéaire ℓ agissant sur un espace H de fonctions analytiques p -adiques, dans le cas où ℓ est d'ordre 1. Nous nous proposons dans cet article d'expliquer comment ce résultat permet, dans certains cas, de calculer l'indice de ℓ dans le cas où cet opérateur est d'ordre > 1 . (Dans la pratique il est préférable de travailler sur des systèmes différentiels, ce qui est équivalent). Comme nous utiliserons fréquemment les résultats de l'article [14] nous renvoyons à l'introduction de cet article pour les applications aux cohomologies de Dwork ainsi que pour un aperçu historique.

Le premier résultat général de calcul d'indice a été obtenu par Adolphson [1]. Nous allons décrire brièvement le résultat et la méthode d'Adolphson vu la similitude avec le résultat que nous désirons établir. Soit A le complémentaire d'un nombre fini de disques. Il s'agit de déterminer l'indice de ℓ agissant dans l'espace H des fonctions analytiques sur A . Pour cela Adolphson donne un critère assurant que l'indice de ℓ dans H est égal à l'indice de ℓ dans \underline{L} où \underline{L} est un espace convenable de fractions rationnelles. (Notons que l'existence d'un indice et le calcul de cet indice dans \underline{L} sont faciles à établir). Par le théorème de Mittag-Leffler ce résultat global de comparaison d'indices se ramène à une comparaison locale. Le critère d'égalité des indices établi par Adolphson est donc que, dans chacun des disques exclus $B(c, r^-)$, l'opérateur ℓ est analytiquement équivalent dans tout le disque à un opérateur dont la matrice des solutions est $(x-c)^N$ où N est une matrice constante dont les valeurs propres ne sont pas des nombres de Liouville p -adiques. Ceci signifie en particulier que

Mots-clés : Indice d'un opérateur différentiel p -adique - Mesure de l'irrégularité d'un opérateur différentiel p -adique - p -adique, indice, mesure de l'irrégularité.

le système équivalent a seulement une singularité singulière régulière en c dans le disque $B(c, r^-)$. Un résultat récent de Christol permet de compléter le résultat d'Adolphson car il donne un critère pour que cette équivalence analytique ait lieu.

Dans [14] nous avons indiqué comment la méthode d'Adolphson pouvait être étendue aux cas où les disques exclus contenaient des points singuliers non réguliers.

Nous nous proposons ici d'obtenir directement l'indice de ℓ sans passer par un théorème de comparaison. Comme précédemment on ramène, grâce au théorème de Mittag-Leffler, le calcul de l'indice global à un calcul d'indice local, c'est-à-dire au calcul de l'indice de ℓ agissant sur les fonctions analytiques dans un disque. Si alors le système différentiel associé à ℓ est analytiquement équivalent dans ce disque à un système différentiel dont la matrice est triangulaire on est ramené au calcul de l'indice d'un opérateur différentiel d'ordre 1 dans un disque, ce que l'on sait faire. Nous discuterons alors le cas où l'opérateur a une singularité régulière et le cas où l'opérateur a une singularité irrégulière dans ce disque. Nous proposerons enfin une mesure de l'irrégularité d'un opérateur différentiel dans un disque ayant des propriétés analogues à la mesure de l'irrégularité en un point introduite par Malgrange.

2. Notations.

Soit K un corps valué ultramétrique complet, algébriquement clos, de caractéristique 0, dont le corps résiduel est de caractéristique p . On notera Ω une extension valuée complète de K telle que le corps résiduel $\bar{\Omega}$ de Ω soit une extension transcendante du corps résiduel \bar{K} . On suppose que la valuation de K est normalisée par la condition $|p| = p^{-1}$.

Si $A \subset \mathbf{P}(\Omega)$ on notera A^c son complémentaire.

Pour $c \in \Omega$ on pose

$$B(c, r^+) = \{x \in \mathbf{R}; |x - c| \leq r\}$$

$$B(c, r^-) = \{x \in \mathbf{R}; |x - c| < r\}.$$

Par convention

$$B(\infty, r^+) = B(0, 1/r^-)^c, \quad B(\infty, r^-) = B(0, 1/r^+)^c.$$

Si $A \subset \mathbf{P}(\Omega)$ on note $R(A)$ l'espace des fractions rationnelles à coefficients dans K sans pôles dans A et $H(A)$ le complété de $R(A)$ pour la norme de la convergence uniforme sur A (c'est l'espace des éléments analytiques sur A à coefficients dans K).

On appelle domaine de Laurent un sous-ensemble de la forme

$$(2.1) \quad A = \mathbf{P}(\Omega) - \bigcup_{c \in S} B(c, r_c^-)$$

où S est un sous-ensemble fini de $\mathbf{P}(K)$ et les boules $B(c, r_c^-)$ sont disjointes. Sans restreindre la généralité on supposera que $\infty \in S$.

Pour un tel domaine de Laurent A , et pour $0 < e < 1$ on posera

$$A_e = \mathbf{P}(\Omega) - \bigcup_{c \in S} B(c, er_c^-)$$

et $\mathcal{H}^\dagger(A) = \bigcup_{e < 1} H(A_e)$, ceci est l'espace des fonctions analytiques sur A surconvergentes, c'est-à-dire qui se prolongent en dehors de A .

On pose, pour $c \in \mathbf{P}(K)$ et $r > 0$

$$\mathcal{H}_c^\dagger(r) = \mathcal{H}^\dagger(B(c, r^+)^c).$$

Pour $c \neq \infty$

$$\mathcal{H}_c^\dagger(r) = \left\{ f = \sum_{n \geq 0} a_n (x-c)^{-n}; a_n \in K, \exists \rho < r \text{ tel que } |a_n| \rho^{-n} \rightarrow 0 \right\}$$

et

$$\mathcal{H}_\infty^\dagger(r) = \left\{ f = \sum_{n \geq 0} a_n x^n; a_n \in K, \exists \rho < r \text{ tel que } |a_n| \rho^{-n} \rightarrow 0 \right\}.$$

Le théorème de Mittag-Leffler [2, Th. 4.7.7] nous dit que pour A , domaine de Laurent de la forme (2.1) avec $\infty \in S$, on a

$$\mathcal{H}^\dagger(A) = \mathcal{H}_\infty^\dagger(r_\infty) \oplus \left(\bigoplus_{c \in S - \{\infty\}} \frac{1}{x-c} \mathcal{H}_c^\dagger(r_c) \right).$$

On notera $\mathcal{A}_c(r)$ l'espace des fonctions analytiques dans le disque $B(c, r^-)$, donc pour $c \in K$

$$\mathcal{A}_c(r) = \left\{ f = \sum_{n \geq 0} a_n (x-c)^n; a_n \in K, \forall \rho < r, |a_n| \rho^n \rightarrow 0 \right\}$$

et

$$\mathcal{A}_\infty(r) = \left\{ f = \sum_{n \geq 0} a_n x^{-n}; a_n \in K, \forall \rho < r, |a_n| \rho^n \rightarrow 0 \right\}.$$

Enfin on appellera disque générique du disque $B(c, r^+)$ tout disque $B(t, r^-) \subset B(c, r^+)$ ne contenant aucun point de K (un disque générique de $B(\infty, r^+)$ sera un disque générique de $B(0, 1/r^+)$). D'après notre hypothèse sur Ω , un tel disque existe toujours. Un centre t de ce disque sera appelé point générique.

Pour $A \subset P(\Omega)$ et pour $R \in K(x)$ on posera

$\text{ord}_A(R)$ = nombre des zéros de R dans A - nombre des pôles de R dans A , comptés avec leurs multiplicités.

En particulier pour simplifier les notations on écrira

$$\begin{aligned} \text{ord}_c^-(R, r) &= \text{ord}_{B(c, r^-)}(R) \\ \text{ord}_c^+(R, r) &= \text{ord}_{B(c, r^+)}(R) \\ \text{ord}_c(R) &= \text{ord}_{\{c\}}(R) = \text{ord}_c^+(R, 0). \end{aligned}$$

3. Indice local d'un opérateur différentiel.

3.1. Si \underline{R} est un anneau on notera $\text{Mat}(k, \underline{R})$ l'espace des matrices à coefficients dans \underline{R} et $\text{Gl}(k, \underline{R})$ le sous-espace des matrices inversibles.

On note $\mathcal{D} = K(x) \left[\frac{d}{dx} \right]$ l'espace des opérateurs différentiels linéaires à coefficients fractions rationnelles et plus généralement on appellera opérateur différentiel (en dimension k) un élément de $\text{Mat}(k, \mathcal{D})$.

3.2. Dans ce paragraphe on notera par H un espace de fonctions analytiques et par A le support commun de ces fonctions. Dans la pratique H sera soit un espace $\mathcal{H}^\dagger(A)$ avec A de la forme (2.1) auquel cas A sera considéré comme le support commun, soit $\mathcal{A}_c(r)$ auquel cas $A = B(c, r^-)$.

3.3. Rappelons que si E et F sont deux espaces vectoriels et si $L \in \text{Hom}(E, F)$ on dit que L a un indice si son noyau et son conoyau sont

de dimensions finies, alors l'indice de L noté $\chi(L;E,F)$ (ou $\chi(L;E)$ si $E=F$) est par définition $\dim \text{Ker } L - \dim \text{Coker } L$.

Rappelons également que l'indice du produit de deux opérateurs à indice est la somme des indices de ces opérateurs.

3.4. LEMME. — Soit H un des espaces indiqués en 3.2. Soit $R \in K(x)$ et soit $P \in R(A)$. Alors l'endomorphisme $P : u \mapsto Pu$ de RH a un indice qui est

$$\chi(P; \text{RH}) = - \text{ord}_A P.$$

Démonstration. — Si la fraction rationnelle P sans pôles dans A ne s'annule pas dans A on sait que $P^{-1} \in H$, donc l'application P est inversible et son indice est nul.

Si P est de la forme $P = x - a$ avec $a \in A$, on voit facilement que P est injectif et que son conoyau est de dimension 1.

Le cas général s'obtient alors en factorisant P .

3.5. COROLLAIRE. — Soient H , R et P comme précédemment. Alors l'endomorphisme de $(\text{RH})^k$, $P : (u_i) \mapsto (Pu_i)$, a pour indice

$$\chi(P; (\text{RH})^k) = - k \text{ord}_A P.$$

3.6. Soit $L \in \text{Mat}(k, \mathcal{D})$. Alors l'application

$$L : (u_i) \mapsto \left(\sum_j L_{ij} u_j \right)$$

ne définit pas forcément un endomorphisme de $(\text{RH})^k$. Cependant il existe $P \in R(A)$ tel que PL soit un endomorphisme de $(\text{RH})^k$. Par extension nous dirons que L a un indice dans $(\text{RH})^k$ si et seulement si PL a un indice dans $(\text{RH})^k$ et on posera

$$\chi(L; (\text{RH})^k) = \chi(PL; (\text{RH})^k) - \chi(P; (\text{RH})^k).$$

On voit que cette définition ne dépend pas du choix de P car si QL est aussi un endomorphisme de $(\text{RH})^k$, avec $Q \in R(A)$, on a

$$\begin{aligned} & \chi(PL; (\text{RH})^k) - \chi(P; (\text{RH})^k) \\ &= \chi(QPL; (\text{RH})^k) - \chi(P; (\text{RH})^k) - \chi(Q; (\text{RH})^k) \\ &= \chi(QL; (\text{RH})^k) - \chi(Q; (\text{RH})^k). \end{aligned}$$

Exemple. — Soit $Q \in K(x)$. Alors

$$\chi(Q, (RH)^k) = -k \text{ord}_A Q.$$

Nous allons donner une définition équivalente. Observons que, avec $P \in R(A)$, on a

$$(RH)^k \subset (P^{-1}RH)^k \text{ et } \dim (P^{-1}RH)^k / (RH)^k = k \text{ord}_A P.$$

Soit γ une projection de $(P^{-1}RH)^k$ sur $(RH)^k$. On a

$$\chi(\gamma; (P^{-1}RH)^k, (RH)^k) = k \text{ord}_A P.$$

Par ailleurs L définit une application linéaire $(RH)^k \rightarrow (P^{-1}RH)^k$, et l'on a

$$\chi(L; (RH)^k, (P^{-1}RH)^k) = \chi(PL; (RH)^k).$$

Par conséquent γL est un endomorphisme de $(RH)^k$ et l'on a

$$\begin{aligned} \chi(\gamma L; (RH)^k) &= \chi(L; (RH)^k, (P^{-1}RH)^k) + \chi(\gamma; (P^{-1}RH)^k, (RH)^k) \\ &= \chi(PL; (RH)^k) + k \text{ord}_A P = \chi(L; (RH)^k). \end{aligned}$$

Nous allons vérifier que cette définition étendue de l'indice donne lieu aux propriétés usuelles des indices.

3.7. LEMME. — Soit $L \in \text{Mat}(k, \mathcal{D})$. Soit $Q \in R(A)$. Si L a un indice, il en est de même de QL et de LQ et l'on a

- a) $\chi(QL; (RH)^k) = \chi(L; (RH)^k) + \chi(Q; (RH)^k)$
- b) $\chi(LQ; (RH)^k) = \chi(L; (RH)^k) + \chi(Q; (RH)^k)$.

Démonstration. — Soit $P \in R(A)$ tel que PL soit un endomorphisme de $(RH)^k$. Alors

$$\begin{aligned} \chi(PQL; (RH)^k) &= \chi(PL; (RH)^k) + \chi(Q; (RH)^k) \\ \chi(PLQ; (RH)^k) &= \chi(PL; (RH)^k) + \chi(Q; (RH)^k). \end{aligned}$$

3.8. PROPOSITION. — Soient L et $\tilde{L} \in \text{Mat}(k, \mathcal{D})$, ayant des indices. Alors $L\tilde{L}$ a un indice et

$$\chi(L\tilde{L}; (RH)^k) = \chi(L; (RH)^k) + \chi(\tilde{L}; (RH)^k).$$

Démonstration. — Soient P et $\tilde{P} \in R(A)$ tels que $\tilde{P}\tilde{L}$ et $PL\tilde{P}^{-1}$ soient des endomorphismes de RH . Alors d'après le lemme 3.7

$$\chi(L; (RH)^k) = \chi(L\tilde{P}^{-1}\tilde{P}; (RH)^k) = \chi(L\tilde{P}^{-1}; (RH)^k) + \chi(\tilde{P}; (RH)^k)$$

et, en écrivant $PL\tilde{L} = PL\tilde{P}^{-1}\tilde{P}L$

$$\begin{aligned} \chi(PL\tilde{L}; (RH)^k) &= \chi(PL\tilde{P}^{-1}; (RH)^k) + \chi(\tilde{P}\tilde{L}; (RH)^k) \\ &= \chi(P; (RH)^k) + \chi(L\tilde{P}^{-1}; (RH)^k) + \chi(\tilde{P}\tilde{L}; (RH)^k) \\ &= \chi(P; (RH)^k) + \chi(L; (RH)^k) - \chi(\tilde{P}; (RH)^k) \\ &\quad + \chi(\tilde{P}; (RH)^k) + \chi(\tilde{L}; (RH)^k) \\ &= \chi(P; (RH)^k) + \chi(L; (RH)^k) + \chi(\tilde{L}; (RH)^k). \end{aligned}$$

3.9. PROPOSITION. — Si L a un indice dans H^k , quel que soit $R \in K(x)$, L a un indice dans $(RH)^k$ et

$$\chi(L; H^k) = \chi(L; (RH)^k).$$

Démonstration. — Soit $P \in R(A)$ tel que PL soit un endomorphisme de $(RH)^k$. Il résulte de la composition des applications

$$H^k \xrightarrow{R} (RH)^k \xrightarrow{PL} (RH)^k \xrightarrow{R^{-1}} H^k$$

que l'on a

$$\chi(R^{-1}PLR; (H)^k) = \chi(PL; (RH)^k).$$

Il résulte de la proposition 3.8 que

$$\begin{aligned} \chi(R^{-1}PLR; H^k) &= \chi(R^{-1}; H^k) + \chi(PL; H^k) + \chi(R; H^k) \\ &= \chi(PL; H^k) \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque

$$\chi(P; (RH)^k) = -k \operatorname{ord}_A P = \chi(P; H^k).$$

3.10. DÉFINITION. — On dira que $L \in \operatorname{Mat}(k, \mathcal{D})$ a un indice local pour le disque $B(c, r^-)$ si L a un indice dans $[\mathcal{A}_c(r)]^k$ et dans $[\mathcal{H}_c^+(r)]^k$.

3.11. Nous noterons $\mathcal{R}_c(r)$ l'espace des fonctions analytiques dans une couronne $B(c, r^-) - B(c, r'^+)$ avec $r' < r$ non spécifié. D'après le

théorème de Mittag-Leffler

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{R}}_c(r) &= \mathcal{A}_c(r) \oplus \frac{1}{x-c} \mathcal{H}_c^\dagger(r) \quad \text{si } c \neq \infty \\ \underline{\mathbb{R}}_\infty(r) &= \mathcal{A}_\infty(r) \oplus x \mathcal{H}_c^\dagger(r).\end{aligned}$$

PROPOSITION. — Si $L \in \text{Mat}(k, \mathcal{D})$ a un indice dans deux des trois espaces $[\mathcal{A}_c(r)]^k$, $[\mathcal{H}_c^\dagger(r)]^k$ et $[\underline{\mathbb{R}}_c(r)]^k$ alors L a un indice dans le troisième et

$$\chi(L; [\underline{\mathbb{R}}_c(r)]^k) = \chi(L; [\mathcal{A}_c(r)]^k) + \chi(L; [\mathcal{H}_c^\dagger(r)]^k).$$

Démonstration. — Soit $P \in \mathbb{R}(B(c, r^-))$ tel que PL soit un endomorphisme de $[\underline{\mathbb{R}}_c(r)]^k$. Notons γ la projection de $[\underline{\mathbb{R}}_c(r)]^k$ sur $\left[\frac{1}{x-c} \mathcal{H}_c^\dagger(r)\right]^k$ correspondant à la décomposition en somme directe ci-dessus. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & [\mathcal{A}_c(r)]^k & \rightarrow & [\underline{\mathbb{R}}_c(r)]^k & \xrightarrow{\gamma} & \left[\frac{1}{x-c} \mathcal{H}_c^\dagger(r)\right]^k & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{PL} & & \downarrow \text{PL} & & \downarrow \gamma \text{PL} & & \\ 0 & \rightarrow & [\mathcal{A}_c(r)]^k & \rightarrow & [\underline{\mathbb{R}}_c(r)]^k & \xrightarrow{\gamma} & \left[\frac{1}{x-c} \mathcal{H}_c^\dagger(r)\right]^k & \rightarrow & 0 \end{array}$$

les lignes étant exactes (la flèche $[\mathcal{A}_c(r)]^k \rightarrow [\underline{\mathbb{R}}_c(r)]^k$ étant l'injection canonique). Par conséquent

$$\begin{aligned}\chi(\text{PL}; [\underline{\mathbb{R}}_c(r)]^k) &= \chi(\text{PL}; [\mathcal{A}_c(r)]^k) + \chi\left(\gamma \text{PL}; \left[\frac{1}{x-c} \mathcal{H}_c^\dagger(r)\right]^k\right), \\ &= \chi(\text{PL}; [\mathcal{A}_c(r)]^k) + \chi(\text{PL}; [\mathcal{H}_c^\dagger(r)]^k).\end{aligned}$$

Tenant compte du fait que la multiplication par P est inversible sur $[\underline{\mathbb{R}}_c(r)]^k$ et que

$$\chi(P; [\mathcal{A}_c(r)]^k) = -k \text{ord}_{B(c, r^-)}(P) = k \text{ord}_{B(c, r^-)^c}(P) = -\chi(P; [\mathcal{H}_c^\dagger(r)]^k)$$

on obtient alors le résultat annoncé.

3.12. CONJECTURE. — Si $L \in \text{Mat}(k, \mathcal{D})$ a un indice local pour le disque $B(c, r^-)$ alors $\chi(L; [\mathbb{R}_c(r)]^k) = 0$.

Cette conjecture est supportée par le fait que toutes les fois que l'on sait montrer que L a un indice local la formule précédente est satisfaite. Le résultat suivant montre qu'il suffit de démontrer la conjecture dans le cas $k = 1$.

3.13. En utilisant le fait que \mathcal{D} est un anneau simple et la théorie des facteurs invariants on peut montrer le résultat suivant [10, Lemma 6.2] qui exprime qu'un système différentiel est « équivalent » à une équation différentielle.

PROPOSITION. — Soit $L \in \text{Mat}(k, \mathcal{D})$ il existe U et $V \in \text{Gl}(k, \mathcal{D})$ telles que

$$ULV = \mathcal{J}$$

où \mathcal{J} est une matrice diagonale dont les coefficients sont 0 ou 1 avec au plus une exception.

Le fait que U et V soient des matrices inversibles entraîne immédiatement que U et V ont des indices dans $[\mathcal{A}_c(r)]^k, [\mathcal{H}_c^\dagger(\mathbb{R})]^k$ et $[\mathbb{R}_c(r)]^k$. Les indices de U et V dans $[\mathcal{A}_c(r)]^k$ et $[\mathcal{H}_c^\dagger(r)]^k$ ne sont pas nécessairement nuls. Par contre, comme les éléments de $\text{Mat}(k, \mathcal{D})$ définissent toujours des endomorphismes de $[\mathbb{R}_c(r)]^k$, les indices de U et V dans $[\mathbb{R}_c(r)]^k$ sont nuls.

Alors il est clair que L a un indice dans l'espace H^k si et seulement si \mathcal{J} a un indice dans H^k , et ceci a lieu si et seulement si \mathcal{J} n'a pas de 0 sur la diagonale et le terme différent de 1, soit ℓ , a un indice dans H . On a même $\chi(\mathcal{J}; H^k) = \chi(\ell; H)$.

Donc L a un indice local si et seulement si il n'y a pas de 0 sur la diagonale de \mathcal{J} et ℓ a un indice local et alors

$$\chi(L; [\mathbb{R}_c(r)]^k) = \chi(\ell; \mathbb{R}_c(r)).$$

3.14. Équivalences locales.

On notera $\hat{\mathcal{A}}_c(r)$ l'espace des fonctions méromorphes sur $B(c, r^-)$ qui n'ont qu'un nombre fini de pôles dans $B(c, r^-)$:

$$\hat{\mathcal{A}}_c(r) = \mathcal{A}_c(r) \otimes_{\mathbb{R}(B(c, r^-))} \mathbb{K}(x).$$

On notera $\mathcal{H}_c^\dagger(r)$ l'espace des fonctions méromorphes sur $B(c, r^-)$ surconvergentes : $\mathcal{H}_c^\dagger(r) = \mathcal{H}_c^\dagger(r) \otimes_{R(B(c, r^-))} K(x)$, cet espace s'identifie au corps des fractions de $\mathcal{H}_c^\dagger(r)$.

DÉFINITION. — On dit que L et \tilde{L} appartenant à $\text{Mat}(k, \mathcal{D})$ sont :

— Localement équivalentes de type a) (par rapport à $B(c, r^-)$), s'il existe $M \in \text{Gl}(k, \mathcal{A}_c(r))$ telle que

$$\tilde{L} = M^{-1}LM.$$

— Localement équivalentes de type b) (par rapport à $B(c, r^-)$), s'il existe $M \in \text{Gl}(k, \mathcal{H}_c^\dagger(r))$ telle que

$$\tilde{L} = M^{-1}LM.$$

— Localement équivalentes (par rapport à $B(c, r^-)$), s'il existe $M \in \text{Gl}(k, \mathbb{R}_c(r))$ telle que

$$\tilde{L} = M^{-1}LM.$$

Les équivalences de type a) et b) sont donc des équivalences.

PROPOSITION. — Si L et $\tilde{L} \in \text{Mat}(k, \mathcal{D})$ sont localement équivalentes et si L a un indice local relativement à $B(c, r^-)$ alors \tilde{L} a aussi un indice local et

$$\begin{aligned} \chi(L; [\mathcal{A}_c(r)]^k) &= \chi(\tilde{L}; [\mathcal{A}_c(r)]^k) \\ \chi(L; [\mathcal{H}_c^\dagger(r)]^k) &= \chi(\tilde{L}; [\mathcal{H}_c^\dagger(r)]^k). \end{aligned}$$

Démonstration.

a) Équivalence de type a).

Comme L , \tilde{L} , M et M^{-1} définissent des endomorphismes de $[\mathbb{R}_c(r)]^k$, M et M^{-1} sont inversibles, donc d'indices nuls, et donc L et \tilde{L} ont simultanément des indices qui sont égaux.

Soient $P, Q \in R(B(c, r^-))$ tels que $PM \in \text{Mat}(k, \mathcal{A}_c(r))$ et $QM^{-1}P^{-1} \in \text{Mat}(k, \mathcal{A}_c(r))$. Alors PM et $QM^{-1}P^{-1}$ définissent des endomorphismes de $[\mathcal{A}_c(r)]^k$ et l'on a

$$QM^{-1}P^{-1}PM = Q \text{ Id},$$

qui a un indice. Donc $QP^{-1}M^{-1}$ a un conoyau de dimension finie, comme cet opérateur est injectif, il a un indice. Donc PM a aussi un indice et

$$\chi(QP^{-1}M^{-1}; [\mathcal{A}_c(r)]^k) + \chi(PM; [\mathcal{A}_c(r)]^k) = \chi(Q; [\mathcal{A}_c(r)]^k).$$

Soit alors $R \in R(B(c, r^-))$ tel que RLP^{-1} définisse un endomorphisme de $[\mathcal{A}_c(r)]^k$. On a

$$RQP^{-1}\tilde{L} = (QP^{-1}M^{-1})(RLP^{-1})(PM)$$

donc le membre de gauche a un indice et de plus

$$\begin{aligned} \chi(RQP^{-1}\tilde{L}; [\mathcal{A}_c(r)]^k) &= \chi(QP^{-1}M^{-1}; [\mathcal{A}_c(r)]^k) + \chi(RLP^{-1}; [\mathcal{A}_c(r)]^k) + \chi(PM; [\mathcal{A}_c(r)]^k) \\ &= \chi(L; [\mathcal{A}_c(r)]^k) + \chi(RQP^{-1}; [\mathcal{A}_c(r)]^k) \end{aligned}$$

d'où l'égalité des indices de L et \tilde{L} . On utilise alors la proposition 3.11 pour en déduire l'égalité des indices dans $[\mathcal{H}_c^\dagger(r)]^k$.

b) Pour l'équivalence b) on procède de la même façon en échangeant les rôles de $\mathcal{A}_c(r)$ et de $\mathcal{H}_c^\dagger(r)$.

c) Si $M \in Gl(k, \mathbb{R}_c(r))$, alors d'après le résultat de Christol sur la factorisation d'une matrice en facteur singulier [4, corollaire 3.3] il existe $F \in Gl(k, \mathcal{H}_c^\dagger(r))$, $G \in Gl(k, \mathcal{A}_c(r))$ et une matrice diagonale $N \in Mat(k, \mathbb{Z})$ telles que

$$M = (x-c)^N FG.$$

Posons

$$L_1 = F^{-1}(x-c)^{-N}L(x-c)^NF.$$

Ceci montre que L_1 est une matrice dont les coefficients sont des polynômes différentiels à coefficients dans $\mathcal{H}_c^\dagger(r)$. Mais on a par ailleurs

$$L_1 = G\tilde{L}G^{-1}$$

ce qui montre que les coefficients de L_1 sont des polynômes différentiels à coefficients dans $\mathcal{A}_c(r)$. En combinant ces deux observations on en déduit que L_1 a ses coefficients dans \mathcal{D} (polynômes différentiels à coefficients fractions rationnelles). Donc L et L_1 sont équivalentes de type a), L_1 et \tilde{L} sont équivalentes de type b) et par conséquent la proposition découle de a) et b).

4. Expression de l'indice global à l'aide des indices locaux.

THÉORÈME. — Soit un domaine de Laurent

$$A = \mathbf{P}(\Omega) - \bigcup_{c \in S} B(c, r_c^-)$$

où S est un sous-ensemble fini de $\mathbf{P}(\mathbf{K})$, $\infty \in S$, les disques $B(c, r_c^-)$ étant disjoints. Soit $L \in \text{Mat}(k, \mathcal{D})$. Si L a un indice local relativement à chaque disque $B(c, r_c^-)$, L a un indice dans $[\mathcal{H}^\dagger(A)]^k$ et

$$\chi L; [\mathcal{H}^\dagger(A)]^k = \sum_{c \in S} \chi(L; [\mathcal{H}_c^\dagger(r_c)]^k).$$

Par conséquent si $P \in R(A)$ est tel que PL définit un endomorphisme de $[\mathcal{H}^\dagger(A)]^k$, on aura

$$\chi(PL; [\mathcal{H}^\dagger(A)]^k) = \sum_{c \in S} \chi(L; [\mathcal{H}_c^\dagger(r_c)]^k) - k \text{ord}_A(P).$$

Démonstration. — Écrivons $S = \{\infty, c_1, \dots, c_n\}$. Posons

$$A_i = B(0, 1/r_\infty^+) - \bigcup_{j=1}^i B(c_j, r_j^-).$$

Donc $A_0 = B(\infty, r_\infty^-)^c$ et $A_m = A$. Soit $P \in K[x]$ tel que PL définisse un endomorphisme de

$$[\mathcal{H}^\dagger(A_0)]^k = [\mathcal{H}_\infty^\dagger(r_\infty)]^k.$$

On a

$$\chi(PL; [\mathcal{H}^\dagger(A_0)]^k) = \chi(L; [\mathcal{H}_\infty^\dagger(r_\infty)]^k) - k \text{ord}_0^+(P, 1/r_\infty).$$

On raisonne par récurrence sur i pour montrer que PL a un indice dans $[\mathcal{H}^\dagger(A_i)]^k$.

Pour chaque i , $1 \leq i \leq m$, $A_i = A_{i-1} - B(c_i, r_i^-)$ et par le théorème de Mittag-Leffler,

$$\mathcal{H}^\dagger(A_i) = \mathcal{H}^\dagger(A_{i-1}) \oplus \frac{1}{x-c_i} \mathcal{H}_{c_i}^\infty(r_i).$$

Si γ_{c_i} dénote la projection associée de $[\mathcal{H}^\dagger(A_i)]^k$ sur $\left[\frac{1}{x-c_i} \mathcal{H}_{c_i}^\infty(r_i)\right]^k$ on voit comme dans la démonstration de la proposition 3.10 que, puisque PL a un indice dans $[\mathcal{H}^\dagger(A_{i-1})]^k$ et dans $\left[\frac{1}{x-c_i} \mathcal{H}_{c_i}^\infty(r_i)\right]^k$ (et donc $\gamma_{c_i} \text{PL}$ a le même indice dans $\left[\frac{1}{x-c_i} \mathcal{H}_{c_i}^\infty(r_i)\right]^k$), PL a aussi un indice dans $[\mathcal{H}^\dagger(A_i)]^k$ et

$$\begin{aligned} s(\text{PL}; [\mathcal{H}^\dagger(A_i)]^k) &= \chi_{\text{PL}; [\mathcal{H}^\dagger(A_{i-1})]^k} + \chi\left(\gamma_{c_i} \text{PL}; \left[\frac{1}{x-c_i} \mathcal{H}_{c_i}^\infty(r_i)\right]^k\right) \\ &= \chi(\text{PL}; [\mathcal{H}^\dagger(A_{i-1})]^k) + \chi(L; [\mathcal{H}_{c_i}^\infty(r_i)]^k) + k \text{ord}_{c_i}(\text{P}, r_i). \end{aligned}$$

Par conséquent, PL a un indice dans $[\mathcal{H}^\dagger(A_m)]^k = [\mathcal{H}^\dagger(A)]^k$ et

$$\begin{aligned} \chi(\text{PL}; [\mathcal{H}^\dagger(A)]^k) &= \chi(L; [\mathcal{H}_\infty^\dagger(r_\infty)]^k) - k \text{ord}_0^+(\text{P}, 1/r_\infty) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m (\chi(L; [\mathcal{H}_{c_i}^\infty(r_i)]^k) + k \text{ord}_{c_i}^-(\text{P}, r_i)) \\ &= \sum_{c \in S} \chi(L; [\mathcal{H}_c^\dagger(r)]^k) - \text{ord}_A(\text{P}). \end{aligned}$$

5. Calcul de l'indice local : $k = 1$, L d'ordre 1.

Dans ce paragraphe nous rappelons essentiellement les résultats de [14] en les complétant.

5.1. Soit $L = \frac{d}{dx} + \eta$ avec $\eta \in K(x)$. Soient t_r un point générique du disque $B(c, r^+)$ et $B(t_r, r^-)$ (resp. $B(t_r, 1/r^-)$ si $c = \infty$) le disque générique correspondant. Soit $u \neq 0$ une solution de $Lu = 0$ au voisinage de t_r . Nous poserons

$$\begin{aligned} \rho_c(L, r) &= \min(\text{rayon de convergence de } u, \text{ rayon du disque générique}) \\ &= \min(\text{rayon de convergence de } u, r) \text{ si } c \neq \infty \\ &= \min(\text{rayon de convergence de } u, 1/r) \text{ si } c = \infty. \end{aligned}$$

On dira que L est soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$ si u converge dans ce disque générique, donc $\rho_c(L, r) = r$ (resp. $1/r$ si $c = \infty$).

Dans la suite nous ferons les démonstrations dans le cas $c \neq \infty$. Le cas $c = \infty$ s'en déduira par la transformation $x \mapsto 1/x$ qui échange les disques $B(\infty, r^-)$ et $B(0, r^-)$.

5.2. LEMME. — Soit $\eta \in K(x)$. Alors $L = \frac{d}{dx} + \eta$ est localement équivalent de type b), relativement à $B(c, r^-)$, à $\tilde{L} = \frac{d}{dx} + \tilde{\eta}$ où $\tilde{\eta}$ a dans $B(c, r^-)$ au plus un pôle en c (c'est-à-dire que \tilde{L} a au plus une singularité en c dans $B(c, r^-)$).

Démonstration. — Soit η_c la partie singulière de η relative à $B(c, r^-)$, c'est-à-dire la somme des parties singulières de η relatives aux pôles de η situés dans $B(c, r^-)$. Considérons le développement de Laurent de η_c , valable pour $|x-c| > r'$ avec $r' < r$

$$\eta_c = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(x-c)^{n+1}}.$$

La primitive de $\eta_c - \frac{a_0}{x-c} : - \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n(x-c)^n$ est aussi analytique pour $|x-c| > r'$, donc pour $r' < r'' < r$ on aura $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n/n| r''^{-n} = 0$. Soit N tel que pour $n \geq N$ $|a_n/n| r''^{-n} < |p|^{1/(p-1)}$. Alors $\zeta = \sum_{n \geq N} \frac{a_n}{n(x-c)^n}$ est analytique dans $B(c, r'')$ et $\sup_{|x-c| \geq r''} |\zeta(x)| < |p|^{1/(p-1)}$ qui est le rayon de convergence de l'exponentielle, donc $u = \exp \zeta \in \mathcal{H}_c^\dagger(r)$ et alors

$$u^{-1}Lu = \frac{d}{dx} + \eta + u'/u = \frac{d}{dx} + \eta - \eta_c + \sum_{0 \leq n < N} \frac{a_n}{(x-c)^{n+1}}.$$

5.3. LEMME. — Supposons que $L = \frac{d}{dx} + \eta$ soit soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$ (c'est-à-dire $\rho_c(L, r) = r$ si $c \neq \infty$) alors L est localement équivalente de type a) à $\tilde{L} = \frac{d}{dx} + \tilde{\eta}$ où $\tilde{\eta} = \eta_c =$ partie singulière de η relative à $B(c, r^-)$.

Démonstration. — On sait [9, Theorem 5.4] que L est soluble dans le disque générique $B(t, r^-)$ de $B(c, r^+)$ si et seulement si il existe $R_n \in K(x)$ telles que $\|R'_n / R_n + \eta\|_r \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ où $\|f\|_r = \sup_{x \in B(t, r^-)} |f(x)| = |f(t)|$ pour $f \in K(x)$. Soit R_n^c le facteur singulier de R_n relatif à $B(c, r^-)$, c'est-à-dire que tous les pôles et zéros de R_n^c sont dans $B(c, r^-)$ (ou à l'infini) et que R_n / R_n^c n'a ni pôles ni zéros dans $B(c, r^-)$. Alors $(R_n^c)' / R_n^c$ est la partie singulière de R'_n / R_n relative à $B(c, r^-)$ et le théorème de Mittag-Leffler nous dit que

$$\|R_n^c / R_n^c + \eta_c\|_r \leq \|R'_n / R_n + \eta\|_r \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n^c / R_n^c + \eta_c\|_r = 0,$$

ce qui implique que $L + \eta_c$ aussi est soluble dans $B(t, r^-)$. Il existe donc u et v analytiques dans $B(t, r^-)$ tels que $u'/u + \eta = 0$, $v'/v + \eta_c = 0$. Nécessairement v ne s'annule pas dans $B(t, r^-)$ (car η_c n'a pas de pôles dans $B(t, r^-)$) donc $\zeta = u/v$ est analytique dans $B(t, r^-)$ et $\zeta'/\zeta + \eta - \eta_c = 0$. Comme le disque $B(c, r^-)$ n'a pas de singularité pour l'opérateur $D + \eta - \eta_c$, d'après le principe de transfert [8], il existe ζ analytique dans $B(c, r^-)$ solution de $\zeta'/\zeta + \eta - \eta_c = 0$. Et l'on a alors

$$\zeta^{-1}L\zeta = \frac{d}{dx} + \eta + \zeta'/\zeta = \frac{d}{dx} + \eta_c.$$

5.4. LEMME. — Soit $L = \frac{d}{dx} + \eta$ avec $\eta = \sum_{1 \leq n \leq N} a_n / (x-c)^n$.

Supposons qu'il existe $r' < r$ tel que L soit soluble dans le disque générique de $B(c, r'^+)$ (donc $\rho_c(L, r') = r'$). Alors L est équivalente de type b), relativement à $B(c, r^-)$, à $\frac{d}{dx} + a_1 / (x-c)$ et $a_1 \in \mathbf{Z}_p$.

Démonstration. — Ici $\eta = \eta_c$ et il résulte de la démonstration du lemme 5.3, avec r remplacé par r' , que $\|\eta_c + (R_n^c)' / R_n^c\|_{r'} \rightarrow 0$ pour une suite d'éléments $R_n \in K(x)$. Par conséquent $a_1 = \text{Res}_c(\eta_c, r') = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Res}_c((R_n^c)' / R_n^c, r')$; or $\text{Res}_c((R_n^c)' / R_n^c, r') \in \mathbf{Z}$, donc $a_1 \in \mathbf{Z}_p$.

Comme $a_1 \in \mathbf{Z}_p$, $\left(\frac{x-c}{t-c}\right)^{a_1}$ converge dans le disque générique $B(t, r'^-)$ du disque $B(c, r'^+)$. Comme L est soluble dans $B(t, r'^-)$ il en résulte que

$L_1 = \frac{d}{dx} + \sum_{2 \leq n \leq N} a_n/(x-c)^n$ est aussi soluble dans $B(t, r')$. Comme L_1 n'a pas de singularité dans $B(c, r'^+)^c$, d'après le principe de transfert déjà mentionné, il existe u analytique dans $B(c, r'^+)^c$ tel que $u'/u + \sum_{2 \leq n \leq N} a_n/(x-c)^n = 0$. Donc $u \in \mathcal{H}_c^\dagger(r)$ et l'on a

$$u^{-1}Lu = \frac{d}{dx} + \eta + u'/u = \frac{d}{dx} + a_1/(x-c).$$

5.5. DÉFINITION. — Soit $\alpha \in K$. On dira que α est un nombre de Liouville (p -adique) (*) si

$$a) \liminf_{m \in \mathbb{N}, m \rightarrow +\infty} |\alpha - m|^{1/m} < 1$$

ou

$$b) \liminf_{m \in \mathbb{N}, m \rightarrow +\infty} |\alpha + m|^{1/m} < 1.$$

On voit facilement que les nombres de Liouville appartiennent à \mathbf{Z}_p , et on montre que les nombres algébriques (sur \mathbf{Q}) ne sont pas de Liouville.

LEMME. — Soit $\alpha \in K$. L'opérateur $L = (x-c) \frac{d}{dx} + \alpha$ a un indice local relativement à $B(c, r^-)$ si et seulement si α n'est pas de Liouville. Alors

$$\chi(L; \mathcal{A}_c(r)) = \chi(L; \mathcal{H}_c^\dagger(r)) = \chi(L; \mathcal{R}_c(r)) = 0.$$

Démonstration. — Il a été observé depuis longtemps par B. Dwork (cf. [12; § 4.1.9]) que si α vérifie la condition b) de la définition 5.4, alors L n'a pas d'indice dans $\mathcal{A}_c(r)$. On vérifie de même que si α vérifie la condition a), L n'a pas d'indice dans $\mathcal{H}_c^\dagger(r)$. Donc si α est de Liouville, L n'a pas d'indice local.

Si $u = \sum_{n \geq 0} a_n(x-c)^n \in \mathcal{A}_c(r)$ (resp. $u = \sum_{n \leq 0} a_n(x-c)^n \in \mathcal{H}_c^\dagger(r)$), l'équation $Lv = u$ a toujours la solution formelle unique $v = \sum_{n \geq 0} a_n(x-c)^n/(n+\alpha)$ (resp. $v = \sum_{n \leq 0} a_n(x-c)^n/(n+\alpha)$) si α n'est pas

(*) Par la suite on omettra « p -adique ».

un entier ≤ 0 (resp. ≥ 0) et l'hypothèse que α n'est pas un nombre de Liouville entraîne que le domaine de convergence de v est le même que celui de u , donc $v \in \mathcal{A}_c(r)$ (resp. $\mathcal{H}_c^\dagger(r)$). Si α est un entier ≤ 0 (resp. ≥ 0) on a alors

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker} (L, \mathcal{A}_c(r)) &= 1 = \dim \text{coker} (L, \mathcal{A}_c(r)) \\ (\text{resp. } \dim \text{Ker} (L, \mathcal{H}_c^\dagger(r)) &= 1 = \dim \text{coker} (L, \mathcal{H}_c^\dagger(r))) \end{aligned}$$

et donc dans tous les cas l'indice de L dans $\mathcal{A}_c(r)$ (resp. $\mathcal{H}_c^\dagger(r)$) est nul.

5.6. DÉFINITION. — Soit $\eta \in K(x)$. On note $\text{Res}_c(\eta dx, r) =$ résidu de ηdx relatif au disque $B(c, r^-)$, la somme des résidus de ηdx relativement aux pôles de ηdx situés dans le disque $B(c, r^-)$. Si $c \neq \infty$, $\text{Res}_c(\eta dx, r)$ est le coefficient a_{-1} dans le développement $\eta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x-c)^n$ valable dans une couronne $B(c, r^-) - B(c, r'^+)$, $r' < r$; si $c = \infty$, $\text{Res}_\infty(\eta dx, r)$ est le coefficient $-a_{-1}$ dans le développement $\eta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$ valable dans une couronne $B(\infty, r^-) - B(\infty, r'^-)$, $r' < r$.

Dans le théorème suivant $\left(\frac{d}{d \text{Log } r}\right)^-$ dénote la dérivée à gauche.

THÉORÈME. — Soit $\eta \in K(x)$. L'opérateur $L = \frac{d}{dx} + \eta$ a toujours un indice local relativement à $B(c, r^-)$ sauf si on a simultanément L soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$, $\left(\frac{d \log \rho_c(L, r)}{d \log r}\right)^- = 1$ (Resp. $\left(\frac{d \log \rho_c(L, r)}{d \log r}\right)^- = -1$ si $c = \infty$) et $\text{Res}_c(\eta dx, r)$ de Liouville (auquel cas il n'y a pas d'indice local). Alors

$$\begin{aligned} \chi(L; \mathcal{A}_c(r)) &= \left(\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r)}{d \text{Log } r}\right)^- = -\chi(L; \mathcal{H}_c^\dagger(r)) \\ \chi(L; \mathbb{R}_c(r)) &= 0. \end{aligned}$$

Combiné au théorème 4, ce théorème résoud complètement le problème de calcul d'indice dans le cas $L = \frac{d}{dx} + \eta$.

Démonstration. — On traite d'abord le cas $c \neq \infty$.

On sait déjà que si L et \tilde{L} sont localement équivalents par rapport à $B(c, r^-)$, ils ont simultanément des indices locaux ou non, et ces indices sont les mêmes (proposition 3.14). On peut observer de plus que pour $r' < r$, proche de r , on aura

$$\rho_c(L, r') = \rho_c(\tilde{L}, r')$$

et donc aussi par continuité pour $r' = r$. Par conséquent (pour $r' \leq r$ proche de r) L et \tilde{L} seront simultanément solubles ou non dans le disque générique de $B(c, r'^+)$ et l'on aura

$$\left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_c(L, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)^- = \left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_c(\tilde{L}, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)^-$$

Enfin on a $\tilde{\eta} dx = \eta dx + du/u$ avec $u \in \mathbb{R}_c(r)$ et pour un tel u $\operatorname{Res}_c(du/u, r) \in \mathbb{Z}$, donc, comme

$$\operatorname{Res}_c(\tilde{\eta} dx, r) = \operatorname{Res}_c(\eta dx, r) + \operatorname{Res}_c(du/u, r),$$

$\operatorname{Res}_c(\tilde{\eta} dx, r)$ sera de Liouville si et seulement si $\operatorname{Res}_c(\eta dx, r)$ est de Liouville.

Considérons d'abord le cas où L n'est pas soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$, c'est-à-dire $\rho_c(L, r) < r$. En vertu de la continuité par rapport à r de $\rho_c(L, r)$, on a encore $\rho_c(L, r') < r'$ pour $r' < r$ proche de r .

Soit $P \in K[x]$ tel que $P\eta \in K[x]$. Le théorème 4.2 de [14] et sa démonstration montrent que pour $r' < r$ proche de r , PL a un indice dans $H(B(c, r'^+))$

$$\chi(PL; H(B(c, r'^+))) = \left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_c(L, r')}{d \operatorname{Log} r'} \right)^+ - \operatorname{ord}_c^+(P, r') \geq -\delta$$

où $\delta = \max(\text{degré numérateur de } \eta, \text{degré dénominateur de } \eta)$.

D'après la proposition 4.5 de [14] $\chi(PL; H(B(c, r'^+)))$ est une fonction décroissante de r' , cette fonction étant bornée inférieurement et à valeurs entières est donc constante pour r' proche de r . De plus pour r' proche de r , $r' < r$, on aura également $\operatorname{ord}_c^+(P, r') = \operatorname{ord}_c^-(P, r)$.

Utilisant le fait que pour $r' < r''$ $H(B(c, r''^+))$ est dense dans

$H(B(c, r'^+))$, que $\mathcal{A}_c(r) = \bigcap_{r' < r} H(B(c, r'^+))$ et que pour r' proche de r l'indice de PL dans $H(B(c, r'))$ ne dépend pas de r' , on déduit de façon classique (cf. [12, lemma 4.7]) que PL a un indice dans $\mathcal{A}_c(r)$ qui est le même que dans $H(B(c, r'^+))$. De plus si pour $r_1 < r' < r$, $\text{ord}_c^+(P, r)$ reste constant et $\chi(\text{PL}; H(B(c, r'^+))$ aussi, il résulte du théorème 4.2 et de la proposition 4.5 de [14] que la dérivée $\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r')}{d \text{Log } r'}$ existe, est constante et égale à $\left(\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r)}{d \text{Log } r}\right)^-$. Par conséquent

$$\chi(\text{PL}; \mathcal{A}_c(r)) = \left(\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r)}{d \text{Log } r}\right)^- - \text{ord}_c^-(P, r)$$

et donc

$$\chi(L; \mathcal{A}_c(r)) = \left(\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r)}{d \text{Log } r}\right)^-$$

Soit $Q \in R(B(c, r^-)^\circ)$, tel que QL définisse un endomorphisme de $\mathcal{H}_c^\dagger(r)$. Alors pour $r' < r$, proche de r , on a d'après la formule du § 4.8 de [14]

$$\chi(QL; H(B(c, r'^-)^\circ)) = -\left(\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r')}{d \text{Log } r'}\right)^- + \text{ord}_c^-(Q, r').$$

Comme pour r' voisin de r , $r' < r$, on a

$$\left(\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r')}{d \text{Log } r'}\right)^- = \frac{d \text{Log } \rho_c(L, r')}{d \text{Log } r'} = \left(\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r)}{d \text{Log } r}\right)^-$$

et $\text{ord}_c^-(Q, r') = \text{ord}_c^-(Q, r)$, il en résulte que cet indice reste constant et égal à $-\left(\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r)}{d \text{Log } r}\right)^- + \text{ord}_c^-(Q, r)$. Comme de plus pour $r' < r''$

$H(B(c, r'^-)^\circ)$ est dense dans $H(B(c, r''-)^\circ)$ et que $\mathcal{H}_c^\dagger(r) = \bigcup_{r' < r} H(B(c, r'^-)^\circ)$ il en résulte de façon classique que QL a un indice dans $\mathcal{H}_c^\dagger(r)$ qui est

$$\chi(QL; \mathcal{H}_c^\dagger(r)) = -\left(\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r)}{d \text{Log } r}\right)^- + \text{ord}_c^-(Q, r)$$

et donc

$$\chi(L; \mathcal{H}_c^\dagger(r)) = - \left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_c(L, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)^-.$$

Considérons maintenant le cas où L est soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$. En appliquant les lemmes 5.2 et 5.3 on se ramène au cas où η est de la forme $\eta = \sum_{1 \leq n \leq N} a_n (x-c)^{-n}$.

Si alors pour tout $r' < r$, L n'est pas soluble dans le disque générique de $B(c, r'^+)$, la démonstration faite précédemment reste valable pour montrer l'existence d'un indice local et calculer sa valeur.

S'il existe $r' < r$ tel que L soit soluble dans le disque générique de $B(c, r'^+)$, d'après le lemme 5.4 on peut se ramener au cas $\eta = \alpha/(x-c)$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}_p$. Alors pour tout r' $\rho_c(L, r') = r'$, donc $\left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_c(L, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)^- = 1$. De plus d'après le lemme 5.6 si $\alpha = \operatorname{Res}_c(\eta dx, r)$ n'est pas un nombre de Liouville, L aura un indice local avec

$$\begin{aligned} \chi(L; \mathcal{A}_c(r)) &= \chi((x-c) \frac{d}{dx} + \alpha, \mathcal{A}_c(r)) + \operatorname{ord}_c^-(x-c, r) = 1 \\ \chi(L; \mathcal{H}_c^\dagger(r)) &= -1. \end{aligned}$$

Si $c = \infty$, le changement de variable $y = 1/x$ envoie $B(\infty, r^-)$ sur $B(0, r^-)$ et définit un isomorphisme entre $\mathcal{A}_\infty(r)$ et $\mathcal{A}_0(r)$, entre $\mathcal{H}_\infty^\dagger(r)$ et $\mathcal{H}_0^\dagger(r)$. A l'opérateur $L = \frac{d}{dx} + \eta(x)$ correspond $\tilde{L} = -y^2 \frac{d}{dy} + \eta(1/y)$. Enfin les rayons de convergence des solutions près des points génériques sont liés par la formule $\rho_0(\tilde{L}, r) = r^2 \rho_\infty(L, r)$. On aura donc

$$\begin{aligned} \chi(L; \mathcal{A}_\infty(r)) &= \chi(\tilde{L}; \mathcal{A}_0(r)) = \left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_0(\tilde{L}, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)^- - 2 = \left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_\infty(L, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)^- \\ &= -\chi(\tilde{L}; \mathcal{H}_0^\dagger(r)) = -\chi(L; \mathcal{H}_\infty^\dagger(r)). \end{aligned}$$

Le cas où L est soluble dans le disque générique de $B(\infty, r')$ pour tout $r' < r$ proche de r , correspond à $\rho_\infty(L, r') = 1/r'$ et donc

$$\left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_\infty(L, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)^- = -1.$$

5.7. Le résultat suivant nous servira lorsque nous interpréterons l'indice en terme d'irrégularité.

PROPOSITION. — Soit $L = \frac{d}{dx} + \eta$ avec $\eta \in K(x)$. Supposons que L soit soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$. Alors on a

$$\left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_c(L, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)^- \geq 1 \quad \left(\text{resp.} \left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_\infty(L, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)^- \geq -1 \quad \text{si } c = \infty \right).$$

De plus on a égalité dans la formule précédente si et seulement si, pour tout $r' < r$ proche de r , L est soluble dans le disque générique de $B(c, r'^+)$.

Démonstration. — On a toujours $\rho_c(L, r')/r' \leq 1$ (resp. $r' \rho_\infty(L, r') \leq 1$). L'hypothèse faite sur L signifie que $\rho_c(L, r)/r = 1$ (resp. $r \rho_\infty(L, r) = 1$) d'où l'inégalité annoncée.

Si pour tout $r' < r$ proche de r , L n'est pas soluble dans le disque générique de $B(c, r')$, on a vu dans la démonstration du théorème 5.6 que, pour r' proche de r , $\frac{d \operatorname{Log} \rho_c(L, r')}{d \operatorname{Log} r'} = \chi = c^{te}$. Si l'on avait $\chi = 1$ (resp. $\chi = -1$), comme $\rho_c(L, r) = r$ (resp. $\rho_\infty(L, r) = 1/r$) on aurait pour $r' < r$ proche de r , $\rho_c(L, r') = r'$ (resp. $\rho_\infty(L, r') = 1/r'$) ce qui signifierait L soluble dans le disque générique de $B(c, r')$ et contredirait l'hypothèse.

Dans le cas contraire on a vu que L était équivalent à $\tilde{L} = \frac{d}{dx} + \alpha(x-c)^{-1}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, (resp. $\tilde{L} = \frac{d}{dx} + \alpha x^{-1}$ si $c = \infty$) et \tilde{L} est soluble dans le disque générique de $B(c, r'^+)$ pour tout r' , donc L est soluble dans le disque générique de $B(c, r'^+)$ pour tout $r' < r$ proche de r .

6. Réduction du calcul de l'indice au cas $k = 1$.

6.1. DÉFINITION. — Soit $L \in \operatorname{Mat}(k, \mathcal{D})$. On dira que L est sous forme réduite si la matrice de L est triangulaire.

Le cas qui nous intéressera particulièrement sera le cas $L = \frac{d}{dx} + G = \frac{d}{dx} \operatorname{Id} + G$ où $G \in \operatorname{Mat}(k, K(x))$. Alors L est sous forme réduite si et seulement si la matrice G est triangulaire.

6.2. LEMME. — Soient E, F deux espaces vectoriels sur K . Soient $A : E \rightarrow E$, $B : F \rightarrow F$, $C : F \rightarrow E$ des applications linéaires. Soit $L : E \times F \rightarrow E \times F$ l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que l'on a $L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Au + Cv \\ Bv \end{pmatrix}$. Alors L a un indice si A et B ont des indices et

$$\chi(L; E \times F) = \chi(A; E) + \chi(B; F).$$

Démonstration. — En effet le diagramme suivant est commutatif avec des lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E \times F & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow A & & \downarrow L & & \downarrow B & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E \times F & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où $E \rightarrow E \times F$ est l'injection canonique de E dans $E \times F$ et $E \times F \rightarrow F$ est la projection canonique de $E \times F$ sur F .

6.3. COROLLAIRE. — Soient $E_i, 1 \leq i \leq k$, des espaces vectoriels sur K . Soit $E = \prod_{i=1}^k E_i$ et soit $L : E \rightarrow E$ une application linéaire. Soit (L_{ij}) la matrice de L avec L_{ij} application linéaire de E_i dans E_j . Si la matrice de L est triangulaire et si pour tout i L_{ii} a un indice alors L aussi a un indice et

$$(\text{ey})\chi(L; E) = \sum_{i=1}^k \chi(L_{ii}; E_i).$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur n . On applique le lemme 6.2 avec $E = \prod_{i=1}^{n-1} E_i$, $F = E_n$, $A = (L_{ij}), 1 \leq i \leq n-1, i \leq j \leq n-1$, $B = L_{nn}$, $C = (L_{in}) 1 \leq i \leq n-1$.

6.4. THÉORÈME. — Soit $L = \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \text{Mat}(k, K(x))$, G triangulaire. Si pour chaque i $\text{Res}_c(g_{ii} dx, r)$ n'est pas Liouville, L a un

indice local relativement à $B(c, r^-)$ et

$$\chi(L; [\mathcal{A}_c(r)]^k) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_c \left(\frac{d}{dx} + g_{ii}, r \right)}{d \operatorname{Log} r} \right)^{-} = - \chi(L, [\mathcal{H}_c^+(r)]^k).$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du corollaire 6.3 et du théorème 5.6. Pour pouvoir appliquer le corollaire 6.3 on commence par multiplier L par $P \in R(B(c, r^-))$ (resp. $P \in R(B(c, r^-)^{\circ})$) tel que PL définisse un endomorphisme de $[\mathcal{A}_c(r)]^k$ (resp. $[\mathcal{H}_c^+(r)]^k$).

7. Mise sous forme réduite. Disque singulier régulier.

7.1. DÉFINITION. — Soit $L = \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \operatorname{Mat}(k, K(x))$. On dira que le disque $B(c, r^-)$ est singulier régulier pour L si $(x-c)L$ (resp. xL si $c = \infty$) est équivalente de type b) à $\tilde{L} = (x-c) \frac{d}{dx} + \tilde{G}$ (resp. $\tilde{L} = x \frac{d}{dx} + \tilde{G}$) avec $\tilde{G} \in \operatorname{Mat}(k, R(B(c, r^-)))$ (c'est-à-dire \tilde{G} n'a pas de pôles dans $B(c, r^-)$).

Si L a une seule singularité dans $B(c, r^-)$ en c et si cette singularité est régulière, cela signifie qu'il existe $M \in \operatorname{Mat}(k, K(x))$ telle que $M^{-1}(x-c)LM = (x-c) \frac{d}{dx} + \tilde{G}$ (resp. $M^{-1}xLM = x \frac{d}{dx} + \tilde{G}$) où \tilde{G} n'a pas de pôle en c , et en utilisant la décomposition de M en ses facteurs singuliers [4] on obtient un système équivalent avec \tilde{G} qui n'a pas de pôles dans $B(c, r^-)$. Donc le disque $B(c, r^-)$ sera singulier régulier pour L .

7.2. DÉFINITION. — On dira que $L = \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \operatorname{Mat}(k, K(x))$ est complètement soluble (resp. n'est pas soluble) dans le disque générique de $B(c, r^+)$ s'il existe k vecteurs solutions de $Lu = 0$, analytiques dans ce disque générique, linéairement indépendants (resp. s'il n'existe pas de vecteur solution analytique dans le disque générique).

7.3. Comme l'a remarqué Christol [6, Proposition 6.1.2], si L est complètement soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$ alors la définition 7.1 ne dépend pas du choix du centre c du disque $B(c, r^-)$.

7.4. Dorénavant nous considérons le cas $c \neq \infty$, le cas $c = \infty$ s'en déduisant sans difficulté. Si $L = (x-c) \frac{d}{dx} + G$ avec G sans pôles en c , la théorie classique des points singuliers réguliers nous dit qu'il existe une matrice M à coefficients analytiques dans un voisinage de c et inversible, sauf peut-être en c , telle que $M^{-1}LM = (x-c) \frac{d}{dx} + \tilde{G} = \tilde{L}$ où $\tilde{G} \in \text{Mat}(k, K)$ est une matrice de Jordan. Les termes diagonaux de \tilde{G} (les exposants de L) sont, à des entiers près, les valeurs propres de G . On voit donc que \tilde{L} est sous forme réduite. Mais pour que L et \tilde{L} soient équivalentes de type a) il faut que $M \in \text{Mat}(k, \hat{\mathcal{A}}_c(r))$. Le résultat suivant de Christol nous donne des conditions sous lesquelles il en est bien ainsi [5].

PROPOSITION. — Soit $L = (x-c) \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \text{Mat}(k, R(B(c, r^-)))$. Si L est complètement soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$, les exposants de L en c (c'est-à-dire les valeurs propres de $G(c)$) appartiennent à \mathbf{Z}_p . Si de plus les différences de ces exposants ne sont pas des nombres de Liouville, il existe $M \in \text{Mat}(k, \hat{\mathcal{A}}_c(r))$ telle que

$$M^{-1}LM = (x-c) \frac{d}{dx} + \tilde{G}$$

où $\tilde{G} \in \text{Mat}(k, K)$ est une matrice de Jordan.

Remarque. — Si les exposants de L appartiennent à \mathbf{Z}_p et s'il existe $M \in \text{Mat}(k, \hat{\mathcal{A}}_c(r))$ telle que $M^{-1}LM = (x-c) \frac{d}{dx} + \tilde{G}$ avec \tilde{G} de Jordan, alors L est entièrement soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$.

7.5. COROLLAIRE. — Soit $L = \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \text{Mat}(k, K(x))$. Si L est complètement soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$, si $B(c, r^-)$ est est singulier régulier pour L , si les exposants de L relatifs à ce disque ne

sont pas de Liouville et leurs différences non plus, L a un indice local relativement à $B(c, r^-)$ et

$$\chi((x-c)L; [\mathcal{A}_c(r)]^k) = \chi((x-c)L; [\mathcal{H}_c^+(r)]^k) = 0.$$

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 3.13, de la proposition 7.4, du corollaire 6.3, et du lemme 5.5.

7.6. Le cas suivant se rencontre souvent lorsqu'on étudie les équations de Picard-Fuchs associées à une famille de courbes algébriques sur \mathbb{Q} dépendant d'un paramètre.

THÉORÈME. — Soit $A = \mathbf{P}(\Omega) - \bigcup_{c \in S} B(c, 1^-)$ avec S sous-ensemble fini de $\mathbf{P}(\mathbb{C}_p)$, $\infty \in S$, les $B(c, 1^-)$ étant disjoints. Soit $L = \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \text{Mat}(k, \mathbb{Q}(x))$. Supposons que L soit entièrement soluble dans le disque générique de $B(0, 1^+)$, et que pour tout $c \in S$ le disque $B(c, 1^-)$ soit singulier régulier pour L . Alors L a un indice dans $[\mathcal{H}^+(A)]^k$ et l'on a

$$\chi(L; [\mathcal{H}^+(A)]^k) = 2k - k \text{ card}(S).$$

Démonstration. — On applique le théorème 4 et le corollaire 7.5. Le fait que G a ses coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$ assure que les exposants seront des nombres algébriques donc ils ne seront pas de Liouville, non plus que leurs différences.

Remarque. — Si L a une structure de Frobenius forte alors L est complètement soluble dans le disque générique de $B(0, 1^+)$.

8. Mise sous forme réduite. Disque singulier non régulier.

8.1. Considérons le cas où dans le disque $B(c, r^-)$ L a une seule singularité située en c , irrégulière. La théorie classique nous dit que pour obtenir la mise sous forme réduite de Turittin il peut être nécessaire de faire de la ramification sur la variable c'est-à-dire qu'au lieu de travailler avec $x - c$ il faudra considérer y avec $y^s = x - c$, s entier ≥ 1 .

Avant d'étudier plus à fond la mise sous forme réduite, nous allons étudier l'effet de la ramification sur la variable.

8.2. Nous prenons $c = 0$, le cas général s'en déduisant sans difficulté.

Si $L_x = x \frac{d}{dx} + G(x)$ avec $G \in \text{Mat}(k, K(x))$, correspondant au changement de variable $y^s = x$, $s \in \mathbb{N}$, nous poserons $L_y = \frac{1}{s} y \frac{d}{dy} + G(y^s)$.

PROPOSITION. — L_y a un indice local relativement au disque $B(0, r^{1/s})$ si et seulement si, pour tout $0 \leq j \leq s-1$, $x^{-j/s} L_x x^{j/s} = L_x + j/s$ a un indice local relativement à $B(0, r)$. Alors

$$\begin{aligned} \chi(L_y; [\mathcal{A}_0(r^{1/s})]^k) &= \sum_{j=0}^{s-1} \chi(L_x + j/s; [\mathcal{A}_0(r)]^k) \\ \chi(L_y; [\mathcal{H}_0^\dagger(r^{1/s})]^k) &= \sum_{j=0}^{s-1} \chi(L_x + j/s; [\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^k). \end{aligned}$$

Démonstration. — On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^{(s)}(r^{1/s}) &= \{y \mapsto f(y^s); f \in \mathcal{A}_0(r)\} \\ &= \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n y^{sn}; \text{ la série convergeant pour } |y| < r^{1/s} \right\}. \end{aligned}$$

Soit $P \in K[x]$, tel que $P(x)L_x$ définisse un endomorphisme de $\mathcal{A}_0(r)$. Alors $P(y^s)L_y$ définit un endomorphisme de $\mathcal{A}_0(r^{1/s})$.

Observons que

$$\mathcal{A}_0(r^{1/s}) = \bigoplus_{j=0}^{s-1} y^j \mathcal{A}_0^{(s)}(r^{1/s}),$$

et que $P(y^s)L_y$ est stable sur chacun des $[y^j \mathcal{A}_0^{(s)}(r^{1/s})]^k$. Par conséquent $P(y^s)L_y$ a un indice dans $[\mathcal{A}_0(r^{1/s})]^k$ si et seulement si il a un indice dans chacun des $[y^j \mathcal{A}_0^{(s)}(r^{1/s})]^k$ et on aura

$$\chi(P(y^s)L_y; [\mathcal{A}_0(r^{1/s})]^k) = \sum_{j=0}^{s-1} \chi(P(y^s)L_y; [y^j \mathcal{A}_0^{(s)}(r^{1/s})]^k).$$

L'application $y^j \sum a_n y^{ns} \mapsto \sum a_n x^n$ définit un isomorphisme de $y^j \mathcal{A}_0^{(s)}(r^{1/s})$ sur $\mathcal{A}_0(r)$ dans lequel à $P(y^s)L_y$ correspond

$$x^{-j/s} P(x) L_x x^{j/s} = P(x) (x^{-j/s} L_x x^{j/s}) = P(x) (L_x + j/s).$$

Donc $P(y^s)L_y$ a un indice dans $[y^j \mathcal{A}_0^{(s)}(r^{1/s})]^k$ si et seulement si

$P(x)(L_x + j/s)$ a un indice dans $[\mathcal{A}_0(r)]^k$ et ces indices sont égaux. On obtient donc finalement

$$\begin{aligned} \chi(L_y; [\mathcal{A}_0(r^{1/s})]^k) - k \operatorname{ord}_0^-(P(y^s), r^{1/s}) \\ = \sum_{j=0}^{s-1} [\chi(L_x + j/s; [\mathcal{A}_0(r)]^k) - k \operatorname{ord}_0^-(P(x), r)] \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée puisque

$$\operatorname{ord}_0^-(P(y^s), r^{1/s}) = s \operatorname{ord}_0^-(P(x), r).$$

L'existence et la valeur de l'indice de L_y dans $[\mathcal{A}_0^\dagger(r^{1/s})]^k$ se démontre de la même façon.

8.3. On n'a pas nécessairement

$$\chi(L + j/s; [\mathcal{A}_0(r)]^k) = \chi(L; [\mathcal{A}_0(r)]^k),$$

pour $j \neq 0$, comme le montre l'exemple suivant en dimension 1.

Notons ρ le rayon de convergence de $(1+u)^{1/p}$, on a $\rho < 1$. Soit π tel que $\pi^{p-1} = -p$.

Soit $L = x \frac{d}{dx} + \frac{\pi}{x}$, de solution formelle $\exp \frac{\pi}{x}$, donc pour $r < 1$ $\rho_0(L, r) = r^2$ et donc $\chi(L; \mathcal{A}_0(1)) = 1$.

Pour $1 \leq j \leq p-1$, $L + j/p$ a pour solution formelle $x^{-j/p} \exp \frac{\pi}{x}$, donc pour $r < 1$, proche de 1, $\rho_0(L + j/p, r) = \rho r$ et donc $\chi(L + j/p; \mathcal{A}_0(1)) = 0$.

Si $y^p = x$, $L_y = \frac{1}{p^y} \frac{d}{dy} + \frac{\pi}{y^p}$ a pour solution formelle $\exp \frac{\pi}{y^p}$. Comme $\exp \pi \left(\frac{1}{y^p} - \frac{1}{y} \right) \in \mathcal{A}_0^\dagger(1)$, L_y est équivalent de type $b)$ à $\frac{1}{p} L_x$ et donc $\chi(L_y; \mathcal{A}_0(1)) = 1$.

On voit que ce phénomène pathologique ne se produit que si $p|s$, en effet si $p \nmid s$, $(1+u)^s$ a rayon de convergence 1 et l'on a donc $\rho_0(L + j/s, r) = \rho_0(L, r)$ pour tout r car près du point générique $t \left(\frac{x}{t} \right)^{-j/s}$ converge dans le disque générique.

CONJECTURE. — Si $p \nmid s$, $x^{-j/s}Lx^{j/s}$ a un indice dans $[\mathcal{A}_0(r)]^k$ (resp. $[\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^k$) si et seulement si L a un indice et ces indices sont égaux.

De façon équivalente (avec les notations du § 8.2) : Si $p \nmid s$, L_y a un indice local relativement au disque $B(0, r^{1/s})$ si et seulement si L_x a un indice local relativement à $B(0, r)$ et alors

$$\begin{aligned}\chi(L_y, [\mathcal{A}_0(r^{1/s})]^k) &= s\chi(L_x, [\mathcal{A}_0(r)]^k) \\ \chi(L_y, [\mathcal{H}_0^\dagger(r^{1/s})]^k) &= s\chi(L_x, [\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^k).\end{aligned}$$

8.4. PROPOSITION. — Avec les notations du § 8.2, si L_y a un indice dans $[\mathcal{H}_0^\dagger(r^{1/s})]^k$ et si de plus

$$(8.4.1) \quad \chi(L_y, [\mathcal{H}_0^\dagger(r^{1/s})]^k) = \chi\left(L_y, \left(\mathbb{K}\left[\frac{1}{x}\right]\right)^k\right)$$

alors L_x a un indice dans $[\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^k$ et on a

$$(8.4.2) \quad \chi(L_y, [\mathcal{H}_0^\dagger(r^{1/s})]^k) = s\chi(L_x, [\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^k).$$

Démonstration. — Soit $i_0(L)$ l'irrégularité de L au point 0 d'après la définition de Malgrange (Cf § 11.2). Tenant compte de la notion d'indice généralisé le résultat de Malgrange [11] ou Adolphson [1] s'écrit

$$(8.4.3) \quad i_0(L) = -\chi\left(L, \left(\mathbb{K}\left[\frac{1}{x}\right]\right)^k\right).$$

On sait par ailleurs [14, Lemma 3.8] que l'on a pour tout r

$$(8.4.4) \quad \chi(L, (\mathcal{H}_0^\dagger(r))^k) \geq \chi\left(L, \left(\mathbb{K}\left[\frac{1}{x}\right]\right)^k\right)$$

(lorsque l'indice à gauche existe).

D'après la définition de $i_0(L)$ rappelée au § 11.2 on voit sans peine que l'on a

$$(8.3.5) \quad i_0(L_y) = si_0(L_x + j/s) \quad 0 \leq j \leq s - 1.$$

Il résulte de (8.4.1) (8.4.3) et (8.4.5) que pour $0 \leq j \leq s - 1$ on a

$$(8.4.6) \quad \frac{1}{s} \chi(L_y, [\mathcal{H}_0^\dagger(r^{1/s})]^k) \leq \chi(L_x + j/s, [\mathcal{H}_0^\dagger(r)]^k).$$

Par ailleurs d'après la proposition 8.2

$$(L_y, [\mathcal{A}_0^\dagger(r^{1/s})]^k) = \sum_{j=0}^{s-1} (L_x + j/s, [\mathcal{A}_0^\dagger(r)]^k)$$

ce qui montre que dans (8.4.6) on doit avoir égalité pour tout j ce qui termine la démonstration.

8.5. On prend toujours $c = 0$ et L de la forme $L = x \frac{d}{dx} + G$. Le théorème de Turrittin nous dit que, après avoir éventuellement effectué une ramification sur la variable $y^s = x$, il existe $M \in \text{Mat}(k, K((y)))$ telle que $M^{-1}L_y M = \frac{1}{s} y \frac{d}{dy} + \tilde{G}$ où \tilde{G} est une matrice de Jordan, les termes sur la diagonale étant des polynômes en $1/y$.

De plus un résultat de Baldassarri [3] nous dit qu'en p -adique, la matrice M a un rayon de convergence non nul si les différences des exposants de L_y en 0 ne sont pas des nombres de Liouville.

Pour pouvoir appliquer nos techniques de réduction il faudrait savoir si $M \in \text{Mat}(k, \hat{\mathcal{A}}_0(r^{1/s}))$. Il serait donc important de généraliser le résultat de Christol (proposition 7.4) au cas des points singuliers irréguliers.

Notons que nous saurions alors calculer l'indice local de L_y relativement à $B(0, r^{1/s^-})$, mais que la proposition 8.2 ne nous permet pas de calculer l'indice local de L_x relativement à $B(0, r^-)$ (elle assure cependant l'existence de cet indice). Si la conjecture 8.3 était démontrée on pourrait alors calculer l'indice de L_x dans le cas où $p \nmid s$. On sait que s divise $k!$, donc si $p > k$, on n'aura pas $p|s$.

9. Existence d'un indice local.

9.1. Nous allons rappeler un critère d'existence d'indice local, bien que cela ne permette pas de calculer cet indice local. Le résultat suivant offre également une vérification partielle de la conjecture 3.11.

THÉORÈME. — Soit $L = \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \text{Mat}(k; K(x))$. Supposons que L ne soit pas soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$ (cf. définition 7.2). Alors L a un indice local relativement à $B(c, r^-)$ et on a

$$\chi(L, [\mathcal{R}_c(r)]^k) = 0.$$

Démonstration. — Voir [12, Th. 4.16] et [13, Th. 3.4]. Le théorème est démontré pour un opérateur $\ell \in \mathcal{D}$, mais on peut se ramener à ce cas là en utilisant la proposition 3.12.

9.2. Soit $\ell \in \mathcal{D}$. On sait [9, Theorem 4.1] qu'il existe une factorisation de $\ell : \ell = \ell_1 \ell_2$ telle que ℓ_1 ne soit pas soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$ tandis que ℓ_2 est complètement soluble dans ce disque générique. Mais ℓ_1 et ℓ_2 ne sont plus des opérateurs à coefficients dans $K(x)$ mais à coefficients dans $H(\Delta)$ où Δ est une couronne de la forme $B(c, r^-) - B(c, r'^+)$ (donc $H(\Delta) \subset \mathbb{R}_c(r)$). On ne pourra donc pas appliquer à ℓ_1 et ℓ_2 les techniques développées dans cet article. Notons cependant que l'on a encore, comme dans le théorème 9.1, $\chi(\ell_1, \mathbb{R}_c(r)) = 0$.

10. Mesure de l'irrégularité.

10.1. DÉFINITION. — Soit $L = \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \text{Mat}(k, K(x))$. Si L est complètement soluble dans le disque générique du disque $B(c, r^-)$ et a un indice local pour le disque $B(c, r^-)$ nous mesurons l'irrégularité de L dans $B(c, r^-)$ par

$$\begin{aligned} i_c(L, r) &= -\chi((x-c)L; [\mathcal{A}_c^\dagger(r)]^k) \quad \text{si } c \neq \infty \\ &= -\chi(xL; [\mathcal{A}_\infty^\dagger(r)]^k) \quad \text{si } c = \infty. \end{aligned}$$

(Si la conjecture 3.12 est démontrée on aura

$$\begin{aligned} i_c(L, r) &= \chi((x-c)L; [\mathcal{A}_c(r)]^k) \quad \text{si } c \neq \infty \\ &= \chi(xL; [\mathcal{A}_\infty(r)]^k) \quad \text{si } c = \infty. \end{aligned}$$

10.2. Si $B(c, r^-)$ est un disque singulier régulier pour L , alors d'après la proposition 7.5 $i_c(L, r) = 0$.

10.3. En dimension 1 ($k=1$), d'après le théorème 5.6 on a

$$\begin{aligned} i_c(L, r) &= \left(\frac{d \text{Log } \rho_c(L, r)}{d \text{Log } r} \right)^- - 1 \quad \text{si } c \neq \infty \\ &= \left(\frac{d \text{Log } \rho_\infty(L, r)}{d \text{Log } r} \right)^- + 1 \quad \text{si } c = \infty. \end{aligned}$$

Cette formule permet de définir l'irrégularité de L même si L n'a pas d'indice local (sous réserve que L soit complètement soluble).

De plus, d'après la proposition 5.7, $i_c(L,r) \geq 0$ et $i_c(L,r) = 0$ si et seulement si, pour tout $r' < r$ proche de r , L est (complètement) soluble dans le disque générique de $B(c,r^+)$, et ceci a lieu si et seulement si le disque $B(c,r^-)$ est singulier régulier pour L comme on le voit facilement par les lemmes 5.2, 5.3 et 5.4.

10.4. Toujours pour $k = 1$ si $L = \frac{d}{dx} + \eta$ est (complètement) soluble dans le disque générique de $B(c,r^+)$, d'après le lemme 5.3 l'indice local de L , donc l'irrégularité de L , dans $B(c,r^-)$ ne dépend que de la partie singulière η_c de L relativement à $B(c,r^-)$, ce qui est raisonnable. Il n'en est plus de même lorsque L n'est pas (complètement) soluble dans le disque générique comme va le montrer l'exemple suivant. C'est pourquoi nous avons fait cette hypothèse dans la définition 10.1.

Soit $L = \frac{d}{dx} + \frac{\pi d}{x^{d+1}}$ avec $p \nmid d$. On montre facilement [14; § 5.4.2] que pour $r \leq 1$ $\rho_0(L,r) = r^{d+1}$, donc L est soluble dans le disque générique de $B(c,1^+)$ et $i_0(L,1) = d$ ce qui est normal.

Rappelons que le rayon de convergence ρ de $(1+u)^{1/p}$ est < 1 .

Soit alors $L = \frac{d}{dx} + \frac{\pi d}{x^{d+1}} + \frac{1/p}{1-x}$. La solution formelle de L est $(1-x)^{1/p} \exp \pi/x^d$ et cette fois pour $r \leq 1$, r proche de 1 , $\rho_0(L,r) = \rho$, donc

$$\chi(xL; \mathcal{A}_0(1)) = -1.$$

10.5. Soit $A = \mathbf{P}(\Omega) - \bigcup_{c \in S} B(c,r_c^-)$ où S est un sous-ensemble fini de $\mathbf{P}(K)$ et les $B(c,r_c^-)$ sont disjoints. Soit $L = \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \text{Mat}(k, K(x))$. Supposons que, pour tout $c \in S$, L soit complètement soluble dans le disque générique de $B(c,r^+)$ et ait un indice local relativement à $B(c,r^-)$. Alors la formule du théorème 4 peut s'écrire sous la forme

$$\chi(L; [\mathcal{A}^+(A)]^k) = 2k - \sum_{c \in S} (i_c(L,r) + k).$$

Cette formule est à rapprocher de la formule qui donne l'indice de L dans le cas algébrique (Théorème 11.3) et de la formule d'indice dans le cas complexe donnée par Deligne [7, Formule II 6.21.1].

10.6. La définition que nous avons donnée de l'irrégularité nous amène à poser les questions suivantes :

10.6.1. Si pour tout $r' < r$ proche de r , L est complètement soluble dans le disque générique de $B(c, r'^+)$, est-ce qu'alors le disque $B(c, r^-)$ est singulier régulier pour L ? C'est vrai pour $k = 1$, la réciproque est toujours vraie.

10.6.2. Pour $k = 1$, soit $L = \frac{d}{dx} + \eta$ soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$, avec $i_c(L, r) = d \geq 1$. Est-ce que L est équivalente de type b) à $\tilde{L} = \frac{d}{dx} + \tilde{\eta}$ avec $\tilde{\eta}_c = \sum_{0 \leq n \leq d} a_n / (x-c)^{n+1}$ (pour $c = \infty$ $\tilde{\eta}_\infty = \sum_{0 \leq n \leq d-1} a_n x^n$)? On sait déjà que L est équivalente de type b) à un $\tilde{L} = \frac{d}{dx} + \tilde{\eta}$ où $\tilde{\eta}$ a dans $B(c, r^-)$ un pôle seulement en c (lemme 5.2). Si L est équivalente à un \tilde{L} de la forme indiquée alors nécessairement $i_c(L, r) \leq d$.

10.7. Nous allons montrer que la réponse à la question 10.6.2 est oui si l'on suppose de plus que K est sphériquement complet, c'est-à-dire que l'intersection de toute suite emboîtée de disques est non vide.

Avant de le démontrer nous allons réduire la question 10.6.2 à une forme plus simple. Considérons le cas $c \neq \infty$. On désire trouver $u \in \mathcal{H}_c^+(r)$ tel que $\eta_c + u'/u = \sum_{0 \leq n \leq d} a_n / (x-c)^{n+1}$ avec $d = i_c(L, r)$. Or d'après le lemme 5.3, comme L est soluble dans le disque générique de $B(c, r^+)$, L est équivalent à $\frac{d}{dx} + \eta_c$, donc $i_c(L, r) = i_c\left(\frac{d}{dx} + \eta_c, r\right)$. On peut donc supposer que η a seulement un pôle en c . De plus d'après le lemme 5.4 $a_0 \in \mathbf{Z}_p$, donc si t est le point générique du disque $B(c, r^+)$, $((x-c)/(t-c))^{a_0}$ converge dans tout le disque générique, par conséquent

$$\rho_c\left(\frac{d}{dx} + \eta_c, r\right) = \rho_c\left(\frac{d}{dx} + \eta_c - a_0/(x-c), r\right)$$

et

$$i_c\left(\frac{d}{dx} + \eta_c, r\right) = i_c\left(\frac{d}{dx} + \eta_c - a_0/(x-c), r\right).$$

On peut donc supposer que $\text{Res}_c(\eta_c dx, r) = 0$. Enfin par une inversion on se ramène au cas où $c = \infty$.

On est donc ramené à résoudre le problème suivant :

Soit $\eta = a_1 + a_2x + \dots + a_dx^{d-1}$. Montrer que si

$$\left(\frac{d \text{Log } \rho_0(L + \eta, r)}{d \text{Log } r}\right)^+ = -(\delta - 1)$$

il existe $u \in \mathcal{H}^+(\mathbf{B}(0, r^+))$ tel que $\eta + u'/u = b_1 + b_2x + \dots + b_\delta x^{\delta-1}$.
 (Ceci correspond à $i_\infty\left(\frac{d}{dx} + \eta, 1/r\right) = \delta$).

La fin du § 10 est consacrée à la démonstration de cette propriété dans le cas où K est sphériquement complet. Le résultat crucial est le lemme suivant. On rappelle que π est une solution de l'équation $z^{p-1} = -p$.

10.8. LEMME. — Soit K sphériquement complet (et algébriquement clos). Il existe $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K , telle que, pour tout $m \geq 1$, le rayon de convergence de la fonction $\exp \pi\left(\frac{x^{p^m}}{p^m} + \alpha_1 \frac{x^{p^{m-1}}}{p^{m-1}} + \dots + \alpha_m x\right)$ soit 1. On a alors

$$(10.8.1) \quad \text{ord}_p(\alpha_m) = -\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^m}\right).$$

Démonstration. — On pose $\alpha_0 = 1$. On suppose construits $\alpha_1 \dots \alpha_{m-1}$ et on va déterminer α_m .

a) Vérifions que, si α_m existe, sa valuation est donnée par la formule (10.8.1).

Pour $0 \leq i \leq m-1$, la fonction $\exp \pi(\alpha_i x^{p^{m-i}}/p^{m-i})$ converge pour

$$\text{ord}_p(x) \frac{m-i-\text{ord } \alpha_i}{p^{m-i}} = \frac{m-i}{p^{m-i}} + \frac{1}{p^{m-i+1}} + \dots + \frac{1}{p^m}.$$

Les rayons de convergence sont donc tous différents et le plus petit rayon

de convergence correspond à $i = m - 1$. D'où $\exp\left(-\pi \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i x^{p^{m-i}}/p^{m-i}\right)$ converge pour : $\text{ord}_p x > \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^m}$, et comme

$$\exp \pi \alpha_m x = \exp\left(\pi \sum_{i=0}^m \alpha_i x^{p^{m-i}}/p^{m-i}\right) \exp\left(-\pi \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i x^{p^{m-i}}/p^{m-i}\right),$$

cette fonction converge pour $\text{ord}_p x > \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^m}$ ce qui entraîne

$$\text{ord}_p \alpha_m = - \sum_{j=1}^m p^{-j}.$$

b) On pose

$$g_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^{p^{n-i}}/p^{n-i}$$

$$f_\alpha(x) = g_{m-1}(x) + \alpha x$$

$\rho(\alpha)$ = rayon de convergence de $\exp \pi f_\alpha(x)$

$$C = \{\rho(\alpha); \alpha \in K\}$$

R = borne supérieure de C .

Il s'agit de montrer que $1 \in C$. Nous allons montrer que $R \in C$. Pour cela nous utiliserons le fait que K est sphériquement complet.

Puis nous montrerons que si $\rho(\alpha) < 1$ il existe α' tel que $\rho(\alpha') > \rho(\alpha)$. Pour cela nous utiliserons le fait que K est algébriquement clos.

Il résulte immédiatement de ces deux résultats que $R \geq 1$. Nous montrerons par ailleurs que $R \leq 1$, d'où $R = 1$. Ceci achèvera la démonstration du lemme.

c) Montrons que $R \in C$.

Pour $\rho \in \mathbf{R}^+$, posons

$$B(\rho) = \{\alpha \in K; \rho(\alpha) \geq \rho\}.$$

Si $B(\rho)$ est non vide, alors $B(\rho)$ est un disque. En effet si α et $\beta \in B(\rho)$, le rayon de convergence de $\exp \pi(\alpha - \beta)x = \exp \pi f_\alpha(x) / \exp \pi f_\beta(x)$ est $\geq \rho$, et donc on doit avoir

$|\alpha - \beta| \leq \rho^{-1}$. Réciproquement si $\alpha \in B(\rho)$ et $|\alpha - \beta| \leq \rho^{-1}$ on voit que $\beta \in B(\rho)$.

Soient alors $\rho_n \in C$, ρ_n suite croissante, $\rho_n \rightarrow R$ ($R = +\infty$ si C non borné).

Alors les $B(\rho_n)$ sont non vides et la suite $B(\rho_n)$ est décroissante.

Comme K est sphériquement complet $\bigcap_n B(\rho_n) \neq \emptyset$. Soit $\alpha \in \bigcap_n B(\rho_n)$.

Alors $\forall n$ $\exp \pi f_\alpha(x)$ a un rayon de convergence $\geq \rho_n$, donc un rayon de convergence $\geq R$. Comme R est la borne supérieure de C , $\exp \pi f_\alpha(x)$ a exactement le rayon de convergence R .

d) Montrons que l'on a toujours $\rho(\alpha) \leq 1$ et que si $\rho(\alpha) < 1$ il existe α' tel que $\rho(\alpha') > \rho(\alpha)$.

Posons $L_\alpha = \frac{d}{dx} - \pi f'_\alpha = \exp \pi f_\alpha \circ \frac{d}{dx} \circ \exp -\pi f_\alpha$. Nous allons déterminer $\rho_0(L_\alpha, r)$.

Soit t le point générique du disque $B(0, r^+)$, on a donc $|t| = r$. La solution u de $L_\alpha u = 0$ près de t est

$$u(x) = \exp \pi (f_\alpha(x) - f_\alpha(t))$$

soit en posant $x = t + y$

$$u(t+y) = \exp \pi (f_\alpha(t+y) - f_\alpha(t)) = \exp \pi \left(\sum_{i,j} a_{ij} t^i y^j \right)$$

la somme portant sur les i, j tels que

$$0 \leq i \leq \deg f_\alpha - 1 \quad 1 \leq j \leq \deg f_\alpha.$$

Regroupons dans cette somme tous les termes pour lesquels i/j est constant, soit $i/j = s$ et posons

$$\varphi_s(z) = \sum_{i/j=s} a_{ij} z^j$$

$\gamma_s =$ rayon de convergence de $\exp \pi \varphi_s(z)$.

Alors

$$u(t+y) = \exp \pi \sum_s \varphi_s(t^s y) = \prod_s \exp \pi \varphi_s(t^s y)$$

et comme le rayon de convergence de $\exp \pi \varphi_s(t^s y)$ est $\gamma_s r^{-s}$, on voit que le rayon de convergence de $u(t+y)$ est égal à $\min_s \gamma_s r^{-s}$ si ce minimum est atteint pour un seul s . Comme pour tout r , il existe un voisinage V de r tel que les $\gamma_s r'^{-s}$ soient tous distincts pour $r' \in V - \{r\}$, on en déduit par continuité sur r que le rayon de convergence de $u(t+y)$ est toujours $\min_s \gamma_s r^{-s}$ et donc

$$\rho_0(L_\alpha, r) = \min(r, \min_s \gamma_s r^{-s}).$$

(Remarque : comme on sait que $\left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_0(L_\alpha, r)}{d \operatorname{Log} r}\right)^\pm$ est toujours un entier, il en résulte que le minimum est atteint pour s entier).

Après cette discussion générale sur le calcul de $\rho_c(L, r)$, revenons à notre exemple. Ici on a toujours $i+j = p^n$ avec $0 \leq n \leq m$. Les valeurs possibles pour s sont donc $s = i/j = \frac{p^n}{j} - 1$, $0 \leq n \leq m$, $1 \leq j \leq p^n$.

On a

$$\varphi_0(z) = f_\alpha(z)$$

et pour $n \geq 1$, $1 \leq j \leq p^n$, $p \nmid j$

$$\begin{aligned} \varphi_{p^n/j-1}(z) &= \sum_{n \leq k \leq m} \binom{p^k}{j p^{k-n}} \alpha_{m-k} \frac{z^{j p^{k-n}}}{p^k} \\ &= \sum_{n \leq k \leq m} \frac{j}{p^n} \binom{p^k}{j p^{k-n}} \alpha_{m-k} \frac{z^{j p^{k-n}}}{j p^{k-n}}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{j}{p^n} \binom{p^k}{j p^{k-n}} &= \frac{j p^{k-n} (p^k - 1) \dots (p^k - j p^{k-n} + 1)}{1 \dots (j p^{k-n} - 1) \cdot j p^{k-n}} = (-1)^{j p^{k-n} - 1} \bmod p^k \\ &= (-1)^{j+1} \bmod p^k \text{ si } p \neq 2 \text{ ou } p = 2 \text{ et } k = n \\ &= -1 \bmod p^k \text{ si } p = 2 \text{ et } k \neq n. \end{aligned}$$

Pour $p \neq 2$ écrivons

$$\frac{j}{p^n} \binom{p^k}{j p^{k-n}} = (-1)^{j+1} + b_{kjn} p^{k+1} \text{ avec } \operatorname{ord}_p(b_{kjn}) \geq 0.$$

Alors

$$\varphi_{p^n/j-1}(z) = (-1)^{j+1} \frac{1}{j} g_{m-n}(z^j) + \sum_{n \leq k \leq m} b_{kjn} \alpha_{m-k} p^{n+1} j^{-1} z^{j p^{k-n}}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, pour $n \geq 1$,

$$\exp \pi (-1)^{j+1} j^{-1} g_{m-n}(z^j) = [\exp \pi g_{m-n}(z^j)]^{1/j}$$

a un rayon de convergence 1 comme $\exp \pi g_{m-n}(z)$ puisque $p \nmid j$. De plus on a

$$\text{ord}_p (b_{kjn} \alpha_{m-k} p^{n+1} j^{-1}) \geq n + 1 - \left(\frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p^{m-k}} \right) > n > 0$$

donc $\exp \pi \sum_{n \leq k \leq m} b_{kjn} \alpha_{m-k} p^{n+1} j^{-1} z^{jp^{k-n}}$ a un rayon de convergence > 1 et par suite $\exp \varphi_{p^n/j-1}(z)$ a un rayon de convergence 1.

Pour $p = 2$ on pose

$$\frac{j}{2^n} \binom{2^k}{j 2^{k-n}} = -1 + b_{kjn} 2^{k-n+1} \text{ avec } \text{ord}_2 (b_{kjn}) \geq 0,$$

valable pour tous k, j, n . Par un argument similaire on montre encore que pour $n \geq 1$ $\exp \varphi_{p^n/j-1}(z)$ a un rayon de convergence 1.

Finalement on trouve

$$\gamma_0 = \rho(\alpha)$$

$$\gamma_s = 1 \quad s = p^n/j - 1, \quad 1 \leq n \leq m, \quad 1 \leq j \leq p^n, \quad p \nmid j.$$

Finalement

$$\begin{aligned} \rho_0(L_\alpha, r) &= \min \left(r, \rho(\alpha), \min_{s \geq 1} r^{-s} \right) \\ &= \min (r, \rho(\alpha), r^{-p^m+1}). \end{aligned}$$

Si $r = \rho(\alpha)$ d'après le principe de transfert

$$\rho_0(L_\alpha, \rho(\alpha)) = \rho(\alpha) \text{ donc } \rho(\alpha) = \min (\rho(\alpha), \rho(\alpha), \rho(\alpha)^{-p^m+1})$$

ce qui entraîne $\rho(\alpha) \leq 1$.

Soit alors $\rho(\alpha) < 1$. Prenons $r = \rho(\alpha)^{-1/(p^m-1)}$. On a $r > 1$ et

$$\left(\frac{d \text{Log } \rho_0(L_\alpha, r)}{d \text{Log } r} \right)^- = 0 \text{ et } \left(\frac{d \text{Log } \rho_0(L_\alpha, r)}{d \text{Log } r} \right)^+ = -p^m + 1.$$

Comme $p^m - 1 \neq 0$ (car $m \geq 1$), d'après la proposition 4.5 iii) de [14], il existe $c \in K$ avec $|c| = r$ tel que

$$\left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_c(L_\alpha, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)^{-} \neq 0$$

et comme L_α n'a pas de singularité dans le disque $B(c, r^-)$ ceci entraîne d'après la proposition 4.6 de [14] que la solution v de $L_\alpha v = 0$ près de c a un rayon de convergence supérieur au rayon de convergence de la solution u près du point générique t .

$$\begin{aligned} v(c+y) &= \prod_s \exp \pi \varphi_s(c^s y) \\ &= \exp \pi (\varphi_0(y) + \varphi_{p^m-1}(c^{p^m-1} y)) \prod_{s \neq 0, p^m-1} \exp \pi \varphi_s(c^s y). \end{aligned}$$

Pour $s \neq 0, p^m - 1$, on a

$$\begin{aligned} \text{rayon de convergence de } \exp \pi \varphi_s(c^s y) &= r^{-s} > r^{-p^m+1} \\ &= \rho(\alpha) = \rho_0(L_\alpha, r) = \text{rayon de convergence de } u(t+y). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\exp \pi (\varphi_0(y) - \varphi_{p^m-1}(c^{p^m-1} y)) = \exp \pi (f_0(y) + c^{p^m-1} y)$$

a un rayon de convergence $> \rho(\alpha)$. Donc pour $\alpha' = \alpha + c^{p^m-1}$, $\rho(\alpha') > \rho(\alpha)$.

10.9. Pour tous les résultats suivants qui découlent du lemme 10.8 on suppose que K est sphériquement complet.

COROLLAIRE. — Pour tout $d \in \mathbb{N}$ il existe $\beta_0 \dots \beta_{d-1}$ tels que la fonction $\exp \pi \left(\frac{x^d}{d} + \beta_0 x^{d-1} + \dots + \beta_{d-1} \right)$ a un rayon de convergence 1.

Démonstration. — Écrivons $d = \delta p^m$ avec $p \nmid \delta$. Alors

$$[\exp \pi g_m(x^\delta)]^{1/\delta} = \exp \pi \left(\frac{x^{\delta p^m}}{\delta p^m} + \alpha_0 \frac{x^{\delta p^{m-1}}}{\delta p^{m-1}} + \dots + \alpha_m \frac{x^\delta}{\delta} \right)$$

a un rayon de convergence 1 comme $\exp \pi g_m(x)$.

10.10. COROLLAIRE. — Soit $L = \frac{d}{dx} + \pi \sum_{1 \leq i \leq d} a_i x^{i-1}$. Soit r tel que L soit soluble dans le disque générique de $\mathbf{B}(0, r^+)$. On a nécessairement $r \leq |a_d|^{-1/d}$. Si $r < |a_d|^{-1/d}$ il existe $u \in \mathcal{H}^\dagger(\mathbf{B}(0, r^+))$ tel que

$$u^{-1}Lu = \tilde{L} = \frac{d}{dx} + \pi \sum_{1 \leq j \leq d-1} b_j x^{j-1}.$$

Si $r = |a_d|^{-1/d}$, $i_\infty(L, 1/r) = d$.

Démonstration. — Le changement de variable $y = a_d^{1/d}x$ nous ramène au cas $|a_d| = 1$.

Posons $f(x) = \sum_{1 \leq i \leq d} a_i \frac{x^i}{i}$. Alors $v = \exp \pi f$ est solution de $Lv = 0$ près de 0. Comme dans la démonstration du lemme 10.8 considérons les φ_s et γ_s associés à f (au lieu de f_d). On aura

$$(10.10.1) \quad r = \rho_0(L, r) = \min(r, \min_s \gamma_s r^{-s}).$$

Ici $\varphi_{d-1}(z) = z^{d-1}$ (parce que $a_d = 1$) donc $\gamma_{d-1} = 1$ et on a $r \leq r^{-(d-1)}$ ce qui entraîne $r \leq 1$.

Soit alors $r < 1$, il existe d'après le lemme 10.9 un polynôme $g \in \mathbf{K}[x]$ de degré $\leq d-1$ tel que $u = \exp -\pi \left(\frac{x^d}{d} + g(x) \right)$ ait un rayon de convergence 1, donc $u \in \mathcal{H}^\dagger(\mathbf{B}(0, r^+))$. Alors

$$\tilde{L} = u^{-1}Lu = L - \pi x^{d-1} - \pi g'(x) = \frac{d}{dx} + \pi \sum_{1 \leq i \leq d-1} a_i x^{i-1} - \pi g'$$

a bien la forme indiquée.

Si $r = 1$, d'après (10.10.1) on a

$$1 = \min(1, \min_s \gamma_s)$$

donc $\gamma_s \geq 1$ pour tout s , et on a vu que $\gamma_{d-1} = 1$. Comme $s \leq d-1$ on a donc pour $r > 1$

$$\rho_0(L, r) = \min(r, \min_s \gamma_s r^{-s}) = r^{-(d-1)}$$

et donc

$$i_\infty(L, 1) = - \left(\frac{d \operatorname{Log} \rho_0(L, r)}{d \operatorname{Log} r} \right)_{r=1}^+ + 1 = (d-1) + 1 = d.$$

10.11. COROLLAIRE. — Si K est sphériquement complet la réponse à la question 10.6.2 est vraie.

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la réduction 10.7 et du corollaire 10.10.

10.12. Le fait que, dans le lemme crucial 10.8, les coefficients $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ appartiennent à une extension sphériquement complète de C_p semble peu naturel. Nous proposons une autre méthode d'attaque de ce problème qui permettra peut-être de montrer que les coefficients α_i peuvent être choisis dans C_p .

Soit $E(x) = \exp \sum_{i=0}^{+\infty} x^{p^i}/p^i$ l'exponentielle d'Artin-Hasse. On sait que son rayon de convergence est 1. On voit facilement que la fonction $f(x) = \exp \pi \sum_{i=0}^m (\alpha_i x^{p^{m-i}}/p^{m-i})$ a un rayon de convergence 1 si et seulement si il existe $\beta_1, \beta_2 \dots$ dans K avec $|\beta_i| \leq 1$ pour tout i et tels que

$$f(x) = \prod_{i=1}^{+\infty} E(\beta_i x^{p^i}).$$

En explicitant les relations ainsi obtenues on trouve que les $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq m}$ et les $(\beta_i)_{1 \leq i}$ vérifient une suite d'équations polynomiales. Il s'agit de montrer qu'il existe une solution $(\alpha_i) (\beta_i)$ avec $\alpha_0 = 1, |\beta_i| \leq 1$ pour tout i , les α_i et β_i étant pris dans C_p . Le lemme 10.8 nous assure qu'une telle solution existe, les α_i et β_i étant pris dans une extension sphériquement complète de C_p .

11. Indice algébrique.

11.1. Soit S un sous-ensemble fini de $P(K)$ avec $\infty \in S$. Notons \mathcal{L} l'ensemble des fractions rationnelles $\in K(x)$ sans pôles en dehors de S .

Si $S = \{\infty, c_1, \dots, c_m\}$, $\mathcal{L} = K \left[x, \frac{1}{x-c_1}, \dots, \frac{1}{x-c_m} \right]$.

Soit $L = \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \text{Mat}(k, K(x))$. Si les pôles de G appartiennent à S , alors L définit un endomorphisme de \mathcal{L}^k . Mais si

ce n'est pas le cas on peut définir l'indice $\chi(L, \mathcal{L}^k)$ comme on a fait au § 3.5. On choisit $P \in K[x]$ tel que PG n'ait pas de pôles en dehors de S , et on pose

$$\begin{aligned} \chi(L; \mathcal{L}^k) &= \chi(PL; \mathcal{L}^k) - \chi(P; \mathcal{L}^k) \\ &= \chi(PL; \mathcal{L}^k) + \text{ord}_{\text{sc}}(P). \end{aligned}$$

Si γ désigne une projection de $P^{-1}\mathcal{L}^k$ sur \mathcal{L}^k on a également

$$\chi(L; \mathcal{L}^k) = \chi(\gamma L; \mathcal{L}^k).$$

11.2. Il est bien connu [7, Lemme II.1.3] que L est « équivalent » à un opérateur $\ell \in \mathcal{D}$ d'ordre k , précisément il existe $M \in \text{Mat}(k, K(x))$ telle que

$$M^{-1}LM = \tilde{L} = \frac{d}{dx} + \tilde{G}$$

où \tilde{G} a la forme

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & 1 \\ & 0 & & \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \end{pmatrix}$$

avec $a_i \in K(x)$, $0 \leq i \leq k - 1$.

Il résulte alors de la proposition 3.7 (avec \mathcal{L} jouant le rôle de RH) que l'on aura

$$\chi(L; \mathcal{L}^k) = \chi(\tilde{L}; \mathcal{L}^k).$$

Posons $\ell := \frac{d^k}{dx^k} - a_{k-1} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} - \dots - a_0 \in \mathcal{D}$. Soit $P \in K[x]$ tel que $P\ell$ (et donc $P\tilde{L}$) n'ait pas de pôles en dehors de S . Notons γ une projection de $P^{-1}\mathcal{L}$ sur \mathcal{L} , et notons encore γ la projection correspondante de $P^{-1}\mathcal{L}^k$ sur \mathcal{L}^k . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\gamma\ell} & \mathcal{L} \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ \mathcal{L}^k & \xrightarrow{\gamma\tilde{L}} & \mathcal{L}^k \end{array}$$

avec $u(f) = (f, \dots, f^{(k-1)})$, $v(g) = (0, \dots, 0, g)$. Alors ce diagramme induit un isomorphisme entre le noyau de γ^ℓ et le noyau de $\gamma^{\tilde{L}}$ d'une part, le conoyau de γ^ℓ et le conoyau de $\gamma^{\tilde{L}}$ d'autre part. Par conséquent

$$\chi(\ell; \mathcal{L}) = \chi(\tilde{L}; \mathcal{L}^k) = \chi(L; \mathcal{L}^k).$$

Suivant Malgrange [11, § 3.2] on définit l'irrégularité de ℓ (et de L) au point c par la formule

$$i_c(L) = i_c(\ell) := \sup_{0 \leq j \leq k} (j - \text{ord}_c(a_j)) - k \quad \text{si } c \neq \infty$$

$$i_\infty(L) = i_\infty(\ell) := \sup_{0 \leq j \leq k} (-j - \text{ord}_\infty(a_j)) + k.$$

En effet si l'on écrit :

$$(x-c)^k \ell = \partial^k + b_{k-1} \partial^{k-1} + \dots + b_0 \quad \text{avec} \quad \partial = (x-c) \frac{d}{dx}$$

$$\left(\text{resp. } x^k \ell = \partial^k + \dots + b_0 \text{ avec } \partial = x \frac{d}{dx} \text{ si } c = \infty \right)$$

alors

$$i_c(\ell) = \sup \left(0, \sup_{0 \leq j \leq k-1} -\text{ord}_c(b_j) \right).$$

11.3. Dans [1], Adolphson a calculé l'indice $\chi(\ell; \mathcal{L})$. Nous réécrivons son résultat en utilisant l'irrégularité.

THÉORÈME. — Soit $L = \frac{d}{dx} + G$ avec $G \in \text{Mat}(k, K(x))$. Alors L a un indice dans \mathcal{L}^k et

$$\chi(L; \mathcal{L}^k) = 2k - \sum_{c \in S} (i_c(L) + k).$$

Et donc si $P \in K[x]$ est tel que PL n'a pas de pôles en dehors de S

$$\chi(PL; \mathcal{L}^k) = 2k - \sum_{c \in S} (i_c(L) + k) - \text{ord}_{S^c}(P).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ADOLPHSON, An index theorem for p -adic differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 216 (1976), 279-293.

- [2] Y. AMICE, *Les nombres p -adiques*, PUF collection Sup 14 (1975).
- [3] F. BALDASSARRI, Differential modules and singular points of p -adic differential equations, *Adv. in Math.*, 44 (1982), 155-179.
- [4] G. CHRISTOL, Décomposition des matrices en facteurs singuliers. Application aux équations différentielles, *GEAU*, 7-8 (1979-81), n° 5, 17 p.
- [5] G. CHRISTOL, Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers, *Astérisque*, 119-120 (1984), 151-168.
- [6] G. CHRISTOL, Opérateurs différentiels p -adiques, Kingston university publication.
- [7] P. DELIGNE, Équations différentielles à points singuliers réguliers, *Lecture Notes in Math.*, 169, Springer Verlag, 1970.
- [8] B. DWORK, On p -adic differential equations II, *Annals of Math.*, 98 (1973), 366-376.
- [9] B. DWORK, P. ROBBA, On ordinary linear p -adic differential equations, *Trans. A.M.S.*, 231 (1977), 1-46.
- [10] B. DWORK, P. ROBBA, Effective p -adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations, *Trans. A.M.S.*, 259 (1980), 559-577.
- [11] B. MALGRANGE, Sur les points singuliers des équations différentielles, *L'enseignement mathématique*, XX (1974), 147-176.
- [12] P. ROBBA, On the index of p -adic differential operators I, *Annals of Math.*, 101 (1975), 280-316.
- [13] P. ROBBA, On the index of p -adic differential operators II. *Duke Math. J.*, 43 (1976), 19-31.
- [14] P. ROBBA, Index of p -adic differential operators III. Application to twisted exponential sums, *Astérisque*, 119-120 (1984), 191-266.

Manuscrit reçu le 21 novembre 1983,
révisé le 16 juillet 1984.

Philippe ROBBA,
Université de Paris XI
Département de Mathématiques
91405 Orsay Cedex (France).
