Annales de l'institut Fourier

JEAN COQUET

Mesures spectrales de Walsh associées à certaines suites arithmétiques

Annales de l'institut Fourier, tome 35, nº 2 (1985), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 2 (1985), 1-12.

MESURES SPECTRALES DE WALSH ASSOCIÉES À CERTAINES SUITES ARITHMÉTIQUES

par Jean COQUET

1. INTRODUCTION

$\mathscr{S}$ désigne l'ensemble, introduit par Wiener [14] des suites $g: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ telles que

$$\phi_g(t_1 - t_2) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} g(n+t_1)\overline{g(n+t_2)}$$

existe pour tout couple (t_1, t_2) d'entiers naturels.

Si $g \in \mathscr{S}$, $\phi_g: \mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ est une suite définie positive, appelée *corrélation de* g, et est donc transformée de Fourier d'une mesure borélienne positive Λ_g sur le tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, appelée *mesure spectrale de* g.

L'analyse spectrale des suites arithmétiques a fait l'objet de nombreux travaux ([1], [2], [5], [7], [8], [9], [10], [11], [12], etc...).

On se propose ici d'ébaucher une « analyse spectrale binaire » des suites arithmétiques, faisant intervenir au lieu de l'addition ordinaire des entiers, l'addition « sans retenue » en base 2 :

$$\text{si} \quad n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r 2^r \quad \text{et} \quad m = \sum_{r=0}^{\infty} b_r 2^r, \quad a_r \in \{0,1\}, \quad b_r \in \{0,1\},$$

$n \oplus m = \sum_{r=0}^{\infty} c_r 2^r$ où c_r est le reste de la division euclidienne de $a_r + b_r$ par 2.

Le choix de la base 2 est seulement destiné à simplifier l'exposé. Dans la suite, $\mathscr{S}_2$ désigne l'ensemble des suites $g: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ telles que,

$$\gamma_g(t) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n<N} g(n \oplus t)\overline{g(n)} \qquad \text{existe pour tout} \qquad t \in \mathbf{N}.$$

Mots-clés : Mesures spectrales - Corrélation de Walsh - Suites multiplicatives - Suites pseudo-aléatoires.

Si $g \in \mathscr{S}_2$, γ_g est appelée la *corrélation de Walsh de* g. On montre d'abord que γ_g est la transformée de Fourier-Walsh d'une mesure positive borélienne μ_g sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ appelée *mesure spectrale de Walsh de* g. On étudie ensuite la mesure spectrale de Walsh de certaines suites arithmétiques classiques.

Notations. — 1) Pour tout réel x, on pose $e(x) = e^{2i\pi x}$ et $\|x\| = d(x,\mathbf{Z})$.

2) Le tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est noté $\mathbf{T}$.

2. MESURE DE WALSH

2.1. Fonctions de Walsh [13].

Soit t un entier naturel de développement binaire $\sum_{j=0}^{\infty} t_j 2^j$. Tout $x \in \mathbf{T}$ admet un développement binaire (régulier) de la forme

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j 2^{-1-j}.$$

La fonction de Walsh $w_t : \mathbf{T} \to \{-1, +1\}$ est définie par

$$w_t(x) = \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{x_j t_j}.$$

Si $a = (a_0, \ldots, a_{K-1})$ est une suite finie de 0 et de 1 et si $t_j = 0$ pour $j \geqslant K$, la fonction w_t est constante sur le cylindre

$$\mathscr{C}_a = \{x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z};\ \forall j < K,\ x_j = a_j\}$$

et sa valeur est notée $w_t(\mathscr{C}_a)$.

2.2. Existence de la mesure de Walsh.

THÉORÈME 1. — *Si g appartient à $\mathscr{S}_2$, il existe une mesure borélienne positive μ_g sur le tore $\mathbf{T}$ (appelée mesure spectrale de Walsh de g) telle que,* *pour tout* $t \in \mathbf{N}$,

$$\gamma_g(t) = \mu_g(w_t)\left(= \int_{\mathrm{T}} w_t(x)\, d\mu_g(x)\right).$$

De plus, si g *est de module* 1, μ_g *est une mesure de probabilité.*

Preuve. — 1) Avec la notation du paragraphe 2.1, on a nécessairement

$$\mu_g(\mathscr{C}_a) = \int_{\mathrm{T}} 1_{\mathscr{C}_a}(x)\, d\mu_g(x) = 2^{-\mathrm{K}} \sum_{t<2^{\mathrm{K}}} \int_{\mathrm{T}} w_t(\mathscr{C}_a) w_t(x)\, d\mu_g(x)$$

donc

$$\mu_g(\mathscr{C}_a) = 2^{-\mathrm{K}} \sum_{t<2^{\mathrm{K}}} w_t(\mathscr{C}_a)\gamma_g(t). \tag{1}$$

Réciproquement, la mesure μ_g définie par (1) a bien pour transformée de Fourier-Walsh γ_g.

2) Si $g \in \mathscr{S}_2$, d'après (1),

$$\begin{aligned}\mu_g(\mathscr{C}_a) &= 2^{-\mathrm{K}} \sum_{t<2^{\mathrm{K}}} w_t(\mathscr{C}_a) . \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}2^{\mathrm{K}}} \sum_{n<\mathrm{N}2^{\mathrm{K}}} g(n\oplus t)\overline{g(n)} \\ &= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{m<\mathrm{N}} \left(4^{-\mathrm{K}} \sum_{t<2^{\mathrm{K}}} \sum_{u<2^{\mathrm{K}}} w_t(\mathscr{C}_a) g(u\oplus t + m2^{\mathrm{K}})\overline{g(u+m2^{\mathrm{K}})}\right).\end{aligned}$$

Puisque $w_t = w_{t\oplus u} w_u$ et que $u \to u \oplus t$ est bijective sur $[0,2^{\mathrm{K}}[$,

$$\mu_g(\mathscr{C}_a) = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{m<\mathrm{N}} \left|2^{-\mathrm{K}} \sum_{t<2^{\mathrm{K}}} g(t+m2^{\mathrm{K}}) w_t(\mathscr{C}_a)\right|^2. \tag{2}$$

μ_g est donc une mesure positive.

3) Si g est de module 1, $\mu_g(\mathrm{T}) = \gamma_g(0) = 1$. □

Remarque. — γ_g est une suite réelle.

3.3. Cas où la mesure est continue.

Le résultat suivant est à comparer à ceux obtenus pour l'analyse spectrale classique ([11], p. 48 à 53).

THÉORÈME 2. — *Soit* g *un élément de* $\mathscr{S}_2$.

1) *Si* $\mu_g(\{0\}) = 0$, g *a une moyenne nulle.*

2) μ_g *est une mesure continue si, et seulement si,*

$$0 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t<N} |\gamma_g(t)|^2 .$$

Preuve. — 1) $\mu_g(\{0\}) = \lim \mu_g(E_K)$ où $E_K = \{x \in \mathbf{T} ; \forall k<K, x_k=0\}$. D'après la deuxième partie de la démonstration du théorème 1,

$$\mu_g(E_K) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{m<N} \left| \frac{1}{2^K} \sum_{t<2^K} g(t+m2^K) \right|^2 .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left(\limsup \frac{1}{N}\left| \sum_{n<N} g(n)\right|\right)^2 \leqslant \left(\limsup \frac{1}{N} \sum_{m<N} \frac{1}{2^K}\left| \sum_{t<2^K} g(t+m2^K)\right|\right)^2 \leqslant \mu_g(E_k).$$

Donc g a une moyenne nulle si $\mu_g(\{0\}) = 0$.

$$2)\ \frac{1}{2^K} \sum_{t<2^K} |\gamma_g(t)|^2 = \frac{1}{2^K} \sum_{t<2^K} \int_{\mathbf{T}^2} w_t(x) w_t(y)\, d(\mu_g \otimes \mu_g)(x,y)$$
$$= (\mu_g \otimes \mu_g)(\Delta_K) \text{ où } \Delta_K = \{(x,y) \in \mathbf{T}^2 ; \forall k<K, x_k=y_k\}.$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t<N} |\gamma_g(t)|^2 = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2^K} \sum_{t<2^K} |\gamma_g(t)|^2 = \mu_g \otimes \mu_g(\Delta)$$

où $\Delta = \{(x,x) ; x \in \mathbf{T}\}$ est la diagonale de $\mathbf{T}^2$.

On conclut en remarquant que la relation $(\mu_g \otimes \mu_g)(\Delta) = 0$ a lieu si et seulement si μ_g est continue. □

DÉFINITION. — *Si $g \in \mathcal{S}_2$ a une mesure spectrale de Walsh continue, elle est dite, pseudo-aléatoire au sens de Walsh.*

COROLLAIRE. — *Si une suite réelle u est telle que, pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, la suite $n \to u(n \oplus t) - u(n)$ est équirépartie modulo 1, elle est elle-même équirépartie modulo 1.*

Ce théorème analogue au théorème de Van der Corput ([8], [11], [12]) est une conséquence immédiate du théorème 2 et du critère de Weyl.

Remarque. — Notons que si g est pseudo-aléatoire au sens de Walsh, sa valeur moyenne est nulle sur toute progression arithmétique dont la raison est une puissance de 2; ce qui implique que si h est une suite presque-périodique-B_2 dont le spectre est contenu dans l'ensemble des rationnels dyadiques, gh a une valeur moyenne nulle. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple $g(n) = e(\sqrt{n})$.

3. EXEMPLES

q désigne un entier $\geqslant 2$. Tout entier naturel n s'écrit de manière unique

$$n = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r(n) q^r \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_r(n) \in \{0,1,\ldots,q-1\} \quad \text{pour tout entier } r.$$

Une suite $g : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ est *q-multiplicative* [6] si $g(0) = 1$ et

$$g(n) = \prod_{r=0}^{\infty} g(\varepsilon_r(n) q^r) \quad \text{pour tout entier } n.$$

On étudie ici la mesure spectrale de Walsh d'une suite q-multiplicative à valeurs dans $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$, dans les cas $q = 2$ et q impair.

3.1. Suites 2-multiplicatives.

3.1.1. g désigne une suite 2-multiplicative à valeurs dans $\mathbf{U}$. On considère des entiers t et K tels que $t < 2^K$.

La suite $n \to g(n \oplus t)\overline{g(n)}$ admet 2^K comme période, donc $g \in \mathscr{S}_2$ et

$$\gamma_g(t) = 2^{-K} \sum_{n<2^K} g(n \oplus t)\overline{g(n)}.$$

De même,

$$\begin{aligned}\gamma_g(t+2^K) &= 2^{-K-1} \sum_{n<2^K} \big(g(n \oplus (t+2^K))\overline{g(n)} \\ &\qquad\qquad + g((n+2^K) \oplus (t+2^K))\overline{g(n+2^K)}\big) \\ &= \Big(2^{-K} \sum_{n<2^K} g(n+t)\overline{g(n)}\Big)\Big(\frac{1}{2} g(2^K) + \frac{1}{2}\overline{g(2^K)}\Big).\end{aligned}$$

On obtient donc $\gamma_g(t+2^K) = \gamma_g(t)\rho_K$ où $\rho_K = \mathcal{R}e\, g(2^K)$. Ainsi γ_g est la suite 2-multiplicative définie par :

$$\gamma_g(2^r) = \rho_r .$$

Une vérification immédiate montre que la mesure de Walsh est définie comme suit.

THÉORÈME 3. — 1° *Toute suite 2-multiplicative* g *à valeurs dans* $\mathbf{U}$ *appartient à* $\mathcal{S}_2$.

2° *Si l'on pose* $\rho_r = \mathcal{R}e\, g(2^r)$, *la mesure spectrale de Walsh* μ_g *de* g *est le produit de convolution infini* $\mathop{*}\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+\rho_k}{2}\delta(0) + \frac{1-\rho_k}{2}\delta(2^{-k-1}) \right)$ *où* $\delta(x)$ *désigne la mesure de Dirac au point* x.

Il résulte du théorème 3 et de résultats classiques sur les produits de convolution de mesures discrètes que :

— si la série $\sum_{r=0}^{\infty} (1-|\rho_r|)$ converge, μ_g est atomique,

— si la série $\sum_{r=0}^{\infty} (1-|\rho_r|)$ diverge, μ_g est absolument continue ou bien singulière (continue) selon que $\sum_{r=0}^{\infty} \rho_r^2$ converge ou diverge (théorème 1, [3]).

Notons que, d'après un résultat démontré dans [4], la convergence de $\sum_{r=0}^{\infty} (1-|\rho_r|)$ équivaut à l'existence d'une progression arithmétique de la forme $2^k\mathbf{N}$ sur laquelle g^2 n'a pas une valeur moyenne nulle.

3.1.2. *Exemples.*

1) On considère $g(n) = e(\alpha s(n))$ où α est réel et $s(n)$ désigne la somme des chiffres de n en base 2. De l'égalité $\rho_r = \cos(2\pi\alpha)$, on déduit que μ_g est

— $\delta(0)$ si $2\alpha \in \mathbf{Z}$,

— 1 mesure de Lebesgue si $2\alpha - \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}$,

— singulière si $4\alpha \notin \mathbf{Z}$.

On peut comparer ce résultat à ceux de [5] et [9]. De plus, dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$, g est pseudo-aléatoire au sens habituel mais pas au sens de Walsh.

2) On considère $g(n) = e(\beta n)$ avec β réel.

De $\rho_r = \cos(2\pi\beta 2^r)$, on déduit que μ_g est

– dicrète à support dans le groupe fini engendré par β si β est rationnel dyadique,

– sngulière dans le cas contraire (et alors g est pseudo-aléatoire au sens de Walsh mais pas au sens habituel).

3) Plus généralement, si $g(n) = e(\alpha s(n) + \beta n)$, μ_g est :

– discrète si β est rationnel dyadique et $2\alpha \in \mathbf{Z}$,

– absolument continue si β est rationnel dyadique et $2\alpha - \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}$,

– singulière dans les autres cas.

3.2. Suites q-multiplicatives.

Dans ce paragraphe, q désigne un entier *impair* et g une suite q-multiplicative à valeurs dans $\mathbf{U}$.

3.2.1. *Notations.*

1) On sait que g appartient à $\mathscr{S}$, on note ϕ sa corrélation ordinaire [5].

2) Pour ℓ entier naturel, g_ℓ désigne la fonction q-multiplicative « tronquée » définie par

$$g_\ell(n) = \prod_{r<\ell} g(\varepsilon_r(n)q^r) \qquad \text{où} \qquad (\varepsilon_r(n))_r$$

est la suite des chiffres de n en base q. Autrement dit $g_\ell(n) = g(n')$ où n' est le reste de la division de n par q^ℓ. On désigne par ϕ_ℓ la corrélation ordinaire de g_ℓ.

3) Pour tout $t \in \mathbf{N}$, on pose $\mathrm{D}(t) = \{(n \oplus t) - n; n \in \mathbf{N}\}$.

Si $t = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_c}$ avec $r_1 < r_2 < \cdots < r_c$, on a :

$$\mathrm{D}(t) = \{(n \oplus t) - n; n < 2^{1+r_c}\} = \{\pm 2^{r_1} \pm 2^{r_2} \pm \ldots \pm 2^{r_c}\},$$

de sorte que

Card $D(t)=2^c=2^{s(t)}$ où $s(t)$ désigne la somme des chiffres binaires de t.

3.2.2. *Existence de la mesure de Walsh.*

THÉORÈME 4. — *Toute suite q-multiplicative (q impair) g appartient à $\mathcal{S}_2$ et sa corrélation binaire γ est donnée par*

$$\gamma(t) = 2^{-s(t)} \sum_{u \in D(t)} \phi(u), \qquad \textit{où } \phi \textit{ est sa corrélation ordinaire.}$$

Preuve. — Soit $t < 2^K$. Pour tout $u \in D(t)$, $\{n \in N; n \oplus t = n+u\}$ est une réunion de $2^{K-s(t)}$ progressions arithmétiques modulo 2^K. Il suffit donc de montrer que

$$(3) \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n<N \\ n \equiv b \bmod 2^K}} g(n+u)\overline{g(n)} = 2^{-K}\phi(u) \qquad \text{pour} \qquad u > 0.$$

L'indépendance statistique des progressions $2^K N + b$ et $q^\ell N + c$ et la périodicité de $g_\ell(n+u)\overline{g_\ell(n)}$ entraînent :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n<N \\ n \equiv b \bmod 2^K}} g_\ell(n+u)\overline{g_\ell(n)} = 2^{-K}\phi_\ell(u).$$

D'autre part, puisque $g(n).(g_\ell(n))^{-1}$ ne dépend que de la partie entière de $nq^{-\ell}$, on a :

$$\sum_{n<N} |g(n+u)\overline{g(n)} - g_\ell(n+u)\overline{g_\ell(n)}|$$
$$\leqslant 2 \text{ Card } \{n \in N; n<N \text{ et } [q^{-\ell}(n+u)] > [q^{-\ell}n]\}$$
$$< 2Nq^{-\ell}u.$$

Il en résulte en passant à la limite sur ℓ que :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n<N \\ n \equiv b \bmod 2^K}} g(n+u)\overline{g(n)} = 2^{-K} \lim_{\ell\to\infty} \phi_\ell(u) = 2^{-K}\phi(u).$$

La relation (3) est démontrée, le théorème 4 également. $\square$

COROLLAIRE. — *Soit q un entier impair $\geqslant 2$. Toute suite q-multiplicative g pseudo aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{U}$ *est pseudo-aléatoire au sens de Walsh.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME. — *Pour $u > 0$, on pose* $\mathrm{D}^*(u) = \{t \in \mathrm{N}; u \in \mathrm{D}(t)\}$. *L'égalité suivante a lieu :*

$$1 = \sum_{t \in \mathrm{D}^*(u)} 2^{-s(t)}.$$

Preuve. — On pose $p(u) = \sum_{t \in \mathrm{D}^*(u)} 2^{-s(t)}$. Les représentations de 1 avec des $\pm 2^r$ sont :

$$1, 2-1, \ldots, 2^a - \sum_{k<a} 2^k, \ldots, \qquad \text{donc} \qquad p(1) = 1.$$

La relation $p(2u) = p(u)$ est immédiate. Parmi les représentations de $2u+1$, il y a celles de la forme $2^{r_1} \pm 2^{r_2} \ldots + 1$ et celles de la forme $2^{s_1} \pm \cdots \pm 2^{s_d} - 1$. On en déduit que $p(2u+1) \wedge = \frac{1}{2}(p(u) + p(u+1))$. La démonstration s'achève par récurrence. □

Preuve du corollaire. — D'après le théorème 4,

$$\begin{aligned}\sum_{t<2^{\mathrm{K}}} |\gamma(t)| &\leqslant \sum_{t<2^{\mathrm{K}}} 2^{-s(t)} \sum_{u \in \mathrm{D}(t)} |\phi(u)| \\ &\leqslant |\phi(0)| + 2 \sum_{1 \leqslant u < 2^{\mathrm{K}}} |\phi(u)| \cdot \sum_{t<2^{\mathrm{K}};\, u \in \mathrm{D}(t)} 2^{-s(t)}\end{aligned}$$

car $|\phi(-u)| = |\phi(u)|$ et $|u| \leqslant t$ pour $u \in \mathrm{D}(t)$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{t<2^{\mathrm{K}}} |\gamma(t)| &\leqslant |\phi(0)| + 2 \sum_{1 \leqslant u < 2^{\mathrm{K}}} |\phi(u)| \cdot \sum_{t \in \mathrm{D}^*(u)} 2^{-s(t)} \\ &= |\phi(0)| + 2 \sum_{1 \leqslant u < 2^{\mathrm{K}}} |\phi(u)| \quad \text{d'après le lemme.}\end{aligned}$$

Finalement, $0 = \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{t<\mathrm{N}} |\gamma(t)|$ et g est pseudo-aléatoire au sens de Walsh d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Remarques. — 1) Le corollaire n'est pas valable pour une suite 2-multiplicative.

2) La réciproque du corollaire est fausse comme le prouve l'exemple $g(n) = e(\beta n)$ où β n'est pas un rationel dyadique. Dans la suite, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que g soit pseudo-aléatoire au sens de Walsh.

3) Si q est pair, l'appartenance d'une suite q-multiplicative de module 1 à $\mathscr{S}_2$ reste vraie mais la corrélation de Walsh n'est plus donnée par la formule du théorème 4.

3.2.3. *Nature de la mesure spectrale.*

Dans le cas où g n'est pas pseudo-aléatoire, sa mesure spectrale ordinaire Λ_g est discrète [5] et portée par un ensemble translaté $\alpha + \mathbf{T}_q$ de l'ensemble des rationnels q-adiques du tore ([9], prop. 3) :

$$\Lambda_g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, \delta_{\alpha+x_k} \quad \text{où les } x_k \text{ sont dans } \mathbf{T}_q \qquad \text{et où} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 1 \, .$$

Par linéarité et convergence uniforme, on trouve d'après le théorème 4,

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left((2^{-s(t)} \sum_{u \in \mathrm{D}(t)} e((\alpha + x_k)u) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \gamma_k(t)$$

où $\gamma_k(t)$ est la transformée de Fourier-Walsh de la mesure spectrale de Walsh μ_k de la suite $n \to e((\alpha + x_k)n)$.

Ainsi $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mu_k$ est la mesure spectrale de Walsh de g. En tenant compte du résultat du 3.1.2 concernant les suites $n \to e(\beta n)$ et du corollaire du théorème 4, on obtient finalement :

THÉORÈME 5. — *q désigne un entier impair $\geqslant 2$, g une suite q-multiplicative à valeurs dans $\mathbf{U}$, Λ_g sa mesure spectrale* ordinaire.

1) *Si Λ_g ne charge aucun rationnel dyadique (autrement dit, si le spectre de Fourier-Bohr de g ne contient aucun rationnel dyadique), la mesure spectrale de Walsh de g est continue.*

2) *S'il existe un rationnel dyadique α tel que $\Lambda_g(\{\alpha\}) = c > 0$, la mesure spectrale de Walsh de g est de la forme $cw_\alpha + (1-c)\mu'$ où w_α est la mesure de Walsh discrète associée à la suite $n \to e(\alpha n)$ et où μ' est continue singulière.*

3.1.3. Suites presque-périodiques.

Soit g une suite presque-périodique-B_2 de série de Fourier $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e(\beta_k x)$.

Si μ_k désigne la mesure spectrale de Walsh associée à la suite $n \to e(\beta_k n)$ (comme au paragraphe 3.1.2), la mesure spectrale de Walsh de g est donnée par $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \mu_k$. Elle est discrète si et seulement si le spectre de g ne contient que des rationnels dyadiques.

Je remercie Michel Mendès-France qui a attiré mon attention sur ce problème et suis très reconnaissant à Pierre Liardet et Brigitte Mossé de m'avoir signalé une inexactitude dans le texte initial.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-P. Bertrandias, Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p, *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire 5 (1966), 3-106.
[2] J. Besineau, Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction « somme des chiffres », *Acta Arithmetica*, 20 (1972), 401-416.
[3] G. Brown, W. Moran, Coin tossing and powers of singular measures, *Math. Proc. Phil. Soc.*, 77 (1975), 349-364.
[4] J. Coquet, Répartition modulo 1 des suites q-additives, *Commentationnes Math.*, 21 (1979), 23-42.
[5] J. Coquet, T. Kamae, M. Mendès-France, Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, 105 (1977), 369-384.
[6] H. Delange, Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives, *Acta Arithmetica*, 21 (1972), 285-298.
[7] T. Kamae, Sum of digits to different bases and mutual singularity of their spectral mesures, *Osaka J. Math.*, 15 (1978), 569-574.
[8] T. Kamae, M. Mendès-France, Van der Corput's difference theorem, *Israël J. Math.*, 31 (1978), 335-342.
[9] M. Queffelec, Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, 107 (1979), 385-421.
[10] M. Queffelec, Sur la singularité des produits de Riesz et des mesures spectrales associées à la somme des chiffres, *Israël J. Math.*, 34 (1979), 337-342.
[11] G. Rauzy, *Propriétés statistiques des suites arithmétiques*, P.U.F., Collection SUP, (1976).
[12] I. Z. Ruzsa, Connections between the uniform distribution of a sequence and its differences, *Proc. Budapest conference on number theory* (1981).

[13] J. L. WALSH, A closed set of normal orthogonal functions, *Amer. J. Math.*, 55 (1923), 5-24.
[14] N. WIENER, *The Fourier integral and certain of its applications*, Dover publications, (1958).

Manuscrit reçu le 19 mars 1984.

Jean COQUET,
Université de Valenciennes
Département de Mathématiques
Le Mont-Houy
59326 Valenciennes Cedex.