ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Cristina BENEA & Frédéric BERNICOT

Conservation de certaines propriétés à travers un contrôle épars d'un opérateur et applications au projecteur de Leray–Hopf

Tome 68, nº 6 (2018), p. 2329-2379.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2018__68_6_2329_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
68, 6 (2018) 2329-2379

CONSERVATION DE CERTAINES PROPRIÉTÉS À TRAVERS UN CONTRÔLE ÉPARS D'UN OPÉRATEUR ET APPLICATIONS AU PROJECTEUR DE LERAY–HOPF

par Cristina BENEA & Frédéric BERNICOT (*)

Résumé. — Nous poursuivons l'étude d'un contrôle épars d'un opérateur singulier. Plus précisément nous expliquons comment on peut conserver certaines propriétés de l'opérateur initial à travers un tel contrôle et décrivons quelques applications : bornitude de l'adjoint de la transformée de Riesz et du projecteur de Leray. De plus, nous nous intéresserons à donner un regard nouveau sur les dominations éparses à travers les oscillations et les fonctions carrées localisées. Aussi, nous dévoilerons une connexion entre les bons intervalles de la décomposition éparse et une décomposition atomique.

Abstract. — We pursue the study of a sparse control for a singular operator. More precisely, we describe how one can track some properties of the initial operator, through such a control and describe also some applications: boundedness of the adjoint of a Riesz transform and of the Leray projector. Moreover, we will be interested in giving a new insight on the sparse domination through the oscillations and the localized square functions. Also, we will reveal a connection between the good intervals of the sparse domination and the atomic decomposition for a function in a Hardy space.

1. Introduction

Ce travail a pour but de poursuivre l'étude d'un contrôle épars d'un opérateur, et de comprendre comment on peut conserver certaines propriétés au travers d'un tel contrôle. Rappelons tout d'abord qu'une collection de cubes $\mathcal{S} := (Q)_{Q\in\mathcal{S}}$ de l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$ est dite *éparse* si il existe une

Mots-clés : Opérateurs épars, poids, espaces de Hardy et BMO.
Classification Mathématique (2010) : 42B15, 42B25, 42B35.
(*) Les auteurs sont partiellement supportés par le projet ERC FAnFArE no. 637510.

collection d'ensembles majeurs disjoints (voir Definition 2.1). Associé à une telle collection, on peut considérer l'opérateur épars défini par :

$$T_{\mathcal{S}}(f) := x \mapsto \sum_{Q\in\mathcal{S}} \left(\fint_Q f(z)\,\mathrm{d}z\right) \mathbb{1}_Q(x), \qquad \forall\, f \in L^1_{loc}.$$

L'étude des opérateurs épars a commencé dans [22, 15] où il est démontré que ces opérateurs vérifient des estimations à poids $L^p(\omega)$ optimales pour des poids de Muckenhoupt $\omega \in A_p$.

Récemment, ces opérateurs ont connu un très grand intéret, puisqu'ils permettent d'avoir une preuve relativement simple du théorème A_2 (Lerner [21, 23, 24] et Lacey [17]) et de nombreux travaux ont contribué au développement de cette approche : contrôle ponctuel d'un opérateur de Calderón–Zygmund par un opérateur épars, contrôle de différents opérateurs singuliers (transformées de Riesz associées à un semi-groupe [9], Bochner–Riesz [7], BHT [16], opérateurs singuliers homogènes [13]...) à travers une forme bilinéaire (ou trilinéaire) éparse...

La domination éparse d'un opérateur linéaire T ou de sa forme bilinéaire $\Lambda_T = (f,g) \mapsto \langle Tf, g\rangle$ s'est révélée utile pour montrer des estimations aux poids optimales : en effet « *le caractère épars laisse de la place au poids pour n'intervenir qu'une seule fois* ». Un aspect important vient aussi de l'opérateur maximal à poids qui est borné sur des espaces L^p à poids de manière indépendante de la caractéristique du poids.

En général, le mieux qu'on peut espérer pour la forme bilinéaire d'un opérateur de Calderón–Zygmund, est la domination éparse (dans le sens que la collection $\mathcal{S}$ est éparse) avec des moyennes dans L^1 :

$$|\langle Tf, g\rangle| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} \fint_Q |f|\mathrm{d}x \cdot \fint_Q |g|\mathrm{d}x \cdot |Q|. \tag{1.1}$$

La philosophie d'un contrôle épars d'un opérateur est la suivante : *dominer un opérateur singulier par une représentation géométrique (sur une collection d'intervalles ou cubes éparse, c'est-à-dire « raréfiée ») à l'aide d'opérateurs élémentaires positifs (localisés à l'échelle des différents cubes) qui sont facilement estimables (dans le cas ci-dessus, des opérateurs de moyennes dans L^1).*

Dans le membre de droite du contrôle épars, on a une expression qui semble avoir perdu les propriétés de l'opérateur de Calderón–Zygmund initial, mais on a une forme bilinéaire qui implique la bornitude $L^p \to L^p$ de l'opérateur T ainsi que des estimations à poids. Dans ce travail, nous souhaitons comprendre quelles sont les informations supplémentaires que l'on peut conserver au travers d'un contrôle épars et nous décrirons plusieurs applications.

Avant d'expliciter les différentes propriétés que nous allons étudier, nous souhaitons motiver l'obtention d'un contrôle épars, autrement que par l'obtention des estimations à poids : un opérateur (ou une forme bilinéaire) épars est un opérateur *auto-adjoint* (positif), qui vérifie de bonnes estimations (quantifiées) dans des espaces à poids, ainsi que des estimations de type faible L^1 (ce qu'on peut montrer en utilisant une décomposition de Calderón–Zygmund (*sic* !)). Par conséquent, si un opérateur admet un contrôle épars, alors son adjoint est de type faible L^1 (voir corollaire 3.3). Nous appliquerons ce principe dans le cadre des transformées de Riesz, fonctionnelles carrés, et projecteur de Leray associés à un opérateur elliptique du second ordre $\operatorname{div}(A\nabla\cdot)$, obtenant de nouvelles estimations de type faible L^1 pour ces opérateurs (voir section 7).

Estimation éparse et régularité

Les sections 4 et 5 sont dédiées à l'étude de propriétés de régularité, et comment on peut les conserver via un contrôle épars. En particulier, nous obtiendrons d'abord une représentation éparse d'un opérateur de Calderón–Zygmund vérifiant la condition $T(1) = 0$ en termes d'oscillation. Ces oscillations permettent de conserver le caractère $T(1) = 0$ à l'échelle élémentaire de la représentation éparse. Une telle amélioration nous permettra de faire quelques observations sur la composition d'opérateurs de Calderón–Zygmund. Puis en section 5, nous nous intéresserons au gradient d'un opérateur de Calderón–Zygmund régulier, et nous verrons que l'on peut, en un certain sens, commuter l'opérateur gradient avec la propriété de représentation éparse. Ceci nous permettra d'en déduire des estimations optimales pour un tel opérateur dans des espaces de Sobolev à poids.

Estimation éparse pour un multiplicateur de Fourier / Haar via un principe de localisation

Le fait qu'un opérateur T borné sur L^2 puisse admettre un contrôle épars comme (1.1) est un peu surprenant : si on utilise la bornitude $L^2 \to L^2$ de l'opérateur, on obtient

$$|\langle Tf, g\rangle| \lesssim \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

et si on localise ce résultat, on peut dire que la version localisée sur un cube Q de Λ_{T_Q} est bornée par des moyennes en L^2 :

$$|\langle T_Q f, g\rangle| \lesssim \left(\fint_Q |f|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\fint_Q |g|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |Q|. \tag{1.2}$$

Mais en effet, l'idée du contrôle épars est de dire qu'en choisissant les bons cubes sur lesquels on décompose, on peut avoir des moyennes L^1.

Dans la section 6, nous allons nous spécialiser à un cadre où l'opérateur T (et sa forme bilinéaire) peuvent facilement être localisés. Cette situation est le cas des multiplicateurs de Fourier, ou de Haar. Nous verrons alors comment peut-on tirer avantage et conserver la structure fréquentielle de l'opérateur initial à travers une estimation éparse.

En effet, par exemple si T admet une représentation simple par des ondelettes, alors (1.2) est remplacée par la même estimation, mais avec des moyennes L^2 de la fonction carrée (localisée) de f et de g, respectivement. Après, on peut se servir du théorème de John–Nirenberg pour obtenir des moyennes dans $L^{1,\infty}$ de la fonction carrée, chacune d'elles précédée par un « sup » sur une collection d'intervalles (ou cubes) dyadiques. Avec un temps d'arrêt soigneusement construit, on peut à la fin obtenir une domination éparse, avec des moyennes L^1 des fonctions f et g.

Dans l'analyse de temps-fréquence, on utilise souvent des structures contenues dans le plan espace-fréquence, et l'information sur la fonction f est conservée dans deux quantités : le « size » et l'« energy ». L'énergie concerne plutôt l'orthogonalité des paquets d'onde, et pour un opérateur de Fourier classique, on peut le transformer en « size » (qui est une moyenne maximale en L^1 ou $L^{1,\infty}$), en localisant sur des bons intervalles. Cette idée de transformer les moyennes L^2 en moyennes L^1 apparait souvent dans ce secteur de l'analyse.

De plus, la localisation, comme presentée dans la proposition 6.5, est déjà apparue dans [8], où les auteurs emploient une telle localisation en espace (construite par un temps d'arrêt gouverné par les ensembles de niveau du « size ») afin de montrer des estimations à valeurs vectorielles pour les paraproduits et pour la transformé bilinéaire de Hilbert BHT.

Observons que dans le cas le plus facile, d'un multiplicateur de Haar, la moyenne L^2 de la fonction carrée de f correspond exactement à l'oscillation L^2 de f, et il est alors plus évident qu'on doit utiliser le théorème de John–Nirenberg pour obtenir l'oscillation L^1.

Ces idées sont présentées dans la section 6. Plus précisément, dans la sous-section 6.1, on expose ces idées pour obtenir une estimation éparse, permettant de retrouver les estimations à poids dans $L^p(\omega)$ pour $p > 1$.

Dans la sous-section 6.2, on décrit comment on peut conserver l'information fréquentielle, à l'aide des fonctions carrées localisées dans la représentation éparse. Le théorème de John–Nirenberg, dans la forme de [28], qu'on peut généraliser pour des espaces à poids (d'une manière indépendante du poids), nous permet d'employer n'importe quelle moyenne L^p de la fonction carrée, avec $0 < p < \infty$. Par conséquent, en utilisant un temps d'arrêt similaire à celui pour la décomposition atomique éparse, on en déduit alors dans la sous-section 6.3, des estimations dans des espaces de Hardy à poids $H^p(\omega)$ pour $p \in (0,1]$:

$$T : H^p_\omega \to H^p_\omega, \qquad \text{pour tout poids } \omega \text{ et pour tout } 0 < p \leqslant 1,$$

avec une norme indépendante du poids (améliorant ainsi des résultats de Lee–Lin [18] et Lee–Lin–Yang [20]) !

Application à la transformée de Riesz et au projecteur de Leray

La section 7 est dédiée à des applications dans le cadre des transformées de Riesz, associées à un opérateur elliptique sous forme divergence $L = -\operatorname{div} A\nabla$. Plus précisément, nous verrons que sous l'hypothèse que cet opérateur génère un semi-groupe, dont le gradient admet des estimations Gaussiennes ponctuelles, alors la transformée de Riesz $R_L := \nabla L^{-\frac{1}{2}}$ a un comportement vraiment similaire à celui des opérateurs de Calderón–Zygmund. En particulier, nous obtiendrons les nouveaux résultats suivants

- L'opérateur dual $(R_L)^*$ est de type faible L^1, ainsi que différentes fonctionnelles carrées.
- Le projecteur de Leray $\pi_L := R_L(R_{L^*})^*$ est aussi de type faible L^1 et admet des estimations $L^p(\omega)$ à poids optimales si $p \in (1,\infty)$ et $H^p(\omega)$ si $p \in (0,1]$.

Lien entre contrôle épars et oscillation

D'autre part, dans le cadre des fonctions de Haar, on obtient (sous-section 8.1) une décomposition atomique et simultanément éparse pour une fonction (générique) de l'espace de Hardy H^p, $0 < p \leqslant 1$. Jusqu'ici les différentes décompositions atomiques obtenues ne permettaient pas d'avoir le caractère épars des supports des atomes. Nous l'obtenons par une construction similaire à celle de la domination éparse, en utilisant un bon temps d'arrêt basé sur les fonctions carrées localisées, pour prendre en compte les oscillations d'une fonction de l'espace de Hardy.

Nous finissons par la sous-section 8.2, dans laquelle on décrit une sorte d'inégalité de polarisation, du résultat de Fefferman–Stein permettant d'estimer la norme L^2 d'une fonction par celle de sa fonction maximale dièse. Ce nouveau résultat repose là aussi sur une gestion optimisée des oscillations, à travers un contrôle épars.

2. Préliminaires

Notation. — Lors de tout ce travail, on se placera dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure Euclidienne, mais tout pourrait être écrit dans un espace homogène. En effet, les techniques et outils utilisés reposent sur la structure dyadique et le caractère doublant de l'espace ambiant.

Avant de faire quelques rappels sur les grilles dyadiques et les collections éparses, fixons quelques notations, qui seront régulièrement utilisées dans l'ensemble de l'article : pour une boule (cube ou intervalle) de l'espace Euclidien, on note osc_B l'oscillation sur B définie par

$$\mathrm{osc}_B(f) := \left(\fint_B \left| f - \fint_B f \mathrm{d}x \right| \mathrm{d}x \right).$$

Si I est un intervalle, un cube ou une boule, on note aussi $\chi_I(x) := \left(1 + \frac{d(x,I)}{\ell(I)}\right)^{-1}$ la fonction de localisation autour de I.

Les différentes preuves présentées ici auront pour but de construire une collection éparse de cubes dyadiques, celle-ci sera obtenue via des temps d'arrêt. Tout au long du papier, $\mathcal{I}_{Stock}$ dénotera la collection des intervalles (ou cubes) disponibles au moment du temps d'arrêt. On notera aussi $\mathcal{M}$ la fonction maximale de Hardy–Littlewood, et $\mathcal{M}_p$ denote sa version L^p : $\mathcal{M}_p(f) = (\mathcal{M}|f|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Grilles dyadiques et collection éparses

Sur $\mathbb{R}^n$, associée à un paramètre $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$, on peut considérer la grille dyadique (translatée)

$$\mathbb{D}^\alpha := \left\{ 2^{-k} \left([0,1]^n + m + (-1)^k \alpha \right),\ k \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

et on note $\mathbb{D} := \cup_\alpha \mathbb{D}^\alpha$. Pour un cube dyadique $Q^\alpha \in \mathbb{D}^\alpha$, on note $\ell(Q)$ la longueur de son coté. Un résultat bien connu est alors que pour tout cube Q de $\mathbb{R}^n$, il existe $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$ et un cube $Q^\alpha \in \mathbb{D}^\alpha$ tel que

$$Q \subset Q^\alpha \qquad \text{et} \qquad \ell(Q^\alpha) \leqslant 6\ell(Q).$$

D'un coté, on doit se réduire aux grilles dyadiques, dont la structure permet une analyse plus précise. De l'autre, pour ne pas perdre la généralité du problème, on doit toujours considérer l'union des 3^n grilles dyadiques $\mathbb{D} := \cup_\alpha \mathbb{D}^\alpha$ (afin de pouvoir recouvrir toute boule par un cube dyadique équivalent). On essaie de capturer les deux (la généralité, ainsi que l'aspect pratique de la grille dyadique) dans les définitions suivantes.

Définition 2.1. — *Une collection $\mathcal{S} \subset \mathbb{D}$ est dite* η-éparse *pour un certain $\eta \in (0,1)$ si pour tout $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$, on peut trouver une collection d'ensembles mesurables disjoints $(E_Q)_{Q \in \mathcal{S}\cap\mathbb{D}^\alpha}$ telle que pour tout $Q \in \mathcal{S} \cap \mathbb{D}_\alpha$*

$$E_Q \subset Q \qquad \textit{et} \qquad |E_Q| \geqslant \eta |Q|.$$

Définition 2.2. — *Une collection $\mathcal{S} \subset \mathbb{D}$ est dite* Λ-Carleson *pour un certain $\Lambda > 1$ si pour tout $\alpha \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}^n$ et pour tout $Q \in \mathbb{D}^\alpha$ on a*

$$\sum_{\substack{P \in \mathcal{S}\cap\mathbb{D}^\alpha \\ P \subset Q}} |P| \leqslant \Lambda |Q|.$$

Remarquons que (contrairement à [26]), nos deux définitions de collection éparse ou de Carleson, sont écrites pour une sous-collection de $\mathbb{D}$ (et pas seulement de l'une des grilles dyadiques $\mathbb{D}^\alpha$). Une collection η-éparse peut être considérée comme l'union de 3^n collections η-éparses, chacune étant une sous-collection d'une des grilles dyadiques $\mathbb{D}^\alpha$. Il en est de même pour une collection de Carleson.

Le résultat de [26, Lemme 6.3] nous dit que, pour $\mathcal{S} \subset \mathbb{D}^\alpha$, où la grille $\mathbb{D}^\alpha$ est fixée, les notions de $\tilde{\Lambda}$-Carleson et $(1/\tilde{\Lambda})$-éparse coïncident. Donc on obtient l'équivalence entre nos notions de Carleson et éparse :

Proposition 2.3. — *Une collection $\mathcal{S} \subset \mathbb{D}$ est η-éparse si et seulement si elle est η^{-1}-Carleson.*

Cette équivalence nous permet donc d'utiliser simultanément les propriétés « faciles » dues à chacune des propriétés (voir [26]). Dans la suite, nous appellerons une collection éparse, si elle est η-éparse avec un paramètre $\eta \in (0, \eta_0)$ pour un certain paramètre $\eta_0 < 1$ implicite. En particulier, nous avons la remarque suivante (qui motive notre définition pour des sous-collections de $\mathbb{D}$) :

Remarque 2.4. — Une union finie de collections éparses est encore une collection éparse.

Pour construire une collection éparse, nous utiliserons le critère suivant (qui est presque équivalent) :

PROPOSITION 2.5. — *Soit $\mathcal{S}$ une collection $\mathcal{S} \subset \mathbb{D}^0$ et $\eta \in (0,1)$ tels que pour tout $Q \in \mathcal{S}$,*

$$\sum_{P \in ch_{\mathcal{S}}(Q)} |P| \leqslant \eta |Q|,$$

où $ch_{\mathcal{S}}(Q)$ représente la collection des descendants directs de Q dans $\mathcal{S}$, c'est-à-dire les intervalles maximaux de $\mathcal{S}$ strictement contenus dans Q. Alors $\mathcal{S}$ est une collection η-éparse.

Réciproquement, une collection η-éparse de $\mathbb{D}^0$ peut être écrite comme l'union de $N := N(n,\eta)$ sous-collections, chacunes d'entre elles vérifiant le critère ci-dessus.

Démonstration. — Le premier énoncé est connu et s'obtient directement en utilisant la structure dyadique de la grille $\mathbb{D}^0$. Nous allons nous concentrer sur la réciproque, qui est contenue implicitement dans [26, Section 6.2]. Fixons donc $\mathcal{S}$ une collection η-éparse de $\mathbb{D}^0$. D'après [26], la collection $\mathcal{S}$ ne peut contenir de *η-piles anti-Carleson* $\mathcal{F}$ de hauteur M, pour un entier $M = M(\eta)$ assez grand. Ici, une sous-collection $\mathcal{F}$ de $\mathbb{D}^0$ est appelée une *η-pile anti-Carleson* de taille M et de sommet $Q \in \mathbb{D}^0$ si $Q \in \mathcal{F}$ et

$$\sum_{Q' \in \mathcal{F},\ d_{\mathcal{F}}(Q,Q')=M} |Q'| \geqslant \eta |Q|$$

où $d_{\mathcal{F}}(Q,Q')$ est la distance de graphe entre Q et Q', c'est-à-dire le nombre minimal d'arètes pour relier Q, Q' dans le sous graphe dyadique $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}^0$ (voir [26, Section 4]).

Considérons donc notre collection initiale $\mathcal{S}$. Elle peut être décomposée en $N = N(\eta, n)$ sous-collections $\mathcal{S}_i$, $i = 1, \dots, N$ de sorte que pour chaque $i = 1, \dots, N$ et deux cubes différents $Q \subsetneq Q' \in \mathcal{S}^i$ alors

$$d_{\mathcal{S}}(Q,Q') = M d_{\mathcal{S}^i}(Q,Q') \geqslant M.$$

En particulier, on a alors pour $Q \in \mathcal{S}^i$

$$\begin{aligned} ch_{\mathcal{S}^i}(Q) &= \{P \in \mathcal{S}^i,\ P \subset Q,\ d_{\mathcal{S}^i}(P,Q) = 1\} \\ &\subset \{P \in \mathcal{S}^i,\ P \subset Q,\ d_{\mathcal{S}}(P,Q) = M\}. \end{aligned}$$

Étant donné que l'on ne peut pas avoir de piles anti-Carleson de hauteur M, cela signifie que

$$\sum_{P \in ch_{\mathcal{S}^i}(Q)} |P| < \eta |Q|.$$

Ainsi, chaque collection $\mathcal{S}^i$ vérifie bien le critère de la proposition. ☐

Nous avons aussi la propriété suivante ([26, Sections 12-13]) :

Proposition 2.6. — *Soit $\mathcal{S}$ une collection éparse et ρ une fonction continue croissante sur $[0,1]$ telle que $\rho(0) = 0$. Supposons que ρ vérifie*

$$\sum_{k \geqslant 1} k\rho(2^{-k}) < \infty.$$

Alors pour toute fonction $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}$, il existe une collection éparse enlargie $\widetilde{\mathcal{S}}$ telle que

$$\sum_{k \geqslant 0} \rho(2^{-k}) \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\fint_{2^k Q} |f| \mathrm{d}x \right) \left(\fint_{2^k Q} |g| \mathrm{d}x \right) |Q| \lesssim \sum_{Q \in \widetilde{\mathcal{S}}} \left(\fint_{Q} |f| \mathrm{d}x \right) \left(\fint_{Q} |g| \mathrm{d}x \right) |Q|.$$

Les constantes implicites sont indépendantes de f, g et de $\mathcal{S}$ et ne dépendent que de ρ.

Dans [26], l'enlargissement de la collection éparse est une union de 3^n collections, chacune d'entre elles étant contenues dans une des grilles dyadiques $\mathbb{D}^\alpha$. Comme nous l'avons vu précédemment (remarque 2.4), cette union finie de collection est encore une collection éparse, en tant que sous-collection de $\mathbb{D}$.

3. La propriété du type faible $(1,1)$ et de la bornitude L^∞-BMO

3.1. Type faible $(1,1)$ comme conséquence d'un contrôle épars

Proposition 3.1. — *Soit T un opérateur linéaire borné sur L^2, vérifiant un contrôle épars via la forme bilinéaire. Plus précisément, supposons que pour toutes fonctions (compactement supportées) $f, g \in L^2$ il existe une collection éparse $\mathcal{S}$ telle que*

$$|\langle Tf, g \rangle| \lesssim \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\fint_Q |f| \, \mathrm{d}x \right) \left(\fint_Q |g| \, \mathrm{d}x \right) |Q|.$$

Alors T est de type faible $(1,1)$.

Ce résultat n'est pas nouveau, et on peut trouver une preuve dans [13, Theorem E]. Nous allons cependant donner une preuve un peu différente, qui met en lumière la connexion avec la décomposition de Calderón–Zygmund.

Démonstration. — Nous allons utiliser la caractérisation suivante de l'espace $L^{1,\infty}$ ([28, Lemma 2.6, Vol II]) : pour une fonction mesurable ϕ alors $\phi \in L^{1,\infty}$ si

$$\|\phi\|_{L^{1,\infty}} \simeq \sup_{\substack{E\subset\mathbb{R}^n \\ 0<|E|<\infty}} \inf_{\substack{E'\subset E, \\ 2|E'|\geqslant|E|}} \int_{E'} |\phi(x)|\,\mathrm{d}x, \tag{3.1}$$

où le supremum est pris sur les ensembles E de mesure finie.

On fixe donc une fonction $f \in L^1 \cap L^2$, normalisée dans L^1 ($\|f\|_1 = 1$) et on souhaite vérifier que $T(f) \in L^{1,\infty}$. Donc pour tout ensemble mesurable E de mesure finie, on considère l'ensemble E' défini par

$$E' := \left\{x \in E,\ \mathcal{M}(f)(x) < K|E|^{-1}\right\},$$

pour une constante K numérique suffisamment grande. Cet ensemble est majeur dans E et vérifie $2|E'| \geqslant |E|$. Il nous reste alors à estimer

$$\int_{E'} |Tf(x)|\,\mathrm{d}x = \sup_h |\langle Tf, h\rangle| \tag{3.2}$$

où le supremum est pris sur toutes les fonctions $h \in L^2$ supportée sur E' avec $\|h\|_\infty \leqslant 1$. Fixons une telle fonction h et utilisons l'hypothèse de contrôle épars. Il existe donc une collection éparse $\mathcal{S}$ telle que

$$|\langle Tf, h\rangle| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} \left(⨍_Q |f|\,\mathrm{d}x\right)\left(⨍_Q |h|\,\mathrm{d}x\right)|Q|.$$

Supposons que toute la collection éparse soit incluse dans une des grilles dyadiques : il existe α tel que $\mathcal{S} \subset \mathbb{D}^\alpha$ (ce qu'il est toujours possible de supposer). Utilisons maintenant une décomposition de Calderón–Zygmund de $|f| \in L^1$ au niveau $K|E|^{-1}$: il existe une « bonne » fonction g, des cubes Q_i, et des « mauvaises » fonctions b_i telles que

$$|f| = g + \sum_i b_i, \quad \|g\|_\infty \lesssim |E|^{-1}, \quad \|g\|_1 \lesssim 1$$

et b_i est supporté dans Q_i avec une intégrale nulle. En fait, les cubes Q_i peuvent être choisis comme un recouvrement maximal dyadique de l'ensemble de niveau $\{x,\ \mathcal{M}(f)(x) > K|E|^{-1}\}$ de sorte que tous les cubes Q_i

sont inclus dans $(E')^c$. En utilisant la bornitude L^2 des formes éparses, on obtient que

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\fint_Q g\,\mathrm{d}x\right)\left(\fint_Q |h|\,\mathrm{d}x\right)|Q| \lesssim \int \mathcal{M}(|g|)\mathcal{M}(|h|)\,\mathrm{d}x$$
$$\lesssim \|g\|_2\|h\|_2 \lesssim \left(\|g\|_\infty\|g\|_1\right)^{\frac{1}{2}}\|h\|_\infty|E'|^{\frac{1}{2}} \lesssim 1.$$

Pour chaque cube Q_i fixé, puisque b_i est d'intégrale nulle et est supportée sur Q_i, la structure dyadique entraîne :

$$\sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\fint_Q b_i\,\mathrm{d}x\right)\left(\fint_Q |h|\,\mathrm{d}x\right)|Q| = \sum_{\substack{Q\in\mathcal{S}\\ Q\subset Q_i}}\left(\fint_Q g\,\mathrm{d}x\right)\left(\fint_Q |h|\,\mathrm{d}x\right)|Q| = 0$$

car h est supposée être supportée sur E' qui ne rencontre pas Q_i. À la fin, on obtient que

$$|\langle Tf, h\rangle| \lesssim 1$$

uniformément en h, ce qui entraîne (par (3.2))

$$\int_{E'} |Tf(x)|\,\mathrm{d}x \lesssim 1$$

et donc conclut la preuve de $\|Tf\|_{L^{1,\infty}} \lesssim 1$. □

Remarque 3.2.

- L'hypothèse de la bornitude L^2 de l'opérateur n'est pas importante, c'est juste pour donner un cadre et pouvoir évaluer $T(f)$, pour $f \in L^2$.
- On observe donc que l'évaluation du type faible L^1 de l'opérateur T, correspond exactement à l'évaluation de l'opérateur sur la « bonne » partie de la décomposition de Calderón–Zygmund.

Le contrôle d'un opérateur linéaire, par une forme bilinéaire éparse permet d'obtenir un contrôle par une forme auto-adjointe (alors que l'opérateur considéré initialement ne l'est pas forcément), qui implique le type faible L^1. On en déduit donc le corollaire suivant :

Corollaire 3.3. — *Soit T un opérateur linéaire, tel que T admet un contrôle par une forme bilinéaire éparse. Alors l'opérateur dual T^* est de type faible L^1.*

3.2. Lien entre la propriété éparse d'une collection et BMO

Proposition 3.4. — *Soit $(I)_I$ une collection d'intervalles dyadiques et $\phi := \sum_I \tilde{h}_I$, où $\tilde{h}_I$ sont les fonctions de Haar normalisées dans L^∞. Alors la collection est éparse si et seulement si $\phi \in \mathrm{BMO}$*

Démonstration. — Cette proposition est une conséquence de la caractérisation des fonctions de BMO par des mesures de Carleson et fonctions carrées ([31, Théorème 3, p. 159]). Ou, encore plus direct, on peut utiliser la caractérisation de BMO avec des ondelettes, comme décrite dans [27] : « les coefficients d'ondelettes d'une fonction de BMO satisfont les célèbres conditions quadratiques de Carleson ».

En effet, si on emploie les ondelettes de Haar, la condition éparse, qui traduit une condition d'ordre 1 de Carleson (définition 2.2), devient équivalente à l'appartenance de certaines fonctions ϕ à BMO. Pour une telle fonction ϕ, on doit avoir

$$|\langle \phi, h_I \rangle|^2 = |I|, \quad \text{pour tout } I \text{ dans la collection éparse.}$$

On peut donc prendre $\phi = \sum_{I \in \mathcal{S}} \epsilon_I \tilde{h}_I$, pour toute suite $(\epsilon_I)_I = \pm 1$. □

En particulier, nous avons aussi le corollaire suivant :

Corollaire 3.5. — *Soit $(I)_I$ une collection éparse d'intervalles dyadiques alors*

$$\sum_I \mathbb{1}_I \in \mathrm{BMO}\,.$$

Démonstration. — On peut utiliser le résultat suivant ou le voir directement en utilisant que pour un intervalle dyadique J alors

$$\sum_I \langle \mathbb{1}_I, h_J \rangle = \sum_{I \subsetneq J} \frac{|I|}{|J|^{\frac{1}{2}}} \lesssim |J|^{\frac{1}{2}}.$$ □

4. La propriété « $T(1) = 0$ » et application pour la composition d'opérateurs

On rappelle qu'un opérateur linéaire borné sur L^2 est dit de Calderón–Zygmund si il est associé à un noyau $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que pour un certain $\epsilon > 0$ et tout $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ alors

$$|K(x,y)| \lesssim \frac{1}{|x-y|^n}$$

et pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ avec $2|z| < |x-y|$

$$|K(x+z,y) - K(x,y)| + |K(x,y+z) - K(x,y)| \lesssim \frac{|z|^{\epsilon}}{|x-y|^{n+\epsilon}}.$$

Il est maintenant classique que si T est un opérateur linéaire de Calderón–Zygmund alors on peut définir $T(1)$ dans BMO (et plus généralement montrer que T admet une extension continue de L^∞ dans BMO). L'espace BMO étant défini modulo les constantes, la condition $T(1) = 0 \in \mathrm{BMO}$ signifie plus exactement que $T(1)$ est une fonction constante.

Proposition 4.1. — *Soit T un opérateur de Calderón–Zygmund vérifiant $T(1) = 0 \in \mathrm{BMO}$. Alors pour toute fonction $f \in L^2$ il existe une collection éparse $\mathcal{S}$ telle que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$|T(f)(x)| \lesssim \sum_{Q \in \mathcal{S}} \mathrm{osc}_Q(f) \mathbb{1}_Q(x).$$

L'oscillation $\mathrm{osc}_Q(f)$ est plus précise que la moyenne et encode exactement le caractère $T(1) = 0$. On obtient donc un contrôle épars, en préservant cette propriété à l'échelle élémentaire de la représentation.

Démonstration. — Il n'est pas clair comment utiliser la propriété $T(1) = 0$ à travers les plus récentes preuves de Lacey [17] ou Lerner [25], qui utilisent un « bon » opérateur maximal tronqué. Nous préférons donc utiliser la preuve initiale de Lerner [24] qui repose sur les oscillations locales en moyenne. Rappelons tout d'abord sa définition : pour ϕ une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n$ et une boule B, l'oscillation locale en moyenne de ϕ sur B au niveau $\lambda \in (0,1)$ est définie par

$$\omega_\lambda(\phi; B) := \inf_{c \in \mathbb{R}} \left((\phi - c)1_B\right)^* (\lambda |B|)$$

où * correspond au réarrangement décroissant. Fixons alors le niveau λ suffisamment petit, en utilisant la formule de Lerner (see [21]) et [26, Theorem 10.2], pour toute fonction $f \in L^2$ (de sorte que Tf a aussi un sens dans L^2) il existe une collection éparse $\mathcal{S} = (Q)_Q$ de cubes telle que pour presque tout x, nous avons

$$|Tf(x)| \lesssim \sum_{Q \in \mathcal{S}} \omega_\lambda(Tf; Q) \mathbb{1}_Q(x).$$

De plus, T étant un opérateur de Calderón–Zygmund, on sait que pour un certain $\delta := \delta(n, \epsilon)$

$$\omega_\lambda(Tf; Q) \lesssim \sum_{\ell \geqslant 0} 2^{-\ell\delta} \left(\fint_{2^\ell Q} |f| \,\mathrm{d}\mu \right).$$

Étant donné que $T(1)=0\in \mathrm{BMO}$ et que l'oscillation est invariante par les constantes, on peut soustraire la moyenne et obtenir

$$\omega_\lambda(Tf;Q) \lesssim \sum_{\ell\geqslant 0} 2^{-\ell\delta}\left(\fint_{2^\ell Q}\left|f-\fint_Q f\mathrm{d}\mu\right|\mathrm{d}\mu\right).$$

Par conséquent, il vient

$$|Tf(x)| \lesssim \sum_{\ell\geqslant 0}\sum_{Q\in\mathcal{S}} 2^{-\ell\delta}\left(\fint_{2^\ell Q}\left|f-\fint_Q f\mathrm{d}\mu\right|\mathrm{d}\mu\right)\mathbb{1}_Q(x).$$

En utilisant que

$$\left(\fint_{2^\ell Q}\left|f-\fint_Q f\mathrm{d}\mu\right|\mathrm{d}\mu\right) \lesssim \sum_{k=0}^{\ell}\mathrm{osc}_{2^kQ}(f)$$

on en déduit

$$\begin{aligned}|Tf(x)| &\lesssim \sum_{\ell\geqslant 0}\sum_{Q\in\mathcal{S}}\sum_{k=0}^{\ell} 2^{-\ell\delta}\,\mathrm{osc}_{2^kQ}(f)\mathbb{1}_Q(x)\\ &\lesssim \sum_{k\geqslant 0}\sum_{Q\in\mathcal{S}} 2^{-k\delta}\,\mathrm{osc}_{2^kQ}(f)\mathbb{1}_Q(x).\end{aligned}$$

Il nous suffit maintenant d'estimer la double somme par une somme sur une seule collection éparse. Cette étape est expliquée dans [26, Sections 12-13], en utilisant un temps d'arrêt supplémentaire. Il repose uniquement sur le fait que pour une collection disjointe de boules $B_1,\dots,B_N$ incluses dans B alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}|B_i|\,\mathrm{osc}_{B_i}(f) &\leqslant 2\sum_{i=1}^{N}|B_i|\left(\fint_{B_i}\left|f-\fint_B f\mathrm{d}\mu\right|\mathrm{d}\mu\right)\\ &\leqslant 2|B|\,\mathrm{osc}_B(f).\end{aligned}$$

Cette propriété est utilisée pour vérifier que la collection agrandie est bien toujours éparse. Donc en appliquant cet argument, il existe une collection éparse agrandie $\widetilde{\mathcal{S}}$ telle que

$$|Tf(x)| \lesssim \sum_{Q\in\widetilde{\mathcal{S}}}\mathrm{osc}_Q(f)\mathbb{1}_Q(x). \qquad \square$$

Nous allons maintenant étudier la composition de deux opérateurs de Calderón–Zygmund, S et T. Par composition des estimations à poids, nous savons que pour tout $p\in(1,\infty)$ et tout poids $\omega\in A_p$ alors

$$\|T\circ S\|_{L^p_\omega\to L^p_\omega} \lesssim [\omega]_{A_p}^{2\max\{1,(p-1)^{-1}\}}.$$

Nous allons voir comment ces estimations peuvent être améliorées en fonction d'une condition du type $T(1)$ et/ou $S^*(1) = 0$. Tout d'abord, nous observons que pour améliorer cette estimation, nous avons besoin de comprendre profondément la composition en utilisant que les deux opérateurs T et S ont des « annulations » qui doivent intéragir. Plus précisément, pour la composition $T \circ S$, les interactions entre T et S^* semblent être les plus importantes et il est donc naturel de s'intéresser aux conditions $T(1) = 0$ et $S^*(1) = 0$. Ceci a déjà été observé dans [12, Section 9] pour montrer que la composition $T \circ S$ est encore un opérateur de Calderón–Zygmund sous la condition $T(1) = 0 = S^*(1)$.

- Si T, S sont deux opérateurs de Calderón–Zygmund, alors ils sont tous les deux controlés ponctuellement par un opérateur épars. Il est alors facile d'en déduire que pour tout exposant $r \in (1, \infty)$ nous avons le contrôle suivant : pour toutes fonctions $f, g \in L^2$ il existe une collection éparse $\mathcal{S}$ telle que
$$\begin{aligned}|\langle T \circ Sf, g\rangle| &= |\langle Sf, T^*g\rangle| \\ &\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} \left(\fint_Q |f|^r \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} \left(\fint_Q |g|^r \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}} |Q|.\end{aligned}$$
En utilisant [9, Proposition 6.4], on obtient que pour tout $p \in (1, \infty)$, tout exposant $r > 1$ tel que $r < p < r'$ et tout poids $\omega \in A_{\frac{p}{r}} \cap RH_{(r'/p)'}$ alors
$$\|T \circ S\|_{L^p_\omega \to L^p_\omega} \lesssim \left([\omega]_{A_{\frac{p}{r}}} [\omega]_{RH_{(r'/p)'}}\right)^{\alpha},$$
avec $\alpha := \max\{\frac{1}{p-r}, \frac{r'-1}{r'-p}\}$. On peut donc améliorer l'exposant sur la caractéristique du poids, si on s'autorise à perdre un peu sur la classe du poids.
- Dans l'autre cas extrême où on suppose une double condition $T(1) = 0$ et $S^*(1) = 0$ alors nous savons de [12, Section 9] qu'il existe suffisamment d'interaction de sorte que $T \circ S$ est encore un opérateur de Calderón–Zygmund et est donc borné ponctuellement par un opérateur épars avec des moyennes L^1.
- Interéssons nous maintenant au cas intermédiaire où nous supposons seulement que T vérifie la condition $T(1) = 0$. Alors en utilisant la proposition précédente avec le fait que pour tout cube Q et tout exposant $r \in (1, \infty)$
$$\operatorname{osc}_Q(Sf) \lesssim \left(\fint_{2Q} |f|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \inf_Q M[f]$$

on peut déduire que $T \circ S$ admet un contrôle ponctuel par un opérateur épars avec des moyennes L^r. Cette observation permet ainsi d'améliorer le contrôle de la forme bilinéaire de la façon suivante :

$$|\langle T \circ Sf, g\rangle| = |\langle Sf, T^* g\rangle| \lesssim \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\fint_{2Q} |f|^r \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{r}} \left(\fint_Q |g| \, \mathrm{d}x \right) |Q|,$$

où l'exposant d'intégrabilité des moyennes de g est maintenant égal à 1. Selon [9] pour les estimations à poids obtenues par une telle forme bilinéaire, nous obtenons que l'on peut supprimer la condition de Hölder inverse RH, dans la classe de poids considérée : pour tout exposant $r \in (1,p)$ et tout poids $\omega \in A_{\frac{p}{r}}$ alors

$$\|T \circ S\|_{L^p_\omega \to L^p_\omega} \lesssim \left([\omega]_{A_{\frac{p}{r}}} \right)^{\alpha},$$

avec $\alpha := \max\{\frac{1}{p-r}, 1\}$. Par symétrie, si $S^*(1) = 0$ alors l'exposant d'intégrabilité des moyennes de f peut être choisi égal à 1.

5. Le contrôle par le gradient et estimations optimales dans des espaces de Sobolev à poids

Proposition 5.1. — *Soit T un opérateur de Calderón–Zygmund avec un noyau K vérifiant les estimations de régularité*

$$|\nabla_{x,y} K(x,y)| \lesssim |x-y|^{-n-1} \quad \textit{et} \quad |\nabla^2_{x,y} K(x,y)| \lesssim |x-y|^{-n-2}.$$

Supposons de plus que

- $T(1) = 0$ *dans* BMO
- *L'opérateur ∇T vérifie l'estimation L^2 suivante :*

$$\|\nabla T(f)\|_2 \lesssim \|\nabla f\|_2, \qquad \forall\, f \in W^{1,2}.$$

Alors pour toute fonction $f \in W^{1,2}$, il existe une collection éparse $\mathcal{S} = (Q)_{Q \in \mathcal{S}}$ telle que

$$|\nabla T f(x)| \lesssim \sum_{Q} \left(\fint_Q |\nabla f| \right) \mathbb{1}_Q(x).$$

Remarque 5.2. — On observe que :

- Une régularité d'ordre $1 + \epsilon$ sur le noyau est en fait suffisante.
- Cette propriété traduit une certaine commutativité entre la domination éparse et le gradient dans le cas des opérateurs de Calderón–Zygmund suffisamment réguliers.

- La preuve que nous allons détailler reprend la preuve de Lerner [24], basée sur une représentation avec des oscillations locales. Nous la détaillons, pour voir comment y intégrer le gradient.

Démonstration.

Étape 1. — Nous allons d'abord vérifier que l'opérateur ∇T vérifie une estimation de type faible L^1, plus précisément :

$$\|\nabla T f\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|\nabla f\|_{L^1}. \tag{5.1}$$

Pour cela, nous allons utiliser une décomposition de Calderón–Zygmund pour les fonctions « gradient », développée par Auscher dans [1] (voir aussi [2] pour une explication supplémentaire). La preuve n'est pas originale et a été souvent utilisée dans le cadre de différentes transformées de Riesz. Pour être complet, nous détaillons la preuve dans ce contexte. Fixons donc une fonction $f \in W^{1,2}$ telle que $|\nabla f| \in L^1$ ainsi qu'un niveau $\alpha > 0$. Nous savons qu'il existe une « bonne » fonction g et une collection de cubes Q_i vérifiant la propriété de recouvrement borné ainsi que des fonctions $b_i \in W^{1,1}_0(Q_i)$ supportées dans Q_i telles que

$$\|\nabla g\|_\infty \lesssim \alpha, \quad \|\nabla g\|_1 \lesssim \|\nabla f\|_1,$$
$$\sum_i |Q_i| \lesssim \alpha^{-1}\|\nabla f\|_1 \quad \text{et} \quad \fint_{Q_i} |\nabla b_i| \,\mathrm{d}z \lesssim \alpha.$$

On souhaite maintenant estimer

$$|\{x,\ |\nabla T f| > \alpha\}| \leqslant |\{x,\ |\nabla T g| > \alpha/2\}| + |\{x,\ |\nabla T b| > \alpha/2\}|\,,$$

avec $b = \sum b_i$. Pour le premier ensemble de niveau, on utilise l'hypothèse L^2 pour déduire que

$$|\{x,\ |\nabla T g| > \alpha/2\}| \lesssim \alpha^{-2}\|\nabla T g\|_2^2 \lesssim \alpha^{-2}\|\nabla g\|_2^2 \lesssim \alpha^{-1}\|\nabla f\|_1.$$

Pour le second ensemble de niveau, étant donné que $\cup_i(2Q_i)$ a une mesure controllée par $\alpha^{-1}\|\nabla f\|_1$, nous avons seulement à estimer

$$|\{x \in \cap_i(2Q_i)^c,\ |\nabla T b(x)| > \alpha/2\}|\,.$$

Pour chaque indice i et un point $x \in (2Q_i)^c$, on note c_i (resp. ℓ_i) le centre (resp. la longueur du coté) de Q_i et alors par la condition $T(1) = 0 \in \mathrm{BMO}$, on a

$$\begin{aligned}\nabla T(b_i)(x) &= \nabla T\left(b_i - \fint_{Q_i} b_i\right)(x)\\ &= \nabla T\left[\left(b_i - \fint_{Q_i} b_i\right)\chi_i\right](x) + \left(\fint_{Q_i} b_i\right)\nabla T(1-\chi_i)(x)\end{aligned}$$

où χ_i est une fonction Lipschitz, égale à 1 sur Q_i, supportée sur $2Q_i$ et avec un gradient uniformément borné par ℓ_i^{-1}. Par l'estimation de régularité sur le noyau (puisque $d(x,Q_i) \simeq |x-c_i|$), on obtient

$$\begin{aligned}\left|\nabla T\left(b_i - \fint_{Q_i} b_i\right)(x)\right| &\lesssim \int_{Q_i} \left|b_i(y) - \fint_{Q_i} b_i\right| \frac{1}{|x-c_i|^{n+1}}\mathrm{d}y \\ &\lesssim \left(\frac{\ell_i}{|x-c_i|}\right)^{n+1} \ell_i^{-1}\operatorname{osc}_{Q_i}(b_i) \\ &\lesssim \left(\frac{\ell_i}{|x-c_i|}\right)^{n+1} \left(\fint_{Q_i} |\nabla b_i|\,\mathrm{d}z\right) \\ &\lesssim \left(\frac{\ell_i}{|x-c_i|}\right)^{n+1} \alpha,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que b_i est supporté sur Q_i et l'inégalité de Poincaré L^1. De manière similaire, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left|\left(\fint_{Q_i} b_i\right)\nabla T(1-\chi_i)(x)\right| &\lesssim \ell_i\left(\fint_{Q_i} |\nabla b_i|\,\mathrm{d}z\right)|\nabla T(\chi_i)(x)| \\ &\lesssim \ell_i\left(\fint_{Q_i} |\nabla b_i|\,\mathrm{d}z\right)\frac{\ell_i^n}{|x-r_i|^{n+1}} \\ &\lesssim \left(\frac{\ell_i}{|x-c_i|}\right)^{n+1}\alpha.\end{aligned}$$

En conséquence, pour tout $x \in \cap_i (2Q_i)^c$ nous avons montré que

$$|\nabla Tb(x)| \lesssim \alpha \sum_i \left(\frac{\ell_i}{\ell_i + |x-c_i|}\right)^{n+1},$$

ce qui est exactement la fonction de Marcinkiewicz associée à la collection (Q_i), qui vérifie une estimation de type faible L^1 puisque la collection vérifie la propriété de recouvrement borné. On conclut donc que

$$\left|\left\{x, \sum_i \sum_i \left(\frac{\ell_i}{\ell_i + |x-c_i|}\right)^{n+1} \gtrsim 1\right\}\right| \lesssim \sum_i |Q_i| \lesssim \alpha^{-1}\|\nabla f\|_1,$$

ce qui finit la preuve de $|\{x,\ |\nabla Tf| > \alpha\}| \lesssim \alpha^{-1}\|\nabla f\|_1$.

Étape 2. — Nous allons maintenant obtenir le contrôle épars de l'opérateur ∇T. En utilisant la formule de Lerner (sur les oscillations locales) (on renvoie le lecteur à la preuve de la proposition 4.1 pour les notations), [21] et [26, Theorem 10.2] : pour toute fonction $f \in W^{1,2}$ (de sorte que ∇Tf a aussi un sens dans L^2) il existe une collection éparse $\mathcal{S} = (Q)_Q$ de cubes telle que pour presque tout x, on a avec un certain paramètre λ

$$|\nabla Tf(x)| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} \omega_\lambda(\nabla Tf;Q)\mathbb{1}_Q(x).$$

Fixons une des boules Q, et une fonction Lipschitz χ_Q, égale à 1 sur $2Q$, supportée sur $4Q$ et avec un gradient uniformément borné par $\ell(Q)^{-1}$. Alors puisque $T(1)=0\in\mathrm{BMO}$, on a $\nabla T(f)=\nabla T(f_1)+\nabla T(f_2)$ avec

$$f_1 := \left(f - \fint_Q f\right)\chi_Q \qquad \text{et} \qquad f_2 := \left(f - \fint_Q f\right)(1-\chi_Q)\,.$$

En utilisant l'inégalité (5.1) sur la première fonction f_1 avec l'inégalité de Poincaré L^1, on obtient que

$$\begin{aligned}\omega_\lambda(\nabla Tf_1;Q) &\lesssim \frac{1}{|Q|}\left\|\left(f-\fint_Q f\right)\chi_Q\right\|_{L^1}\\ &\lesssim \frac{1}{\ell(Q)}\,\mathrm{osc}_{4Q}(f) + \left(\fint_{4Q}|\nabla f|\,\mathrm{d}z\right)\\ &\lesssim \left(\fint_{4Q}|\nabla f|\,\mathrm{d}z\right).\end{aligned}$$

Pour la seconde partie, on utilise c le centre du cube Q, pour avoir

$$\omega_\lambda(\nabla Tf_2;Q)\lesssim \|\nabla Tf_2-\nabla Tf_2(c)\|_{L^\infty(Q)}.$$

Pour tout point $x\in Q$, on vérifie en utilisant la régularité du noyau K que

$$\begin{aligned}|\nabla Tf_2(x)-\nabla Tf_2(c)| &\lesssim \int_{y\in(2Q)^c}|\nabla K(x,y)-\nabla K(c,y)|\,|f(y)-f_Q|\,\mathrm{d}y\\ &\lesssim \sum_{j\geqslant 0}2^{-j}\frac{1}{2^j\ell(Q)}\left(\fint_{2^jQ}|f-f_Q|\,\mathrm{d}y\right)\\ &\lesssim \sum_{j\geqslant 0}\sum_{k=0}^{j}2^{-j}\left(\fint_{2^kQ}|\nabla f|\,\mathrm{d}y\right)\\ &\lesssim \sum_{k\geqslant 0}2^{-k}\left(\fint_{2^kQ}|\nabla f|\,\mathrm{d}y\right),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Poincaré L^1 et la notation f_Q pour la moyenne de f sur la boule Q. On conclut donc que

$$\omega_\lambda(\nabla Tf;Q)\lesssim \sum_{k\geqslant 0}2^{-k}\left(\fint_{2^kQ}|\nabla f|\,\mathrm{d}y\right),$$

d'où

$$|\nabla Tf(x)|\lesssim \sum_{k\geqslant 0}2^{-k}\sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\fint_{2^kQ}|\nabla f|\,\mathrm{d}y\right)\mathbb{1}_Q(x).$$

On obtient le résultat énoncé en utilisant la méthode de [26, Sections 12-13], qui permet d'estimer la double somme par une seule somme sur une collection éparse. □

□

Corollaire 5.3. — *Soit T un opérateur comme dans la proposition précédente. Alors l'opérateur T vérifie des estimations optimales dans des espaces de Sobolev à poids : pour tout $p \in (1,\infty)$ et tout poids $\omega \in A_p$ alors T est continu sur $W^{1,p}(\omega)$ et*

$$\|T\|_{W^{1,p}(\omega)\to W^{1,p}(\omega)} \lesssim [\omega]_{A_p}^{\max\{1,(p-1)^{-1}\}}.$$

6. Représentation de multiplicateurs de Fourier généralisés, applications à la bornitude dans des espaces de Hardy à poids

Dans cette section, nous allons nous intéresser au contrôle épars d'un opérateur, admettant une certaine représentation (généralisant le cas des multiplicateurs de Fourier).

Pour simplifier, nous allons travailler en dimension 1 avec les intervalles dyadiques $\mathbb{D}^0$ de $\mathbb{R}$. Tous les résultats s'étendent de façon automatique au cas de la dimension plus grande avec les cubes dyadiques.

Plus précisément, on considère un opérateur linéaire T borné sur L^2 tel qu'il existe des coefficients $a_I(f)$, indexés par les intervalles dyadiques $I \in \mathbb{D}^0$, et tel que, pour toutes fonctions $f, g \in L^2$

$$|\langle Tf, g\rangle| \lesssim \sum_{I\in\mathbb{D}^0} |a_I(f)|\cdot|a_I(g)|.$$

Remarque 6.1. — On pourrait supposer une décomposition sur l'ensemble des intervalles dyadiques $\mathbb{D}$. Une telle représentation généralise la décomposition en ondelettes d'un multiplicateur de Fourier, et permet de considérer d'autres types d'opérateurs (voir section 7).

De plus on pourrait considérer deux types de coefficients $a_I(f)$ et $b_I(g)$, en supposant les mêmes hypothèses sur les deux collections de coefficients.

Les coefficients $a_I(f)$ doivent être considérés comme une version élémentaire localisée de l'opérateur T en espace (autour de l'intervalle I) et en fréquence (à l'échelle $\ell(I)^{-1}$). L'exemple canonique dans cette situation est donné par $a_I(f) = \langle f, \phi_I\rangle$, où ϕ_I est un paquet d'onde : ϕ_I décroit très vite loin de I et $\hat{\phi}_I$ est supporté dans $\big[1/\ell(I), 2/\ell(I)\big]$.

En suivant la terminologie de [29] ou la présentation de [28] : pour un intervalle I_0, on définit le « *size* maximal » par

$$\operatorname{size}_{I_0} f := \sup_{I\subset I_0} \left(\frac{1}{|I|} \sum_{J\subset I} |a_J(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous allons faire les deux hypothèses suivantes :

- Condition d'énergie : Pour tout intervalle I_0

$$\sum_{I\subset I_0} |a_I(f)|^2 \lesssim \|f\cdot \chi_{I_0}^M\|_2^2 \tag{6.1}$$

 où M est un entier assez grand.
- Condition de Carleson sur le « size » : pour tout intervalle I_0

$$\operatorname{size}_{I_0} f \lesssim \sup_{I\subset I_0} \left(\frac{1}{|I|} \|f\cdot \chi_I^M\|_1 \right). \tag{6.2}$$

Remarque 6.2. — Si $a_I(f) = |\langle f, \phi_I\rangle|$, la condition (6.1) est une conséquence de la bornitude L^2 de la fonction carrée

$$S_{I_0}(f)(x) := \left(\sum_{I\subseteq I_0} |a_I(f)|^2 \frac{\mathbf{1}_I(x)}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.3}$$

Aussi, la condition sur le « size » est une conséquence du théorème de John–Nirenberg, car le « size » se comporte comme la norme BMO. Cela devient plus évident dans le cas $a_I(f) = \langle f, h_I\rangle$ (où $(h_I)_I$ est la base de Haar) : on a alors

$$\sum_{\substack{I\subseteq I_0\\ I\in\mathbb{D}^0}} |a_I(f)|^2 = \sum_{\substack{I\subseteq I_0\\ I\in\mathbb{D}^0}} |\langle f, h_I\rangle|^2 = \left\| \left(f - \fint_{I_0} f \right) \cdot \mathbf{1}_{I_0} \right\|_2^2$$

et par le théorème de John–Nirenberg,

$$\sup_{I\subseteq I_0} \frac{1}{|I|^{\frac{1}{2}}} \left\| \left(f - \fint_I f \right) \cdot \mathbf{1}_I \right\|_2 \sim \sup_{I\subseteq I_0} \frac{1}{|I|} \left\| \left(f - \fint_I f \right) \cdot \mathbf{1}_I \right\|_1.$$

Nous allons tout d'abord obtenir un contrôle épars classique de l'opérateur T, par la forme bilinéaire, ceci permettant d'en déduire des estimations à poids $L^p(\omega)$ et le type faible L^1 de l'opérateur T et de son dual T^*. Puis dans un second temps, nous allons montrer comment on peut conserver la structure « fréquentielle » (décomposition en terme de coefficients localisés en espace et en fréquence) à travers un contrôle épars. Ceci nous permettra alors d'en déduire et de quantifier de manière précise des estimations dans des espaces de Hardy à poids.

6.1. Domination éparse et estimation dans des espaces L^p à poids pour $1 < p < \infty$

Théorème 6.3. — *Sous les hypothèses* (6.1) *et* (6.2), *pour toutes fonctions $f, g \in L^2$ il existe une collection éparse $\mathcal{S}$ telle que*

$$|\langle Tf, g\rangle| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} \left(\fint_Q |f| \,\mathrm{d}x\right)\left(\fint_Q |g| \,\mathrm{d}x\right)|Q|.$$

Les opérateurs T et T^* sont de type faible L^1 et vérifient pour $p \in (1, \infty)$

$$\|T\|_{L^p(\omega)\to L^p(\omega)} + \|T^*\|_{L^p(\omega)\to L^p(\omega)} \lesssim [\omega]_{A_p}^{\max\{1,(p-1)^{-1}\}}.$$

Ce théorème est la conséquence de la proposition 6.7 ci-dessous, ainsi que du Corollaire 3.3 avec la proposition 2.6.

On considère un modèle de l'opérateur T, pour lequel la forme bilinéaire est donnée par

$$\Lambda_{\mathcal{I}}(f, g) := \sum_{I\in\mathcal{I}} \epsilon_I a_I(f) a_I(g)$$

où $\mathcal{I}$ est une collection finie des intervalles dyadiques, et $(\epsilon_I)_I$ est une suite bornée uniformément (pour simplicité, on suppose que $|\epsilon_I| \leqslant 1$ pour tout $I \in \mathcal{I}$). Les estimations obtenues ne dépenderont pas des coefficients ni de la collection $\mathcal{I}$. On rappelle que le prototype est celui de la forme bilinéaire $\Lambda_{\mathcal{I}}(f, g) := \sum_{I\in\mathcal{I}} \epsilon_I \langle f, \phi_I\rangle\langle g, \phi_I\rangle$, où les ϕ_I sont des paquets d'onde L^2-normalisées.

Remarque 6.4. — Etant donné que les fonctions f, g sont fixées dans L^2 et grâce à (6.1), on a la situation suivante : ou bien $\langle Tf, g\rangle = 0$ et il n'y a rien à montrer, ou alors il existe une sous collection finie $\mathcal{I} \subset \mathbb{D}^0$ telle que

$$\sum_{I\in\mathbb{D}^0\setminus\mathcal{I}} |a_I(f)| \cdot |a_I(g)| \leqslant \frac{1}{2}|\langle Tf, g\rangle|.$$

Il suffit donc d'estimer seulement $\Lambda_{\mathcal{I}}(f, g)$ ce qui montre que l'on peut bien se restreindre à une collection finie d'intervalles.

La propriété la plus importante est le caractère *local* de la forme bilinéaire. On commence avec I_0 un intervalle dyadique fixé, qui n'est pas nécessairement contenu dans la collection $\mathcal{I}$. On dénote

$$\mathcal{I}(I_0) := \{I \in \mathcal{I} : I \subseteq I_0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^+(I_0) := \mathcal{I}(I_0) \cup \{I_0\}.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 6.5 (Localisation de la forme bilinéaire).

$$\left|\Lambda_{\mathcal{I}(I_0)}(f,g)\right| \lesssim \widetilde{size}_{I_0} f \cdot \widetilde{size}_{I_0} g \cdot |I_0|,$$

où le nouveau « $\widetilde{size}$ » est défini par

$$\widetilde{size}_{I_0} f := \sup_{J \in \mathcal{I}^+(I_0)} \frac{1}{|J|} \int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \tilde{\chi}_J^M \mathrm{d}x.$$

Démonstration. — On peut estimer la forme bilinéaire, en appliquant Cauchy–Schwartz, par

$$\begin{aligned}
&|\Lambda_{\mathcal{I}(I_0)}(f,g)| \\
&\lesssim \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}(I_0)} |a_I(f)|^2 \frac{\mathbf{1}_I}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \cdot \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}(I_0)} |a_I(g)|^2 \frac{\mathbf{1}_I}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \\
&\lesssim \frac{1}{|I_0|^{\frac{1}{2}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}(I_0)} |a_I(f)|^2 \frac{\mathbf{1}_I}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \cdot \frac{1}{|I_0|^{\frac{1}{2}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}(I_0)} |a_I(g)|^2 \frac{\mathbf{1}_I}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \cdot |I_0| \\
&\lesssim \mathrm{size}_{\mathcal{I}^+(I_0)} f \cdot \mathrm{size}_{\mathcal{I}^+(I_0)} g \cdot |I_0|.
\end{aligned}$$

Bien que $\mathrm{size}_{\mathcal{I}^+(I_0)}$ est une quantité dans L^2, par John–Nirenberg et la bornitude $L^1 \mapsto L^{1,\infty}$ de la fonction carrée, on peut remplacer $\mathrm{size}_{\mathcal{I}^+(I_0)}$ par $\widetilde{\mathrm{size}}_{\mathcal{I}^+(I_0)}$, qui est une quantité dans L^1. L'estimation $\mathrm{size}_{\mathcal{I}^+(I_0)} f \lesssim \widetilde{\mathrm{size}}_{\mathcal{I}^+(I_0)} f$ est présentée dans [28, Lemma 2.13], [29, Lemma 4.2]. □

Remarque 6.6. — D'une manière générale, les intervalles I_0 qui seront considérés ultérieurement, seront choisis par un temps d'arrêt et vérifierons la propriété que

$$\widetilde{\mathrm{size}}_{\mathcal{I}_{I_0}} f \lesssim \frac{1}{|I_0|} \int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \tilde{\chi}_{I_0}^M \mathrm{d}x$$

et l'analogue pour g. Autrement dit, le $\widetilde{\mathrm{size}}$ qui est un supremum sur la collection $\mathcal{I}_{I_0}$ est controlé par l'information à l'échelle de I_0. Dans un tel cas, le $\widetilde{\mathrm{size}}$ peut-être vu comme une fonction maximale $\mathcal{M}_{\mathcal{I}(I_0)}$. Ainsi, le temps d'arrêt choisi les bons intervalles I_0 et collections $\mathcal{I}_{I_0} \subseteq \mathcal{I}(I_0)$ tels qu'on a, en utilisant la proposition 6.5

$$|\Lambda_{\mathcal{I}_{I_0}}(f,g)| \lesssim \inf_{y \in I_0} \mathcal{M}_{\mathcal{I}_{I_0}}(f)(y) \cdot \inf_{y \in I_0} \mathcal{M}_{\mathcal{I}_{I_0}}(g)(y) \cdot |I_0|.$$

De façon similaire au Théorème 6.3, on obtiendra :

Proposition 6.7. — *Il existe une collection éparse $\mathcal{S}$ d'intervalles telle que*

$$\left|\Lambda_{\mathcal{I}}(f,g)\right| \lesssim \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \tilde{\chi}_Q^M \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\frac{1}{|Q|} \int_{\mathbb{R}} |g| \cdot \tilde{\chi}_Q^M \mathrm{d}x \right) \cdot |Q|. \tag{6.4}$$

Démonstration. — Dans le cas présent, nous allons considérer le critère-proposition 2.5 pour le caractère épars de la collection, avec un paramètre $\eta = \frac{1}{2}$.

La collection $\mathcal{S}$ sera construite de manière récursive, de sorte qu'on peut l'écrire comme $\mathcal{S} = \bigcup_k \mathcal{S}_k$. En effet, chaque intervalle Q représente un bon support pour la forme bilinéaire localisée $\Lambda_{\mathcal{I}}$, et il ne doit pas appartenir à la collection $\mathcal{I}$. Pour chaque $Q \in \mathcal{S}$ on aura une collection d'intervalles $\mathcal{I}_Q \subseteq \mathcal{I}(Q)$ associée telle que

$$\left|\Lambda_{\mathcal{I}_Q}(f,g)\right| \lesssim \left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}} |f|\cdot \tilde{\chi}_Q^M \mathrm{d}x\right)\cdot\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}} |g|\cdot \tilde{\chi}_Q^M \mathrm{d}x\right)\cdot |Q|.$$

On commence par poser $\mathcal{I}_{Stock} := \mathcal{I}$. On définit la collection $\mathcal{S}_0$ (le niveau zéro de la collection éparse) comme l'ensemble des intervalles maximaux $Q_0 \in \mathcal{I}$, et pour chacun d'entre eux, on définit $\mathcal{I}_{Q_0}$ comme la collection d'intervalles $I \in \mathcal{I}_{Stock}(Q_0)$ telle que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}} |f|\cdot \tilde{\chi}_I^M \mathrm{d}x \leqslant C\frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}} |f|\cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M \mathrm{d}x \\ \text{et}\quad &\frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}} |g|\cdot \tilde{\chi}_I^M \mathrm{d}x \leqslant C\frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}} |g|\cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Après, on réinitialise $\mathcal{I}_{Stock} := \mathcal{I}_{Stock} \setminus \bigcup_{Q_0\in\mathcal{S}_0} \mathcal{I}_{Q_0}$, et il nous reste à définir les descendants de chaque Q_0. Les intervalles $I \in \mathcal{I}_{Stock}(Q_0)$, s'il y en a encore, ils satisfont une des deux conditions suivantes : soit

$$\frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}} |f|\cdot \tilde{\chi}_I^M \mathrm{d}x > C\frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}} |f|\cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M \mathrm{d}x$$

ou

$$\frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}} |g|\cdot \tilde{\chi}_I^M \mathrm{d}x > C\frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}} |g|\cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M \mathrm{d}x.$$

L'ensemble des descendants de Q_0, $ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$, se compose des intervalles maximaux $Q \subset Q_0$ qui contiennent au moins un intervalle $I \in \mathcal{I}_{Stock}(Q_0)$ (donc, la moyenne de $|f|\cdot\tilde{\chi}_{Q_0}$ sur I est trop grande, ou celle de $|g|\cdot\tilde{\chi}_{Q_0}$), et pour lesquels on a

$$\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}} |f|\cdot \tilde{\chi}_Q^M \mathrm{d}x > C\frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}} |f|\cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M \mathrm{d}x$$

ou

$$\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}} |g|\cdot \tilde{\chi}_Q^M \mathrm{d}x > C\frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}} |g|\cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M \mathrm{d}x.$$

De cette façon, $ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$ est une collection d'intervalles disjoints, dont l'union est contenue dans

$$\left\{x : \mathcal{M}\big(|f| \cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M\big) > C\frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M \mathrm{d}x\right\} \\ \cup \left\{x : \mathcal{M}\big(|g| \cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M\big) > C\frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}} |g| \cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M \mathrm{d}x\right\}.$$

La bornitude $L^1 \to L^{1,\infty}$ de la fonction maximale entraine alors que $\sum_{Q \in ch_{\mathcal{S}}(Q_0)} |Q| \leqslant \frac{1}{2}|Q_0|$, si la constante C est choisie assez grande, ce qui correspond à la condition « éparse » désirée.

Avant de décrire la construction itérative ($k \Rightarrow k+1$), les observations suivantes sont nécessaires :

(1) Dans la construction de $\mathcal{S}_0$, chaque Q_0 est contenu dans $\mathcal{I}_{Q_0}$, donc celle-ci n'est pas vide. Ça ne sera pas toujours le cas pour $k \geqslant 1$ (il est possible que $\mathcal{I}_{Q_0} = \emptyset$), mais ça n'aura aucune conséquence pour le temps d'arrêt.

(2) On a $\widetilde{\text{size}}_{\mathcal{I}_{Q_0}} f \lesssim \frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \tilde{\chi}_{Q_0}^M \mathrm{d}x$ et de même pour g.

Supposons maintenant que $\mathcal{S}_k$ a été déjà définie, et que pour chaque $Q_0 \in \mathcal{S}_k$, on a une collection éparse des descendants directs $ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$, ainsi qu'une collection $\mathcal{I}_{Q_0} \subset \mathcal{I}$. On rappelle que $\mathcal{I}_{Stock} := \mathcal{I} \setminus \bigcup_{j \leqslant k} \bigcup_{K \in \mathcal{S}_j} \mathcal{I}_K$ est constitué par les intervalles $I \in \mathcal{I}$ qui n'ont pas été choisis par le temps d'arrêt.

On défini alors $\mathcal{S}_{k+1} := \bigcup_{Q_0 \in \mathcal{S}_k} \{Q : Q \in ch_{\mathcal{S}}(Q_0)\}$, et il reste à définir $\mathcal{I}_Q$ et $ch_{\mathcal{S}}(Q)$ pour chaque $Q \in \mathcal{S}_{k+1}$. On cherche des intervalles $I \in \mathcal{I}_{Stock} \cap \mathcal{I}(Q)$ telle que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \tilde{\chi}_I^M \mathrm{d}x \leqslant C\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \tilde{\chi}_Q^M \mathrm{d}x \\ \text{et} \quad &\frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}} |g| \cdot \tilde{\chi}_I^M \mathrm{d}x \leqslant C\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}} |g| \cdot \tilde{\chi}_Q^M \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Il est possible qu'il n'y a pas d'intervalles satisfaisant cette propriété, donc pour $k \geqslant 1$ il peut arriver que $\mathcal{I}_Q = \emptyset$. Après avoir construit la collection $\mathcal{I}_Q$, on réinitialise $\mathcal{I}_{Stock} := \mathcal{I}_{Stock} \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{S}_{k+1}} \mathcal{I}_Q$.

Les descendants directs $ch_{\mathcal{S}}(Q)$ de Q sont des intervalles maximaux P qui contiennent au moins un $I \in \mathcal{I}_{Stock} \cap \mathcal{I}(Q)$ (pour un tel I, la condition (6.6) est fausse), et de plus, on veut aussi que

$$\frac{1}{|P|}\int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \tilde{\chi}_P^M \mathrm{d}x > C\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}} |f| \cdot \tilde{\chi}_Q^M \mathrm{d}x$$

ou

$$\frac{1}{|P|}\int_{\mathbb{R}}|g|\cdot\tilde{\chi}_P^M\mathrm{d}x > C\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}}|g|\cdot\tilde{\chi}_Q^M\mathrm{d}x.$$

Comme on l'a déjà vu, la bornitude de la fonction maximale implique que $\sum_{P\in ch_S(Q)}|P|\leqslant\frac{1}{2}|Q|$. Si on arrive à avoir $\mathcal{I}_{Stock}\cap\mathcal{I}(Q)=\emptyset$, alors on choisi $ch_{\mathcal{S}}(Q)=\emptyset$.

La procédure s'arrêtera après un nombre fini d'étapes car la collection initiale $\mathcal{I}$ était finie. Pour chaque $I\in\mathcal{I}$ il existe un unique $Q\in\bigcup_k\mathcal{S}_k$ telle que I est contenu dans $\mathcal{I}_Q$: on peut voir qu'il existe un certain Q (qui doit être choisi par le temps d'arrêt) pour lequel

$$\frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}}|f|\cdot\tilde{\chi}_I^M\mathrm{d}x\leqslant C\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}}|f|\cdot\tilde{\chi}_Q^M\mathrm{d}x$$
$$\text{et}\quad \frac{1}{|I|}\int_{\mathbb{R}}|g|\cdot\tilde{\chi}_I^M\mathrm{d}x\leqslant C\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}}|g|\cdot\tilde{\chi}_Q^M\mathrm{d}x.$$

La propriété ci-dessus est vraie pour $Q=I$, mais ça peut être vrai avec un intervalle $Q\in\mathcal{S}$ dont I est strictement contenu.

De plus, le processus de sélection implique que pour chaque $Q_0\in\mathcal{S}$, on a

$$\widetilde{\text{size}}_{\mathcal{I}_{Q_0}}f\lesssim\frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}}|f|\cdot\tilde{\chi}_{Q_0}^M\mathrm{d}x\quad\text{et}\quad\widetilde{\text{size}}_{\mathcal{I}_{Q_0}}g\lesssim\frac{1}{|Q_0|}\int_{\mathbb{R}}|g|\cdot\tilde{\chi}_{Q_0}^M\mathrm{d}x.$$

Cela permet d'estimer la forme bilinéaire par :

$$\begin{aligned}\big|\Lambda_{\mathcal{I}}(f,g)\big| &\lesssim\sum_k\sum_{Q\in S_k}\big|\Lambda_{\mathcal{I}_Q}(f,g)\big|\\ &\lesssim\sum_{Q\in\mathcal{S}}\widetilde{\text{size}}_{\mathcal{I}_Q}f\cdot\widetilde{\text{size}}_{\mathcal{I}_Q}g\cdot|Q|\\ &\lesssim\sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}}|f|\cdot\tilde{\chi}_Q^M\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}}|g|\cdot\tilde{\chi}_Q^M\mathrm{d}x\right)\cdot|Q|,\end{aligned}$$

qui correspond à l'estimation éparse de (6.4). □

6.2. Domination éparse via des fonctions carrées

Pour les multiplicateurs de Fourier, qui sont plus réguliers que les opérateurs de Calderón–Zygmund généraux, on peut montrer une domination éparse avec des fonctions carrées. C'est le but de cette sous-section, d'obtenir cette estimation plus précises, qui conserve la structure fréquentielle de l'opérateur initial.

Comme précédemment, on considère la forme bilinéaire modèle :

$$\Lambda_{\mathcal{I}}(f,g) := \sum_{I\in\mathcal{I}} c_I a_I(f) a_I(g) \tag{6.7}$$

où $\mathcal{I} \subset \mathbb{D}^0$ est une collection finie d'intervalles dyadiques, $\{c_I\}_I$ est une suite de nombres complexes uniformément bornés.

On va montrer alors le résultat suivant :

Théorème 6.8. — *Fixons des exposants $p, q \in (0,\infty)$. Pour toutes fonctions $f, g \in L^2$ il existe une collection éparse $\mathcal{S}$ telle que*

$$|\Lambda_{\mathcal{I}}(f,g)| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} \left(\fint_Q |S_Q f|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\fint_Q |S_Q g|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \cdot |Q|.$$

Proposition 6.9. — *Si I_0 est un intervalle dyadique fixé et si $\mathcal{I}(I_0) := \{I \in \mathcal{I} : I \subseteq I_0\}$, alors*

$$\left|\Lambda_{\mathcal{I}(I_0)}(f,g)\right| \lesssim \sup_{I'\in\mathcal{I}(I_0)} \frac{1}{|I'|^{\frac{1}{p}}} \left\| \left(\sum_{\substack{I\subseteq I'\\ I\in\mathcal{I}(I_0)}} \frac{|a_I(f)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{p,\infty} \cdot \sup_{I'\in\mathcal{I}(I_0)} \frac{1}{|I'|^{\frac{1}{q}}} \left\| \left(\sum_{\substack{I\subseteq I'\\ I\in\mathcal{I}(I_0)}} \frac{|a_I(g)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{q,\infty} \cdot |I_0|$$

pour tous $0 < p, q < \infty$.

Démonstration. — L'inégalité de Cauchy–Schwartz implique immédiatement l'estimation

$$\left|\Lambda_{\mathcal{I}(I_0)}(f,g)\right| \lesssim \frac{1}{|I_0|^{\frac{1}{p}}} \left\| \left(\sum_{I\in\mathcal{I}(I_0)} \frac{|a_I(f)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \cdot \frac{1}{|I_0|^{\frac{1}{p}}} \left\| \left(\sum_{I\in\mathcal{I}(I_0)} \frac{|a_I(g)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \cdot |Q_0|,$$

qui entraîne la conclusion pour $p = q = 2$, avec des norme L^2. Pour obtenir le cas général pour tous $0 < p, q < \infty$, il suffit d'invoquer le lemme de John–Nirenberg, comme présenté dans [28, Section 2.6]. $\square$

Preuve du Théorème 6.8. — L'objectif est d'obtenir une collection éparse $\mathcal{S}$ d'intervalles dyadiques qui satisfont les conditions suivantes :

- pour chaque $Q \in \mathcal{S}$, il existe une collection $ch_{\mathcal{S}}(Q)$ des descendants directs telle que la condition éparse est vérifiée :

$$\sum_{P \in ch_{\mathcal{S}}(Q)} |P| \leqslant \frac{1}{2}|Q|.$$

- également, pour chaque $Q \in \mathcal{S}$ il existe une sous-collection $\mathcal{I}_Q \subseteq \mathcal{I}(Q)$ composée par de « bons intervalles » telle que

$$|\Lambda_{\mathcal{I}_Q}(f,g)| \lesssim \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}(Q)} \frac{|a_I(f)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \cdot \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{q}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}(Q)} \frac{|a_I(g)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \cdot |Q|.$$

On commence en initialisant $\mathcal{I}_{Stock} := \mathcal{I}$ et en choisissant $Q_0 \in \mathcal{I}_{Stock}$ un intervalle maximal (ceux-ci forment $\mathcal{S}_0$). La collection $\mathcal{I}_{Q_0}$ se compose par les intervalles $I' \in \mathcal{I}_{Stock}(Q_0)$ telle que

$$\frac{1}{|I'|^{\frac{1}{p}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}_{Stock}(I')} \frac{|a_I(f)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant C \cdot \frac{1}{|Q_0|^{\frac{1}{p}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}_{Stock}(Q_0)} \frac{|a_I(f)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \tag{6.8}$$

et simultanément pour la fonction g

$$\frac{1}{|I'|^{\frac{1}{q}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}_{Stock}(I')} \frac{|a_I(g)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \leqslant C \cdot \frac{1}{|Q_0|^{\frac{1}{q}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}_{Stock}(Q_0)} \frac{|a_I(g)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q. \tag{6.9}$$

Pour chaque $Q_0 \in \mathcal{S}$, on choisit ses descendants parmi les intervalles $Q \in \mathcal{I}_{Stock}(Q_0)$ pour lesquels une des conditions (6.8) ou (6.9) est fausse, et qui, de plus, sont maximaux. Donc pour un tel intervalle Q on a

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{p}}}\left\|\left(\sum_{I\in\mathfrak{I}_{Stock}(Q)}\frac{|a_I(f)|^2}{|I|}\mathbf{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p > C\cdot\frac{1}{|Q_0|^{\frac{1}{p}}}\left\|\left(\sum_{I\in\mathfrak{I}_{Stock}(Q_0)}\frac{|a_I(f)|^2}{|I|}\mathbf{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p,$$

ou la condition similaire pour g. Dans les deux cas, l'inégalité au-dessus implique que

$$\inf_{y\in Q}\mathcal{M}_p\left(\left(\sum_{I\in\mathfrak{I}_{Stock}(Q_0)}\frac{|a_I(f)|^2}{|I|}\mathbf{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}\right)(y) > C\cdot\frac{1}{|Q_0|^{\frac{1}{p}}}\left\|\left(\sum_{I\in\mathfrak{I}_{Stock}(Q_0)}\frac{|a_I(f)|^2}{|I|}\mathbf{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p.$$

Maintenant on peut vérifier la condition éparse : $\sum_{Q\in ch_{\mathcal{S}}(Q_0)}|Q|\leqslant\frac{1}{2}|Q_0|$. On note que chaque Q est contenu dans l'ensemble

$$\left\{x:\mathcal{M}_p\left(\left(\sum_{I\in\mathfrak{I}_{Stock}(Q_0)}\frac{|a_I(f)|^2}{|I|}\mathbf{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}\right)(x) > C\frac{1}{|Q_0|^{\frac{1}{p}}}\left\|\left(\sum_{I\in\mathfrak{I}_{Stock}(Q_0)}\frac{|a_I(f)|^2}{|I|}\mathbf{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\right\},$$

où dans l'ensemble correspondant à la fonction g.

On utilise la bornitude $L^p\to L^{p,\infty}$ de l'opérateur $\mathcal{M}_p$ et la maximalité des intervalles $Q\in ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$ pour calculer

$$\sum_{Q\in ch_{\mathcal{S}}(Q_0)}|Q|\lesssim C\frac{1}{|Q_0|}\left\|\left(\sum_{I\in\mathfrak{I}_{Stock}(Q_0)}\frac{|a_I(f)|^2}{|I|}\mathbf{1}_I\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p^{-p} \left\|\mathcal{M}_p\left(\sum_{I\in\mathfrak{I}_{Stock}(Q_0)}\frac{|a_I(f)|^2}{|I|}\mathbf{1}_I(x)\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{p,\infty}^{p} \lesssim C^{-1}|Q_0|.$$

En effet, on doit prendre en considération les intervalles $Q\in ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$ pour lesquels la condition (6.9) est fausse pour la fonction g. En choisissant une constante C assez grande, on obtient la condition éparse.

Après avoir construit les collections $\mathcal{J}_{Q_0}$ et $ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$, on réinitialise $\mathcal{J}_{Stock} := \mathcal{J}_{Stock} \setminus \cup_{Q_0 \in \mathcal{S}_0} \mathcal{J}_{Q_0}$. D'ici, on réitère la procédure d'une manière claire pour obtenir une collection éparse $\mathcal{S}$.

Cela permet d'estimer la forme bilinéaire par

$$
\begin{aligned}
(6.10)\quad |\Lambda_{\mathcal{J}}(f,g)| \lesssim \sum_{Q \in \mathcal{S}} \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{J}(Q)} \frac{|a_I(f)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \\
\cdot \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{p}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{J}(Q)} \frac{|a_I(g)|^2}{|I|} \mathbf{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \cdot |Q|,
\end{aligned}
$$

pour tous $0 < p, q < \infty$. □

6.3. Application à la bornitude dans des espaces de Hardy H^p à poids pour $0 < p \leqslant 1$

Pour I_0 un intervalle, on considère la fonction carrée localisée

$$
S_{I_0}(f) := x \mapsto \left(\sum_{I \subset I_0} |a_I(f)|^2 \frac{\mathbf{1}_I(x)}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Pour un poids $\omega \in L^1_{loc}$, on défini l'espace de Hardy à poids H^p_ω pour $p \in (0,1]$ par la norme $\|Sf\|_{L^p_\omega}$ et l'espace CMO^p_ω par la norme

$$
\sup_{I_0} \frac{1}{\omega(I_0)^{\frac{1}{p}}} \left(\omega(I_0) \sum_{I \subseteq I_0} |a_I(f)|^2 \frac{|I|}{\omega(I)} \right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Ici, on identifie le poids ω avec la mesure $\omega \mathrm{d}x$, pour noter $\omega(I) = \int_I \omega(x) \mathrm{d}x$. Nous allons montrer l'estimation suivante :

Proposition 6.10. — *Sous les hypothèses* (6.1) *et* (6.2)*, fixons un exposant $p \in (0,1]$, un poids ω et deux fonctions $f \in H^p_\omega$ et $g \in CMO^p_\omega$. Alors pour toute collection finie $\mathcal{J}$ de cubes*

$$
|\Lambda_{\mathcal{J}}(f,g)| \lesssim \|f\|_{H^p_\omega} \cdot \|g\|_{CMO^p_\omega},
$$

avec une constante implicite indépendante des fonctions f, g et du poids ω.

Démonstration. — On suit la même approche que celle de la sous-section précédente. On a d'abord une estimation à poids localisée. Si I_0 est un intervalle fixé alors

$$\begin{aligned}|\Lambda_{I_0}(f,g)| &\lesssim \sum_{I\subseteq I_0} |a_I(f)|\cdot|a_I(g)| = \sum_{I\subseteq I_0} |a_I(f)|\frac{\omega(I)^{\frac12}}{|I|}\cdot|a_I(g)|\frac{|I|^{\frac12}}{\omega(I)^{\frac12}} \\ &\lesssim \frac{1}{\omega(I_0)^{\frac12}}\left\|\left(\sum_{I\subseteq I_0}|a_I(f)|^2\cdot\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac12}\right\|_{L^2(\omega)} \\ &\qquad\cdot\frac{1}{\omega(I_0)^{\frac1p}}\left(\omega(I_0)\sum_{I\subseteq I_0}|a_I(f)|^2\frac{|I|}{\omega(I)}\right)^{\frac12}\cdot\omega(I_0)^{\frac1p} \\ &\lesssim \frac{1}{\omega(I_0)^{\frac12}}\left\|\left(\sum_{I\subseteq I_0}|a_I(f)|^2\cdot\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac12}\right\|_{L^2(\omega)}\cdot\|g\|_{CMO^p_\omega}\cdot\omega(I_0)^{\frac1p} \\ &\lesssim \sup_{\tilde I\subseteq I_0}\frac{1}{\omega(\tilde I)^{\frac12}}\left\|\left(\sum_{I\subseteq\tilde I}|a_I(f)|^2\cdot\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac12}\right\|_{L^2(\omega)}\cdot\|g\|_{CMO^p_\omega}\cdot\omega(I_0)^{\frac1p}.\end{aligned}$$

Grâce au théorème de John–Nirenberg, qui reste vrai même si on ajoute un poids (la preuve est identique à celle du Theorem 2.7 de [28]), on obtient

$$|\Lambda_{I_0}(f,g)| \lesssim \sup_{\tilde I}\frac{1}{\omega(\tilde I)^{\frac1p}}\left\|\left(\sum_{I\subseteq\tilde I}|a_I(f)|^2\cdot\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac12}\right\|_{L^p(\omega)}\cdot\|g\|_{CMO^p_\omega}\cdot\omega(I_0)^{\frac1p}.$$

Dès qu'on a ces estimations localisées, on peut refaire le même temps d'arrêt pour obtenir une domination ω-éparse (éparse relative à la mesure $\omega\mathrm{d}x$). En effet, la condition dans le temps d'arrêt pour choisir $\mathcal{I}_{Q_0}$ est donnée par

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega(I')^{\frac1r}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\subseteq I'\\ I\in\mathcal{I}_{Stock}}}|a_I(f)|^2\frac{1_I}{|I|}\right)^{\frac12}\right\|_{L^r(\omega)} \\ &\qquad\qquad\leqslant C\cdot\frac{1}{\omega(Q_0)^{\frac1r}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\subseteq Q_0\\ I\in\mathcal{I}_{Stock}}}|a_I(f)|^2\frac{1_I}{|I|}\right)^{\frac12}\right\|_{L^r(\omega)},\end{aligned}$$

avec un $r<p$ qui sera choisi ultérieurement.

L'estimation ω-éparse qu'on obtient à la fin est

$$|\Lambda_{\mathcal{I}}(f,g)| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}}\frac{1}{\omega(Q)^{\frac1r}}\left\|\left(\sum_{I\in\mathcal{I}_Q}|a_I(f)|^2\frac{1_I}{|I|}\right)^{\frac12}\right\|_{L^r(\omega)}\cdot\|g\|_{CMO^p_\omega}\cdot\omega(Q)^{\frac1p}.$$

On fait alors apparaître l'opérateur maximal à poids $\mathcal{M}_{r,\omega}$ défini par

$$\mathcal{M}_{r,\omega}f(x) := (\mathcal{M}_\omega|f|^r)^{\frac{1}{r}},$$

qui est borné sur $L^p(\omega)$ uniformément en fonction du poids ω, car $\mathcal{M}_\omega$ est borné sur $L^{\frac{p}{r}}(\omega)$ (voir [26, Théorème 15.1] ou [9]).

En utilisant que la collection $\mathcal{S}$ est ω-éparse, pour chaque $Q \in \mathcal{S}$ on peut trouver $E(Q) \subseteq Q$ telle que $\omega(E(Q)) > \frac{1}{2}\omega(Q)$ et tels que les ensembles $\{E(Q)\}_{Q\in\mathcal{S}}$ sont deux à deux disjoints. Avec ces observations, on peut estimer la forme bilinéaire par

$$\begin{aligned}
&|\Lambda_{\mathcal{J}}(f,g)| \\
&\quad\lesssim \inf_{y\in E(Q)} \mathcal{M}_{r,\omega}\left(\sum_{I\in\mathcal{J}_Q} |a_I(f)|^2\frac{1_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}(y)\cdot\|g\|_{CMO^p_\omega}\cdot\omega(E(Q))^{\frac{1}{p}} \\
&\quad\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{M}_{r,\omega}\left(\left(\sum_{I\in\mathcal{J}_Q} |a_I(f)|^2\frac{1_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right)|^p\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\|g\|_{CMO^p_\omega} \\
&\quad\lesssim \|Sf\|_{L^p(\omega)}\cdot\|g\|_{CMO^p_\omega}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 6.11. — On observe que le temps d'arrêt qu'on a utilisé est vraiment similaire à celui qui sera utilisé ultérieurement dans la sous-section 8.1. La condition pour le temps d'arrêt et toujours donnée par une inspection de la moyenne de la fonction carrée dans L^r, avec $r < p$.

D'après [19], CMO^p_ω est l'espace dual de H^p_ω, de manière indépendante du poids. En fait, les énoncés dans [19] sont décrits avec un poids $\omega \in A_\infty$ car l'espace de Hardy est défini en termes d'une fonction maximale. Si on choisit (comme c'est le cas ici) la norme de l'espace de Hardy définie en terme de la fonction carrée alors, les résultats de [19] décrivent la dualité de manière indépendante du poids. On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 6.12. — *Soit T un opérateur vérifiant les hypothèses* (6.1) *et* (6.2). *Pour tout exposant $p \in (0,1]$, il existe une constante $C = C(T,p)$ telle que pour tout poids ω, T est continu sur H^p_ω avec*

$$\|T\|_{H^p_\omega\to H^p_\omega} \lesssim C.$$

7. Application à la transformée de Riesz et au projecteur de Leray

Sur l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$, considérons l'opérateur du second ordre $L = -\operatorname{div} A\nabla$, avec les hypothèses suivantes :

Hypothèses sur L.

- *Soit $A = A(x)$ une application à valeurs matricielles complexes, définie sur $\mathbb{R}^n$ et vérifiant une condition d'accrétivité (ellipticité)*

$$\lambda_1|\xi|^2 \leqslant \Re\langle A(x)\xi,\xi\rangle \quad et \quad |\langle A(x)\xi,\zeta\rangle| \leqslant \lambda_2|\xi||\zeta|, \tag{7.1}$$

  pour des constantes numériques $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^n$. On y associe alors l'opérateur du second ordre défini par

$$L = L_A f := -\operatorname{div}(A\nabla\cdot).$$

  On sait que L est un opérateur injectif, sectoriel et maximal accretif sur L^2, et donc admet un calcul fonctionnel holomorphe borné H^∞ sur L^2. De plus $-L$ est le générateur d'un semi-groupe $(e^{-tL})_{t>0}$ sur L^2, qui vérifie des estimations de Davies–Gaffney L^2-L^2 (ainsi que $\sqrt{t}e^{-tL}\operatorname{div}$).
- *On suppose que le semi-groupe e^{-tL} a une représentation intégrale par un noyau K_t tel que ce noyau et son gradient vérifient des estimations Gaussiennes ponctuelles : pour tout $t > 0$,*

$$|K_t(x,y)| + \sqrt{t}\,|\nabla_{x,y}K_t(x,y)| \lesssim |B(x,\sqrt{t})|^{-1}e^{-c\frac{|x-y|^2}{t}} \tag{7.2}$$

  avec des constantes implicites uniformes en $t > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 7.1. — Tous les résultats de cette section pourraient être écrits dans le contexte d'une variété Riemannienne doublante non-bornée (M,g) munie de son semi-groupe de la chaleur $(e^{-t\Delta})_{t>0}$ (où Δ est l'opérateur positif de Laplace), sous l'hypothèse que le semi-groupe et son gradient admettent une représentation intégrale avec un noyau, vérifiant des estimations ponctuelles Gaussiennes.

Dans un tel cadre (ou celui d'une variété Riemanienne avec son semi-groupe de la chaleur), on définit la transformée de Riesz $R_L := \nabla L^{-\frac{1}{2}}$ et le projecteur de Leray $\pi_L(f) := A\nabla L^{-1}\operatorname{div}$. Nous allons nous intéresser à l'étude de ces opérateurs et utiliser les résultats précédents sur le contrôle épars pour obtenir de nouveaux résultats sur les bornitudes de ces opérateurs.

Précisons ici que le projecteur de Leray π_L ou le dual de la transformée de Riesz R_L^* agissent sur un espace de champs de vecteurs. Pour les espaces de Lebesgue et un poids ω, on doit donc distinguer l'espace $L^p_\omega = L^p_\omega(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ de fonctions et $L^p_\omega = L^p_\omega(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ l'espace de champs de vecteurs, où les deux espaces L^p sont définis par la norme

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

avec $|\cdot|$ étant le module ou une norme de $\mathbb{R}^n$ (selon que f est une fonction ou un champ de vecteur.

Par simplicité, on gardera la même notation L^p de ces espaces, ainsi par exemple
$$\|\pi_L\|_{L^p\to L^p} := \|\pi_L\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\to L^p_\omega(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})}.$$
Pour différentier, nous allons prendre dans cette section, la notation suivante : une lettre majuscule (resp. minuscule) pour un champ de vecteurs (resp. fonction) et alors implicitement sa norme L^p_ω correspond à l'espace $L^p_\omega = L^p_\omega(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ (resp. $= L^p_\omega(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$).

7.1. Type faible L^1 pour le dual de la transformée de Riesz et autres fonctionnelles carrées verticales

Sous les hypothèses faites sur L, les transformées de Riesz $R_L := \nabla L^{-\frac{1}{2}}$ et $R_{L^*} := \nabla (L^*)^{-\frac{1}{2}}$ sont continues sur tous les espaces L^p pour $p\in(1,\infty)$ et sont de type faible L^1 (voir par exemple [1]). Par dualité, les opérateurs adjoint $R_L^* = (L^*)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div}$ et $(R_{L^*})^* = L^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div}$ (agissant sur les champs de vecteurs) sont aussi continus sur L^p pour $p\in(1,\infty)$. Sous les conditions ci-dessus, il est montré dans [9] que les transformées de Riesz admettent un contrôle épars sous la forme suivante :

Proposition 7.2 ([9]). — *Pour toutes fonctions $f,g\in L^2$ il existe une collection éparse $\mathcal{S}$ telle que*
$$|\langle R_{L^*}(f),g\rangle| + |\langle R_L(f),g\rangle| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} \left(\fint_{3Q} |f|\,\mathrm{d}x\right)\left(\fint_{3Q} |g|\,\mathrm{d}x\right)|Q|.$$

En appliquant le Corollaire 3.3, on obtient donc le résultat suivant :

Proposition 7.3. — *Sous les hypothèses faites sur L, les opérateurs adjoints des transformées de Riesz R_L^* et $(R_{L^*})^*$ sont de type faible L^1 : pour tout champ de vecteur $F\in L^1$*
$$\|(L^*)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div} F\|_{L^{1,\infty}} + \|(L)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div} F\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|F\|_{L^1}.$$

On obtient aussi le même résultat pour les fonctions carré associées :

Proposition 7.4. — *Sous les hypothèses faites sur L, on fixe $Q_t(L) = (tL)^N e^{-tL}$ pour un certain $N>1/2$. Alors les fonctions carré*
$$\left(\int_0^\infty \left|\sqrt{t}Q_t(L)\operatorname{div}(\,\cdot\,)\right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \quad et \quad \left(\int_0^\infty \left|\sqrt{t}Q_t(L^*)\operatorname{div}(\,\cdot\,)\right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$
sont de type faible L^1 et bornées sur L^p pour $p\in(1,\infty)$.

Démonstration. — La bornitude L^p pour $p \in (1,\infty)$ est bien connue par dualité. On va donc se concentrer sur le type faible L^1, qui est nouveau et nécessite une preuve plus compliquée. On ne traite par symétrie que le cas de l'opérateur L. On commence par linéariser la fonctions carré, en utilisant $\epsilon_t : [0,1] \to [0,1]$ un bon système de fonctions de Rademacher, on sait que

$$\left(\int_0^\infty \left|\sqrt{t}Q_t(L)\operatorname{div}(F)\right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathbb{E}_\omega\left[\left|\int_0^\infty \epsilon_t(\omega)\sqrt{t}Q_t(L)\operatorname{div}(F)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|\right]$$

Fixons $F \in L^1$ et un ensemble mesurable E arbitraire, de mesure finie et notons E' le sous-ensemble majeur donné par

$$E' := \{x \in E,\ M(F)(x) > K|E|^{-1}\}$$

pour une certaine constante numérique K. Alors, on sait que (uniformément en $\omega \in [0,1]$)

$$\int_{E'}\left|\int_0^\infty \epsilon_t(\omega)\sqrt{t}Q_t(L)\operatorname{div}(F)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|\,\mathrm{d}x \lesssim \|F\|_{L^1}$$

car on peut appliquer la preuve de la proposition 3.1 et le fait que [9] s'applique pour obtenir le contrôle épars de l'opérateur dual

$$\left(\int_0^\infty \epsilon_t(\omega)\sqrt{t}Q_t(L)\operatorname{div}(\,\cdot\,)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^* = \int_0^\infty \epsilon_t(\omega)\sqrt{t}\nabla Q_t(L^*)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

(avec des constantes uniformes en $\omega \in [0,1]$). En intégrant[(1)] alors par rapport au paramètre $\omega \in [0,1]$ et par le théorème de Fubini, on obtient que

$$\int_{E'} \mathbb{E}_\omega\left[\left|\int_0^\infty \epsilon_t(\omega)\sqrt{t}Q_t(L)\operatorname{div}(F)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|\right]\mathrm{d}x \lesssim \|F\|_{L^1},$$

ce qui conclut la preuve de

$$\left\|\left(\int_0^\infty \left|\sqrt{t}Q_t(L)\operatorname{div}(F)\right|^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{1,\infty}} \lesssim \|F\|_{L^1},$$

de par la caractérisation (3.1) de la norme $L^{1,\infty}$. □

[(1)] On note ici qu'il est très important que la construction de l'ensemble majeur E' soit indépendante du paramètre ω.

7.2. Étude du projecteur de Leray

Associé à un tel opérateur L, on peut considérer le *projecteur de Leray* π_L défini (formellement) par

$$\pi_L(f) := A\nabla L^{-1}\operatorname{div}.$$

Cet opérateur a été introduit pour l'étude des équations de Navier–Stokes, puisque $\mathrm{Id}-\pi_L$ peut être vu comme le projecteur sur les champs de vecteurs à divergence nulle. En effet, pour un champ de vecteur $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, on a la décomposition

$$F = G + \pi_L(F)$$

avec $G := F-\pi_L(F)$ et la propriété $\pi_L^2=\pi_L$. De plus, par définition, on a

$$\operatorname{div}(G) = \operatorname{div}(F) - \operatorname{div}(\pi_L F) = 0$$

ce qui nous permet de décomposer un champ de vecteur F comme la somme d'un champ de vecteur à divergence nulle G et d'un champ de vecteur de type « gradient » $\pi_L(F)$ (relatif à A).

Remarque 7.5. — Il est plus naturel d'écrire les choses en termes de métrique perturbée. Soit $B := B(x)$ une application à valeurs matricielles vérifiant une condition d'ellipticité et définissons $A := B^*B$. On peut alors définir les opérateurs de gradient et de divergence relatifs à B : $\nabla_B := B\nabla$ et $\operatorname{div}_B := \operatorname{div} B^*$, de sorte que $\operatorname{div}_B\nabla_B = -L_A$. Le projecteur de Leray $\pi_L := \nabla_B L_A^{-1}\operatorname{div}_B$ permet alors de décomposer un champ de vecteur, comme la somme d'un champ de vecteur à divergence nulle (div_B) et d'un champ de vecteur de type gradient (∇_B).

Un tel choix d'application B correspond à une structure Riemannienne (éventuellement non régulière) sur $\mathbb{R}^n$. En effet, il existe une équivalence entre les deux points de vue : perturber l'opérateur Laplacien par une telle application B et perturber la métrique Riemannienne sur l'espace Euclidien de manière quasi-isométrique (pour plus de détails, voir [6] et [14, Section 4]).

En définissant la transformée de Riesz $R_L := \nabla L^{-\frac{1}{2}}$, on observe que

$$\pi_L = AR_L\left(R_{L^*}\right)^*.$$

Donc le projecteur de Leray π_L est la composition de deux opérateurs singuliers non-intégraux. Sous les hypothèses précédentes, [9] montre que les transformées de Riesz R_L et R_{L^*} vérifient les estimations à poids optimales suivantes : pour tout $p\in(1,\infty)$ et tout poids $\omega\in A_p$ alors

$$\|R_L\|_{L^p_\omega\to L^p_\omega} + \|R_{L^*}\|_{L^p_\omega\to L^p_\omega} \lesssim [\omega]_{A_p}^{\max\{1,1/(p-1)\}}.$$

Par dualité (avec le poids dual $\sigma := \omega^{1-p'}$), on en déduit que

$$\begin{aligned}\| (R_{L^*})^* \|_{L^p_\omega \to L^p_\omega} = \|R_{L^*}\|_{L^{p'}_\sigma \to L^{p'}_\sigma} &\lesssim [\omega^{1-p'}]_{A_{p'}}^{\max\{1,1/(p'-1)\}} \\ &\lesssim [\omega]_{A_p}^{(p'-1)\max\{1,1/(p'-1)\}} \lesssim [\omega]_{A_p}^{\max\{1,1/(p-1)\}}.\end{aligned}$$

En composant ces deux estimations, on obtient

$$\|\pi_L\|_{L^p_\omega \to L^p_\omega} \lesssim [\omega]_{A_p}^{2\max\{1,1/(p-1)\}}.$$

La transformée de Riesz est un opérateur qui vérifie $R_L(1) = 0$ donc en suivant la « philosophie » de la section 4 (la fin sur la composition d'opérateurs de Calderón–Zygmund), on doit s'attendre à pouvoir faire intéragir cette cancellation et obtenir de meilleures estimations pour le projecteur de Leray, en tant que composition de deux opérateurs singuliers. La proposition suivante montre en effet que même si les transformées de Riesz ne sont pas des opérateurs de Calderón–Zygmund, la composée π_L vérifie bien de meilleures estimations à poids, de manière analogue à la composition de deux opérateurs de Calderón–Zygmund vérifiant la condition $T(1) = 0$ (voir la fin de la section 4) :

Proposition 7.6. — *Sous les hypothèses précédentes, pour tout champ de vecteurs $F, G \in L^2$ alors il existe une collection éparse $\mathcal{S}$ telle que*

$$|\langle \pi_L(F), G\rangle| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}} \left(\fint_Q |F|\,\mathrm{d}x\right)\left(\fint_Q |G|\,\mathrm{d}x\right)|Q|.$$

En conséquence, pour tout $p \in (1,\infty)$ et poids $\omega \in A_p$, on a

$$\|\pi_L\|_{L^p_\omega \to L^p_\omega} \lesssim_\eta [\omega]_{A_p}^{\max\{1,1/(p-1)\}}.$$

et π_L est de type faible L^1.

Remarque 7.7. — En appliquant le Théorème 6.12, on obtient aussi des estimations du projecteur de Leray dans des espaces de Hardy à poids.

Dans le cas classique où $A = \mathrm{Id}$ alors L est le Laplacien Euclidien et il est bien connu que le projecteur de Leray π_L est un multiplicateur de Fourier vérifiant les conditions de Mikhlin et donc est en particulier un opérateur de Calderón–Zygmund. Ici, on étend les différentes estimations (type faible L^1 et estimations L^p à poids), dans le cas où π_L n'est pas un opérateur de Calderón–Zygmund.

Démonstration. — On utilise une formule de reproduction de Calderón, pour obtenir pour tout champ de vecteur $F, G \in L^2$

$$\begin{aligned}\langle \pi_L(F), g\rangle &= \int_0^\infty \langle \sqrt{t}(tL)^{N+1}e^{-tL}\operatorname{div}(F), \sqrt{t}(tL^*)^N e^{-tL^*}\operatorname{div}(A^*G)\rangle \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \int_0^\infty \langle tA\nabla(tL)^N e^{-tL}\operatorname{div}(F), t\nabla(tL^*)^N e^{-tL^*}\operatorname{div}(A^*G)\rangle \frac{\mathrm{d}t}{t}.\end{aligned}$$

En particulier pour le choix $N=0$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \pi_L(F), g\rangle &= \int_0^\infty \langle tA\nabla e^{-tL}\operatorname{div}(F), t\nabla e^{-tL^*}\operatorname{div}(A^*G)\rangle \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \langle tA\nabla e^{-tL}\operatorname{div}(F), t\nabla e^{-tL^*}\operatorname{div}(A^*G)\rangle \frac{\mathrm{d}t}{t}.\end{aligned}$$

Considérons alors la grille dyadique dans $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{D} := \left\{2^k\left([0,1]^n + m\right),\ k\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{Z}^n\right\},$$

ce qui permet d'écrire

$$|\langle \pi_L(F), G\rangle| \lesssim \sum_{I\in\mathcal{D}} a_I(F)a_I^*(G)|I|$$

avec les coefficients définis pour $I = 2^k\left([0,1]^n + j\right)$ par

$$a_I(F) := \left(\int_{2^{2k}}^{2^{2k+2}} \|t\nabla e^{-tL}\operatorname{div}(F)\|_{L^2(I)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac12}$$

et

$$a_I^*(G) := \left(\int_{2^{2k}}^{2^{2k+2}} \|t\nabla e^{-tL^*}\operatorname{div}(A^*G)\|_{L^2(I)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{\frac12}.$$

Il nous reste alors à vérifier la propriété principale (6.2) pour les coefficients $a_I(F)$ et $a_I^*(G)$. Étant donné que les hypothèses sur L sont symétriques et la multiplication par A^* sur les champs de vecteurs laisse invariante les normes et moyennes L^p, il nous suffit de vérifier pour $a_I(F)$.

On fixe un intervalle dyadique I_0, et on cherche à controler $\sup_{I_1\subset I_0}\operatorname{size}(\,\cdot\,, I_1)$ où

$$\operatorname{size}(F, I_1) := \left(\frac{1}{|I_1|}\sum_{I\subset I_1} |a_I(F)|^2\right)^{\frac12}.$$

Comme décrit dans [29, Lemma 4.2], cette quantité satisfait une inégalité de John–Nirenberg et on a

$$\sup_{I_1\subset I_0}\operatorname{size}(F, I_1) \lesssim \sup_{I_1\subset I_0}\widetilde{\operatorname{size}}(F, I_1) \tag{7.3}$$

avec la nouvelle quantité

$$\widetilde{\mathrm{size}}\,(F,I_1) := \frac{1}{|I_1|}\left\| \left(\sum_{I\subset I_1} |a_I(F)|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{1,\infty}(I_1)}.$$

Examinons alors la fonction carrée apparaissant dans l'expression ci-dessus : pour tout intervalle $I_1 \subset I_0$ et tout point $x \in I_1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{I\subset I_1} |a_I(F)|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I(x) \\
&\quad = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ 2^k \leqslant |I_1|}} \sum_{\substack{j \\ j2^k \in I_1}} \int_{2^{2k}}^{2^{2k+2}} \|t\nabla e^{-tL} \operatorname{div}(F)\|^2_{L^2(I)} 2^{-kn} \mathbb{1}_{|x-j2^k|\leqslant 2^k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\quad \lesssim \iint_{\substack{y,t \\ |x-y|\lesssim \sqrt{t} \lesssim \ell_{I_1}}} \left|t\nabla e^{-tL}\operatorname{div}(F)(y)\right|^2 \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{1+n/2}}.
\end{aligned}$$

Donc pour une certaine constante numérique κ, on en déduit que

$$\left(\sum_{I\subset I_1} |a_I(F)|^2 |I|^{-1} \mathbb{1}_I \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \mathcal{C}_{\kappa,I_1}(F)$$

où $\mathcal{C}_{\kappa,I_1}$ est la fonction carré conique tronquée, définie par

$$\mathcal{C}_{\kappa,I_1}(F)(x) := \left(\iint_{\substack{|x-y|\leqslant\kappa\sqrt{t} \\ \sqrt{t}\leqslant \kappa\ell_{I_1}}} \left|t\nabla e^{-tL}\operatorname{div}(F)(y)\right|^2 \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{1+n/2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ici, ℓ_{I_1} est la longueur du cube I_1. Notons aussi $\mathcal{C}_\kappa := \mathcal{C}_{\kappa,\mathbb{R}^n}$ la fonction conique complète.

En utilisant le lemme 7.8, on en déduit que la fonction carré conique tronquée $\mathcal{C}_{\kappa,J}$ vérifie l'estimation de type faible suivante :

$$\frac{1}{|J|}\, \|\mathcal{C}_{\kappa,J}(F)\|_{L^{1,\infty}(J)} \lesssim_\kappa \sum_{\ell\geqslant 0} 2^{-\ell N} \left(\fint_{2^\ell J} |F(y)|\,\mathrm{d}y \right),$$

où N est un entier fixé (aussi grand que l'on veut). On obtient donc l'estimation suivante : pour tout cube dyadique I_1,

$$\widetilde{\mathrm{size}}\,(F,I_1) \lesssim \sum_{\ell\geqslant 0} 2^{-\ell N} \left(\fint_{2^\ell I_1} |F(y)|\,\mathrm{d}y \right) \lesssim \left(\frac{1}{|I_1|} \int |F(y)| \chi_{I_1}(y)^M \,\mathrm{d}y \right).$$

De (7.3), on conclut que

$$\sup_{I_1\subset I_0} \widetilde{\mathrm{size}}\,(F,I_1) \lesssim \sup_{I_1\subset I_0} \left(\frac{1}{|I_1|} \int |F(y)| \chi_{I_1}(y)^M \,\mathrm{d}y \right),$$

qui correspond à (6.2). On peut donc appliquer les résultats de la section précédente, théorèmes 6.3 et 6.12. □

Lemme 7.8. — *La fonction carrée conique tronquée $\mathcal{C}_{\kappa,J}$ vérifie l'estimation de type faible suivante :*

$$\frac{1}{|J|}\left\|\mathcal{C}_{\kappa,J}(F)\right\|_{L^{1,\infty}(J)} \lesssim_\kappa \sum_{\ell\geqslant 0} 2^{-\ell N}\left(\fint_{2^\ell J}|F(y)|\,\mathrm{d}y\right).$$

Démonstration. — On rappelle la définition de la fonction conique

$$\mathcal{C}_{\kappa,J}(F)(x) := \left(\iint_{\substack{|x-y|\leqslant\kappa\sqrt{t}\\ \sqrt{t}\leqslant\kappa\ell_J}}\left|t\nabla e^{-tL}\operatorname{div}(F)(y)\right|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{1+n/2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En suivant [5] (ou [4, Section 7.3] dans un cadre géométrique), on introduit aussi la fonction maximale non-tangentielle

$$\mathcal{M}^{max}_{\kappa,J}(F)(x) := \sup_{\substack{|x-y|\leqslant\kappa\sqrt{t}\\ \sqrt{t}\leqslant\kappa\ell_J}}\left|\sqrt{t}e^{-tL}\operatorname{div}(F)(y)\right|.$$

Alors par [5, Lemma 9] (ou [4, Section 7.3] dans un cadre géométrique), la fonction carré conique satisfait une estimation aux « bons-λ » par rapport à la fonction maximale non-tangentielle. Il est bien connu qu'une telle inégalité permet alors d'avoir l'estimation suivante :

$$\left\|\mathcal{C}_{\kappa,J}(F)\right\|_{L^{1,\infty}(J)} \lesssim \left\|\mathcal{M}^{max}_{\kappa,J}(F)\right\|_{L^{1,\infty}(J)}.$$

En utilisant les hypothèses faites sur le semi-groupe, il est maintenant facile de contrôler ponctuellement la fonction maximale non-tangentielle : en effet pour tout $x\in J$ et tout (y,t) tel que $|x-y|\leqslant\sqrt{t}\leqslant\kappa\ell_J$ alors, on a

$$\left|\sqrt{t}e^{-tL}\operatorname{div}(F)(y)\right| \lesssim_\kappa \mathcal{M}\left[\left(1+\frac{d(\cdot,J)}{r(J)}\right)^{-N}F\right](x)$$

où $\mathcal{M}$ est la fonction maximale de Hardy–Littlewood. En utilisant le type L^1-faible de $\mathcal{M}$, on en déduit donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{|J|}\left\|\mathcal{M}^{max}_{\kappa,J}(F)\right\|_{L^{1,\infty}(J)} &\lesssim \frac{1}{|J|}\left\|\mathcal{M}\left[\left(1+\frac{d(\cdot,J)}{r(J)}\right)^{-N}F\right]\right\|_{L^{1,\infty}(J)}\\ &\lesssim \sum_{\ell\geqslant 0}2^{-\ell N}\left(\fint_{2^\ell J}|F(y)|\,\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

où N est un entier aussi grand que l'on souhaite (pouvant changer d'une ligne à une autre). □

8. Espace BMO, mesures de Carleson

Dans [3], les auteurs présentent le lien entre les « size », comme ils sont utilisés dans l'analyse de temps-fréquence, l'espace BMO, et les mesures de Carleson. Les mesures de Carleson sont apparues pour la première fois dans la décomposition en couronnes de [11], et elles ont joué un rôle important aussi dans le problème de racine carrée de Kato.

Le « size » est d'habitude un opérateur maximal défini sur des arbres (structure dans le plan de temps-fréquence). Mais si l'information fréquentielle depend seulement de la longueur de l'intervalle spatial (dans ce cas-là on dit qu'on a une collection de rang 0), le « size » devient un sup après des collections d'intervalles, comme défini au début de section 6. En utilisant des ondelettes de Haar, on peut voir que la norme BMO et le « size » sont vraiment la même chose. Dans ce même cadre, nous allons montrer deux autres propriétés : l'existence d'une décomposition atomique éparse ainsi que la domination éparse par des oscillations.

8.1. Une décomposition atomique éparse pour des fonctions de l'espace de Hardy

Dans cette section, on montre l'existence d'une décomposition atomique éparse, dans le cadre spécial des espaces de Hardy associés aux fonctions des Haar. On considère donc (h_I) le système de fonctions de Haar (normalisées dans L^2) adapté à la collection dyadique $\mathbb{D}^0$. Pour un exposant $p \in (0,1]$ l'espace de Hardy H^p est associé à la quasi-norme L^p de la fonction carrée

$$S(f) := \left(\sum_{I \in \mathbb{D}^0} |\langle f, h_I \rangle|^2 \frac{1_I}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8.1}$$

Nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 8.1. — *Soit f une fonction appartenant à l'espace de Hardy H^p, qu'on peut écrire comme une combinaison linéaire finie des fonctions de Haar :*

$$f(x) = \sum_{I \in \mathcal{I}} \langle f, h_I \rangle h_I(x),$$

où $\mathcal{I}$ est une collection finie des intervalles dyadiques.[2] *Alors, il existe une collection $\mathcal{S}$ d'intervalles, une collection de coefficients $(c_Q)_{Q \in \mathcal{S}}$ et des atomes $(a_Q)_Q$ associés à $\mathcal{S}$ tels que :*

[2] On rappelle que ce sous-espace de H^p est dense dans H^p.

- *On a une décomposition atomique de*

$$f = \sum_{Q \in \mathcal{S}} c_Q a_Q$$

- *$\mathcal{S}$ est une collection éparse*
- *la décomposition atomique réalise la norme H^p, c'est-à-dire que*

$$\sum_{Q \in \mathcal{S}} c_Q^p \lesssim \|f\|_{H^p}^p.$$

On rappelle tout d'abord qu'un atome a_Q est une fonction de $L^2(Q)$, telle que $\int_Q a_Q \mathrm{d}x = 0$, et avec la normalisation

$$\|a_Q\|_2 \leqslant |Q|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}.$$

La nouveauté de ce résultat est d'obtenir une décomposition atomique qui est simultanément supportée sur une collection éparse. La décomposition atomique présentée en [3] a des propriétés similaires, mais les supports des atomes ne forment pas une collection éparse.

Démonstration. — Pour simplicité, on suppose que $\|Sf\|_p = 1$ et on veut écrire f comme

$$f(x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}} c_Q a_Q(x), \quad \text{où} \quad \|a_Q\|_2 \leqslant |Q|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \text{ et } \sum_{Q \in \mathcal{S}} c_Q^p \lesssim 1.$$

On choisi r un nombre réel telle que $0 < r < p$, et on veut construire (d'une manière itérative) une collection éparse $\mathcal{S}$ d'intervalles dyadique satisfaisant les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{S} = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathcal{S}_k$.
(ii) Pour chaque $Q_0 \in \mathcal{S}_k$, il existe une collection $\mathcal{I}_{Q_0} \subseteq \mathcal{I}$ associée à l'intervalle Q_0, ainsi qu'une collection $ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$ formée par des descendants directs de Q_0.
(iii) D'ailleurs, $\mathcal{S}_{k+1} := \bigcup_{Q_0 \in \mathcal{S}_k} ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$.
(iv) La condition éparse est équivalente à $\sum_{Q \in ch_{\mathcal{S}}(Q_0)} |Q| \leqslant \frac{1}{2}|Q_0|$.

Comme avant, on initialise $\mathcal{I}_{Stock} := \mathcal{I}$, et on défini $\mathcal{S}_0$ comme la collection des intervalles maximaux :

$$\mathcal{S}_0 := \{Q_0 : Q_0 \in \mathcal{I} \text{ intervalle maximal}\}.$$

Pour chaque $Q_0 \in \mathcal{S}_0$, la collection $\mathcal{I}_{Q_0}$ se constitue par les intervalles $I' \in \mathcal{I}_{Stock}$ avec la propriété

$$\frac{1}{|I'|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_{Stock}\\ I\subseteq I'}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r \leqslant C\cdot\frac{1}{|Q_0|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_{Stock}\\ I\subseteq Q_0}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r.$$

De l'autre côté, la collection des descendants $ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$ se compose des intervalles dyadiques maximaux $Q \in \mathcal{I}_{Stock}$, avec $Q \subseteq Q_0$, pour lesquels

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_{Stock}\\ I\subseteq Q}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r > C\cdot\frac{1}{|Q_0|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_{Stock}\\ I\subseteq Q_0}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r.$$

Ainsi les intervalles des $ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$ sont deux à deux disjoints et ils sont contenus dans l'ensemble

$$\left\{x : \mathcal{M}_r\left(S_{Q_0}f\right) > C\frac{1}{|Q_0|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_{Stock}\\ I\subseteq Q_0}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r\right\}.$$

Cela permet de montrer la condition éparse :

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in ch_{\mathcal{S}}(Q_0)}|Q| &\leqslant \Bigg|\Bigg\{x : \mathcal{M}_r\left(\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_{Stock}\\ I\subseteq Q_0}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &\qquad\qquad > C\frac{1}{|Q_0|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_{Stock}\\ I\subseteq Q_0}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r\Bigg\}\Bigg|\\ &\lesssim \left(C\frac{1}{|Q_0|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_{Stock}\\ I\subseteq Q_0}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r\right)^{-r}\\ &\qquad\times\left\|\mathcal{M}_r\left(\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_{Stock}\\ I\subseteq Q_0}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right\|_{r,\infty}^r\\ &\lesssim C^{-r}|Q_0|,\end{aligned}$$

qui est borné par $\frac{1}{2}|Q_0|$ pour une valeur de C assez grande.

Après avoir défini $\mathcal{S}_0$ et, pour chaque $Q_0 \in \mathcal{S}_0$, les collections associées $\mathcal{I}_{Q_0}$ et $ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$, on réinitialise $\mathcal{I}_{Stock} := \mathcal{I}_{Stock} \setminus \bigcup_{Q_0 \in \mathcal{S}_0} \mathcal{I}_Q$.

La procédure continue par itération, mais seulement pour un nombre fini de pas, car la collection initiale des intervalles $\mathcal{I}$ est finie.

À la fin, on a une collection éparse $\mathcal{S}$ et une décomposition de la fonction f :

$$f(x) := \sum_{Q \in \mathcal{S}} \sum_{I \in \mathcal{I}_Q} \langle f, h_I \rangle h_I(x) = \sum_{Q \in \mathcal{S}} c_Q a_Q(x),$$

où

$$c_Q := |Q|^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{2}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}_Q} |\langle f, h_I \rangle|^2 \frac{\mathbf{1}_I}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2$$

et

$$a_Q := c_Q^{-1} \sum_{I \in \mathcal{I}_Q} \langle f, h_I \rangle h_I(x).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que chaque a_Q est un atome dans H^p, dans le sens de [3] (la propriété de cancellation de l'atome a_Q est impliquée par le fait que l'atome est engendré par des fonctions de Haar h_I avec $I \subset Q$). Il reste à vérifier que $\sum_{Q \in \mathcal{S}} c_Q^p \lesssim 1$. On remarque que

$$\begin{aligned}\sum_{Q \in \mathcal{S}} c_Q^p &= \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{2}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}_Q} |\langle f, h_I \rangle|^2 \frac{\mathbf{1}_I}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \right)^p \cdot |Q| \\ &\lesssim \sum_{Q \in \mathcal{S}} \left(\sup_{\tilde{Q} \in \mathcal{I}_Q} \frac{1}{|\tilde{Q}|^{\frac{1}{2}}} \left\| \left(\sum_{I \in \mathcal{I}_Q,\, I \subseteq \tilde{Q}} |\langle f, h_I \rangle|^2 \frac{\mathbf{1}_I}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \right)^p \cdot |Q|,\end{aligned}$$

car $\mathcal{I}_Q$ contient Q. Grâce à l'inégalité de John–Nirenberg, les moyennes L^2 et L^r de l'oscillation sont comparables :

$$\begin{aligned}&\sup_{\tilde{Q} \in \mathcal{I}_Q} \frac{1}{|\tilde{Q}|^{\frac{1}{2}}} \left\| \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}_Q \\ I \subseteq \tilde{Q}}} |\langle f, h_I \rangle|^2 \frac{\mathbf{1}_I}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2 \\ &\qquad\qquad \sim_r \sup_{\tilde{Q} \in \mathcal{I}_Q} \frac{1}{|\tilde{Q}|^{\frac{1}{r}}} \left\| \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{I}_Q \\ I \subseteq \tilde{Q}}} |\langle f, h_I \rangle|^2 \frac{\mathbf{1}_I}{|I|} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_r .\end{aligned}$$

Maintenant on utilise les propriétés des collections construites par le temps d'arrêt : chaque intervalle $I' \in \mathcal{J}_Q$ est tel que

$$\frac{1}{|I'|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{J}^*_{Stock}\\ I\subseteq I'}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r \leqslant C\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{J}^*_{Stock}\\ I\subseteq Q}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r,$$

où par $\mathcal{J}^*_{Stock}$ on dénote la collection des intervalles disponibles au moment du temps d'arrêt où $\mathcal{J}_Q$ a été construit. En particulier, $\mathcal{J}_Q$ est contenue dans $\in \mathcal{J}^*_{Stock}$ et en conséquence, on a

$$\sup_{\tilde{Q}\in\mathcal{J}_Q}\frac{1}{|\tilde{Q}|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{J}_Q\\ I\subseteq \tilde{Q}}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r \leqslant C\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathbb{D}^0\\ I\subseteq Q}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r.$$

Dans l'expression ci-dessus, $\mathbb{D}^0$ dénote la collection de tous intervalles dyadiques, et on rappelle la notation $Sf(x)$ pour la fonction carrée « totale » associée :

$$Sf(x) := \left(\sum_{I\in\mathbb{D}^0}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, le caractère épars de la collection $\mathcal{S}$ implique, pour tout $Q \in \mathcal{S}$, l'existence d'un sous-ensemble majeur $E(Q) \subseteq Q$ telle que les ensembles $\{E(Q)\}_{Q\in\mathcal{S}}$ sont deux par deux disjoints. En observant que

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{J}_Q\\ I\subseteq Q}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r \lesssim \inf_{y\in E(Q)}\mathcal{M}_r(Sf)(y),$$

on obtient l'estimation

$$\begin{aligned}\sum_{Q\in\mathcal{S}}c_Q^p &\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\inf_{y\in E(Q)}\mathcal{M}_r(Sf)(y)\right)^p\cdot 2|E(Q)| \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}}|\mathcal{M}_r(Sf)(x)|^p\mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}}|Sf(x)|^p\mathrm{d}x \lesssim 1.\end{aligned}$$

Ci-dessus on utilise la bornitude L^p de la fonction maximale $\mathcal{M}_r$, qui est une conséquence de la condition $r < p$. $\square$

Remarque 8.2. — On remarque que les atomes contiennent l'information des paquets d'onde de la collection $\mathcal{I}_Q$, qui a été choisie telle que

$$\frac{1}{|Q|^{\frac{1}{2}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_Q\\ I\subseteq Q}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_2 \sim \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{r}}}\left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_Q\\ I\subseteq Q}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_r$$
$$\sim \left\|\left(\sum_{\substack{I\in\mathcal{I}_Q\\ I\subseteq Q}}|\langle f,h_I\rangle|^2\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathrm{BMO}}.$$

8.2. Une certain regard sur la domination éparse par des oscillations

On reste toujours dans le cadre de fonctions de Haar, et on considère un multiplicateur de Haar associe à une collection finie des intervalles $\mathcal{I}\subset\mathbb{D}^0$:

$$Tf(x) := \sum_{I\in\mathcal{I}}\epsilon_I\langle f,h_I\rangle h_I(x),$$

et sa forme bilinéaire $\Lambda_{\mathcal{I}}(f,g) := \sum_{I\in\mathcal{I}}\epsilon_I\langle f,h_I\rangle\langle g,h_I\rangle$. Ici les coefficients a_I sont uniformément bornes : $|\epsilon_I|\lesssim 1$ pour tous $I\in\mathcal{I}$.

Proposition 8.3. — *Si T est un multiplicateur de Haar comme défini ci-dessus, et si f et g sont deux fonctions dans L^2, alors il existe une collection éparse $\mathcal{S}$, dépendant de f et g, telle que*

$$|\Lambda_{\mathcal{I}}(f,g)| \lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S}}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|f(x)-\fint_Q f\right|\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|g(x)-\fint_Q g\right|\mathrm{d}x\right)\cdot|Q|.$$

Remarque 8.4. — Dans le cas particulier où l'opérateur coïncide à l'identité, on obtient pour deux fonctions $f,g\in L^2$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}}\mathcal{M}^{\#}f(x)\cdot\mathcal{M}^{\#}g(x)\mathrm{d}x.$$

Ceci améliore l'inégalité de dualité [31, (16), p. 146] et correspond à une version « polarisée » de l'inégalité L^2 de Fefferman–Stein [31, Corollary 1, p. 154].

Démonstration. — On commence par deux observations :

(i) si $F_Q(x) := \left(f(x) - \fint_Q f\right) \cdot \mathbf{1}_Q(x)$, alors

$$\left(\sum_{I\subset Q} |\langle f, h_I\rangle|^2 \cdot \frac{\mathbf{1}_I(x)}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{I\subset Q} |\langle F_Q, h_I\rangle|^2 \cdot \frac{\mathbf{1}_I(x)}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Si f admet une représentation dans la base de Haar (i.e. $f = \sum_{I\in\mathbb{D}^0} \langle f, h_I\rangle h_I$), alors pour tout intervalle dyadique Q, on a

$$\sum_{\substack{I\in\mathbb{D}^0\\ I\subset Q}} |\langle f, h_I\rangle|^2 = \left\| \left(\sum_{\substack{I\in\mathbb{D}^0\\ I\subset Q}} |\langle f, h_I\rangle|^2 \cdot \frac{\mathbf{1}_I(x)}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 = \int_Q \left| f(x) - \fint_Q f\right|^2 \mathrm{d}x.$$

La preuve de la proposition 8.3 est toujours fondée sur un temps d'arrêt, mais avec des conditions un peu différentes. On initialise $\mathcal{I}_{Stock} := \mathcal{I}$ et

$$\mathcal{S}_0 := \{Q_0 \in \mathcal{I}_{Stock} : Q_0 \text{ maximal par rapport à l'inclusion}\}.$$

Pour tout $Q_0 \in \mathcal{S}_0$, la collection $\mathcal{I}_{Q_0}$ est formée d'intervalles dyadiques $I' \in \mathcal{I}_{Stock}$ contenus dans Q_0, telle que :

$$\frac{1}{|I'|}\left\| \left(\sum_{I\subset I'} |\langle f, h_I\rangle|^2 \cdot \frac{\mathbf{1}_I(x)}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{1,\infty} \leqslant C \cdot \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} \left| f(x) - \fint_{Q_0} f\right| \mathrm{d}x$$

$$\text{et}\quad \frac{1}{|I'|}\left\| \left(\sum_{I\subset I'} |\langle g, h_I\rangle|^2 \cdot \frac{\mathbf{1}_I(x)}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{1,\infty} \leqslant C \cdot \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} \left| g(x) - \fint_{Q_0} g\right| \mathrm{d}x$$

On note que $Q_0 \in \mathcal{I}_{Q_0}$: par l'observation (i), l'expression à gauche est $\|SF_{Q_0}\|_{1,\infty}$, qui est contrôlée par $\|F_{Q_0}\|_1$. La même observation est vraie pour la fonction g. On rappelle que S est la fonction carrée complète introduit en (8.1).

Les descendants de Q_0 sont les sous-intervalles maximaux pour lesquels la condition du temps d'arrêt n'est plus vraie. C'est à dire, $ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$ est formé par des intervalles de $\mathcal{I}_{Stock}$, contenus dans Q_0, tels que

$$\frac{1}{|Q|}\left\| \left(\sum_{\substack{I\subset Q\\ I\in\mathcal{I}_{Stock}}} |\langle f, h_I\rangle|^2 \cdot \frac{\mathbf{1}_I(x)}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{1,\infty} > C \cdot \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} \left| f(x) - \fint_{Q_0} f\right| \mathrm{d}x$$

ou

$$\frac{1}{|Q|}\left\|\left(\sum_{\substack{I\subset Q\\ I\in\mathcal{I}_{Stock}}}|\langle g,h_I\rangle|^2\cdot\frac{\mathbf{1}_I(x)}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{1,\infty} > C\cdot\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}\left|g(x)-\fint_{Q_0} g\right|\mathrm{d}x.$$

Puis on réinitialise $\mathcal{I}_{Stock} := \mathcal{I}_{Stock}\setminus\bigcup_{Q_0\in\mathcal{S}}\mathcal{I}_{Q_0}$ et on redémarre la procédure en choisissant d'une manière similaire les collections $\mathcal{I}_Q$ et $ch_{\mathcal{S}}(Q)$ pour tout $Q\in ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$. À la fin on obtient $\mathcal{S}:=\cup_{k\geqslant 0}\mathcal{S}_k$.

Il reste à montrer la propriété éparse de la collection $\mathcal{S}$, *i.e.* pour chaque $Q_0\in\mathcal{S}$,

$$\sum_{Q\in ch_{\mathcal{S}(Q_0)}}|Q|\leqslant\frac{1}{2}|Q_0|.$$

La définition de la collection $ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$ garantit que les intervalles $Q\in ch_{\mathcal{S}}(Q_0)$ sont deux à deux disjoints et qu'ils sont contenus dans l'ensemble (8.2)

$$\left\{\mathcal{M}_{\mathfrak{w}}\left(\left(\sum_{I\subset Q_0}|\langle F_{Q_0},h_I\rangle|^2\cdot\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right)(x) > C\cdot\frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|f(x)-\fint_{Q_0} f|\mathrm{d}x\right\},$$

où, bien sûr, dans l'ensemble définit similairement par g. Ici l'opérateur $\mathcal{M}_{\mathfrak{w}}$ est la fonction maximale faible définie par

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{w}}(f)(x):=\sup_{B\ni x}\frac{1}{|B|}\left\|f\cdot\mathbf{1}_B\right\|_{1,\infty},$$

où on considère le sup après tout boules contenant x. La fonction maximale faible $\mathcal{M}_{\mathfrak{w}}$ n'agit pas de $L^{1,\infty}$ dans $L^{1,\infty}$ ([30]), mais sa composition avec un opérateur de Calderón–Zygmund agit de L^1 dans $L^{1,\infty}$ ([10]).

Par conséquent, la mesure de l'ensemble de (8.2) est majorée par

$$\left(C\cdot\frac{1}{|Q_0|}\|F_{Q_0}\|_1\right)^{-1}\left\|M_{\mathfrak{w}}\left(\sum_{I\subset Q_0}|\langle F_{Q_0},h_I\rangle|^2\cdot\frac{\mathbf{1}_I}{|I|}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{1,\infty}\lesssim C^{-1}|Q_0|,$$

qui entraine la propriété éparse, en choisissant une constante C assez grande.

À la fin, pour tout $Q\in\mathcal{S}$, on a une sous-collection $\mathcal{I}_Q$ des intervalles dyadiques et $\mathcal{I}:=\bigcup_{Q\in\mathcal{S}}\mathcal{I}_Q$. Ainsi

$$\Lambda_{\mathcal{I}}(f,g)=\sum_{Q\in\mathcal{S}}\Lambda_{\mathcal{I}_Q}(f,g).$$

L'estimation locale pour la forme bilinéaire, ainsi que l'inégalité de John–Nirenberg, impliquée par proposition 6.9 nous donne

$$\begin{aligned}|\Lambda_{\mathcal{I}_Q}(f,g)| \leqslant \sup_{I\in\mathcal{I}_Q}|\epsilon_I| \sup_{I'\in\mathcal{I}_Q}\frac{1}{|I'|}\left\|\left(\sum_{\substack{I\subseteq I'\\ I\in\mathcal{I}_Q}}\frac{|\langle f,\phi_I\rangle|^2}{|I|}\mathbf{1}_I\right)^{\frac12}\right\|_{1,\infty} \\ \cdot \sup_{I'\in\mathcal{I}_Q}\frac{1}{|I'|}\left\|\left(\sum_{\substack{I\subseteq I'\\ I\in\mathcal{I}_Q}}\frac{|\langle g,\phi_I\rangle|^2}{|I|}\mathbf{1}_I\right)^{\frac12}\right\|_{1,\infty} \cdot |Q| \\ \lesssim \sup_{I\in\mathcal{I}_Q}|\epsilon_I|\cdot\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|f(x)-⨍_Q f\right|\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_Q\left|g(x)-⨍_Q g\right|\mathrm{d}x\right),\end{aligned}$$

ce qui conclut l'estimation éparse. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Auscher, « On necessary and sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^n$ and related estimates », *Mem. Am. Math. Soc.* **186** (2007), n° 871, p. xviii+75.

[2] ———, « On the Calderón-Zygmund lemma for Sobolev functions », `http://arxiv.org/abs/0810.5029`, 2008.

[3] P. Auscher, S. Hofmann, C. Muscalu, T. Tao & C. Thiele, « Carleson measures, trees, extrapolation, and $T(b)$ theorems », *Publ. Mat.* **46** (2002), n° 2, p. 257-325.

[4] P. Auscher, A. McIntosh & E. Russ, « Hardy spaces of differential forms on Riemannian manifolds », *J. Geom. Anal.* **18** (2008), n° 1, p. 192-248.

[5] P. Auscher & E. Russ, « Hardy spaces and divergence operators on strongly Lipschitz domains of $\mathbb{R}^n$ », *J. Funct. Anal.* **201** (2003), n° 1, p. 148-184.

[6] G. Barbatis, « Stability of weighted Laplace-Beltrami operators under L^p-perturbation of the Riemannian metric », *J. Anal. Math.* **68** (1996), p. 253-276.

[7] C. Benea, F. Bernicot & T. Luque, « Sparse bilinear forms for Bochner Riesz multipliers and applications », *Trans. Lond. Math. Soc.* **4** (2017), n° 1, p. 110-128.

[8] C. Benea & C. Muscalu, « Multiple vector-valued inequalities via the helicoidal method », *Anal. PDE* **9** (2016), n° 8, p. 1931-1988.

[9] F. Bernicot, D. Frey & S. Petermichl, « Sharp weighted norm estimates beyond Calderón-Zygmund theory », *Anal. PDE* **9** (2016), n° 5, p. 1079-1113.

[10] J. Bruna & B. Korenblum, « A note on Calderón-Zygmund singular integral convolution operators », *Bull. Am. Math. Soc.* **16** (1987), n° 2, p. 271-273.

[11] L. Carleson, « Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem », *Ann. Math.* **76** (1962), p. 547-559.

[12] R. R. Coifman & Y. Meyer, *Wavelets, Calderón-Zygmund Operators and Multilinear Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 48, Cambridge University Press, 1997, xix+314 pages.

[13] J. M. Conde-Alonso, A. Culiuc, F. Di Plinio & Y. Ou, « A sparse domination principle for rough singular integrals », *Anal. PDE* **10** (2017), n° 5, p. 1255-1284.

[14] T. Coulhon & N. Dungey, « Riesz transform and perturbation », *J. Geom. Anal.* **17** (2007), n° 2, p. 213-226.

[15] D. Cruz-Uribe, J. M. Martell & C. Pérez, « Sharp weighted estimates for classical operators », *Adv. Math.* **229** (2012), n° 1, p. 408-441.

[16] A. Culiuc, F. Di Plinio & Y. Ou, « Domination of multilinear singular integrals by positive sparse forms », `http://arxiv.org/abs/1603.05317`, to appear in *J. Lond. Math. Soc.*, 2016.

[17] M. Lacey, « An elementary proof of the A_2 Bound », *Isr. J. Math.* **217** (2017), p. 181-195.

[18] M.-Y. Lee & C.-C. Lin, « The molecular characterization of weighted Hardy spaces », *J. Funct. Anal.* **188** (2002), n° 2, p. 442-460.

[19] M.-Y. Lee, C.-C. Lin & Y.-C. Lin, « A wavelet characterization for the dual of weighted Hardy spaces », *Proc. Am. Math. Soc.* **137** (2009), n° 12, p. 4219-4225.

[20] M.-Y. Lee, C.-C. Lin & W.-C. Yang, « H^p_w boundedness of Riesz transforms », *J. Math. Anal. Appl.* **301** (2005), n° 2, p. 394-400.

[21] A. K. Lerner, « A pointwise estimate for the local sharp maximal function with applications to singular integrals », *Bull. Lond. Math. Soc.* **42** (2010), n° 5, p. 843-856.

[22] ———, « Sharp weighted norm inequalities for Littlewood-Paley operators and singular integrals », *Adv. Math.* **226** (2011), n° 5, p. 3912-3926.

[23] ———, « On an estimate of Calderón-Zygmund operators by dyadic positive operators », *J. Anal. Math.* **121** (2013), p. 141-161.

[24] ———, « A simple proof of the A_2 conjecture », *Int. Math. Res. Not.* **14** (2013), p. 3159-3170.

[25] ———, « On pointwise estimates involving sparse operators », *New York J. Math.* **22** (2016), p. 341-349.

[26] A. K. Lerner & F. Nazarov, « Intuitive dyadic calculus: the basics », `http://arxiv.org/abs/1508.05639`, to appear in *Expo. Math.*, 2015.

[27] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs. II*, Actualités Mathématiques., Hermann, 1990, Opérateurs de Calderón-Zygmund., i-xii and 217-384 pages.

[28] C. Muscalu & W. Schlag, *Classical and Multilinear Harmonic Analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 137, Cambridge University Press, 2013, xviii+370 pages.

[29] C. Muscalu, T. Tao & C. Thiele, « L^p estimates for the biest. I. The Walsh case », *Math. Ann.* **329** (2004), n° 3, p. 401-426.

[30] C. J. Neugebauer, « Iterations of Hardy-Littlewood maximal functions », *Proc. Am. Math. Soc.* **101** (1987), n° 2, p. 272-276.

[31] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Mathematical Series, vol. 43, Princeton University Press, 1993, With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III, xiv+695 pages.

Manuscrit reçu le 27 février 2017,
révisé le 25 juillet 2017,
accepté le 7 novembre 2017.

Cristina BENEA
CNRS - Université de Nantes
Laboratoire Jean Leray
44322 Nantes (France)
cristina.benea@univ-nantes.fr

Frédéric BERNICOT
CNRS - Université de Nantes
Laboratoire Jean Leray
44322 Nantes (France)
frederic.bernicot@univ-nantes.fr