ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Thierry BOUSCH

Quasimorphismes sur le monoïde libre, et substitutions dans les mesures invariantes

Tome 67, nº 6 (2017), p. 2651-2678.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2017__67_6_2651_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
67, 6 (2017) 2651-2678

QUASIMORPHISMES SUR LE MONOÏDE LIBRE, ET SUBSTITUTIONS DANS LES MESURES INVARIANTES

par Thierry BOUSCH

Résumé. — On montre comment un morphisme $\sigma : A^\star \to B^\star$ entre deux monoïdes libres de type fini peut transformer une mesure invariante sur $A^{\mathbb{N}}$ en une mesure invariante sur $B^{\mathbb{N}}$. L'existence de cette opération est intimement liée à un résultat de représentation des quasimorphismes homogènes sur le monoïde libre. On étudiera ses propriétés, en particulier vis-à-vis de la distance de réarrangement.

Abstract. — It will be shown how a morphism $\sigma : A^\star \to B^\star$ between two finitely generated free monoids can transform an invariant mesure on $A^{\mathbb{N}}$ into an invariant measure on $B^{\mathbb{N}}$. The existence of this operation is intimately related to a representation result for homogeneous quasimorphisms on the free monoid. Its properties will be studied, in particular with respect to the rearrangement distance.

1. Introduction

L'objectif de cet article est de traiter deux problèmes, *a priori* sans rapport.

Le premier problème est de décrire certaines fonctionnelles affines sur les mesures invariantes. De façon plus précise, considérons l'espace symbolique $X = A^{\mathbb{N}}$ muni de l'application de décalage $\lhd$, et soit $\mathcal{M}^1_\lhd(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité $\lhd$-invariantes sur X. Le formalisme thermodynamique, et l'optimisation ergodique, consistent à se donner une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, et à chercher les mesures de probabilité invariantes μ sur X qui minimisent la fonctionnelle

$$\mu \longmapsto \langle f, \mu\rangle - T.\,\mathrm{ent}(\mu)$$

où $T \geqslant 0$ est un paramètre fixé : strictement positif en thermodynamique, nul en optimisation ergodique. Comme on le sait, le formalisme thermodynamique et l'optimisation ergodique ne marchent pas très bien pour des

Mots-clés : quasimorphisme, substitution, norme de réarrangement.
Classification Mathématique (2010) : 20M50, 37B10.

fonctions f continues « générales ». Pour obtenir des résultats intéressants, on doit imposer à f un peu plus de régularité : la condition de Bowen, ou la condition de Walters qui est similaire, mais un peu plus forte et plus maniable. Ces classes englobent notamment toutes les fonctions hölderiennes $X \to \mathbb{R}$.

On note que dans ce problème, la fonction f n'intervient que par ses intégrales $\langle f, \mu \rangle$ par les mesures invariantes. En particulier, le problème reste inchangé si on ajoute à f un cobord, c'est-à-dire une fonction de la forme $g \triangleleft - g$. Ce degré de liberté est largement utilisé, aussi bien en thermodynamique qu'en optimisation ergodique, pour ramener f à une fonction « plus simple ». Serait-il possible d'aller plus loin, et de faire la théorie en se basant uniquement sur la fonctionnelle

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}^1_\triangleleft(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mu & \longmapsto & \langle f, \mu \rangle \end{array} \tag{1.1}$$

au lieu de la fonction $f : X \to \mathbb{R}$?

Cette question est d'abord motivée par une construction, dans l'article [5], d'une fonctionnelle affine continue $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{M}^1_\triangleleft(X)$, la « hauteur moyenne ». Cette fonctionnelle $\mathcal{H}$, obtenue par un passage à la limite, n'a pas de représentation explicite de la forme (1.1). On peut toutefois faire de l'optimisation ergodique sur $\mathcal{H}$, avec des méthodes un peu différentes, et tout se passe « aussi bien » que si elle était de la forme (1.1) avec f suffisamment régulière (Walters, disons).

Une autre motivation serait d'unifier certains résultats connus, en thermodynamique et en optimisation ergodique, mais dont les preuves connues diffèrent grandement selon que f est supposée Walters ou seulement Bowen ; je pense en particulier à l'unicité (et l'ergodicité) de la mesure d'équilibre (pour $T > 0$) et au principe de subordination (pour $T = 0$). Le bon cadre unificateur, à mon avis, serait de considérer toutes les fonctionnelles affines sur $\mathcal{M}^1_\triangleleft(X)$ qui sont lipschitziennes pour la *distance de réarrangement* [4]. Cela inclut toutes celles de la forme (1.1) avec f continue Bowen. En existe-t-il d'autres ? J'en suis convaincu, mais je ne sais pas le démontrer. En revanche, je donnerai dans le présent article (Corollaire 2.6) un autre résultat de représentation de ces fonctionnelles, peut-être plus important : elles s'identifient à une certaine classe de fonctions, les « quasimorphismes homogènes », sur le monoïde libre $A^\star$.

Le second problème, qui provient de l'optimisation ergodique, est de construire des familles paramétrées de mesures invariantes sur $A^{\mathbb{N}}$, similaires à (ou étendant) la famille des mesures sturmiennes sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, par une « composition infinie » de substitutions. Ce problème se décompose lui-même en deux. Premièrement, on sait faire agir une substitution sur un mot fini ou infini, mais comment faire agir une substitution sur une mesure invariante de $A^{\mathbb{N}}$? Deuxièmement, est-il possible de composer les actions d'une infinité de telles substitutions, et obtenir à la limite un objet (une mesure invariante) bien défini ? On verra que c'est possible, sous une certaine forme et avec une hypothèse très faible, grâce à une propriété de contraction de la distance de réarrangement par l'action des substitutions.

2. Les quasimorphismes homogènes sur le monoïde libre

2.1. Rappels

Quasimorphismes. Il existe une abondante littérature sur les quasimorphismes (et la cohomologie bornée), et l'article [11] fournit un bon point de départ. A l'opposé, le livre de Calegari [6] est très détaillé et pédagogique, et traite amplement de la dualité de Bavard [2], un thème dans lequel on pourrait aussi ranger le présent article.

Soit M un monoïde, noté multiplicativement et d'élément neutre $\mathbb{1}$, et E un espace vectoriel normé (réel). Une application $q : M \to E$ est appelée *quasimorphisme* s'il existe une constante $D \geqslant 0$ telle que

$$\forall\, x, y \in M \qquad \|q(xy) - q(x) - q(y)\| \leqslant D.$$

La plus petite constante D qui convient est le *défaut* du quasimorphisme. En particulier, les homomorphismes $M \to E$ sont des quasimorphismes (de défaut nul). Les fonctions bornées sont aussi, évidemment, des quasimorphismes.

Un quasimorphisme $q : M \to E$ est dit *homogène* s'il vérifie

$$\forall\, x \in M \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad q(x^n) = n\, q(x).$$

Quelques propriétés bien connues des quasimorphismes homogènes sont :

(i) $q(\mathbb{1}) = 0$;
(ii) si $r, s \in M$ sont tels que $rs = \mathbb{1}$, alors $q(r) + q(s) = 0$;
(iii) si $x, y \in M$ commutent, alors $q(xy) = q(x) + q(y)$;
(iv) si $x, y, h \in M$ sont tels que $hx = yh$, alors $q(x) = q(y)$;
(v) $q(xy) = q(yx)$ pour tous $x, y \in M$.

Si E est complet, tout quasimorphisme $q : M \to E$ peut s'écrire, d'une manière unique, comme somme d'un quasimorphisme homogène $\bar{q}$ et d'une fonction bornée. Et on a

$$\bar{q}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{q(x^n)}{n}$$

Norme de réarrangement. La norme de réarrangement [4] est une norme sur l'espace $\mathcal{M}_\triangleleft(X)$ des mesures (signées) invariantes sur le shift $X = A^\mathbb{N}$. Pour μ mesure invariante sur X, la norme de réarrangement est notée $\|\mu\|_R$; elle est plus petite que la norme de la variation totale $\|\mu\|_{TV}$. (Pour les mesures sur l'alphabet A, la norme considérée sera toujours la norme de la variation totale.)

Elle est définie comme duale de la norme de Bowen. La constante de Bowen $\mathrm{bw}(f)$ d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est la plus petite constante B, si elle existe, pour laquelle on a

$$\left| \sum_{0 \leqslant i < n} f(\triangleleft^i y) - f(\triangleleft^i x) \right| \leqslant 2B$$

quels que soient l'entier naturel n et les éléments x, y du shift dont les n premiers symboles coïncident. La norme de Bowen est alors définie comme $\mathrm{Nbw}(f) = \mathrm{bw}(f) \vee \|f\|_\infty$. Enfin, on définit la norme de réarrangement d'une mesure invariante μ comme le suprémum de $\langle f, \mu\rangle$ sur les fonctions f qui vérifient $\mathrm{Nbw}(f) \leqslant 1$ (parmi les fonctions mesurables, ou seulement les fonctions localement constantes : ça ne change rien, d'après la proposition 3.3 de [4]).

La norme de réarrangement induit sur $\mathcal{M}_\triangleleft(X)$ une distance et une topologie, la « topologie de réarrangement », qui ressemble beaucoup à la topologie $*$-faible $\sigma\big[\mathcal{M}_\triangleleft(X), C(X)\big]$. Ces deux topologies sont globalement différentes (on sait bien qu'en dimension infinie, les topologies faibles ne sont jamais métrisables) et cela sera important pour le Corollaire 2.6 ; cependant, elles coïncident sur beaucoup de sous-ensembles intéressants de $\mathcal{M}_\triangleleft(X)$. En particulier, elles coïncident sur la boule unité de la norme de la variation totale ([4, proposition 2.6]) et plus généralement, sur toute partie bornée en variation totale. Il n'est pas difficile d'en déduire que ces deux topologies coïncident également sur le cône positif $\mathcal{M}^+_\triangleleft(X)$; j'utiliserai abondamment cette équivalence au §3.3.

L'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ab} : & \mathcal{M}_\triangleleft(A^\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(A) \\ & \mu & \longmapsto & (\pi_0)_*(\mu) \end{array}$$

où $\pi_0 : A^\mathbb{N} \to A$ est la projection sur le symbole initial, joue un rôle important dans la théorie de la norme de réarrangement(1) et aussi, on le sait, pour les substitutions.

(1) Dans [4], cette application n'a pas de nom ni de notation dédiée, mais l'image $\mathrm{Ab}\,\mu$ est appelée *homologie* de la mesure μ, un terme que j'utiliserai aussi dans le présent article.

Dans le cas particulier où μ est une mesure de probabilité invariante ergodique sur $A^{\mathbb{N}}$, $\mathrm{Ab}\,\mu$ est une mesure de probabilité sur A, donnant les fréquences d'apparition des différents symboles dans un mot infini $x_0x_1x_2\ldots$ de $A^{\mathbb{N}}$ tiré « au hasard » selon μ. C'est donc une sorte d'abélianisation : on retient les proportions des lettres, mais on oublie dans quel ordre elles apparaissent. On verra en §3.2 ses liens avec l'abélianisation sur le monoïde libre.

Un lemme technique, qui apparaît dans la preuve de la proposition 3.3 de [4], et dont j'aurai besoin au §3.1, est que pour toute fonction mesurable Bowen (et donc bornée) $g : X \to \mathbb{R}$ et toute mesure invariante μ sur X, on a

$$\big|\langle g,\mu\rangle\big| \;\leqslant\; \mathrm{bw}(g)\cdot\big[\,\|\mu\|_R - \|\mathrm{Ab}\,\mu\|\,\big] + \|g\|\cdot\|\mathrm{Ab}\,\mu\|\,. \tag{2.1}$$

2.2. L'application « classe de conjugaison » cc

Considérons maintenant le monoïde libre $M = A^\star$, où l'alphabet A est un ensemble fini quelconque (peut-être même vide). Dans un tel monoïde, la relation de semi-conjugaison $x \rightharpoonup y$, qui exprime l'existence d'un élément h tel que $hx = yh$, est symétrique, et je parlerai simplement de conjugaison. Deux mots dans $A^\star$ sont conjugués ssi ils sont circulairement équivalents, i.e. de la forme uv et vu.

A tout mot non vide w de $A^\star$, associons le « mot infini » w^∞, élément de $A^{\mathbb{N}}$ obtenu en répétant w périodiquement. C'est évidemment un point périodique pour l'application de décalage $\lhd$ sur $A^{\mathbb{N}}$, dont la période divise $|w|$, la longueur de w. Définissons $\mathrm{cc}(w)$ comme l'unique mesure positive invariante sur $A^{\mathbb{N}}$, portée par l'orbite de w^∞ et de masse $|w|$, autrement dit,

$$\mathrm{cc}(w) \;=\; \sum_{0\leqslant i<|w|} \mathrm{dirac}(\lhd^i\, w^\infty)\,.$$

On complète cette définition de cc en posant $\mathrm{cc}(\mathbb{1}) = 0$.

Nous avons ainsi construit une fonction

$$\mathrm{cc} : A^\star \longrightarrow \mathcal{M}_\lhd(A^{\mathbb{N}})$$

que nous allons examiner de plus près. Tout d'abord, elle n'est pas injective : on a $\mathrm{cc}(x) = \mathrm{cc}(y)$ si et seulement si x, y sont conjugués. On peut donc identifier la mesure $\mathrm{cc}(x)$ avec la classe de conjugaison de x dans $A^\star$, d'où la notation « cc ». Ensuite, on a la propriété d'homogénéité

$$\forall\, x \in A^\star \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{cc}(x^n) = n\cdot\mathrm{cc}(x)$$

parce que deux mots non vides de $A^\star$ dont l'un est une puissance de l'autre définissent la même orbite périodique dans $A^\mathbb{N}$.

Bien sûr, la fonction cc prend ses valeurs dans $\mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^\mathbb{N})$, le sous-espace de $\mathcal{M}_\triangleleft(A^\mathbb{N})$ constitué des mesures à support fini.

Proposition 2.1. — *L'application* $\mathrm{cc} : A^\star \longrightarrow \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^\mathbb{N})$ *est un quasimorphisme homogène, pour la norme de réarrangement : on a*

$$\|\mathrm{cc}(xy) - \mathrm{cc}(x) - \mathrm{cc}(y)\|_R \leqslant 4 \tag{2.2}$$

pour tous x, y *dans* $A^\star$.

Démonstration. — On a déjà vu la propriété d'homogénéité (quasiment évidente) de cc. Il reste à montrer l'inégalité (2.2). Bien sûr, on peut se limiter au cas où les mots x, y sont non vides.

Ecrivons $x = x_0x_1\dots x_{m-1}$ et $y = y_0y_1\dots y_{n-1}$, avec $m = |x|$ et $n = |y|$. Soient ξ_1, ξ_2 les mesures positives sur $\Delta_1(A^\mathbb{N}) = \big\{(u,v) \in A^\mathbb{N} \times A^\mathbb{N} : u_0 = v_0\big\}$, définies par

$$\xi_1 = \sum_{0\leqslant i<m} \mathrm{dirac}[\triangleleft^i x^\infty, \triangleleft^i (xy)^\infty]$$
$$\xi_2 = \sum_{0\leqslant i<n} \mathrm{dirac}[\triangleleft^i y^\infty, \triangleleft^i (yx)^\infty]$$

et posons $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Si on note $A^\mathbb{N} \xleftarrow{\partial_0} \Delta_1(A^\mathbb{N}) \xrightarrow{\partial_1} A^\mathbb{N}$ les projections naturelles, on voit que $\partial_0\xi = \mathrm{cc}(x) + \mathrm{cc}(y)$ et $\partial_1\xi = \mathrm{cc}(xy) = \mathrm{cc}(yx)$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \lll \xi_1 - \xi_1 &= -\,\mathrm{dirac}[x^\infty, (xy)^\infty] + \mathrm{dirac}[x^\infty, (yx)^\infty] \\ \lll \xi_2 - \xi_2 &= -\,\mathrm{dirac}[y^\infty, (yx)^\infty] + \mathrm{dirac}[y^\infty, (xy)^\infty] \end{aligned}$$

où $\lll$ est l'opération diagonale de décalage sur $A^\mathbb{N} \times A^\mathbb{N}$, et donc $\|\lll \xi - \xi\|_{TV} \leqslant 4$.

D'après la formule (3.2) de [4], cela entraîne que la distance de réarrangement entre $\partial_0\xi$ et $\partial_1\xi$ est majorée par 4, ce qu'il fallait démontrer. □

2.3. Une propriété universelle de cc

Le quasimorphisme homogène $\mathrm{cc} : A^\star \to \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^\mathbb{N})$ est universel, dans le sens suivant :

Théorème 2.2. — *Soit* A *un ensemble fini, et* E *un espace vectoriel normé. Pour toute application linéaire continue* $f : \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^\mathbb{N}) \to E$*, relativement à la norme de réarrangement, l'application composée* $f \circ \mathrm{cc}$ *est un* *quasimophisme homogène $A^\star \to E$. Réciproquement, pour tout quasimorphisme homogène $q : A^\star \to E$, il existe une et une seule application linéaire continue $f : \mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ telle que $q = f \circ \mathrm{cc}$.*

Ce théorème exprime que les quasimorphismes homogènes $A^\star \to E$ sont « la même chose » que les applications linéaires continues $\mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}}) \to E$.

LEMME 2.3. — *Soit $q : A^\star \to E$ une fonction vérifiant $q(x^n) = n\,q(x)$ et $q(xy) = q(yx)$, pour tous $x, y \in A^\star$ et $n \geqslant 0$, et donc en particulier $q(\mathbb{1}) = 0$. Il existe alors une et une seule application linéaire $f : \mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ telle que $q = f \circ \mathrm{cc}$.*

Notons que, dans ce lemme, les conditions sur q sont évidemment nécessaires.

Démonstration du lemme.

Unicité. — Supposons que $f_1, f_2 : \mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ soient deux solutions du problème posé, et soit $g = f_2 - f_1$. Alors $g[\mathrm{cc}(w)] = 0$ pour tout mot w. Mais toute mesure invariante sur $A^{\mathbb{N}}$ à support fini est combinaison linéaire d'orbites périodiques, c'est-à-dire que les $\mathrm{cc}(w)$, pour w décrivant $A^\star$, forment une partie génératrice de $\mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$. Donc $g = 0$, i.e. $f_1 = f_2$.

Existence. — On peut supposer l'alphabet A muni d'un ordre total, ce qui induit un ordre lexicographique sur $A^\star$. Toute mesure invariante portée par une orbite périodique de période (exactement) p peut s'écrire comme multiple d'un $\mathrm{cc}(w)$ avec w mot *primitif* de longueur p, c'est-à-dire un mot non vide qui ne peut pas s'écrire comme puissance d'un mot plus court. Quitte à remplacer w par un conjugué, on peut supposer que w est un *mot de Lyndon*, c'est-à-dire un mot primitif qui est inférieur à tous ses conjugués pour l'ordre lexicographique ; soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de ces mots.

Toute mesure invariante à support fini peut s'écrire, de manière unique, comme somme d'un nombre fini de mesures invariantes portées par des orbites périodiques (distinctes), c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$ peut s'écrire, d'une manière et d'une seule,

$$\sum_{w \in \mathcal{L}} a_w \, \mathrm{cc}(w)$$

où les a_w sont des nombres réels, tous nuls sauf un nombre fini, c'est-à-dire que les $\mathrm{cc}(w)$ pour $w \in \mathcal{L}$ forment une base (algébrique) de $\mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$. Cette base fournit un isomorphisme entre les applications linéaires $\mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ et les fonctions $\mathcal{L} \to E$. En particulier, il existe exactement une application linéaire $f : \mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ vérifiant

$$f\big[\mathrm{cc}(w)\big] = q(w)$$

pour tout $w \in \mathcal{L}$. En outre, comme on a supposé q constante sur les classes de conjugaison, cette formule reste valable pour tout mot conjugué à un mot de Lyndon, donc tout mot primitif. Enfin, l'hypothèse d'homogénéité sur q permet d'étendre cette formule à toutes les puissances de mots primitifs, donc tous les mots, et on a bien $f \circ \mathrm{cc} = q$. □

Pour tout $z \in A^{\mathbb{N}}$ et $n \geqslant 0$, définissons la mesure positive

$$c(n,z) = \sum_{0 \leqslant k < n} \mathrm{dirac}(\triangleleft^i z)\,.$$

Ces mesures vérifient la relation de cocycle $c(m+n,z) = c(m,z)+c(n,\triangleleft^m z)$ pour tous $m,n \geqslant 0$ et $z \in A^{\mathbb{N}}$, et en particulier $c(0,z) = 0$.

Lemme 2.4. — *Soit $q : A^\star \to E$ un quasimorphisme homogène, de défaut au plus D, et $f : \mathcal{M}_{\triangleleft}^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ une application linéaire telle que $q = f \circ \mathrm{cc}$. Soit μ une mesure sur $A^{\mathbb{N}}$ de la forme*

$$\mu = \mu_a = \sum_{\substack{n>0 \\ z \text{ périodique}}} a_{n,z} c(n,z)$$

où les $a_{n,z}$ sont des réels positifs, tous nuls sauf un nombre fini, et supposons μ invariante. Alors

$$\Big\| \sum_{n,z} a_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) - f(\mu) \Big\| \leqslant D \sum_{n,z} a_{n,z}\,. \tag{2.3}$$

Démonstration. — Soit F l'ensemble des couples (n,z) pour lesquels $a_{n,z} > 0$ (avec n entier strictement positif, et z point périodique de $A^{\mathbb{N}}$). L'ensemble

$$\mathcal{H} = \big\{ b = (b_{n,z})_{(n,z)\in F} : \mu_b \text{ invariante} \big\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^F$ défini par des équations à coefficients rationnels, donc les points rationnels de $\mathcal{H}$ sont denses dans $\mathcal{H}$. Il suffit donc de démontrer (2.3) dans le cas où les $a_{n,z}$ sont rationnels, et même, par homogénéité, dans le cas où ils sont *entiers*.

Supposons donc les $a_{n,z}$ entiers (positifs). On va démontrer l'inégalité (2.3) par récurrence sur l'entier $N = \sum a_{n,z}$. Pour $N = 0$ c'est trivial. Démontrons-la maintenant pour un entier $N \geqslant 1$ donné, en supposant qu'elle est valable pour tous les entiers plus petits.

Puisque $N > 0$, on peut trouver un entier $\bar{n} > 0$ et un point périodique $\bar{z}$ tels que $a_{\bar{n},\bar{z}} > 0$. Posons $\gamma = c(\bar{n},\bar{z})$. On a

$$\triangleleft\gamma - \gamma = \mathrm{dirac}(\triangleleft^{\bar{n}} \bar{z}) - \mathrm{dirac}(\bar{z})\,.$$

Distinguons les cas $\triangleleft^{\bar{n}} \bar{z} = \bar{z}$ et $\neq \bar{z}$.

Premier cas : $\lhd^{\bar{n}}\bar{z} = \bar{z}$*.* — Alors γ est une mesure invariante, ainsi que

$$\mu' = \mu - a_{\bar{n},\bar{z}}\gamma = \sum a'_{n,z} c(n,z)$$

où les coefficients $a'_{n,z}$ sont donnés par

$$a'_{n,z} = \begin{cases} a_{n,z} & \text{si } (n,z) \neq (\bar{n},\bar{z}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $N' = \sum a'_{n,z} = N - a_{\bar{n},\bar{z}} < N$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à μ' :

$$\Big\| \sum_{n,z} a'_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) - f(\mu') \Big\| \leqslant DN' \leqslant DN\,. \tag{2.4}$$

D'autre part $q(\bar{z}_0 \cdots \bar{z}_{\bar{n}-1}) = f\big(\mathrm{cc}(\bar{z})\big) = f(\gamma)$ et donc

$$\sum_{n,z} a_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) - f(\mu) = \sum_{n,z} a'_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) - f(\mu')$$

ce qui, combiné avec (2.4), établit l'inégalité (2.3) dans ce cas.

Second cas : $\lhd^{\bar{n}}\bar{z} \neq \bar{z}$*.* — L'invariance de μ revient à dire que

$$\sum_{n,z} a_{n,z}\, \mathrm{dirac}(\lhd^n z) = \sum_{n,z} a_{n,z}\, \mathrm{dirac}(z)\,.$$

En particulier, au terme $a_{\bar{n},\bar{z}}\, \mathrm{dirac}(\lhd^{\bar{n}}\bar{z})$ qui apparaît à gauche, doit correspondre au moins un terme à droite, c'est-à-dire qu'il existe un entier $\tilde{n} > 0$ et un point périodique $\tilde{z}$ tels que $a_{\tilde{n},\tilde{z}} > 0$ et $\lhd^{\bar{n}}\bar{z} = \tilde{z}$ (et donc $\tilde{z} \neq \bar{z}$, par notre hypothèse). Soit $b > 0$ le minimum de $a_{\bar{n},\bar{z}}$ et $a_{\tilde{n},\tilde{z}}$. La relation de cocycle

$$c(\bar{n} + \tilde{n}, \bar{z}) = c(\bar{n}, \bar{z}) + c(\tilde{n}, \tilde{z})$$

permet de récrire μ sous la forme $\sum a'_{n,z} c(n,z)$, avec

$$a'_{n,z} = \begin{cases} a_{n,z} & \text{si } (n,z) \neq (\bar{n},\bar{z}),\ (\tilde{n},\tilde{z}) \text{ et } (\bar{n}+\tilde{n},\bar{z}), \\ a_{n,z} - b & \text{si } (n,z) = (\bar{n},\bar{z}) \text{ ou } (\tilde{n},\tilde{z}), \\ a_{n,z} + b & \text{si } (n,z) = (\bar{n}+\tilde{n},\bar{z}). \end{cases}$$

Cette nouvelle écriture satisfait $\sum a'_{n,z} = N - b < N$ et on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\Big\| \sum_{n,z} a'_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) - f(\mu) \Big\| \leqslant D(N-b)\,. \tag{2.5}$$

D'autre part,

$$\sum a_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) = \sum a'_{n,z} q(z_0 \cdots z_{n-1}) \\ + b\big[q(\bar z_0 \cdots \bar z_{\bar n-1}) + q(\tilde z_0 \cdots \tilde z_{\tilde n-1}) - q(\bar z_0 \cdots \bar z_{\bar n-1} \tilde z_0 \cdots \tilde z_{\tilde n-1})\big]$$

et l'expression entre crochets est de norme $\leqslant D$, ce qui, combiné avec (2.5), établit l'inégalité (2.3) dans ce deuxième cas. □

Lemme 2.5. — *Soit F une partie finie de $A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lhd F = F$, c.à.d. une union finie d'orbites périodiques, et ξ une mesure positive sur $\Delta_1 F$, non nulle, telle que $\|\lll \xi - \xi\|_{TV} \leqslant 2$, et ne chargeant pas la diagonale ΔF. Alors ξ est une combinaison convexe de mesures de la forme*

$$c(n,x,y) = \sum_{0 \leqslant i < n} \mathrm{dirac}[\lhd^i x, \lhd^i y]$$

où les triplets $(n,x,y) \in \mathbb{N} \times F \times F$ sont tels que $n \geqslant 1$, $x \neq y$ et $x_0 \cdots x_{n-1} = y_0 \cdots y_{n-1}$.

Démonstration. — Observons qu'il n'existe qu'un nombre fini (et $\neq 0$) de triplets vérifiant les conditions ci-dessus ; l'enveloppe convexe des $c(n,x,y)$ est donc une partie compacte, convexe et non vide de $\mathcal{M}(\Delta_1 F - \Delta F)$. Supposons qu'elle ne contienne pas ξ. Il existerait alors une forme linéaire ϕ sur $\mathcal{M}(\Delta_1 F - \Delta F)$, autrement dit une fonction $\phi : \Delta_1 F - \Delta F \to \mathbb{R}$, et un réel c tels que

$$\langle \phi, \xi \rangle > c \tag{2.6}$$

tandis que

$$\langle \phi, c(n,x,y) \rangle \leqslant c$$

pour tous $n \geqslant 1$ et x, y distincts tels que $x_0 \cdots x_{n-1} = y_0 \cdots y_{n-1}$, i.e.

$$\sum_{0 \leqslant i < n} \phi(\lhd^i x, \lhd^i y) \leqslant c.$$

Comme dans la proposition 3.1 de [4], ces inégalités entraînent l'existence d'une fonction $\beta : F^2 \to [0,c]$ telle que

$$\forall\, (x,y) \in \Delta_1 F - \Delta F \qquad \phi(x,y) \leqslant \beta(\lhd x, \lhd y) - \beta(x,y)$$

autrement dit, ϕ est majorée par $\beta \lll - \beta$ sur $\Delta_1 F - \Delta F$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle \phi, \xi \rangle &\leqslant \langle \beta \lll - \beta, \xi \rangle = \langle \beta, \lll \xi - \xi \rangle \\ &\leqslant \langle \beta, (\lll \xi - \xi)^+ \rangle && (\text{car } \beta \geqslant 0) \\ &\leqslant c \left\| (\lll \xi - \xi)^+ \right\|_{TV} && (\text{car } \beta \leqslant c) \\ &= \tfrac{1}{2} c \,\|\lll \xi - \xi\|_{TV} \leqslant c \end{aligned}$$

ce qui contredit (2.6). □

Démonstration du théorème 2.2. — Il est bien clair que composer le quasimorphisme homogène cc avec une quelconque application linéaire continue va encore donner un quasimorphisme homogène.

Examinons la réciproque : soit $q : A^\star \to E$ un quasimorphisme homogène, de défaut au plus D. Par le lemme 2.3, il existe une et une seule application linéaire $f : \mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ telle que $q = f \circ \mathrm{cc}$. Il reste à montrer que f est continue en norme de réarrangement. Pour cela, nous allons d'abord établir que

$$\forall \mu \in \mathcal{M}^{\mathrm{fin}}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}}) \qquad \mathrm{Ab}\,\mu = 0 \implies \|f(\mu)\| \leqslant D\,\|\mu\|_R \tag{2.7}$$

Soit donc μ une mesure invariante sur $A^{\mathbb{N}}$, non nulle, à support fini (qu'on notera F), telle que $\mathrm{Ab}\,\mu = 0$, et $\mu^+ - \mu^-$ sa décomposition de Jordan. Par le théorème de dualité ([4, théorème 3.2]), il existe ξ couplage de μ^- et μ^+, porté par $\Delta_1(A^{\mathbb{N}})$ et tel que $\|\lll \xi - \xi\|_{TV} = \|\mu\|_R$. Par le lemme 2.5, on peut écrire

$$\xi = \sum_{n,x,y} a_{n,x,y}\, c(n,x,y)$$

où les $a_{n,x,y}$ sont des réels positifs, définis pour $n \geqslant 1$ et $x, y \in F$ distincts tels que $x_0 \cdots x_{n-1} = y_0 \cdots y_{n-1}$, avec

$$\sum a_{n,x,y} = \tfrac{1}{2}\,\|\mu\|_R\,.$$

On a donc $\mu^- = \partial_0 \xi = \sum a_{n,x,y}\, c(n,x)$, et par le lemme 2.4,

$$\left\|\sum a_{n,x,y}\, q(x_0 \cdots x_{n-1}) - f(\mu^-)\right\| \leqslant D \sum a_{n,x,y} = \tfrac{1}{2} D\,\|\mu\|_R \tag{2.8}$$

et similairement pour $\mu^+ = \partial_1 \xi = \sum a_{n,x,y}\, c(n,y)$,

$$\left\|\sum a_{n,x,y}\, q(y_0 \cdots y_{n-1}) - f(\mu^+)\right\| \leqslant \tfrac{1}{2} D\,\|\mu\|_R\,. \tag{2.9}$$

Notons que les sommes $\sum a_{n,x,y}\, q(x_0 \cdots x_{n-1})$ et $\sum a_{n,x,y}\, q(y_0 \cdots y_{n-1})$ sont identiques, puisque la sommation est restreinte à des triplets (n,x,y) pour lesquels $x_0 \cdots x_{n-1} = y_0 \cdots y_{n-1}$. De cette observation et des inégalités (2.8) et (2.9), on déduit

$$\|f(\mu)\| = \left\|f(\mu^+) - f(\mu^-)\right\| \leqslant D\,\|\mu\|_R$$

qui est l'inégalité cherchée (2.7).

Pour finir la démonstration, il nous faut une majoration similaire de $\|f(\mu)\|$ valable globalement, sans la condition $\mathrm{Ab}\,\mu = 0$. Voici une solution possible : à toute mesure invariante μ de support fini, associons la mesure

$\bar{\mu}$ de même homologie (i.e. $\mathrm{Ab}\,\mu = \mathrm{Ab}\,\bar{\mu}$) et portée par les points fixes du décalage, à savoir,

$$\bar{\mu} = \sum_{a \in A} (\mathrm{Ab}\,\mu)\{a\} \cdot \mathrm{cc}(a)\,.$$

Notons que $\|\bar{\mu}\|_R = \|\mathrm{Ab}\,\mu\| \leqslant \|\mu\|_R$ et donc $\|\mu - \bar{\mu}\|_R \leqslant 2\,\|\mu\|_R$. L'estimation (2.7) appliquée à la mesure $\mu - \bar{\mu}$, combinée avec

$$\|f(\bar{\mu})\| \leqslant M\,\|\mathrm{Ab}\,\mu\| \leqslant M\,\|\mu\|_R$$

où $M = \sup_a \|q(a)\|$, nous donne

$$\forall\, \mu \in \mathcal{M}_{\triangleleft}^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \qquad \|f(\mu)\| \leqslant (2D + M)\,\|\mu\|_R$$

ce qui établit la continuité (globale) de f, et termine la preuve du théorème. □

2.4. Dualité entre mesures invariantes et quasimorphismes homogènes

Si E est complet, la densité de $\mathcal{M}_{\triangleleft}^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}})$ dans $\mathcal{M}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$ (pour la norme de réarrangement) entraîne que les fonctions linéaires continues $\mathcal{M}_{\triangleleft}^{\mathrm{fin}}(A^{\mathbb{N}}) \to E$ s'identifient aux fonctions linéaires continues $\mathcal{M}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}}) \to E$, via les opérations évidentes de restriction et de prolongement continu. En particulier, le dual topologique de $\mathcal{M}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$ s'identifie à l'espace des quasimorphismes homogènes $A^\star \to \mathbb{R}$. De façon précise :

Corollaire 2.6. — *Pour toute forme linéaire ℓ sur $\mathcal{M}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$, continue relativement à la norme de réarrangement, la fonction $q : A^\star \to \mathbb{R}$ définie par $q = \ell \circ \mathrm{cc}$ est un quasimorphisme homogène. Inversement, pour tout quasimorphisme homogène $q : A^\star \to \mathbb{R}$, il existe une et une seule forme linéaire continue ℓ sur $\mathcal{M}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$ telle que $q = \ell \circ \mathrm{cc}$.*

Par ailleurs, on peut identifier les formes linéaires continues sur $\mathcal{M}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$ avec les fonctions affines lipschitziennes $\mathcal{M}_{\triangleleft}^1(A^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}$, modulo les opérations évidentes de restriction et de prolongement linéaire. Le corollaire ci-dessus peut aussi s'exprimer en ces termes, ce qui établit un des résultats annoncés dans l'introduction : les quasimorphismes homogènes $A^\star \to \mathbb{R}$ sont « la même chose » que les fonctions affines $\mathcal{M}_{\triangleleft}^1(A^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}$ lipschitziennes en distance de réarrangement.

Toute fonction continue réelle f sur $A^{\mathbb{N}}$ ou $A^{\mathbb{Z}}$ vérifiant la condition de Bowen (par exemple, une fonction localement constante) définit une forme linéaire sur $\mathcal{M}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$ continue en norme de réarrangement, et donc un quasimorphisme homogène réel sur $A^\star$. De plus, celui-ci ne dépend que de la classe de cohomologie de f, dans le sens où il ne change pas si on ajoute à f un cobord de fonction continue. En ce sens, les q.m.h. $A^\star \to \mathbb{R}$ sont une généralisation des (classes de cohomologie de) fonctions continues Bowen sur le shift unilatère ou bilatère.

On notera $\nu \mapsto \langle q, \nu \rangle$ la forme linéaire continue sur $\mathcal{M}_\triangleleft(A^\mathbb{N})$ associée à un quasimorphisme homogène $q : A^\star \to \mathbb{R}$.

2.5. Fonctorialité de cc

Considérons un morphisme $\sigma : A^\star \to B^\star$ entre deux monoïdes libres de type fini, et soient $\mathrm{cc}_A : A^\star \to \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^\mathbb{N})$, $\mathrm{cc}_B : B^\star \to \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(B^\mathbb{N})$ les quasimorphismes homogènes universels sur $A^\star$ et $B^\star$. Le pull-back $\sigma^*(\mathrm{cc}_B) = \mathrm{cc}_B \circ \sigma$, comme tout q.m.h. sur $A^\star$, se factorise d'une manière et d'une seule à travers cc_A , c'est-à-dire qu'il existe exactement une application linéaire continue $\sigma_* : \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^\mathbb{N}) \to \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(B^\mathbb{N})$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^\star & \xrightarrow{\mathrm{cc}_A} & \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(A^\mathbb{N}) \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\sigma_*} \\ B^\star & \xrightarrow{\mathrm{cc}_B} & \mathcal{M}_\triangleleft^{\mathrm{fin}}(B^\mathbb{N}) \end{array}$$

Bien sûr, σ_* dépend fonctoriellement de σ : on a $(\sigma\tau)_* = \sigma_*\tau_*$ si σ, τ sont deux substitutions composables, et $(\mathrm{Id})_* = \mathrm{Id}$.

Cet opérateur σ_* est, pour l'instant, seulement défini sur les mesures invariantes à support fini, mais sa continuité en norme de réarrangement permet de l'étendre facilement en un opérateur continu $\mathcal{M}_\triangleleft(A^\mathbb{N}) \to \mathcal{M}_\triangleleft(B^\mathbb{N})$ qu'on notera encore σ_*.

Cependant, pour avoir les résultats les plus fins sur cet opérateur prolongé, et des démonstrations simples de ses propriétés de base, il est préférable d'en donner une construction plus explicite, ce qui sera l'objet du chapitre suivant.

3. L'action des substitutions sur les mesures invariantes

3.1. Définition et construction de l'opérateur σ_*

Un monoïde libre $A^\star$ agit naturellement (à gauche) sur l'espace symbolique $A^\mathbb{N}$, par concaténation : à tout mot fini $w \in A^\star$ et tout mot infini à droite $x \in A^\mathbb{N}$, on associe le mot (infini à droite) $w.x$.

Soit $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution, c'est-à-dire un morphisme quelconque[2] entre deux monoïdes libres de type fini. Disons qu'une fonction $S : A^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}$ est *compatible* avec σ si

$$(3.1) \qquad \forall\, w \in A^\star \quad \forall\, x \in A^{\mathbb{N}} \qquad S(w.x) = \sigma(w).S(x)\,.$$

Si la substitution σ est non-effaçante, c'est-à-dire envoie tout mot non vide sur un mot non vide, on voit facilement qu'il existe exactement une fonction S vérifiant cette condition, et que cette fonction est continue ; elle est donnée par

$$S(x) = \sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2)\dots$$

formule qui a bien un sens, parce que le membre de droite est un mot infini (tous les $\sigma(x_0)$ sont non vides) quels que soient les x_i. A l'inverse, si certaines lettres de A sont « effacées » par σ, c'est-à-dire envoyées sur le mot vide, le membre de droite peut être de longueur finie et donc, n'être pas dans $B^{\mathbb{N}}$. On a cependant le résultat suivant, pour des substitutions arbitraires :

Lemme 3.1. — *Soient A, B deux ensembles finis, avec B non vide, et $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution. Il existe au moins une fonction mesurable $S : A^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}$ compatible avec σ.*

Démonstration. — Soit z un quelconque élément de $B^{\mathbb{N}}$. Définissons les fonctions $S_n : A^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}$, pour tout entier $n \geqslant 0$, par la formule

$$S_n(x) = \sigma(x_0 \dots x_{n-1}).z\,.$$

Elles vérifient évidemment la relation de récurrence

$$(3.2) \qquad \forall\, x \in A^{\mathbb{N}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad S_{n+1}(x) = \sigma(x_0).S_n(\lhd x)\,.$$

J'affirme que pour tout x dans $A^{\mathbb{N}}$, la suite $S_n(x)$ est convergente dans $B^{\mathbb{N}}$. Pour le voir, distinguons deux cas :

- (I) Il existe une infinité d'indices n tels que $\sigma(x_n) \neq \mathbb{1}$. Alors la longueur de $\sigma(x_0 \dots x_{n-1})$ tend vers l'infini, et $S_n(x)$ tend vers le mot infini $\sigma(x_0)\sigma(x_1)\sigma(x_2)\dots$
- (II) On a $\sigma(x_n) = \mathbb{1}$ pour tout n assez grand. Alors la suite $S_n(x)$ est stationnaire, *a fortiori* convergente.

Les fonctions S_n étant continues, leur limite simple S est une fonction mesurable, et en passant à la limite dans (3.2), on obtient

$$\forall\, x \in A^{\mathbb{N}} \qquad S(x) = \sigma(x_0).S(\lhd x)$$

[2] Certains auteurs donnent au mot « substitution » un sens plus restrictif, mais dans le présent article, « substitution » et « morphisme » (entre monoïdes libres) seront rigoureusement synonymes.

condition visiblement équivalente à (3.1). □

Observons que la formule ci-dessus implique

$$\forall\, x \in A^{\mathbb{N}} \qquad \lhd^{h(x)} S(x) = S(\lhd x)$$

avec $h(x) = |\sigma x_0|$, i.e., une itération de $\lhd$ sur x correspond à $h(x)$ itérations sur $S(x)$. Ceci suggère que S devrait pouvoir s'exprimer à l'aide d'un système intégré (une « tour ») sur $(A^{\mathbb{N}}, \lhd)$, avec h comme fonction hauteur de la tour (i.e., la fonction temps de retour sur la base). Ce n'est pas possible en général, car la fonction h peut prendre la valeur 0, et la tour est mal définie dans ce cas ; cependant, la construction de σ_* que je vais donner présente de grandes similitudes avec certaines opérations classiques sur les tours.

Définissons la *norme* d'une substitution $\sigma : A^\star \to B^\star$ comme

$$\|\sigma\| \ = \mathrm{Sup}_{w \in A^\star - \{\mathbb{1}\}} \frac{|\sigma w|}{|w|} \ = \ \mathrm{Sup}_{a \in A} \ |\sigma a|$$

si A est non vide (et 0 si A est vide). Notons que cette norme est $\geqslant 1$ pour toute substitution non triviale.

Théorème 3.2. — *Soit $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini. Il existe une et une seule application linéaire continue $\sigma_* : \mathcal{M}_\lhd(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}_\lhd(B^{\mathbb{N}})$, relativement aux normes de réarrangement, vérifiant*

$$\sigma_*\big[\mathrm{cc}(w)\big] = \mathrm{cc}(\sigma w) \tag{3.3}$$

pour tout w dans $A^\star$.

En outre, on a les inégalités

$$\|\sigma_*\mu\|_{TV} \ \leqslant \ \|\sigma\| \cdot \|\mu\|_{TV} \tag{3.4}$$

$$\|\sigma_*\mu\|_R \ \leqslant \ \|\mu\|_R + \big[\|\sigma\| - 1\big] \cdot \|\mathrm{Ab}\,\mu\| \tag{3.5}$$

pour toute mesure invariante μ sur $A^{\mathbb{N}}$. En particulier,

$$\mathrm{Ab}\,\mu = 0 \implies \|\sigma_*\mu\|_R \leqslant \|\mu\|_R\,. \tag{3.6}$$

Démonstration.

Unicité. — Supposons que $\Sigma_1, \Sigma_2 : \mathcal{M}_\lhd(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}_\lhd(B^{\mathbb{N}})$ soient deux solutions au problème. Alors $\Sigma_2 - \Sigma_1$ s'annule sur tous les $\mathrm{cc}(w)$ et, par linéarité, sur leurs combinaisons linéaires, c'est-à-dire toutes les mesures invariantes à support fini. Celles-ci sont denses dans $\mathcal{M}_\lhd(A^{\mathbb{N}})$ pour la norme de réarrangement, et donc, par continuité, $\Sigma_1 = \Sigma_2$ partout.

Existence. — On peut évidemment supposer A, B non vides. Par le lemme 3.1, il existe une fonction mesurable $S : A^{\mathbb{N}} \to B^{\mathbb{N}}$ compatible avec σ. Posons $\mathbf{S} = (\sigma, S)$. En notant $\mathcal{B}_{\mathrm{b}}(X)$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées $X \to \mathbb{R}$ (où X est un ensemble muni d'une tribu), on peut considérer l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{S}^* : & \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(B^{\mathbb{N}}) & \longrightarrow & \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(A^{\mathbb{N}}) \\ & f & \longmapsto & \mathbf{S}^* f \end{array}$$

défini par

$$\forall\, x \in A^{\mathbb{N}} \qquad (\mathbf{S}^* f)(x) = \sum_{0 \leqslant i < |\sigma x_0|} f(\lhd^i S x)\,. \tag{3.7}$$

J'affirme que cet opérateur admet un opérateur adjoint $\mathbf{S}_* : \mathcal{M}(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}(B^{\mathbb{N}})$, c'est-à-dire que pour toute mesure μ sur $A^{\mathbb{N}}$, il existe exactement une mesure $\mathbf{S}_* \mu$ sur $B^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\langle f, \mathbf{S}_* \mu \rangle = \langle \mathbf{S}^* f, \mu \rangle \tag{3.8}$$

pour toute fonction mesurable bornée $f : B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$.

En effet, soit μ une quelconque mesure sur $A^{\mathbb{N}}$, non nécessairement invariante. En prenant pour f une fonction caractéristique d'ensemble mesurable dans (3.8), on voit que la mesure $\mathbf{S}_* \mu$, si elle existe, doit être donnée par

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_* \mu)(E) &= \langle \mathbb{1}_E, \mathbf{S}_* \mu \rangle = \langle \mathbf{S}^*(\mathbb{1}_E), \mu \rangle \\ &= \int_{A^{\mathbb{N}}} \Big[\sum_{0 \leqslant i < |\sigma x_0|} \mathbb{1}_E(\lhd^i S x) \Big] \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_{a \in A} \int_{a.A^{\mathbb{N}}} \Big[\sum_{0 \leqslant i < |\sigma a|} \mathbb{1}_E(\lhd^i S x) \Big] \, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{0 \leqslant i < |\sigma a|} \mu\big\{ x \in A^{\mathbb{N}} : x_0 = a \ \text{ et } \ \lhd^i S x \in E \big\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

pour tout E mesurable dans $B^{\mathbb{N}}$. Cette formule définit une fonction sur les boréliens de $B^{\mathbb{N}}$, et on voit facilement qu'elle est σ-additive ; c'est donc bien une mesure sur $B^{\mathbb{N}}$. Par construction, elle vérifie la condition (3.8) pour les fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables, et par linéarité, pour toutes les fonctions f étagées(3). Le cas général d'une fonction mesurable bornée $f : B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ s'en déduit, en notant que toute fonction mesurable bornée est limite uniforme de fonctions étagées(4).

(3) C'est-à-dire qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

(4) En effet, f est limite uniforme des fonctions étagées $f_n(x) = n^{-1} \lfloor n f(x) \rfloor$ pour $n \to \infty$.

L'opérateur $\mathbf{S}_*$ est évidemment linéaire. J'affirme maintenant qu'il envoie toute mesure invariante (de $A^{\mathbb{N}}$) sur une mesure invariante (de $B^{\mathbb{N}}$). Pour cela, observons que

$$\forall\, f \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(B^{\mathbb{N}}) \qquad \mathbf{S}^*(f\lhd - f) = fS\lhd - fS$$

et soit μ est une mesure invariante sur $A^{\mathbb{N}}$. Pour toute fonction mesurable bornée $f : B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ on aura

$$\langle f\lhd - f, \mathbf{S}_*\mu\rangle = \langle \mathbf{S}^*(f\lhd - f), \mu\rangle = \langle fS\lhd - fS, \mu\rangle = \langle fS, \lhd\mu - \mu\rangle = 0$$

ce qui montre que $\mathbf{S}_*\mu$ est bien invariante.

Notons que (3.7) peut se récrire

$$\forall\, x \in A^{\mathbb{N}} \quad \forall\, f \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(B^{\mathbb{N}}) \qquad \langle \mathbf{S}^* f, \mathrm{dirac}(x)\rangle = \big\langle f, c\big(|\sigma x_0|\,, Sx\big)\big\rangle$$

ce qui revient à dire que

$$\forall\, x \in A^{\mathbb{N}} \qquad \mathbf{S}_*\big[\mathrm{dirac}(x)\big] = c\big(|\sigma x_0|\,, Sx\big)$$

et on en déduit que, plus généralement,

$$\forall\, x \in A^{\mathbb{N}} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \mathbf{S}_*\big[c(n,x)\big] = c\big(|\sigma(x_0 \dots x_{n-1})|\,, Sx\big)\,.$$

En appliquant cette formule à $x = w^\infty$, où w est un mot non vide de $A^\star$ et n sa longueur, on obtient

$$\mathbf{S}_*\big[\mathrm{cc}(w)\big] = \mathrm{cc}(\sigma w)$$

ce qui établit (3.3).

On a manifestement $\|\mathbf{S}^* f\| \leqslant \|\sigma\| \cdot \|f\|$ en norme uniforme, et donc, par dualité,

$$\|\mathbf{S}_*\mu\|_{TV} \leqslant \|\sigma\| \cdot \|\mu\|_{TV}$$

pour toute mesure μ sur $A^{\mathbb{N}}$, donc on a bien (3.4).

Une propriété plus intéressante de l'opérateur $\mathbf{S}^*$ est qu'il diminue la constante de Bowen :

$$\forall\, f \in \mathcal{B}_{\mathrm{b}}(B^{\mathbb{N}}) \qquad \mathrm{bw}(\mathbf{S}^* f) \leqslant \mathrm{bw}(f)\,. \tag{3.10}$$

En effet, soit $f : B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, x, y deux points de $A^{\mathbb{N}}$, et $n \geqslant 0$ un entier tel que $x_0 \dots x_{n-1} = y_0 \dots y_{n-1}$. Alors Sx et Sy ont comme préfixe commun le mot $\sigma(x_0 \dots x_{n-1})$; soit m sa longueur. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leqslant i < n} (\mathbf{S}^* f)(\lhd^i y) - (\mathbf{S}^* f)(\lhd^i x) &= \langle \mathbf{S}^* f, c(n,y) - c(n,x)\rangle \\
&= \langle f, \mathbf{S}_* c(n,y) - \mathbf{S}_* c(n,x)\rangle \\
&= \langle f, c(m,Sy) - c(m,Sx)\rangle \\
&\leqslant 2\,\mathrm{bw}(f)
\end{aligned}$$

ce qui montre que la constante de Bowen de $\mathbf{S}^* f$ est bien majorée par celle de f.

Ceci a la conséquence suivante : soit μ une mesure invariante quelconque sur $A^{\mathbb{N}}$. Pour toute fonction $f : B^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ localement constante telle que $\mathrm{Nbw}(f) \leqslant 1$, la fonction $g = \mathbf{S}^* f$ (qui est seulement mesurable, en général) vérifie $\|g\| \leqslant \|\sigma\|$ et $\mathrm{bw}(g) \leqslant 1$, d'après ce qu'on vient de voir. Ces deux inégalités, combinées avec (2.1), entraînent

$$\langle f, \mathbf{S}_* \mu \rangle = \langle g, \mu \rangle \leqslant \|\mu\|_R + \big[\|\sigma\| - 1\big] \cdot \|\mathrm{Ab}\, \mu\|$$

quelle que soit la fonction f l.c. telle que $\mathrm{Nbw}(f) \leqslant 1$. Donc

$$\|\mathbf{S}_* \mu\|_R \leqslant \|\mu\|_R + \big[\|\sigma\| - 1\big] \cdot \|\mathrm{Ab}\, \mu\|$$

ce qui établit (3.5). En particulier,

$$\|\mathbf{S}_* \mu\|_R \leqslant \|\sigma\| \cdot \|\mu\|_R$$

ce qui montre que l'opérateur restreint $\mathbf{S}_* : \mathcal{M}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}_{\triangleleft}(B^{\mathbb{N}})$ est bien continu pour les normes de réarrangement, et termine la preuve du théorème. $\square$

Travaux existants. Lors de la révision du présent article, on m'a signalé l'article [10] d'Ilya Kapovich, qui décrit une opération assez similaire à σ_* dans son principe.

Le cadre est différent : Kapovich considère des *groupes* libres de type fini, et leurs morphismes. Un morphisme $h : F \to F'$ envoie toute classe de conjugaison de F sur une de F'. Or, ces classes de conjugaison peuvent être vues comme des orbites périodiques (et donc, des mesures invariantes) sur le bord à l'infini ∂F, qui a la structure d'un sous-shift de type fini. Il est donc naturel de se demander si cette action de h peut s'étendre par continuité à toutes les mesures invariantes (positives) sur le bord à l'infini. Pour le monoïde libre $A^\star$, l'analogue du bord à l'infini serait le full shift $A^{\mathbb{N}}$: la question pour les groupes libres est donc tout à fait similaire à ce qui a été discuté en §2.5 pour les monoïdes libres ; mais la réponse est différente.

Kapovich démontre l'existence d'un tel prolongement continu $h_\# : \mathcal{M}^1_{\triangleleft}(\partial F) \to \mathcal{M}^1_{\triangleleft}(\partial F')$ sous l'hypothèse que h est inversible, et selon toute vraisemblance, cela reste vrai sous l'hypothèse plus faible que h soit injectif.

Mais cette hypothèse d'injectivité de h est essentielle : pour h non injectif, la fonction $h_\#$ n'existe pas. Il y a à ça deux raisons. Premièrement, l'opérateur $h_\#$ défini par Kapovich est un opérateur projectif : il ne peut exister que si l'opérateur linéaire sous-jacent $h_* : \mathcal{M}_{\triangleleft}(\partial F) \to \mathcal{M}_{\triangleleft}(\partial F')$, implicite dans l'article de Kapovich, ne s'annule pas sur le cône positif (privé de 0). La deuxième raison est beaucoup plus sérieuse : l'opérateur linéaire h_* n'existe pas non plus : on peut le définir sur les mesures invariantes de support fini, mais pas le prolonger continûment aux autres mesures invariantes (même en restriction au cône positif).

Les « espaces de fréquences » $\mathcal{M}^1_\triangleleft(\partial F)$ et $\mathcal{M}_\triangleleft(\partial F)$, considérés par Kapovich, ne dépendent donc pas fonctoriellement de F, dans le sens habituel de ce mot, ce qui suggère que ce ne sont pas les « bons » espaces. Une manière de résoudre ce problème serait de décrire le q.m.h. universel pour le groupe libre (comme le théorème 2.2 du présent article pour le monoïde libre), ce que je ferai dans un article futur.

3.2. Quelques autres propriétés de σ_*

Positivité. Tout d'abord, l'opérateur $\sigma_* : \mathcal{M}_\triangleleft(A^\mathbb{N}) \to \mathcal{M}_\triangleleft(B^\mathbb{N})$ est positif, c'est-à-dire que $\mu \geqslant 0$ entraîne $\sigma_*\mu \geqslant 0$. Cela résulte de la formule d'adjonction (3.8) et de la positivité de $\mathbf{S}^*$ ou, plus directement, de la formule (3.9).

Ergodicité. Une mesure positive invariante μ est appelée *ergodique*, si toute mesure positive invariante $\leqslant \mu$ est colinéaire à μ. Avec cette définition, la mesure 0 est ergodique. L'ergodicité est préservée par les substitutions :

Proposition 3.3. — *Soient $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini, μ une mesure positive invariante sur $A^\mathbb{N}$, et ν une mesure positive invariante sur $B^\mathbb{N}$, telles que $\nu \leqslant \sigma_*\mu$. Il existe alors une mesure positive invariante $\mu' \leqslant \mu$ telle que $\sigma_*\mu' = \nu$.*

Corollaire 3.4. — *Soient $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini, et μ une mesure positive invariante sur $A^\mathbb{N}$. Si μ est ergodique, alors $\sigma_*\mu$ aussi.*

Démonstration. — Ecrivons $\nu = h\cdot(\sigma_*\mu)$, avec $h : B^\mathbb{N} \to [0,1]$ mesurable et invariante ($h\triangleleft = h$) ; voir [13], lemme 10.1. La fonction $h' = hS : A^\mathbb{N} \to [0,1]$ est également mesurable et invariante (pour le décalage sur $A^\mathbb{N}$), donc $\mu' = h' \cdot \mu$ est une mesure invariante sur $A^\mathbb{N}$, positive et $\leqslant \mu$. On voit facilement que

$$\forall\, f \in \mathcal{B}_\mathrm{b}(B^\mathbb{N}) \qquad \mathbf{S}^*(h\cdot f) = h' \cdot (\mathbf{S}^* f)$$

et donc

$$\begin{aligned}\forall\, f \in \mathcal{B}_\mathrm{b}(B^\mathbb{N}) \quad \langle f, \sigma_*\mu'\rangle &= \langle \mathbf{S}^* f, h'\cdot\mu\rangle = \langle h'\cdot(\mathbf{S}^* f), \mu\rangle = \langle \mathbf{S}^*(h\cdot f), \mu\rangle \\ &= \langle h\cdot f, \sigma_*\mu\rangle = \langle f, h\cdot(\sigma_*\mu)\rangle = \langle f, \nu\rangle\end{aligned}$$

ce qui montre que $\sigma_*\mu' = \nu$. □

Entropie. A toute mesure positive invariante μ sur $A^{\mathbb{N}}$ on peut associer son entropie $\mathrm{ent}(\mu)$; la fonctionnelle ent : $\mathcal{M}^+_{\lhd}(A^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}^+$ est additive et homogène, i.e. $\mathrm{ent}(\mu+\nu) = \mathrm{ent}(\mu) + \mathrm{ent}(\nu)$ et $\mathrm{ent}(\lambda\mu) = \lambda\,\mathrm{ent}(\mu)$, pour toutes μ, ν mesures positives invariantes et tout réel $\lambda \geqslant 0$. L'entropie est diminuée par les substitutions :

Proposition 3.5. — *Soit $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini. Pour toute mesure positive invariante μ sur $A^{\mathbb{N}}$,*

$$\mathrm{ent}(\sigma_*\mu) \leqslant \mathrm{ent}(\mu).$$

Démonstration. — Cet énoncé est très similaire à la formule d'Abramov pour l'entropie des systèmes induits, ou des tours [1, 7], et se démontre par les mêmes idées.

Soit $h_\mu : A^{\mathbb{N}} \to [0,\infty]$ la fonction définie par

$$h_\mu(x) = \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mu(x_0\ldots x_{n-1}.A^{\mathbb{N}})$$

C'est une fonction mesurable, vérifiant $h_\mu(\lhd x) \leqslant h_\mu(x)$ et donc p.p. invariante ; il sera commode de considérer également la fonction $\hbar_\mu$ définie par

$$\hbar_\mu(x) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(\lhd^n x) = \inf_{n\geqslant 0} h_\mu(\lhd^n x)$$

qui est exactement invariante et p.p. égale à h_μ. Par le théorème de Shannon–McMillan–Breiman,

$$\mathrm{ent}(\mu) = \int_{A^{\mathbb{N}}} h_\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{A^{\mathbb{N}}} \hbar_\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \tag{3.11}$$

et de même, l'entropie de $\nu = \sigma_*\mu$ est donnée par

$$\mathrm{ent}(\nu) = \int_{B^{\mathbb{N}}} \hbar_\nu(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

Définissons également la fonction (mesurable bornée, invariante) $\ell : A^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^+$ par

$$\ell(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|\sigma(x_0\ldots x_{n-1})|}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{|\sigma x_0| + \cdots + |\sigma x_{n-1}|}{n}.$$

Pour tout $M \geqslant 0$, définissons $h^M_\nu(y) = M \wedge h_\nu(y)$ et similairement $\hbar^M_\nu$. Les fonctions $\hbar^M_\nu$ tendent vers $\hbar_\nu$ en croissant, quand $M \to \infty$, et par le théorème de convergence monotone, les intégrales

$$I(M) = \int_{B^{\mathbb{N}}} \hbar^M_\nu(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

tendent vers $\mathrm{ent}(\nu)$ en croissant. Il suffit donc de montrer que $I(M) \leqslant \mathrm{ent}(\mu)$, pour tout M. Pour cela, nous allons établir que

$$\forall\, x \in A^{\mathbb{N}} \qquad \sigma x_0 \neq \mathbb{1} \implies h_\mu(x) \geqslant h_\nu^M(Sx) \cdot \ell(x) \tag{3.12}$$

En effet, soit x dans $A^{\mathbb{N}}$ tel que $|\sigma x_0| \geqslant 1$, et $n \geqslant 1$ un entier quelconque. La formule (3.9) appliquée au cylindre $E = \sigma(x_0 \dots x_{n-1}).B^{\mathbb{N}}$ donne

$$\begin{aligned}\nu(E) &= \sum_{a\in A} \sum_{0\leqslant i<|\sigma a|} \mu\big\{z \in A^{\mathbb{N}} : z_0 = a \text{ et } \triangleleft^i Sz \in E\big\} \\ &\geqslant \mu\big\{z \in A^{\mathbb{N}} : z_0 = x_0 \text{ et } Sz \in E\big\} \\ &\geqslant \mu(x_0 \dots x_{n-1}.A^{\mathbb{N}})\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}-\log \mu(x_0 \dots x_{n-1}.A^{\mathbb{N}}) &\geqslant -\log \nu(\sigma(x_0 \dots x_{n-1}).B^{\mathbb{N}}) \\ &\geqslant h_\nu^M(Sx)\, |\sigma(x_0 \dots x_{n-1})| + o(n)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}h_\mu(x) &= \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(x_0 \dots x_{n-1}.A^{\mathbb{N}}) \\ &\geqslant h_\nu^M(Sx) \cdot \liminf_{n\to\infty} \frac{|\sigma(x_0 \dots x_{n-1})|}{n} = h_\nu^M(Sx) \cdot \ell(x)\end{aligned}$$

ce qui prouve (3.12).

De (3.12) on peut déduire que

$$\forall\, x \in A^{\mathbb{N}} \qquad h_\mu(x) \geqslant \hbar_\nu^M(Sx) \cdot \ell(x)\,. \tag{3.13}$$

En effet, soit x un point quelconque de $A^{\mathbb{N}}$. L'inégalité est évidente si $\ell(x) = 0$. Inversement, si $\ell(x) > 0$, il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $\sigma x_k \neq \mathbb{1}$, et on peut appliquer (3.12) au point $\triangleleft^k x$ au lieu de x, ce qui donne

$$h_\mu(x) \geqslant h_\mu(\triangleleft^k x) \geqslant h_\mu^M(S\triangleleft^k x) \cdot \ell(\triangleleft^k x) \geqslant \hbar_\mu^M(Sx) \cdot \ell(x).$$

La dualité (3.8) donne

$$\begin{aligned}I(M) &= \int_{B^{\mathbb{N}}} \hbar_\nu^M(y)\, \mathrm{d}\nu(y) = \int_{A^{\mathbb{N}}} (\mathbf{S}^* \hbar_\nu^M)(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{A^{\mathbb{N}}} \hbar_\nu^M(Sx)\ (\mathbf{S}^*\mathbb{1})(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{A^{\mathbb{N}}} |\sigma x_0|\, \hbar_\nu^M(Sx)\, \mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

La mesure $\hbar_\nu^M(Sx)\, \mathrm{d}\mu(x)$ étant invariante, on peut remplacer $|\sigma x_0|$ par n'importe quelle fonction cohomologue, comme $|\sigma x_k|$, et donc, pour tout $n \geqslant 1$,

$$I(M) = \int_{A^{\mathbb{N}}} \frac{|\sigma x_0| + \cdots + |\sigma x_{n-1}|}{n}\, \hbar_\nu^M(Sx)\, \mathrm{d}\mu(x)$$

et par convergence dominée,

$$I(M) = \int_{A^{\mathbb{N}}} \ell(x)\, \hbar_\nu^M(Sx)\, \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \int_{A^{\mathbb{N}}} h_\mu(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \mathrm{ent}(\mu)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Dualité entre σ^* et σ_*. Pour tout monoïde M, notons $\mathrm{Qmh}(M)$ l'ensemble des quasimorphismes homogènes $M \to \mathbb{R}$. Cet espace vectoriel est contravariant en M : tout morphisme de monoïdes $\sigma : M \to M'$ induit une application linéaire $\sigma^* : \mathrm{Qmh}(M') \to \mathrm{Qmh}(M)$, appelée « pull-back » de σ, et définie par $\sigma^*(q) = q \circ \sigma$.

Pour les monoïdes libres de type fini, on a le résultat remarquable suivant : l'opérateur de pull-back $\sigma^* : \mathrm{Qmh}(B^\star) \to \mathrm{Qmh}(A^\star)$ n'est autre que le dual de l'opérateur $\sigma_* : \mathcal{M}_\triangleleft(A^{\mathbb{N}}) \to \mathcal{M}_\triangleleft(B^{\mathbb{N}})$ qu'on vient de construire :

Proposition 3.6. — *Soit $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini. Pour toute mesure invariante μ sur $A^{\mathbb{N}}$, et tout quasimorphisme homogène $q : B^\star \to \mathbb{R}$,*

$$\langle \sigma^* q, \mu \rangle = \langle q, \sigma_* \mu \rangle . \tag{3.14}$$

Démonstration. — Considérons q comme fixé. La relation (3.14) est satisfaite si μ est de la forme $\mathrm{cc}(w)$, car

$$\begin{aligned} \langle \sigma^* q, \mathrm{cc}\, w \rangle &= (\sigma^* q)(w) = q(\sigma w) \\ &= \langle q, \mathrm{cc}(\sigma w) \rangle = \langle q, \sigma_*(\mathrm{cc}\, w) \rangle \end{aligned}$$

L'ensemble des μ réalisant l'égalité (3.14) est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{M}_\triangleleft(A^{\mathbb{N}})$, et comme il contient tous les $\mathrm{cc}(w)$, ça ne peut être que l'espace $\mathcal{M}_\triangleleft(A^{\mathbb{N}})$ tout entier. □

Abélianisation. Pour tout ensemble fini A, définissons la fonction d'abélianisation

$$\mathrm{ab} : A^\star \longrightarrow \mathcal{M}(A)$$

par la formule

$$\begin{aligned} \mathrm{ab}(w) &= \mathrm{Ab}(\mathrm{cc}\, w) \\ &= \sum_{0 \leqslant i < |w|} \mathrm{dirac}(w_i) = \sum_{a \in A} |w|_a \, \mathrm{dirac}(a) \end{aligned}$$

où $|w|_a$ désigne le nombre d'apparitions de la lettre a dans le mot w. Similairement, à toute substitution $\sigma : A^\star \to B^\star$ (avec A, B finis) associons l'application linéaire

$$\mathrm{ab}(\sigma) : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathcal{M}(B)$$

définie par

$$\begin{aligned}(\mathrm{ab}\,\sigma)(\mu) &= \int_A \mathrm{ab}(\sigma a)\,\mathrm{d}\mu(a)\\ &= \sum_{a\in A} \mathrm{ab}(\sigma a)\,\mu\{a\} = \sum_{\substack{a\in A\\ b\in B}} |\sigma a|_b\,\mathrm{dirac}(b)\,\mu\{a\}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'élément de matrice de $\mathrm{ab}(\sigma)$ situé en ligne b et colonne a vaut $|\sigma a|_b$.

On a $\mathrm{ab}(\sigma w) = (\mathrm{ab}\,\sigma)(\mathrm{ab}\,w)$ pour tout mot w de $A^\star$, et similairement $\mathrm{ab}(\sigma\tau) = (\mathrm{ab}\,\sigma)(\mathrm{ab}\,\tau)$ si σ, τ sont deux substitutions composables. Et bien sûr $\mathrm{ab}(\mathrm{Id}_{A^\star}) = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}(A)}$.

Proposition 3.7. — *Soit $\sigma : A^\star \to B^\star$ une substitution entre deux monoïdes libres de type fini. Pour toute mesure invariante μ sur $A^{\mathbb{N}}$, on a*

$$\mathrm{Ab}(\sigma_*\mu) = (\mathrm{ab}\,\sigma)(\mathrm{Ab}\,\mu)\,. \tag{3.15}$$

En particulier, $\mathrm{Ab}\,\mu = 0$ *entraîne* $\mathrm{Ab}(\sigma_*\mu) = 0$.

En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_\triangleleft(A^{\mathbb{N}}) \arrow[r, "\sigma_*"] \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] & \mathcal{M}_\triangleleft(B^{\mathbb{N}}) \arrow[d, "\mathrm{Ab}"'] \\ \mathcal{M}(A) \arrow[r, "\mathrm{ab}\,\sigma"] & \mathcal{M}(B)\,. \end{tikzcd}$$

Démonstration. — La relation (3.15) est satisfaite si μ est de la forme $\mathrm{cc}(w)$, car

$$\begin{aligned}\mathrm{Ab}\big[\sigma_*(\mathrm{cc}\,w)\big] &= \mathrm{Ab}\big[\mathrm{cc}(\sigma w)\big] = \mathrm{ab}(\sigma w)\\ &= (\mathrm{ab}\,\sigma)(\mathrm{ab}\,w) = (\mathrm{ab}\,\sigma)\big[\mathrm{Ab}(\mathrm{cc}\,w)\big].\end{aligned}$$

L'ensemble des μ vérifiant (3.15) est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{M}_\triangleleft(A^{\mathbb{N}})$, et comme il contient tous les $\mathrm{cc}(w)$, ça ne peut être que l'espace $\mathcal{M}_\triangleleft(A^{\mathbb{N}})$ tout entier. □

Antimorphismes. On appelle antimorphisme une fonction $\alpha : A^\star \to B^\star$ vérifiant $\alpha(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ et $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$, pour tous $x, y \in A^\star$. L'argument donné à la fin de la section 2.3 s'applique aussi bien aux morphismes qu'aux antimorphismes, et permet de définir $\alpha_*\mu$ si μ est une mesure invariante à support fini. Ceci amène naturellement à se demander si le théorème 3.2 peut être étendu aux antimorphismes.

La réponse est oui, et pour le voir, le plus simple est de noter que tout antimorphisme est composé d'un morphisme et de l'antimorphisme « canonique »

$$\begin{array}{rccc} I_A: & A^\star & \longrightarrow & A^\star \\ & x_0\dots x_{n-1} & \longmapsto & x_{n-1}\dots x_0 \end{array}$$

c.à.d. l'unique anti-endomorphisme de $A^\star$ qui fixe ses générateurs. Il suffit donc de traiter le cas de l'antimorphisme canonique.

On se rappelle également que l'isomorphisme naturel $\Pi_+ : \mathcal{M}_\triangleleft(A^\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_\triangleleft(A^\mathbb{N})$ est *isométrique* pour les normes de réarrangement (voir [4], proposition 4.1) ; on considérera donc les mesures invariantes comme vivant sur $A^\mathbb{Z}$. L'application

$$\begin{array}{rccc} J_A: & A^\mathbb{Z} & \longrightarrow & A^\mathbb{Z} \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & (x_{-i})_{i\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

est un antimorphisme du système dynamique $(A^\mathbb{Z}, \triangleleft)$, et induit donc une application linéaire $(J_A)_*$ de $\mathcal{M}_\triangleleft(A^\mathbb{Z})$ dans lui-même, involutive et isométrique (voir [4], formule (4.2)). On voit facilement que

$$(J_A)_*\big[\mathrm{cc}(w)\big] = \mathrm{cc}\big[I_A(w)\big]$$

pour tout mot w, ce qui montre que cette application $(J_A)_*$ est bien celle recherchée (comme induite de I_A).

Le théorème 3.2 est donc valable aussi bien pour les morphismes que les antimorphismes ; non seulement l'existence de σ_* mais aussi les majorations (3.4) et (3.5). La connaissance explicite de l'application $(I_A)_*$ permet également d'étendre les résultats de la présente section (et de la suivante) aux σ qui sont des antimorphismes.

3.3. Familles auto-substitutives de mesures

On voudrait construire, et étudier, des familles paramétrées de mesures positives invariantes sur $A^\mathbb{N}$ (ou $A^\mathbb{Z}$) ayant une propriété d'« auto-substitutivité », c'est-à-dire telles que tout élément de la famille puisse s'écrire, d'une manière non triviale, sous la forme $\sigma_*\mu$ avec σ une substitution (ou un antimorphisme) et μ un autre élément de la famille.

L'exemple classique d'une telle famille auto-substitutive est celle des *mesures sturmiennes* : à tout couple (x_0, x_1) de réels positifs, on associe une mesure positive invariante $\mathfrak{st}(x_0, x_1)$ sur $\{0,1\}^\mathbb{N}$ (ou $\{0,1\}^\mathbb{Z}$), où les symboles $0, 1$ apparaissent avec les masses x_0, x_1 et, en un sens, alternent « aussi régulièrement que possible » ; ces mesures sont intimement liées aux *suites sturmiennes* [12] qui en sont le support. On peut les définir de différentes manières. Ici, on s'intéressera au fait que cette famille $\mathfrak{st} : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathcal{M}^+_{\triangleleft}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall\, x_0, x_1 \in \mathbb{R}^+ \quad \begin{cases} \mathrm{Ab}(\mathfrak{st}(x_0,x_1)) = x_0 \,\mathrm{dirac}(0) + x_1 \,\mathrm{dirac}(1) \\ \mathfrak{st}(x_0+x_1, x_1) = (\sigma_0)_* \,\mathfrak{st}(x_0,x_1) \\ \mathfrak{st}(x_0, x_0+x_1) = (\sigma_1)_* \,\mathfrak{st}(x_0,x_1) \end{cases} \tag{3.16}$$

où σ_0, σ_1 sont les endomorphismes de $\{0,1\}^\star$ définis par $\sigma_0(0) = 0$, $\sigma_0(1) = 01$, et $\sigma_1(0) = 10$, $\sigma_1(1) = 1$. Cela amène deux questions : les formules (3.16) constituent-elles une caractérisation de la fonction $\mathfrak{st}$, et si oui, peut-on déduire de ces formules les propriétés de base des mesures sturmiennes ?

Notons d'abord que la première formule, qui spécifie $\mathrm{Ab}(\mathfrak{st}(x_0,x_1))$, suffit à déterminer $\mathfrak{st}(x_0,x_1)$ si x_0 ou x_1 est nul : on a nécessairement $\mathfrak{st}(x_0,0) = x_0 \,\mathrm{cc}(0)$ et $\mathfrak{st}(0,x_1) = x_1 \,\mathrm{cc}(1)$. A partir de là, les deux autres formules permettent de calculer $\mathfrak{st}$ sur la diagonale de $(\mathbb{R}^+)^2$, et de proche en proche, sur toutes les demi-droites de pente rationnelle. Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathfrak{st}(3,2) &= (\sigma_0)_* \,\mathfrak{st}(1,2) = (\sigma_0\sigma_1)_* \,\mathfrak{st}(1,1) = (\sigma_0\sigma_1^2)_* \,\mathfrak{st}(1,0) \\ &= (\sigma_0\sigma_1^2)_* \,\mathrm{cc}(0) = \mathrm{cc}\big(\sigma_0\sigma_1^2(0)\big) = \mathrm{cc}(01010)\,. \end{aligned}$$

Comme on le voit, le calcul de $\mu_0 = \mathfrak{st}(x_0,x_1)$ est très lié à l'algorithme d'Euclide sur le couple (x_0,x_1) ; on écrit $\mu_0 = \sigma_*\mu_1$, où μ_1 est une autre mesure sturmienne de paramètres plus petits, et on recommence jusqu'à tomber sur une mesure μ_n connue. Si x_1/x_0 est rationnel, cet algorithme s'arrête en un temps fini, et détermine explicitement μ_0.

En revanche, si x_1/x_0 est irrationnel, cet algorithme ne s'arrête jamais : les mesures μ_n forment une suite infinie d'inconnues ; toutefois, leurs homologies $\mathrm{Ab}\,\mu_n$ sont connues, et tendent vers 0. Cela nous amène à l'énoncé suivant :

Théorème 3.8. — *Soit A un ensemble fini, $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ une suite d'endomorphismes de $A^\star$, et $\nu_0, \nu_1, \ldots$ une suite de mesures positives sur A telles que $\nu_n = (\mathrm{ab}\,\sigma_n)(\nu_{n+1})$ pour tout n, et $\|\nu_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$.*

Alors, il existe une et une seule suite $\mu_0, \mu_1, \ldots$ de mesures positives invariantes sur $A^{\mathbb{N}}$ telles que $\mu_n = (\sigma_n)_*(\mu_{n+1})$ et $\mathrm{Ab}\,\mu_n = \nu_n$ pour tout n.

En outre, ces mesures μ_n sont d'entropie nulle, et vérifient

$$\Big\| \mu_n - \sum_{a\in A} \nu_m\{a\} \cdot \mathrm{cc}\big(\sigma_n\sigma_{n+1}\cdots\sigma_{m-1}(a)\big) \Big\|_R \leqslant 2\,\|\nu_m\| \tag{3.17}$$

pour tout $m \geqslant n$.

Démonstration.

Existence. — Munissons $\left[\mathcal{M}^{+}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})\right]^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit des topologies de réarrangement ; comme je l'ai rappelé en §2.1, la topologie de réarrangement sur $\mathcal{M}^{+}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})$ n'est autre que la topologie de la convergence faible des mesures.

Pour tout entier naturel N, soit K_N le sous-ensemble de $\left[\mathcal{M}^{+}_{\triangleleft}(A^{\mathbb{N}})\right]^{\mathbb{N}}$ constitué de toutes les suites $(\mu_0, \mu_1, \ldots)$ telles que $\mathrm{Ab}\,\mu_n = \nu_n$ pour tout n, et $\mu_n = (\sigma_n)_*(\mu_{n+1})$ pour tout $n < N$. Par sa structure produit, K_0 est compact, et les K_N forment une suite décroissante de parties fermées de K_0. En outre, chacun des K_N est non vide : il contient par exemple la suite (μ_n) définie (récursivement !) par

$$\mu_n = \begin{cases} \sum_{a\in A} \nu_n\{a\} \cdot \mathrm{cc}(a) & \text{si } n \geqslant N, \\ (\sigma_n)_*(\mu_{n+1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'intersection des K_N est donc aussi compacte et non vide, ce qui résout la question de l'existence.

Unicité. — Supposons que deux suites (μ_n) et (μ'_n) soient solutions du problème. Pour tout $n \geqslant 0$ et tout $m \geqslant n$, on peut écrire $\mu_n = \tau_*\mu_m$ et $\mu'_n = \tau_*\mu'_m$, avec $\tau = \sigma_n \cdots \sigma_{m-1}$. Sachant que μ_m et μ'_m ont même homologie, i.e. $\mathrm{Ab}\,\mu_m = \mathrm{Ab}\,\mu'_m$, l'inégalité (3.6) s'applique à $\mu'_m - \mu_m$:

$$\|\mu'_n - \mu_n\|_R \leqslant \|\mu'_m - \mu_m\|_R \leqslant \|\mu'_m\|_R + \|\mu_m\|_R = 2\,\|\nu_m\|$$

et en faisant tendre $m \to \infty$ (avec n fixé), il vient $\|\mu'_n - \mu_n\|_R = 0$, et donc $\mu_n = \mu'_n$, quel que soit n.

Autres propriétés. — Soit (μ_n) vérifiant les conditions du théorème. Pour tout $n \geqslant 0$ et tout $m \geqslant n$, on peut écrire $\mu_n = \tau_*\mu_m$, avec $\tau = \sigma_n \cdots \sigma_{m-1}$. La proposition 3.5 donne $\mathrm{ent}(\mu_n) \leqslant \mathrm{ent}(\mu_m) \leqslant \|\nu_m\|\,(\log \#A)$, et en faisant tendre $m \to \infty$ (avec n fixé), il vient $\mathrm{ent}(\mu_n) = 0$.

Ensuite, la mesure μ_m a même homologie que $\bar{\mu}_m = \sum_{a\in A} \nu_m\{a\} \cdot \mathrm{cc}(a)$, donc

$$\|\mu_n - \tau_*\bar{\mu}_m\|_R \leqslant \|\mu_m - \bar{\mu}_m\|_R \leqslant \|\mu_m\|_R + \|\bar{\mu}_m\|_R = 2\,\|\nu_m\|$$

d'après (3.6), et cela donne l'inégalité (3.17). □

Par ce théorème, on voit que les mesures $\mathfrak{st}(x_0, x_1)$ sont entièrement déterminées par les conditions d'auto-substitutivité, même si x_1/x_0 est irrationnel. Les conditions (3.16) constituent donc bien une caractérisation de la famille $\mathfrak{st}$, et même une caractérisation effective puisqu'elle s'accompagne d'un procédé de calcul, avec la formule (3.17).

Les mesures sturmiennes sont des codages d'échanges de deux intervalles. Plus généralement, l'induction de Rauzy–Veech permet d'écrire des propriétés d'auto-substitutivité pour tous les codages d'échanges d'intervalles (vus comme mesures).

Le théorème 3.8 permet d'aller plus loin et de définir, *à partir* des conditions d'auto-substitutivité, des familles de mesures qu'on ne saurait pas définir autrement (par exemple, comme codage d'un système dynamique déjà connu). Bien sûr, l'idée de construire des systèmes dynamiques symboliques par emboîtement d'une infinité de substitutions n'est pas nouvelle ; elle est à la base de la théorie des systèmes « adiques » [14]. Mais cette théorie est essentiellement du ressort de la dynamique topologique : on construit des sous-shifts de $A^{\mathbb{N}}$ avant de s'intéresser aux mesures qu'ils portent. A l'inverse, le théorème 3.8 concerne uniquement la suite de mesures μ_n, et non pas leurs supports, et la prescription des homologies $\mathrm{Ab}\,\mu_n$, qui est naturelle dans ce cadre, permet de contourner un point délicat dans la théorie des systèmes adiques, à savoir l'unique ergodicité [3, 8, 9].

En particulier, on aimerait définir des analogues des mesures sturmiennes avec 3 symboles ou davantage. Dans un article à venir, je présenterai une famille $(\mathbb{R}^+)^3 \to \mathcal{M}^+_{\lhd}(\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}})$ candidate pour généraliser à 3 symboles la famille $\mathfrak{st}$. Elle est obtenue par des conditions d'optimisation ergodique, et vérifie des conditions d'auto-substitutivité. Ce travail n'étant pas encore très avancé, je n'en dirai pas plus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. M. Abramov, « The entropy of a derived automorphism », *Doklady Akad. Nauk SSSR* **128** (1959), p. 647-650.

[2] C. Bavard, « Longueur stable des commutateurs », *Enseign. Math.* **37** (1991), n° 1-2, p. 109-150.

[3] S. I. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets & B. Solomyak, « Invariant measures on stationary Bratteli diagrams », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **30** (2010), n° 4, p. 973-1007.

[4] T. Bousch, « La distance de réarrangement, duale de la fonctionnelle de Bowen », *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **32** (2012), n° 3, p. 845-868.

[5] T. Bousch & J. Mairesse, « Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture », *J. Am. Math. Soc.* **15** (2002), n° 1, p. 77-111.

[6] D. Calegari, *scl*, MSJ Memoirs, vol. 20, Mathematical Society of Japan, 2009, xii+209 pages.

[7] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin & Y. G. Sinaĭ, *Ergodic theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 245, Springer, 1982, x+486 pages.

[8] S. Ferenczi, A. M. Fisher & M. Talet, « Minimality and unique ergodicity for adic transformations », *J. Anal. Math.* **109** (2009), p. 1-31.

[9] A. M. Fisher, « Nonstationary mixing and the unique ergodicity of adic transformations », *Stoch. Dyn.* **9** (2009), n° 3, p. 335-391.

[10] I. Kapovich, « The frequency space of a free group », *Internat. J. Algebra Comput.* **15** (2005), n° 5-6, p. 939-969.

[11] D. Kotschick, « What is ...a quasi-morphism ? », *Notices Am. Math. Soc.* **51** (2004), n° 2, p. 208-209.

[12] M. Morse & G. A. Hedlund, « Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories », *Am. J. Math.* **62** (1940), p. 1-42.

[13] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand, 1966, v+130 pages.

[14] A. M. Vershik & A. N. Livshits, « Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics », in *Representation theory and dynamical systems*, Advances in Soviet Mathematics, vol. 9, American Mathematical Society, 1992, p. 185-204.

Manuscrit reçu le 10 avril 2013,
révisé le 17 août 2015,
accepté le 6 décembre 2016.

Thierry BOUSCH
Laboratoire de Mathématique (UMR 8628 du CNRS), bât. 425/430
Université de Paris-Sud
91405 Orsay Cedex (France)
thierry.bousch@math.u-psud.fr