



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Pierre-Henri CHAUDOUARD & Gérard LAUMON

**Addendum à « Un théorème du support pour la fibration de Hitchin »**

Tome 67, n° 3 (2017), p. 1005-1008.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2017\\_\\_67\\_3\\_1005\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2017__67_3_1005_0)



© Association des Annales de l'institut Fourier, 2017,

*Certains droits réservés.*



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier »  
(<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales  
d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>).

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## ADDENDUM À « UN THÉORÈME DU SUPPORT POUR LA FIBRATION DE HITCHIN »

par Pierre-Henri CHAUDOUARD & Gérard LAUMON (\*)

---

RÉSUMÉ. — Cet addendum apporte deux précisions à « Un théorème du support pour la fibration de Hitchin » : il corrige légèrement la démonstration du résultat principal et précise que celui-ci vaut encore en caractéristique positive plus grande que le rang.

ABSTRACT. — This addendum gives precisions to “A support theorem for the Hitchin fibration”: first it slightly corrects the proof of the main result and second it notices that the result is still true when the characteristic is positive and greater than the rank.

Les notations et les références renvoient, sauf mention contraire, à [1].

### 1. Sur la démonstration du théorème 9.1

Mark Andrea de Cataldo, nous l’en remercions, nous a signalé quelques faiblesses de rédaction dans la démonstration du résultat central (théorème 9.1) : la distinction entre points géométriques et points de Zariski est parfois obscure et l’égalité incorrecte de dimensions (ligne 12 p. 721) doit être remplacée par l’inégalité (1.1) ci-dessous. Pour que les choses soient claires, on reprend dans ce qui suit les arguments.

Soit  $\Lambda_n$  l’ensemble des couples  $(\underline{n}, \underline{m})$  de suites  $\underline{n} = (n_1 \geq \dots \geq n_s)$  et  $\underline{m} = (m_1, \dots, m_s)$  d’entiers strictement positifs telles que

$$m_{i+1} \geq m_i \text{ si } n_{i+1} = n_i, \forall i = 1, \dots, s-1,$$

et

$$n = n_1 m_1 + \dots + n_s m_s.$$

---

*Mots-clés* : Fibration de Hitchin, faisceaux pervers, théorème de décomposition, cohomologie relative.

*Classification math.* : 14F20, 14D20, 14D24.

(\*) Pierre-Henri Chaudouard a bénéficié du support de l’Institut Universitaire de France et des projets Ferplay ANR-13-BS01-0012 et Vargen ANR-13-BS01-0001-01 de l’ANR.

Pour chaque  $\lambda = (\underline{n}, \underline{m})$  on a un morphisme fini

$$\iota_\lambda : \mathbb{A}_{n_1} \times_k \cdots \times_k \mathbb{A}_{n_s} \rightarrow \mathbb{A}_n$$

défini par  $P_{\iota_\lambda(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s)}(u) = P_{\bar{a}_1}^{m_1}(u) \cdots P_{\bar{a}_s}^{m_s}(u)$  pour tous points géométriques  $\bar{a}_i$  de  $\mathbb{A}_{n_i}$ .

Pour chaque point géométrique  $\bar{a}$  de  $\mathbb{A}_n$ , il existe un unique  $\lambda = \lambda(\bar{a}) \in \Lambda_n$  tel que  $\bar{a}$  puisse s'écrire  $\bar{a} = \iota_\lambda(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s)$  où les  $\bar{a}_i$  sont des points géométriques des  $\mathbb{A}_{n_i}^{\text{ell}}$  tels que  $P_{\bar{a}_i}(u) \neq P_{\bar{a}_j}(u), \forall i \neq j$ . Les  $X_{n_i, \bar{a}_i}$  sont les composantes irréductibles de  $X_{\bar{a}}$  et, pour chaque  $i, m_i$  est la multiplicité de  $X_{n_i, \bar{a}_i}$  dans le diviseur de Cartier  $X_{\bar{a}}$ .

Pour tout  $\lambda \in \Lambda_n$ , on définit une partie localement fermée  $\mathbb{A}_{n, \lambda}$ , incluse dans l'image de  $\iota_\lambda$  dans  $\mathbb{A}_n$ , par la condition  $\lambda(\bar{a}) = \lambda$ . On obtient alors une stratification, la strate ouverte étant  $\mathbb{A}_{n, ((n), (1))} = \mathbb{A}_n^{\text{ell}}$  et la strate fermée étant la strate « nilpotente »  $\mathbb{A}_{n, ((1), (n))}$ .

Soit  $\lambda \in \Lambda_n$  et  $a$  un point de Zariski de  $\mathbb{A}_{n, \lambda} \subset \mathbb{A}_n$ . Ce dernier est l'image par  $\iota_\lambda$  d'un point  $\tilde{a}$  de  $\mathbb{A}_{n_1} \times_k \cdots \times_k \mathbb{A}_{n_s}$  dont on note  $a_i$  la projection sur  $\mathbb{A}_{n_i}^{\text{ell}}$ . On a donc (les barres signifiant les adhérences)

$$\overline{\{\tilde{a}\}} \subset \overline{\{a_1\}} \times_k \cdots \times_k \overline{\{a_s\}}$$

et donc

$$(1.1) \quad d_a = d_{\bar{a}} \leq d_{a_1} + \cdots + d_{a_s}.$$

On peut trouver des points géométriques  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s$  localisés en  $a_1, \dots, a_s$  de sorte que  $\bar{a} = \iota_\lambda(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s)$  soit un point géométrique localisé en  $a$ . Écrivons  $\lambda = (\underline{n}, \underline{m}) \in \Lambda_n$  et posons  $n' = n_1 + \cdots + n_s$ . On définit le point géométrique  $\bar{a}'$  de  $\mathbb{A}_{n'}^{\text{grss}}$  par  $P_{\bar{a}'}(u) = P_{\bar{a}_1}(u) \cdots P_{\bar{a}_s}(u)$ . Ainsi  $X_{\bar{a}'}$  n'est autre que la courbe réduite  $(X_{\bar{a}})_{\text{red}}$ .

On a un homomorphisme de restriction de  $X_{\bar{a}}$  à  $X_{\bar{a}'}$

$$J_{n, \bar{a}} \rightarrow J_{n', \bar{a}'}$$

qui est surjectif, et dont le noyau est affine et est une extension successive de copies du groupe additif. De plus on a un homomorphisme

$$J_{n', \bar{a}'} \rightarrow J_{n_1, \bar{a}_1} \times_k \cdots \times_k J_{n_s, \bar{a}_s}$$

qui est lui aussi surjectif à noyau affine. Par définition de  $d_a^{\text{ab}}$  et des  $d_{a_i}^{\text{ab}}$ , on déduit de ce qui précède l'égalité

$$(1.2) \quad d_a^{\text{ab}}(J_n) = d_{a_1}^{\text{ab}}(J_{n_1}) + \cdots + d_{a_s}^{\text{ab}}(J_{n_s}).$$

Supposons, de plus,  $a \in \text{Socle}(Rf_{n, * }^{\text{st}} \mathbb{Q}_\ell)$ . Alors on a, d'une part,

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} + d_a \geq d_a^{\text{ab}}(J_n)$$

d'après le théorème 7.2 (voir le paragraphe 4.12 de [3] pour l'hypothèse sur la polarisation), et, d'autre part, pour chaque  $i$ ,

$$d_{a_i}^{\text{ab}}(J_{n_i}) \geq d_{f_{n_i}} - d_{\mathbb{A}_{n_i}} + d_{a_i}$$

d'après le théorème 7.3 appliqué à  $a_i \in \mathbb{A}_{n_i}^{\text{ell}}$ . Combinant ces deux dernières inégalités avec l'égalité (1.2), on obtient

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} + d_a \geq \sum_{i=1}^s (d_{f_{n_i}} - d_{\mathbb{A}_{n_i}} + d_{a_i})$$

En tenant compte de l'égalité

$$d_{f_n} - d_{\mathbb{A}_n} = n(2g - 2 - d) + 1$$

et de l'inégalité (1.1), il vient

$$1 - s \geq (n - n_1 - \dots - n_s)(d - 2g + 2)$$

qui n'est possible que si  $s = 1$  et  $n_1 = n$ , c'est-à-dire  $\mathbb{A}_{n,\lambda} = \mathbb{A}_n^{\text{ell}}$  puisque l'on a supposé  $d > 2g - 2$ .

## 2. Sur la restriction sur la caractéristique

Un ingrédient crucial dans la démonstration du théorème 9.1 est une inégalité de type Severi (théorème 7.3). Longtemps celle-ci ne fut connue qu'en caractéristique nulle. Or récemment, Melo, Rapagnetta et Viviani ont donné une démonstration de cette inégalité valable en toute caractéristique (cf. [2, théorème 3.3]). Il s'ensuit que le théorème principal (théorème 9.1) vaut pour un corps de caractéristique  $> n$ . Notons alors le corollaire suivant du théorème 9.1 et de la formule des traces de Grothendieck–Lefschetz.

**COROLLAIRE 2.1.** — *Soit  $X$  une courbe géométriquement connexe, projective et lisse sur un corps fini de caractéristique  $> n$ . Le nombre de classes d'isomorphie de fibrés de Hitchin sur  $X$ , stables de rang  $n$  et de degré  $e$  premier au rang ne dépend pas de  $e$ .*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.-H. CHAUDOUARD & G. LAUMON, « Un théorème du support pour la fibration de Hitchin », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **66** (2016), n° 2, p. 711-727.
- [2] M. MELO, A. RAPAGNETTA & F. VIVIANI, « Fourier–Mukai and autoduality for compactified Jacobians. I », <https://arxiv.org/abs/1207.7233>, 2012.
- [3] B. C. NGÔ, « Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2010), n° 111, p. 1-169.

Manuscrit reçu le 6 juin 2016,  
accepté le 1<sup>er</sup> mars 2017.

Pierre-Henri CHAUDOUARD  
Université Paris-Diderot (Paris 7) et Institut  
Universitaire de France  
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive  
Gauche  
UMR 7586  
Bâtiment Sophie Germain, Case 7012  
75205 PARIS Cedex 13 (France)  
Pierre-Henri.Chaudouard@imj-prg.fr

Gérard LAUMON  
CNRS et Université Paris-Sud  
UMR 8628  
Mathématique, Bâtiment 425  
91405 Orsay Cedex (France)  
gerard.laumon@math.u-psud.fr