ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Hadda HMILI & Isabelle LIOUSSE

Dynamique des échanges d'intervalles des groupes de Higman-Thompson $V_{r,m}$

Tome 64, nº 4 (2014), p. 1477-1491.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2014__64_4_1477_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
64, 4 (2014) 1477-1491

DYNAMIQUE DES ÉCHANGES D'INTERVALLES DES GROUPES DE HIGMAN-THOMPSON $V_{r,m}$

par Hadda HMILI & Isabelle LIOUSSE

Résumé. — Dans cet article, nous étudions la dynamique des échanges d'intervalles affines dont les pentes sont des puissances d'un même entier m et dont les coupures et leurs images sont des rationnels. Nous montrons qu'une telle application a une dynamique très simple : toutes ses orbites sont propres et elle possède au moins une orbite périodique ou un cycle périodique. Comme corollaire de ce résultat, nous montrons que les éléments de distortion dans les groupes de Higman-Thompson $V_{r,m}$ sont ceux d'ordre fini.

Abstract. — In this paper, we study the dynamics of affine interval exchange transformations, whose slopes are integer powers of the same integer m, and whose cuts and their images are rational. We prove that such a map has very simple dynamics: all its orbits are proper and it has at least one periodic orbit or periodic cycle. As a corollary, we obtain that a distortion element of the Higman-Thompson group $V_{r,m}$ is of finite order.

1. Introduction

Les groupes de bijections affines par morceaux du cercle de type fini sont connus pour avoir fourni d'intéressants exemples de groupes dénombrables. En 1965, R. Thompson exhiba les groupes T et V de bijections dyadiques de l'intervalle comme premiers exemples de groupes infinis simples et de type fini. Depuis, de nombreux travaux sur les groupes de Thompson ont été effectués. Un article introductif et de survol sur les groupes de Thompson est [7]. Dans [9], Ghys et Sergiescu ont étudié la dynamique des actions différentiables de T sur le cercle. L'action standard contenant toutes les rotations d'angle dyadique a toutes ses orbites denses. Cependant, Ghys

Mots-clés : échanges d'intervalles affines, groupes, orbites périodiques, éléments de distortion.
Classification math. : 37E05, 37C85, 20F05.

et Sergiescu ont montré qu'il existe une action lisse de T semi-conjuguée à l'action standard et qui possède un minimal exceptionnel sur S^1. En résulte, par le théorème de Denjoy et l'invariance par semi-conjugaison du nombre de rotation, que le nombre de rotation de tout homéomorphisme dyadique du cercle est rationnel. Ensuite, différentes preuves de ce résultat ont été données par I. Liousse [16], V. Kleptsyn [14] et D. Calegari [5]. Ces preuves ne nécessitent pas l'existence d'un lissage de T. La preuve de Liousse utilise les inégalités de Denjoy pour les homéomorphismes de classe P. Celles de Kleptsyn et Calegari évitent totalement la théorie de Denjoy.

Dans cet article, nous généralisons ce résultat aux groupes de Higman-Thompson $V_{r,m}$ (pour la définition, voir 1.3). Plus précisément, nous montrons que tout élément de $V_{r,m}$ a ses orbites propres et possède au moins une orbite périodique ou un cycle périodique. Nous avons récemment appris qu'un résultat analogue se trouve dans le travail de [3]. La preuve qui y est donnée est “combinatoire” (basée sur la représentation d'un élément de $V_{r,m}$ comme classe d'équivalence de paire d'arbres). La preuve proposée ici est “dynamique”(basée sur la représentation d'un élément de $V_{r,m}$ comme échange d'intervalles affine) et inspirée par celle de [16].

1.1. Échanges d'intervalles affines par morceaux de $[0,r[$, $r \in \mathbb{N}^*$

Définition 1.1.

- *On dit que f est un* ***échange d'intervalles affine par morceaux*** *(ou* ***AIET****) de $[0,r[$ s'il existe une subdivision finie $0 = a_0 < a_1 < .... < a_p = r$ de $[0,r[$ telle que pour tout $i = 0,...,p-1$, on a $f(x) = \lambda_i x + \beta_i$ pour $x \in [a_i, a_{i+1}[$, où $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta_i \in \mathbb{R}$.*
- *Les a_i sont les* ***points de coupure*** *de f. Leur ensemble est noté $\mathcal{D}(f)$ (un point de coupure peut être une discontinuité de f et/ou de sa dérivée Df).*
- *Les λ_i sont les* ***pentes*** *de f.*
- *On note $\mathcal{A}_r$ le groupe constitué des AIET de $[0,r[$.*

Remarque 1.2. — Tout homéomorphisme f du cercle $S_r = [0,r]/(0=r)$ peut être vu comme la bijection $[0,r[\to [0,r[$, $x \mapsto f(x)(\mathrm{mod}\ r)$. Lorsque cette bijection de $[0,r[$ est un AIET, on dit que f est un homéomorphisme affine par morceaux. Dans toute la suite, nous considérerons les homéomorphismes affines par morceaux de S_r comme des AIET de 2-intervalles de $[0,r[$.

1.2. Notions dynamiques

- On appelle ***orbite*** d'un point $a \in [0, r[$, l'ensemble $O_f(a) := \{f^n(a), n \in \mathbb{Z}\}$.
- On appelle ***orbite positive*** [resp. ***négative***] de a, l'ensemble $O_f^+(a) := \{f^n(a), n \in \mathbb{N}\}$ [resp. $O_f^-(a) := \{f^{-n}(a), n \in \mathbb{N}\}$.
- L'orbite $O_f(a)$ du point a est dite :

  – ***périodique*** si elle est finie (cela signifie qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{n_0}(a) = a$),

  – ***propre*** s'il existe un voisinage V_a de a tel que $V_a \cap O_f(a) = \{a\}$,

  – ***récurrente*** si, pour tout voisinage V_a de a, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n(a) \in V_a$.
- On appelle ***cycle périodique*** un ensemble de la forme $\{a_i, f_-(a_i), ..., f_-^{p-1}(a_i)\}$ avec $f_-^p(a_i) = a_i$, où $f_-(a) = \lim\limits_{x \to a_-} f(x)$.
- On dit que x appartient à ***l'ensemble limite*** w_a de a (resp. α_a de a) si et seulement si il existe $t_n \to +\infty$(resp. $t_n \to -\infty$) tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{t_n}(a) = x$ (resp. $\lim\limits_{n \to -\infty} f^{t_n}(a) = x$).

1.3. Groupes de Higman-Thompson

DÉFINITION 1.3 ([13], voir aussi [4] ou [20]). — *On définit* ***le groupe de Higman-Thompson*** $V_{r,m}$ *(resp. $T_{r,m}$) comme l'ensemble des $f \in \mathcal{A}_r$ (resp. des homéomorphismes affines par morceaux f de S_r) tels que :*

i) *les pentes de f sont des puissances entières de m,*

ii) *les points de coupure de f appartiennent à $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] = \left\{\frac{N}{m^s}, N \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}\right\}$ et*

iii) *les images par f des points de coupure de f appartiennent à $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right]$.*

Remarque 1.4. — On vérifie facilement que $V_{r,m}$ et $T_{r,m}$ sont des groupes. D'après la remarque 1.2, le groupe $T_{r,m}$ s'injecte naturellement dans $V_{r,m}$. On retrouve les groupes de Thompson classiques en posant $V = V_{1,2}$ et $T = T_{1,2}$.

Exemples 1.5.

1) Une rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ sur le cercle S_1 définit un élément de $T_{1,m}$.

2) Un exemple d'élément de $V_{1,m}$ est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{m} + (1 - \frac{1}{m^2}) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{m}[, \\ x & \text{si } x \in [\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m^2}[, \\ mx - (m - \frac{1}{m}) & \text{si } x \in [1 - \frac{1}{m^2}, 1[. \end{cases}$$

Dans cet exemple, les coupures de f sont les discontinuités de f.

1.4. Résultats principaux

Le résultat principal de cet article est une généralisation du théorème ci-dessous démontré par I. Liousse :

Théorème 1.6 ([17]). — *Soient $m \geqslant 2$, $r \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ des entiers. Alors :*

A) Tout élément de $T_{r,m}$ a des points périodiques.

B) $T_{r,m}$ contient un élément d'ordre q, $q \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si pgcd$(m-1, q)$ divise r.

Plus précisément, on montre le théorème suivant :

Théorème 1.7. — *Soient $m \geqslant 2$, $r \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ des entiers. Alors :*

A) Tout élément f de $V_{r,m}$ a au moins une orbite périodique ou un cycle périodique. De plus, toutes ses orbites sont propres et ont pour ensembles limites des orbites ou cycles périodiques.

B) $V_{r,m}$ contient des éléments d'ordre quelconque.

Remarque 1.8. — Plus généralement, le théorème précédent reste vrai pour tout AIET dont les pentes sont des puissances d'un même entier m et dont les coupures et leurs images sont rationnelles (voir le commentaire en début de la section suivante).

Comme corollaire de ce théorème, nous montrons que les éléments de distortion dans les groupes de Higman-Thompson $V_{r,m}$ (ou plus généralement dans le groupe des AIET dont les pentes sont des puissances d'un même entier m et dont les coupures et leurs images sont rationnelles) sont ceux d'ordre fini.

La notion d'élément de distorsion dans un groupe abstrait a été introduite par Gromov (voir [11] Chapitre 3). L'étude des éléments de distorsion des groupes de difféomorphismes ou d'homéomorphismes d'une variété trouve son origine dans une question de Franks et Handel (voir [8]).

En particulier, dans [6], Calegari et Freedman ont prouvé que tout homéomorphisme de la sphère S^N est distordu dans le groupe des homéomorphismes de S^N. Ensuite, Avila [2] a montré que dans le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^∞, tout élément récurrent est distordu. Récemment, Novak ([18], Théorème 1.3) a établi que les seuls éléments distordus dans le groupe des échanges d'intervalles sont ceux d'ordre fini.

Définition 1.9. — *Soit G un groupe engendré par une partie finie $S = \{f_1, ..., f_s\}$ symétrique de G. On note $l_S(g) = \inf \left\{ l \in \mathbb{N} \text{ tel que } \exists (i_k)_k \in \{1, ..., s\}^l \text{ avec } g = \prod_{k=1}^{l} f_{i_k} \right\}$.*

*Un élément g est dit **distordu** (ou **de distortion**) dans G si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0$.*

Plus généralement si G n'est pas finiment engendré, on dit qu'un élément g est distordu dans G s'il existe une partie finie S de G telle que g appartient au groupe engendré par S et est distordu dans ce groupe.

On remarque qu'un élément g est distordu dans G si et seulement si toutes ses puissances non triviales le sont.

Corollaire 1.10. — *Un élément est distordu dans $V_{r,m}$ si et seulement s'il est d'ordre fini.*

Remerciements. Nous remercions Andrés Navas pour nous avoir posé la question d'existence d'éléments de distortion d'ordre infini dans les groupes d'échanges d'intervalles affines et indiqué quelques pistes. Nous remercions Aziz El Kacimi pour avoir permis et soutenu notre collaboration. Nous remercions le referee pour ses commentaires.

2. Preuve de la partie A du résultat principal

Soit $f \in V_{r,m}$ un AIET de $[0, r[$ (ou plus généralement un AIET dont les pentes sont des puissances de m et dont les coupures ainsi que leurs images sont rationnelles). On peut conjuguer f par une homothétie de rapport R de sorte que les points de coupure de la conjuguée de f ainsi que leurs images soient des entiers (il suffit de prendre R le *ppcm* des dénominateurs des points de coupure de f). On peut donc supposer, sans perte de généralité que f est un AIET dont les pentes sont des puissances de m et les points de coupure et leurs images sont des entiers.

Pour tout $x \in [0, r[$, on a $f(x) = m^{e(x)}x + \frac{p(x)}{m^{k(x)}}$, avec $e(x) \in \mathbb{Z}$, $p(x) \in \mathbb{Z}$ et $k(x) \in \mathbb{N}$. les trois fonctions e, p et k sont des fonctions bornées par des constantes qui ne dépendent ni de x, ni des itérées de f.

2.1. Les orbites de $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ sont propres

Proposition 2.1. — *Les orbites des points de $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ sont propres.*

Soit $\theta \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$, si l'orbite de θ est périodique, alors elle est propre ; dans la suite nous supposerons donc que l'orbite de θ n'est pas périodique et nous montrerons qu'elle est propre.

Lemme 2.2. — *Soit $\theta \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ d'orbite non périodique, alors $N_n(\theta) \to +\infty$, où $N_n(\theta)$ est l'entier tel que $f^n(\theta) = \frac{M_n(\theta)}{m^{N_n(\theta)}}$ avec $M_n(\theta)$ non divisible par m.*

Preuve. — Si la suite $N_n(\theta)$ ne tend pas vers $+\infty$ alors il existe une sous suite $N_{S_n}(\theta)$ bornée par un certain B. Dans ce cas, la suite $f^{S_n}(\theta) = \frac{M_{S_n}(\theta)}{m^{N_{S_n}(\theta)}}$ est contenue dans l'ensemble fini $\left\{\frac{p}{m^k} : 0 \leqslant p \leqslant r.m^B \text{ et } 0 \leqslant k \leqslant B\right\}$, ce qui n'est possible que lorsque l'orbite de θ est périodique. □

Lemme 2.3. — *Soit $\theta \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ d'orbite non périodique. Alors il existe un entier $P_0 = P_0(\theta)$ tel que, pour tout entier n on a :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} e(f^k(\theta)) = -N_n(\theta) + P_n(\theta), \text{ avec } P_n(\theta) \in [-P_0, P_0] \cap \mathbb{Z}.$$

Preuve. — L'orbite de θ n'étant pas périodique, il résulte du lemme précédent que $N_n(\theta)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. D'autre part, on a :

$$f^{n+1}(\theta) = f(f^n(\theta)) = m^{e(f^n(\theta))} f^n(\theta) + \frac{p(f^n(\theta))}{m^{k(f^n(\theta))}}.$$

Or :

$$f^n(\theta) = \frac{M_n(\theta)}{m^{N_n}(\theta)}.$$

Donc :

$$f^{n+1}(\theta) = \frac{M_n(\theta)}{m^{N_n(\theta) - e(f^n(\theta))}} + \frac{p(f^n(\theta))}{m^{k(f^n(\theta))}}.$$

Comme $N_n(\theta)$ tend vers $+\infty$ et que e et k sont bornés, alors il existe un entier $n_0 = n_0(\theta)$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $N_n(\theta) - e(f^n(\theta)) > k(f^n(\theta))$. Il en résulte que :

$$f^{n+1}(\theta) = \frac{M_n(\theta) + m^{N_n(\theta) - e(f^n(\theta)) - k(f^n(\theta))} p(f^n(\theta))}{m^{N_n(\theta) - e(f^n(\theta))}} = \frac{M_{n+1}(\theta)}{m^{N_{n+1}(\theta)}}, \forall n \geqslant n_0.$$

Puisque m divise $m^{N_n(\theta) - e(f^n(\theta)) - k(f^n(\theta))}$ mais ne divise pas $M_n(\theta) + m^{N_n(\theta) - e(f^n(\theta)) - k(f^n(\theta))} p(f^n(\theta)$, par unicité de l'écriture de $f^{n+1}(\theta)$ sous la forme $\frac{M_{n+1}(\theta)}{m^{N_{n+1}(\theta)}}$, on a pour tout $n \geqslant n_0$:

$$N_{n+1}(\theta) = N_n(\theta) - e(f^n(\theta)).$$

Donc, pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$N_n(\theta) = N_{n_0}(\theta) - (e(f^{n_0}(\theta)) + ... + e(f^{n-1}(\theta)))$$

ou encore :

$$N_n(\theta) = N_{n_0}(\theta) + \sum_{k=0}^{n_0-1} e(f^k(\theta)) - \sum_{k=0}^{n-1} e(f^k(\theta)).$$

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$:

$$N_n(\theta) + \sum_{k=0}^{n-1}(e(f^k(\theta)) = N_{n_0}(\theta) + \sum_{k=0}^{n_0-1}(e(f^k(\theta)).$$

Par conséquent, pour obtenir le Lemme 2.3, il suffit de poser :

$$P_0 = \max_{n \leqslant n_0} \left\{ |N_n(\theta) + \sum_{k=0}^{n-1}(e(f^k(\theta)))| \right\}.$$

□

Revenons maintenant à la preuve de la Proposition 2.1.

1. Montrons qu'il existe $a_0 > \theta$ tel que pour tout $k \geqslant 0$, l'application f^k est affine sur l'intervalle $[\theta, a_0[$.

Soit $\theta = \frac{M}{m^N} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$, on considère $[\theta, a_n[$ l'intervalle maximal où f^n est affine, c'est-à-dire le plus grand intervalle de la forme $[\theta, a_n[$ où $a_n \in \mathcal{D}(f^n)$ (l'ensemble des points de coupure de f^n) et $]\theta, a_n[$ ne contient pas de point de $\mathcal{D}(f^n)$.

Pour tout $x \in [\theta, a_n[$ et pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on a :

$$f^i(x) = Df^i_+(\theta)(x-\theta) + f^i(\theta),$$

où $Df^i_+(\theta)$ est la dérivée à droite de f^i au point θ.

Puisque $Df^i_+(\theta) = m^{\left(\sum_{k=0}^{i-1} e(f^k(\theta))\right)}$, alors $f^i(x) = m^{\left(\sum_{k=0}^{i-1} e(f^k(\theta))\right)}(x - \theta) + f^i(\theta)$.

D'après le Lemme 2.3, on a $\sum_{k=0}^{i-1} e(f^k(\theta)) = -N_i(\theta) + P_i(\theta)$ et par convention $f^i(\theta) = \frac{M_i(\theta)}{m^{N_i(\theta)}}$.

D'où $f^i(x) = m^{-N_i(\theta)+P_i(\theta)}(x-\theta) + \frac{M_i(\theta)}{m^{N_i(\theta)}}$ ou encore :

$$\begin{aligned} f^i(x) &= m^{-N_i(\theta)}(m^{P_i(\theta)}(x-\theta) + M_i(\theta)) \\ &= m^{-N_i(\theta)}(m^{P_i(\theta)}x + M_i(\theta) - m^{P_i(\theta)}\theta) \\ &= m^{-(N_i(\theta)+N)}(m^{P_i(\theta)+N}x + M_i(\theta)m^N - m^{P_i(\theta)}M), \text{ puisque } \theta = \frac{M}{m^N}. \end{aligned}$$

Finalement :

$$(*)\ f^i(x) = (m^{P'_i(\theta)}x + M'_i(\theta))\ m^{-N'_i(\theta)}, \quad \forall x \in [\theta, a_n[, \ \forall i = 0, ..., n-1,$$

où $P'_i(\theta) = P_i(\theta) + N$, $M'_i(\theta) = M_i(\theta)m^N - m^{P_i(\theta)}M$ et $N'_i(\theta) = N_i(\theta) + N \in \mathbb{N}$.

Comme $a_n \in \mathcal{D}(f^n)$, il existe $a \in \mathcal{D}(f)$ tel que $a_n = f^{-k_n}(a)$ pour un $k_n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$f^{k_n}(a_n) = m^{-N'_{k_n}(\theta)}(m^{P'_{k_n}(\theta)}a_n + M'_{k_n}(\theta)) = a$$

ou encore :

$$(**) \quad m^{N'_{k_n}(\theta)}a - M'_{k_n}(\theta) = m^{P'_{k_n}(\theta)}a_n.$$

Comme $a \in \mathcal{D}(f)$, il existe $A, B \in \mathbb{N}$ tels que $a = \frac{A}{m^B}$. On a alors :

$$m^B(m^{N'_{k_n}(\theta)}a - M'_{k_n}(\theta)) = m^{P'_{k_n}(\theta)+B}a_n.$$

Donc $(**)$ devient : $m^{P'_{k_n}(\theta)+B}a_n = m^{N'_{k_n}(\theta)}A - M'_{k_n}(\theta)m^B \in \mathbb{Z}$.

Comme $a_n \in [0, r[$ et $P'_{k_n}(\theta) \in [-P_0(\theta)+N, P_0(\theta)+N] \cap \mathbb{Z}$ (Lemme 2.3), il résulte :

$$m^{P'_{k_n}(\theta)+B}a_n \in [0, m^{P_0(\theta)+N+B}r] \cap \mathbb{Z}.$$

Ce qui montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de a_n.

On en déduit que $a_0 := \min(a_n) > \theta$ et pour tout $k \geqslant 0$, l'application f^k est affine sur l'intervalle $[\theta, a_0[$ et satisfait $(*)$.

2. Montrons que $O_f^-(\theta) \cap [\theta, a_0[$ est fini.

Soit $k \in \mathbb{N}$, si $f^{-k}(\theta) \in]\theta, a_0[$, alors, d'après $(*)$, on a :

$$\theta = f^k(f^{-k}(\theta)) = m^{-N'_k(\theta)}(m^{P'_k(\theta)}f^{-k}(\theta) + M'_k(\theta)), \quad \text{et donc :}$$

$$f^{-k}(\theta) = \frac{m^{N'_k(\theta)}\theta - M'_k(\theta)}{m^{P'_k(\theta)}},$$

où $-P_o(\theta) + N \leqslant P'_k(\theta) \leqslant P_o(\theta) + N$ et $m^{N'_k(\theta)}\theta - M'_k(\theta)$ est de la forme $\frac{Z_k}{m^N}$ avec $Z_k \in \mathbb{Z}$ et m^N est le dénominateur de θ.

Par conséquent l'entier :

$$\begin{aligned} m^N(m^{N'_k(\theta)}\theta - M'_k(\theta)) = m^N m^{P'_k(\theta)} f^{-k}(\theta) &\in [0, m^N m^{P'_k(\theta)} r[\\ &\subset [0, m^N m^{P_0(\theta)+N} r[. \end{aligned}$$

Et par suite, $m^N m^{P'_k(\theta)} f^{-k}(\theta)$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et $O_f^-(\theta) \cap [\theta, a_0[$ est un ensemble fini.

3. Conclusion.

De manière analogue (en échangeant f et f^{-1}), on montre qu'il existe $a'_0 > \theta$ tel que $O_f^+(\theta) \cap [\theta, a'_0[$ est fini.

Ainsi, $b_0 := \min(O_f(\theta) \cap]\theta, a_0[,\ a_0, a'_0) > \theta$ et $O_f(\theta) \cap]\theta, b_0[= \emptyset$. De même, on montre qu'il existe $c_0 < \theta$ tel que $O_f(\theta) \cap]c_0, \theta[= \emptyset$. Par conséquent, l'orbite de θ est propre.

2.2. Propretés des orbites de f et existence d'orbites ou cycles périodiques

Pour montrer cette assertion, nous utilisons des résultats sur la structure des quasi-minimaux pour les flots des surfaces fermées orientables. Dans la partie suivante, nous rappelons ces notions générales et propriétés que nous utiliserons.

2.2.1. Généralités sur les flots

Soit M une surface fermée orientable et F un ***flot*** continu sur M, c'est-à-dire une application continue $F : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $F(t+s,x) = F(t,F(s,x))$, pour tout $t,s \in \mathbb{R}$ et $x \in M$.

(ii) $F(0,x) = x$, pout tout $x \in M$.

Définition 2.4. — *Soit $x \in M$ et $F_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ définie par $F_x(t) = F(x,t)$.*

On appelle ***orbite*** *de x, l'ensemble $L_x = \{F(x,t), t \in \mathbb{R}\} = F_x(\mathbb{R})$.*

Pour toute orbite L de F et tout $x \in L$, on appelle :

– *$L_x^+ = \{F_x(t);\ t \in \mathbb{R}_+\}$ la* ***demi-orbite positive*** *issue de x.*
– *$L_x^- = \{F_x(t);\ t \in \mathbb{R}_-\}$ la* ***demi-orbite négative*** *issue de x.*
– *$\Omega_L = \bigcap_{x\in L} \overline{L_x^+}$ (resp. $A_L = \bigcap_{x\in L} \overline{L_x^-}$) l'****ensemble*** ***$w$-limite*** *(resp. l'****ensemble*** ***α-limite****) de L.*

Notons que les ensembles Ω_L et A_L sont fermés, connexes, invariants et non vides.

Définition 2.5 (Topologie des orbites). — *On dit qu'une orbite L de F est* ***propre*** *si $\overline{L} \setminus L$ est fermé.*

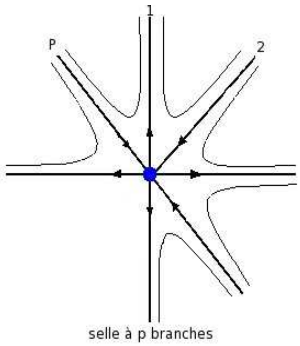
Une orbite non propre est :

– *soit* ***localement dense****, si $\overline{L}$ est d'intérieur non vide ;*
– *soit* ***exceptionnelle****, si L n'est nulle part dense.*

Définition 2.6. — *On appelle* ***quasi-minimal*** *l'adhérence d'une orbite non propre.*

Définition 2.7 (Ensembles singuliers). — *On dit que x est* ***une singularité*** *de F si F_x est constant.*

On appelle ***selle*** *une singularité dont le portrait local est le suivant :*



Notons que si x est une selle à p branches de x, les p orbites "issues" de F sont appelées **séparatrices** *d'extrémité x.*

Une orbite de F qui n'est pas une séparatrice est dite **régulière**.

On dit qu'une orbite L réalise **une liaison** *s'il existe $x \in L$ tel que les deux demi-orbites d'origine x sont des séparatrices.*

Définition 2.8. — *On appelle* **cycle-limite** *un sous-ensemble H de M qui est réunion de séparatrices et de singularités, qui est connexe, fermé et qui satisfait aux conditions suivantes :*

- *toute extrémité d'une séparatrice de H est dans H.*
- *si une selle s appartient à H alors H contient un nombre pair de séparatrices issues de s deux à deux adjacentes.*
- *il existe une orbite régulière qui possède H comme ensemble limite.*

2.2.2. Résultats sur les flots

Étant donné un flot F sur une surface fermée orientable M avec un nombre fini de singularités et L une orbite de F, on a les résultats suivants :

Proposition 2.9 ([10] Chapitre 5). — *Chacun des ensembles Ω_L (resp. A_L) est l'un des types suivants :*

i) Une singularité.

ii) Une orbite périodique ou un cycle limite.

iii) Un quasi-minimal.

Proposition 2.10 ([15]). — *Toute demi-orbite infinie contenue dans un quasi-minimal y est dense et est non propre.*

Proposition 2.11 ([19]). — *Si F est de classe C^2 (ou C^2 par morceaux et $\mathcal{P}$ [(1)]) et M distinct du tore $\mathbb{T}^2$ alors tout quasi-minimal contient une singularité.*

2.2.3. Suspension d'un AIET

Soit f un AIET sur $[0,r[$; on pose $\Phi = \Pi \circ f \circ \Pi^{-1}$ où $\Pi : [0,r[\to S_r$ définie par $\Pi(x) = \frac{r}{2\pi}\exp(\frac{2i\pi x}{r})$; Π étant la projection naturelle qui est donc une bijection continue.

On peut voir que Φ est un AIET sur le cercle S_r.

Théorème 2.12 ([1]). — *Soit Φ un AIET sur S_r.*
Il existe une surface fermée orientable M_Φ, un flot à selles F_Φ de M_Φ et un plongement $i_\Phi : S_r \hookrightarrow M_\Phi$ tels que :

- *$i_\Phi(S_r)$ est transverse à F_Φ et rencontre toute demi-orbite ainsi que toute liaison.*
- *l'application du premier retour induite par F_Φ sur $i_\Phi(S_r)$ s'identifie à Φ.*

Définition 2.13. — *Le couple (M_Φ, F_Φ) s'appelle suspension de Φ.*

De plus, toutes les selles sont en nombre fini et ont un nombre fini de séparatrices telles que deux séparatrices consécutives soient séparées par un secteur hyperbolique.

Les propriétés topologiques de F_Φ sont liées à celles de Φ par la :

Proposition 2.14 ([1]).

i) *Φ possède une orbite non propre si et seulement si F_Φ possède aussi une orbite non propre.*

ii) *Si F_Φ a une orbite périodique ou un cycle limite alors Φ a une orbite périodique ou un cycle périodique.*

D'autre part, comme conséquence de Levitt [15], Schwartz [19] (ou de résultats d'Arnoux [1], on a :

---

(1) La preuve de ce résultat de Schwartz, donnée pour un flot de classe C^2 dans [10] (Chapitre 5), s'adapte de la même manière à un flot de classe C^2-par morceaux et $\mathcal{P}$, que la preuve de Denjoy est adaptée aux homéomorphismes de classe $\mathcal{P}$ dans [12].

Proposition 2.15. — *Si F_Φ est la suspension d'un AIET et M_Φ est distinct du tore $\mathbb{T}^2$ alors tout quasi-minimal contient une séparatrice libre (i.e., qui ne réalise pas une liaison entre selles) positivement récurrente ou négativement récurrente.*

2.2.4. Toutes les orbites de F_Φ sont propres

On suppose que F_Φ possède une orbite non propre L, par définition $\overline{L}$ est un quasi-minimal. D'après la Proposition 2.15, $\overline{L}$ contient une séparatrice libre γ. D'après la Section 2.1, γ est propre. Or, d'après la Proposition 2.10, $\overline{\gamma} = \overline{L}$ et γ est non propre, d'où la contradiction.

2.2.5. F_Φ a au moins une orbite périodique ou un cycle limite

Soit L une orbite de F qui n'est pas une séparatrice. Considérons l'ensemble limite Ω_L (ou A_L) de L. Clairement, Ω_L ne peut être une singularité.

Puisque les orbites sont propres, Ω_L ne peut être un quasi-minimal (d'après la Proposition 2.10). Finalement, la Proposition 2.9 nous permet d'établir que Ω_L est une orbite périodique ou un cycle limite.

En conclusion, Φ possède une orbite périodique ou un cycle périodique. De plus, ses ensembles limites sont exclusivement de ce type.

3. Preuve de la partie B du résultat principal

Pour construire un élément f de $V_{r,m}$ d'ordre fini q, on considère le plus petit entier s tel que $q \leqslant rm^s$ et on pose :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{m^s} & \text{si } x \in [0, \frac{q-1}{m^s}[\\ x - \frac{q-1}{m^s} & \text{si } x \in [\frac{q-1}{m^s}, \frac{q}{m^s}[\\ x & \text{si } x \in [\frac{q}{m^s}, r[\,. \end{cases}$$

On vérifie que $f^q(x) = x$, pour tout $x \in [0, r[$. En effet :

- Si $x \in [0, \frac{q-1}{m^s}[$, $f(x) = x + \frac{1}{m^s} \in [\frac{1}{m^s}, \frac{q}{m^s}[$.

  On montre que $f^n(x) = x + \frac{n}{m^s}$, pour $1 \leqslant n \leqslant q-1$ et que $f^{q-1}(x) \in [\frac{q-1}{m^s}, \frac{q}{m^s}[$ et par suite $f^q(x) = x$.
- Si $x \in [\frac{q-1}{m^s}, \frac{q}{m^s}[$, $f(x) \in [0, \frac{1}{m^s}[$ $f^2(x) = f(x) + \frac{1}{m^s} = x - \frac{q-1}{m^s} + \frac{1}{m^s} = x + \frac{q}{m^s} + \frac{2}{m^s}$.

  On montre que $f^q(x) = x - \frac{q}{m^s} + \frac{q}{m^s} = x$.
- Si $x \in [\frac{q}{m^s}, r[$,$f(x) = x$ et donc $f^q(x) = x$.

4. Un exemple

Il existe des AIET tels que les ensembles limites sont tous des cycles périodiques. Par exemple l'échange d'intervalles f défini ci-dessous.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} & \text{si } x\in[0,\frac{1}{2}[\\ x-\frac{1}{2} & \text{si } x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[\\ 2x-1 & \text{si } x\in[\frac{3}{4},1[.\end{cases}$$

On a pour tout $x\in[0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x)=\dfrac{1}{2}$ donc $w_x=\{\frac{1}{2}\}$. De même $\lim\limits_{n\to-\infty} f^n(x)=1$ donc $\alpha_x=\{1\}$.

On conclut que les ensemble w_x et α_x ne sont pas des orbites périodiques mais des cycles périodiques de période 1 : nous les appelons ***points fixes virtuels***.

5. Éléments de distortion de $V_{r,m}$

Dans cette section nous montrons, comme corollaire de notre résultat principal, que dans le groupe $V_{r,m}$ tout élément de distortion est d'ordre fini.

Définition 5.1. — *Soit $g\in\mathcal{A}_r$ (le groupe des AIET de $[0,r[$), on dit que p est* ***un point fixe semi-hyperbolique*** *de g, si ou bien :*

- *p n'est pas une coupure de g, $g(p)=p$ et $Dg\neq 1$,*
- *p est une discontinuité de Df mais pas de f, $g(p)=p$ et $D_+(g)$ ou $D_-(g)\neq 1$,*
- *p est une discontinuité de f, $g_-(p)=p$ et $D_-(g)\neq 1$ (p est virtuel).*

Proposition 5.2. — *Si $g\in\mathcal{A}_r$ possède un point fixe semi-hyperbolique alors g ne peut-être distordu dans $\mathcal{A}_r$.*

Preuve. — Soit p un point fixe semi-hyperbolique de g. Sans perte de généralité, on peut faire la preuve dans le cas où $g(p)=p$ et la dérivée à droite de g en p : $D_+g(p)=\lambda\neq 1$.

Supposons par l'absurde que g soit distordu dans un sous-groupe G de $\mathcal{A}$ engendré par la partie finie $S=\{f_1,...,f_s\}$. Écrivons $l_S(g^n)=l_n$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{l_n}{n}=0$ et $g^n=f_{i^n_{l_n}}...f_{i^n_1}$.

On a : $D_+(g^n)(p)=D_+f_{i^n_{l_n}}(p_{l_n})\ ...\ D_+f_{i^n_1}(p_1)$ où $p_i=f_{i^n_{i-1}}\ ...\ f_{i^n_1}(p)$.

Ainsi $(\inf D_+ f_i)^{l_n} \leqslant D_+(g^n)(p) \leqslant (\sup D_+ f_i)^{l_n}$. Par conséquent :

$$\frac{l_n \log(\inf D_+ f_i)}{n} \leqslant \frac{\log D_+(g^n)(p)}{n} \leqslant \frac{l_n \log(\sup D_+ f_i)}{n}.$$

Puisque g est distordu, on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log D_+(g^n)(p)}{n} = 0$.

D'autre part, puisque p est un point fixe de g, on a $D_+(g^n)(p) = \lambda^n$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log D_+(g^n)(p)}{n} = \log \lambda \neq 0$, d'où la contradiction. □

Preuve du Corollaire 1.10. — Soit $g \in V_{r,m}$, d'après le théorème principal, toutes les orbites de g sont propres et leur ensembles limites sont soit des orbites ou cycles périodiques. Si toutes les orbites de g sont périodiques, on vérifie facilement que g est d'ordre fini.

Si g possède une orbite non périodique, son ensemble ω-limite est alors une orbite ou un cycle périodique attractif. Dans ce cas, il existe une puissance g^n de g qui possède un point fixe (éventuellement virtuel) attractif, donc semi-hyperbolique puisque g^n est affine par morceaux. On applique alors la Proposition 5.2 à g^n. On en déduit que g^n ne peut être distordu et par suite que g non plus. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Arnoux, « Échanges d'intervalles et flots sur les surfaces », in *Ergodic theory (Sem., Les Plans-sur-Bex, 1980) (French)*, Monograph. Enseign. Math., vol. 29, Univ. Genève, Geneva, 1981, p. 5-38.

[2] A. Avila, « Distortion elements in $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ », arXiv :0808.2334.

[3] C. Bleak, H. Bowman, A. Gordon Lynch, G. Graham, J. Hughes, F. Matucci & E. Sapir, « Centralizers in the R. Thompson group V_n », *Groups Geom. Dyn.* **7** (2013), n° 4, p. 821-865.

[4] K. S. Brown, « Finiteness properties of groups », *J. Pure Appl. Algebra* **44** (1987), n° 1-3, p. 45-75.

[5] D. Calegari, « Denominator bounds in Thompson-like groups and flows », *Groups Geom. Dyn.* **1** (2007), n° 2, p. 101-109.

[6] D. Calegari & M. H. Freedman, « Distortion in transformation groups », *Geom. Topol.* **10** (2006), p. 267-293, With an appendix by Yves de Cornulier.

[7] J. W. Cannon, W. J. Floyd & W. R. Parry, « Introductory notes on Richard Thompson's groups », *Enseign. Math. (2)* **42** (1996), n° 3-4, p. 215-256.

[8] J. Franks & M. Handel, « Distortion elements in group actions on surfaces », *Duke Math. J.* **131** (2006), n° 3, p. 441-468.

[9] É. Ghys & V. Sergiescu, « Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle », *Comment. Math. Helv.* **62** (1987), n° 2, p. 185-239.

[10] C. Godbillon, *Dynamical systems on surfaces*, Universitext. [University Textbook], Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983, Translated from the French by H. G. Helfenstein, ii+201 pages.

[11] M. Gromov, « Asymptotic invariants of infinite groups », in *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, p. 1-295.

[12] M.-R. Herman, « Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1979), n° 49, p. 5-233.

[13] G. Higman, *Finitely presented infinite simple groups*, Department of Pure Mathematics, Department of Mathematics, I.A.S. Australian National University, Canberra, 1974, Notes on Pure Mathematics, No. 8 (1974), vii+82 pages.

[14] V. Kleptsyn, « Sur une interprétation algorithmique du groupe de Thompson », En préparation.

[15] G. Levitt, « Feuilletage des surfaces », Thèse, Paris 7, juin 1983.

[16] I. Liousse, « Nombre de rotation, mesures invariantes et ratio set des homéomorphismes affines par morceaux du cercle », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), n° 2, p. 431-482.

[17] ———, « Rotation numbers in Thompson-Stein groups and applications », *Geom. Dedicata* **131** (2008), p. 49-71.

[18] C. F. Novak, « Discontinuity-growth of interval-exchange maps », *J. Mod. Dyn.* **3** (2009), n° 3, p. 379-405.

[19] A. J. Schwartz, « A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds », *Amer. J. Math. 85 (1963), 453-458 ; errata, ibid* **85** (1963), p. 753.

[20] M. Stein, « Groups of piecewise linear homeomorphisms », *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), n° 2, p. 477-514.

Manuscrit reçu le 10 septembre 2012,
accepté le 17 décembre 2012.

Hadda HMILI
Faculté des Sciences de Bizerte
Département de Mathématiques
7021 Jarzouna, Bizerte (Tunisie)
Hajermido@yahoo.fr

Isabelle LIOUSSE
Université de Lille 1
U.F.R de Mathématiques
Laboratoire Paul Painlevé
59655 Villeneuve d'Ascq Cédex (France)
liousse@math.univ-lille1.fr