



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Pierre JAMMES

Effondrement, spectre et propriétés diophantiennes des flots riemanniens

Tome 60, n° 1 (2010), p. 257-290.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2010__60_1_257_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

EFFONDREMENT, SPECTRE ET PROPRIÉTÉS DIOPHANTIENNES DES FLOTS RIEMANNIENS

par Pierre JAMMES

RÉSUMÉ. — On étudie le comportement des premières valeurs propres du laplacien agissant sur les formes différentielles lors d'un effondrement adiabatique d'un flot riemannien \mathcal{F} sur une variété compacte M . Le nombre de petites valeurs propres peut alors se calculer en fonction de la cohomologie basique de \mathcal{F} , et on donne des critères spectraux pour l'annulation des classes d'Álvarez et d'Euler du flot. En outre, on définit un invariant de nature diophantienne du flot qui est lié au comportement asymptotique des petites valeurs propres. Un appendice est consacré aux propriétés arithmétiques des flots riemanniens.

ABSTRACT. — We study the behavior of the first eigenvalues of the Hodge Laplacian acting on differential forms under adiabatic collapsing of a riemannian flow \mathcal{F} on a closed manifold M . We show that the number of small eigenvalues is related to the basic cohomology of \mathcal{F} , and give spectral criteria for the vanishing of the Álvarez class and the Euler class of the flow. We also define a diophantine invariant of the flow which is related to the asymptotical behavior of the small eigenvalues. An appendix is devoted to arithmetic properties of riemannian flows.

1. Introduction

On sait qu'à diamètre borné et courbure de Ricci minorée, la première valeur propre du laplacien agissant sur les fonctions d'une variété compacte est uniformément minorée. Dans [8], B. Colbois et G. Courtois ont montré que ce résultat ne s'étendait pas au laplacien agissant sur les formes différentielles et que même avec une hypothèse de courbure sectionnelle bornée, on pouvait trouver des variétés admettant une suite de métriques telle que la première valeur propre du laplacien tende vers 0. Ils montrent en outre

Mots-clés : effondrements, formes différentielles, laplacien, petites valeurs propres, flots riemanniens, approximations diophantiennes.

Classification math. : 58J50, 58C40, 53C12.

qu'à courbure et diamètre bornés, si une valeur propre tend vers zéro, alors le volume — ou de manière équivalente le rayon d'injectivité — de la variété tend vers 0, c'est-à-dire qu'elle s'effondre. Ces résultats motivent le problème suivant :

QUESTION 1. — *À quelles conditions une variété qui s'effondre admet-elle une ou plusieurs petites valeurs propres ? Peut-on estimer à quelle vitesse ces valeurs propres tendent vers zéro par rapport au volume ou au rayon d'injectivité ?*

Ces questions ont déjà fait l'objet de plusieurs travaux ([9], [21], [17], [16], voir [18] pour une présentation synthétique de ces résultats), mais les situations étudiées sont celles d'une variété M tendant pour la distance de Gromov-Hausdorff vers une variété lisse N de dimension inférieure, M ayant alors une structure de fibré sur N , alors que l'espace limite d'une variété qui s'effondre est en général une variété stratifiée. Les seuls exemples connus de petites valeurs propres dans le cas où la variété M tend vers un espace métrique qui n'est pas une variété lisse sont des exemples de fibrés de Seifert ([8]), situation très proche des fibrés en cercles étudiés en détail dans [9].

On va s'intéresser ici à des situations plus générales que les fibrés, à savoir les feuilletages, en se restreignant au cas plus simple où les feuilles sont de dimension 1, c'est-à-dire aux flots, et on considèrera des effondrements obtenus en faisant varier la métrique le long des feuilles. Le choix des feuilletages est en particulier motivé par le fait qu'il permet d'exhiber facilement des exemples de petites valeurs propres dans le cas où la variété s'effondre sur un espace singulier (voir ci-dessous), et il fera en outre apparaître des différences notables avec le cas des espaces limites lisses (voir remarque 1.4). La restriction aux flots s'explique par le fait que même dans le cas des fibrés, la seule situation vraiment élucidée est celle où la fibre est un cercle. Le fait que la variété s'effondre à courbure bornée impose aussi certaines contraintes sur le feuilletage que nous détaillerons plus loin.

Il s'avère que l'exemple le plus simple d'effondrement sur un espace singulier, qui est l'effondrement d'un flot isométrique, fournit un exemple de petite valeur propre. Et contrairement aux exemples donnés dans [8], on peut faire en sorte que les feuilles ne soient pas compactes :

Exemple 1.1. — On considère sur la sphère

$$S^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2, |a|^2 + |b|^2 = 1\}$$

l'action isométrique du tore T^2 définie par

$$(\theta_1, \theta_2) \cdot (a, b) = (e^{i\theta_1} a, e^{i\theta_2} b).$$

Si on se donne un irrationnel $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on peut lui associer un flot sur S^3 par le plongement de \mathbb{R} dans T^2 défini par $t \mapsto (t, \alpha t)$ en considérant l'action induite sur S^3 .

Pour construire l'effondrement, on décompose la métrique canonique g en la somme $g = g_H \oplus g_V$ d'une composante verticale, tangente au flot, et d'une composante horizontale g_H sur l'espace orthogonal au flot. On définit alors la famille de métriques $g_\varepsilon = g_H \oplus \varepsilon^2 g_V$. Comme α est irrationnel, l'adhérence de chaque feuille est une orbite de l'action de T^2 , et donc (S^3, g_ε) tend vers $S^3/T^2 = [0, \frac{\pi}{2}]$ pour la distance de Gromov-Hausdorff quand ε tend vers 0.

On considère la 1-forme différentielle $\omega = \frac{X}{|X|^2}$, où X est le champ de vecteur associé au flot. Sa codifférentielle $\delta\omega$ est nulle : en effet, $\delta\omega$ est une fonction invariante par le flot, donc $d\delta\omega$ est partout orthogonale à ω , et donc $\|\delta\omega\|^2 = (\omega, d\delta\omega) = 0$. En outre, sa différentielle vérifie

$$i_X d\omega = \mathcal{L}_X \omega - di_X \omega = 0.$$

Le quotient de Rayleigh de ω d'écrit donc $R(\omega) = \frac{\|d\omega\|^2}{\|\omega\|^2}$, et tend vers 0 quand ε tend vers zéro, car $\|\omega\|^2$ tend vers l'infini et $\|d\omega\|^2$ reste constant. On est alors assuré qu'une valeur propre du laplacien agissant sur $\Omega^1(S^3)$ tend vers zéro quand on effondre la sphère, et cette valeur propre est non nulle puisque $b_1(S^3) = 0$.

On va chercher dans cet article à comprendre dans quelle mesure cet exemple se généralise aux autres flots. On considère donc un flot \mathcal{F} — c'est-à-dire un feuilletage orientable de dimension 1, *a priori* sans paramètre — sur une variété M et si on se donne une métrique g sur M , on définit comme dans l'exemple 1.1 une famille de métriques (g_ε) en décomposant g sous la forme $g_H \oplus g_V$, où g_V est la métrique le long des feuilles et g_H la composante de la métrique g orthogonale aux feuilles, et en posant $g_\varepsilon = g_H \oplus \varepsilon^2 g_V$ pour $\varepsilon \leq 1$. On appellera « effondrement adiabatique associé à g » la famille de métriques ainsi construite.

Il est rare qu'une telle déformation de la métrique maintienne la courbure bornée, même avec l'hypothèse que les feuilles sont de dimension 1. On supposera donc en outre que le flot \mathcal{F} est riemannien, c'est-à-dire qu'il admet une métrique, dite « quasi-fibrée », dont la composante g_V est invariante par le flot (comme seul g_V est invariant et pas la direction orthogonale aux feuilles, cette propriété ne dépend pas du paramétrage choisi sur le flot).

En effet, Y. Carrière a montré ([6]) que si g est une telle métrique, la courbure sectionnelle de g_ε est uniformément bornée par rapport à ε , cette propriété étant fautive pour les feuilletages riemanniens de dimension plus grande (même en supposant par exemple que le feuilletage est défini par une action localement libre de \mathbb{R}^k). Les flots riemanniens fournissent ainsi un grand nombre d'exemples d'effondrements sur des espaces singuliers (nous en rappellerons certains dans la section 4). Rappelons aussi une autre propriété de ces métriques, que nous n'utiliserons pas ici mais qui intervient dans d'autres contextes (voir par exemple [14], [27], [23] et les références qui y sont données) et qui motive l'étude des flots riemanniens en général : si on se donne un champ d'hyperplans sur une variété riemannienne, il est totalement géodésique si et seulement si la métrique est quasifibrée pour le flot orthogonal, ce flot étant alors riemannien.

Sous ces hypothèses, nous allons mettre en évidence quels sont les points communs et surtout les différences avec les effondrements de fibrés. En particulier, nous tâcherons d'éclairer les liens entre comportement du spectre, géométrie de l'effondrement et dynamique du flot qui n'étaient qu'esquissés dans [16].

Si X est un champ de vecteur tangent au flot, on définit la cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ du flot comme étant la cohomologie de l'espace des formes basiques

$$\Omega^*(M/\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega^*(M), \iota_X \omega = \iota_X d\omega = 0\}.$$

On sait ([11]) que si le flot est riemannien, cette cohomologie est de dimension finie. On va montrer qu'on peut calculer le nombre de petites valeurs propres pour l'effondrement (g_ε) en fonction de cette cohomologie. Pour tout p , on notera $\lambda_{p,0}(M, g)$ la valeur propre nulle pour les p -formes, si elle existe, et $\lambda_{p,1}(M, g) \leq \lambda_{p,2}(M, g) \leq \dots$ les valeurs propres non nulles, en les répétant s'il y a multiplicité.

L'étude des petites valeurs propres du laplacien de Hodge-de Rham pour des effondrements adiabatiques a été amorcée par R. Mazzeo et R. Melrose [24] qui traitent le cas des fibrés, puis étendue à certains feuilletages par Forman [13], Álvarez et Kordyukov [3]. Nous allons utiliser et préciser les résultats de [3] dans le cas des flots riemanniens.

THÉORÈME 1.2. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n , \mathcal{F} un flot riemannien sur M et (g_ε) l'effondrement adiabatique associé à une métrique g quasi-fibrée pour \mathcal{F} . Alors :*

- (1) le nombre de petites valeurs propres non nulles sur les p -formes pour l'effondrement (g_ε) est

$$m_p = \dim H^p(M/\mathcal{F}) + \dim H^{n-p}(M/\mathcal{F}) - b_p(M) ;$$

- (2) il existe une constante $c(g, \mathcal{F}) > 1$ telle que pour tout p , tout $1 \leq k \leq m_p$ et tout $0 < \varepsilon < 1$, on a $c^{-1} \cdot \varepsilon^2 \leq \lambda_{p,k}(M, g_\varepsilon) \leq c \cdot \varepsilon^2$.

Remarque 1.3. — Le théorème 1.2 s'applique en particulier aux fibrés en cercles, ce qui permet de retrouver une partie des résultats de [9].

Remarque 1.4. — En revanche, contrairement à ce qui se passe pour les effondrements de fibrés sur leur base, ce n'est pas la cohomologie de l'espace limite qui intervient ici mais celle de la structure transverse. Cela contraste aussi avec les exemples d'effondrements à courbure minorée étudiés par J. Lott dans [22] pour lesquels le nombre de petite valeurs propres se calcule à l'aide de la cohomologie de l'espace limite. La structure de fibré sur l'espace limite ne semble donc pas pertinente pour étudier dans toute sa généralité le problème posé par la question 1.

On peut déduire du théorème 1.2 un lien entre les propriétés spectrales du flot et deux invariants cohomologiques, les classes d'Álvarez et d'Euler, dont nous allons rappeler les définitions :

On se donne une métrique g quasi-fibrée pour le flot, un champ de vecteur X unitaire et tangent au flot. La forme caractéristique du flot est $\chi = X^\flat$ et sa forme de courbure moyenne est $\kappa = \mathcal{L}_X \chi$. Dans [2], J.-A. Álvarez López a montré que la composante basique de cette forme de courbure est fermée, et que la classe de cohomologie basique de cette composante ne dépend pas de la métrique. On appelle *classe d'Álvarez* cette classe de cohomologie et on la note $[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$. On sait que cette classe est nulle si et seulement si le flot est géodésible, ou de manière équivalente qu'il est isométrique — c'est-à-dire qu'il existe une métrique sur M et un paramétrage du flot tels que le flot agisse par isométrie.

On définit la forme d'Euler du flot par $e = d\chi - \kappa \wedge \chi$. Cette forme est fermée pour l'opérateur différentiel tordu $d_{-\kappa}$ défini par $d_{-\kappa}\omega = d\omega + \kappa \wedge \omega$, et il existe une métrique quasi-fibrée pour laquelle cette forme est basique. La forme e représente donc une classe de cohomologie $[e]$ dans la cohomologie basique tordue $H_{-\kappa}^2(M/\mathcal{F})$ définie comme la cohomologie de $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ pour la différentielle tordue $d_{-\kappa}$. La classe $[e]$ est appelée *classe d'Euler* du flot \mathcal{F} . Elle dépend de la métrique, mais pas le fait qu'elle soit nulle : on peut montrer ([29], [30]) que $[e] = 0$ si et seulement s'il existe un feuilletage transverse à \mathcal{F} dont la torsion est basique.

On peut alors écrire :

COROLLAIRE 1.5. — *S'il existe p tel que $\lambda_{p,1}(M, g_\varepsilon)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0, alors $[e] \neq 0$.*

La valeur propre $\lambda_{1,1}(M, g_\varepsilon)$ tend vers 0 quand ε tend vers 0 si et seulement si $[\kappa] = 0$ et $[e] \neq 0$.

Remarque 1.6. — Si $H^1(M) = \{0\}$, par exemple si M est simplement connexe, on a nécessairement $[\kappa] = 0$ et $[e] \neq 0$ (voir remarque 2.6 dans la section 2). Cette situation est illustrée par l'exemple 1.1.

Dans le cas où le flot est isométrique, on a donc une condition nécessaire et suffisante sur le spectre — à savoir l'absence de petites valeurs propres — pour que la classe d'Euler s'annule, comparable à celle qui est déjà connue dans le cas des fibrés en cercle ([9]). Cette condition ne se généralise cependant pas au cas des flots non isométriques : on donnera au paragraphe 4.2.2 un exemple de flot dont la classe d'Euler est non nulle mais dont l'effondrement ne produit pas de petite valeur propre. On verra aussi dans la section 2 que ce phénomène peut s'exprimer en termes cohomologiques (remarque 2.7).

Le théorème 1.2 donne l'ordre de grandeur de la vitesse à laquelle les petites valeurs propres tendent vers zéro par rapport à ε , c'est-à-dire par rapport au volume. Dans le cas des fibrés en cercles, le volume, le rayon d'injectivité et la distance de Gromov-Hausdorff sont tous du même ordre au cours de l'effondrement ; ce n'est pas le cas pour des effondrements plus généraux, et en particulier pour les effondrements de flots riemanniens dont les feuilles ne sont pas toutes compactes. On a construit dans [16] des exemples d'effondrement de flots isométriques pour lesquels le comportement asymptotique de la première valeur propre non nulle par rapport au rayon d'injectivité dépend d'une propriété de nature dynamique du flot et qui s'exprime en termes d'approximations diophantiennes. Ces exemples ne se généralisent pas à tous les flots riemanniens (voir la remarque 3.5), mais on peut définir un invariant diophantien lié au comportement asymptotique des petites valeurs propres par rapport à la distance de Gromov-Hausdorff entre M et l'espace limite de l'effondrement, dans le cas d'effondrements adiabatiques.

On sait que les adhérences des feuilles d'un flot riemannien sont des tores et qu'en restriction à l'adhérence d'une feuille, le flot est conjugué à un flot linéaire (cf. [5]). On peut donc décrire le flot sur une adhérence de feuille difféomorphe à T^k par un vecteur $(1, \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{k-1}$. Ce vecteur n'est défini qu'à un difféomorphisme linéaire du tore près, mais cela n'influe pas sur ses propriétés diophantiennes. On peut en fait montrer qu'il existe un entier k et un flot linéaire \mathcal{F}_0 sur T^k tels que sur presque toutes les

adhérences des feuilles du flot \mathcal{F} , la restriction de \mathcal{F} est conjuguée à \mathcal{F}_0 (voir lemme 3.1 pour un énoncé précis), ce qui permet de considérer les propriétés diophantiennes de \mathcal{F}_0 comme des propriétés globales du flot \mathcal{F} . On parlera d'*adhérence générique* pour désigner les éléments de la classe de conjugaison de \mathcal{F}_0 , et de *feuille générique* pour désigner les feuilles dont l'adhérence est générique. On peut aussi montrer que la dimension maximale des adhérences des feuilles est celle de l'adhérence générique.

Supposons dans un premier temps que l'adhérence générique du flot \mathcal{F} est de dimension 2. En restriction à une adhérence générique le flot s'identifie à un flot linéaire sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induit par un vecteur qui peut s'écrire $(1, \alpha)$ dans une base de \mathbb{Z}^2 , avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. L'exposant d'irrationalité (appelé aussi *mesure d'irrationalité*) de α est défini par

$$(1.1) \quad \mu(\alpha) = \sup \left\{ \nu, \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\nu} \text{ a une infinité de solutions } (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Rappelons que l'exposant d'irrationalité est au moins égal à deux sur les irrationnels, qu'il vaut exactement 2 pour presque tout réel, en particulier pour les réels algébriques, et que les réels pour lesquels il est infini sont exactement les nombres de Liouville.

Cet exposant ainsi associé à un flot linéaire sur T^2 ne dépend pas de la base de \mathbb{Z}^2 choisie et, en vertu du lemme 3.1, on peut définir un invariant global du flot en considérant l'exposant d'irrationalité du flot sur une adhérence générique :

DÉFINITION 1.7. — *Soit \mathcal{F} un flot riemannien sur une variété compacte M dont les adhérences génériques sont de dimension 2. On appelle exposant d'irrationalité du flot, noté $\mu(\mathcal{F})$, l'exposant d'irrationalité du vecteur directeur du flot restreint à une adhérence générique.*

On a alors, en notant $\delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)$ la distance de Gromov-Hausdorff entre (M, g_ε) et l'espace limite de l'effondrement :

THÉORÈME 1.8. — *Soit M une variété riemannienne compacte et \mathcal{F} un flot riemannien sur M dont la dimension maximale des adhérence des feuilles est 2. Alors, pour tout effondrement adiabatique (g_ε) du flot, on a*

$$(1.2) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \frac{1}{\mu(\mathcal{F})},$$

où $\mu(\mathcal{F})$ est l'exposant d'irrationalité du flot.

Remarque 1.9. — On en déduit que sous les hypothèses du théorème 1.8, on a

$$(1.3) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_{p,i}(M, g_\varepsilon)}{\ln \delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)} = 2\mu(\mathcal{F}),$$

pour tout entier p et tout $0 < i \leq m_p$.

Remarque 1.10. — On verra dans la section 4 (paragraphe 4.1.2) que pour tout $\mu \in [2, +\infty]$, on peut construire des flots dont l'exposant d'irrationalité est μ .

La démonstration du théorème 1.8 ne se généralise pas quand la dimension des adhérences des feuilles dépasse 2. Cependant, si la direction du flot sur une adhérence générique est difficilement approchable, c'est-à-dire induite par un vecteur $(1, \alpha) \in \mathbb{R}^k$ tel qu'il existe $c(\alpha) > 0$ pour lequel

$$(1.4) \quad \left\| \alpha - \frac{p}{q} \right\| \geq \frac{c}{q^{1+\frac{1}{k-1}}}$$

pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$ et $p \in \mathbb{Z}^{k-1}$, on peut déterminer précisément le comportement asymptotique de $\delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)$:

THÉORÈME 1.11. — *Soit M une variété riemannienne compacte et \mathcal{F} un flot riemannien sur M . Si les adhérences génériques du flot sont de dimension k et que sur ces adhérences, la direction du flot est difficilement approchable, alors pour tout effondrement adiabatique (g_ε) du flot, il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$(1.5) \quad \frac{1}{c} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{k}} \leq \delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon) \leq c \cdot \varepsilon^{\frac{1}{k}}$$

pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$.

Remarque 1.12. — On peut en déduire un résultat sur le spectre comme pour le théorème 1.8 : sous les hypothèses du théorème 1.11, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(1.6) \quad \frac{1}{c} \cdot \delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)^{2k} \leq \lambda_{p,i}(M, g_\varepsilon) \leq c \delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)^{2k},$$

pour tout entier p , tout $0 < i \leq m_p$ et tout $\varepsilon \in]0, 1]$. Notons aussi que dans [16], on ne donnait des exemples de valeurs propres de l'ordre de $\delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)^{2k}$ uniquement en degré inférieur à 3. Ici, on peut effectivement avoir de tels valeurs propres en tout degré (voir paragraphes 4.1.1 et 4.1.2).

On verra dans la section 4 comment construire des flots dont la direction est difficilement approchable (paragraphes 4.1.2 et 4.2.3). On peut aussi énoncer le critère suivant (voir remarque 4.15 de l'appendice) :

PROPOSITION 1.13. — *Si \mathcal{F} est un flot riemannien non isométrique dont la dimension de l'adhérence générique est un nombre premier, alors la direction du flot est difficilement approchable.*

Remarque 1.14. — Dans le cas où l'adhérence générique est de dimension 2, le fait que la direction du flot \mathcal{F} soit difficilement approchable implique que $\mu(\mathcal{F}) = 2$. L'exposant d'irrationalité ne peut donc être prescrit que dans le cadre des flots isométriques. On a là une illustration du caractère rigide des flots riemanniens non isométriques.

Le théorème 1.2 et le corollaire 1.5 seront démontrés dans la section 2. La section 3 sera consacrée à l'étude de $\delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)$ et à la démonstration des théorèmes 1.8 et 1.11. Dans la section 4, nous présenterons plusieurs exemples. Nous terminerons par un appendice sur les propriétés arithmétiques des flots riemanniens qui nous seront utiles pour construire certains exemples et pour établir le proposition 1.13.

2. Cohomologie et spectre des flots riemanniens

2.1. Suite spectrale des flots riemanniens

Les démonstrations du théorème 1.2 et du corollaire 1.5 s'appuient essentiellement sur les résultats de J. A. Álvarez López et Y. A. Kordyukov qui généralisent dans [3] des résultats antérieurs de Mazzeo, Melrose et Forman ([24], [13]) en montrant qu'on peut calculer le nombre de petites valeurs propres lors d'un effondrement adiabatique (sans hypothèse sur la courbure) d'un feuilletage riemannien à l'aide de la suite spectrale différentielle du feuilletage. Cette suite spectrale apparaît pour la première fois dans les travaux de K. S. Sarkaria [31] [32]. Nous renvoyons au chapitre 4 de [35] ou à [3] pour une définition de la suite spectrale différentielle d'un feuilletage riemannien. Afin de ne pas alourdir le texte, nous noterons $E_1^{*,*}$ ce qui est noté $\hat{E}_1^{*,*}$ dans [3] :

THÉORÈME 2.1 ([3]). — *Soit \mathcal{F} un feuilletage riemannien sur une variété compacte M , g une métrique sur M et (g_ε) l'effondrement adiabatique associé. On a alors, pour tous entiers p et $k \geq 0$, en notant $E_k^{*,*}$ la suite spectrale du feuilletage et en posant $E_k^p = \bigoplus_{a+b=p} E_k^{a,b}$:*

$$\dim E_{k+1}^p = \#\{i \geq 1, \lambda_{p,i}(M, g_\varepsilon) \in O(\varepsilon^{2k}) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0\} + b_p(M).$$

Pour obtenir une minoration des petites valeurs propres comme celle du théorème 1.2, on doit compléter ce résultat :

THÉORÈME 2.2. — *Sous les hypothèses du théorème 2.1, il existe $c > 0$ dépendant de g mais pas de ε tel que pour tout entier $p \geq 0$ et tout entier $i > \dim E_{k+1}^p - b_p(M)$, on a*

$$c \cdot \varepsilon^{2k} \leq \lambda_{p,i}(M, g_\varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon \leq 1$.

Nous utiliserons ce résultat pour une métrique g quasi-fibrée, mais il est vrai pour une métrique quelconque, comme le théorème 2.1. Nous allons donc le montrer dans le cas général.

Démonstration. — Nous allons utiliser le fait (démontré dans [3]) qu'il existe une suite décroissante de sous-espaces de $\Omega^*(M)$

$$(2.1) \quad \Omega^*(M) \supset \mathcal{H}_1^* \supset \mathcal{H}_2^* \supset \mathcal{H}_3^* \supset \dots \supset \mathcal{H}_\infty^*$$

et un opérateur symétrique $\Delta'_\varepsilon : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ dont le spectre est le même que celui de $\Delta(M, g_\varepsilon)$, et vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\mathcal{H}_k^* \simeq E_k^*$;
- Si ω_i est une suite d'éléments de $\Omega^p(M)$ telle que $\|\omega_i\| = 1$ et $(\Delta'_\varepsilon \omega_i, \omega_i) \in o(\varepsilon_i^{2(k-1)})$ où ε_i est une suite tendant vers 0, alors il existe une sous-suite convergente de ω_i dont la limite est dans \mathcal{H}_k^p ([3], théorème B).

S'il existe une suite ε_i tendant vers 0 et telle que $\lambda_{p,m-b_p(M)}(M, g_\varepsilon) \cdot \varepsilon_i^{-2k}$ tende vers zéro pour un $m > \dim E_{k+1}^p$, alors on peut construire une suite $(\mathcal{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de famille de vecteurs $\mathcal{B}_i = (\omega_i^{(j)})_{1 \leq j \leq m}$ telle que chaque famille \mathcal{B}_i soit orthonormée et que pour tout j , on a $(\Delta'_\varepsilon \omega_i^{(j)}, \omega_i^{(j)}) \in o(\varepsilon_i^{2k})$ quand $i \rightarrow +\infty$. On peut donc extraire de (\mathcal{B}_i) une sous-suite convergente, dont la limite sera orthonormée et contenue dans \mathcal{H}_{k+1}^p . Mais alors on a $\dim \mathcal{H}_{k+1}^p \geq m$, ce qui contredit $\dim \mathcal{H}_{k+1}^p = \dim E_{k+1}^p < m$.

Le théorème B de [3], utilise comme hypothèse que la métrique g , et donc l'effondrement (g_ε) , est quasi-fibrée. Il reste donc à montrer qu'on peut étendre le résultat qu'on vient d'obtenir à des métriques quelconques. Soit g une métrique quasi-fibrée, g' une métrique quelconque, et (g_ε) et (g'_ε) les effondrements adiabatiques associés. Comme la variété M est compacte, il existe des constantes $\tau > 0$ et $\tau' > 0$ telles que $\tau'g \leq g' \leq \tau g$. Comme l'ont remarqué Álvarez et Kordyukov dans [3] (section 4), on a alors $\tau'g_\varepsilon \leq g'_\varepsilon \leq \tau g_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Un théorème de J. Dodziuk ([10]) assure alors

que

$$(2.2) \quad \frac{1}{\tau'} \left(\frac{\tau'}{\tau} \right)^{\frac{3n}{2}} \lambda_{p,k}(M, g_\varepsilon) \leq \lambda_{p,k}(M, g'_\varepsilon) \leq \frac{1}{\tau} \left(\frac{\tau}{\tau'} \right)^{\frac{3n}{2}} \lambda_{p,k}(M, g_\varepsilon)$$

pour tout entiers $k \geq 0$ et $p \in [0, n]$, ce qui montre bien que le comportement asymptotique du spectre lors de l'effondrement ne dépend pas de la métrique initiale choisie. \square

Dans le cas où les feuilles sont de dimension 1, la suite spectrale du feuilletage est assez simple : le complexe bigradué $\Omega^{*,*}(M/\mathcal{F})$ sur lequel est construit la suite se réduit aux deux lignes $\Omega^{*,0}(M/\mathcal{F})$ et $\Omega^{*,1}(M/\mathcal{F})$, $\Omega^{*,q}(M/\mathcal{F})$ étant nul pour $q \geq 2$. Le terme $E_2^{*,0}$ s'identifie à la cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ comme pour tous les feuilletages, et le terme $E_2^{*,1}$ est isomorphe à la cohomologie tordue $H_\kappa^*(M/\mathcal{F})$ qui est la cohomologie des formes basiques pour l'opérateur différentiel tordu $d_\kappa : \omega \rightarrow d\omega - \kappa \wedge \omega$ ([20], diagramme 2.18). Comme $E_2^{*,q}$ est nul pour $q \geq 2$, la suite dégénère au rang 3, et on peut déduire du théorème 2.2 que toutes les petites valeurs propres sont de l'ordre de ε^2 et que leur nombre se calcule en fonction de $H^*(M/\mathcal{F})$, $H_\kappa^*(M/\mathcal{F})$ et $b_p(M)$:

FAIT 1. — *Le nombre de petites valeurs propres non nulles sur les p -formes pour un effondrement (g_ε) associé à une métrique quasi-fibrée g est $m_p = \dim H^p(M/\mathcal{F}) + \dim H_\kappa^{p-1}(M/\mathcal{F}) - b_p(M)$, et il existe une constante $c(g, \mathcal{F}) > 1$ telle que pour tout p et tout $1 \leq k \leq m_p$, on a*

$$c^{-1} \cdot \varepsilon^2 \leq \lambda_{p,k}(M, g_\varepsilon) \leq c \cdot \varepsilon^2.$$

Démonstration. — La suite spectrale $E_k^{*,*}$ du feuilletage dégénère au rang 3, donc $\dim E_k^p = b_p$ pour tout $k \geq 3$. Les seules petites valeurs propres sont donc celles correspondant à $k = 1$ dans les théorèmes 2.1 et 2.2. Leur nombre est

$$(2.3) \quad \begin{aligned} m_p &= \dim E_2^p - b_p \\ &= \dim E_2^{p,0} + \dim E_2^{p-1,1} - b_p \\ &= \dim H^p(M/\mathcal{F}) + \dim H_\kappa^{p-1}(M/\mathcal{F}) - b_p, \end{aligned}$$

et les théorèmes 2.1 et 2.2 assurent l'existence d'une constante c telle que

$$(2.4) \quad c^{-1} \cdot \varepsilon^2 \leq \lambda_{p,k}(M, g_\varepsilon) \leq c \cdot \varepsilon^2$$

pour tout $1 \leq k \leq m_p$. \square

La cohomologie basique ne vérifie en général pas la dualité de Poincaré, mais il existe une relation de dualité avec la cohomologie tordue :

FAIT 2 ([19]). — Si \mathcal{F} est un flot riemannien sur une variété compacte M de dimension n , alors on a $H_{\kappa}^i(M/\mathcal{F}) \simeq H^{n-1-i}(M/\mathcal{F})$.

On en déduit que la constante m_p peut s'écrire

$$(2.5) \quad m_p = \dim H^p(M/\mathcal{F}) + \dim H^{n-p}(M/\mathcal{F}) - b_p(M),$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.2.

2.2. Suite de Gysin des flots riemanniens

Pour démontrer le corollaire 1.5, on va préciser les rôles des classes $[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F})$ et $[e] \in H_{-\kappa}^2(M/\mathcal{F})$ dans la cohomologie du flot. On a déjà dit que la classe d'Álvarez est nulle si et seulement si le flot est isométrique. Cette propriété du flot possède d'autres caractérisations :

THÉORÈME 2.3 ([5], [19], [26], [2]). — Soit \mathcal{F} est un flot riemannien sur une variété compacte M de dimension n . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) le flot \mathcal{F} est isométrique ;
- (2) le flot \mathcal{F} est géodésible ;
- (3) la classe d'Álvarez du flot est nulle ;
- (4) $H^{n-1}(M/\mathcal{F}) \neq 0$;
- (5) la cohomologie basique du flot vérifie la dualité de Poincaré.

La classe d'Euler $[e]$ intervient dans une suite exacte longue de cohomologie, construite par J. I. Royo Prieto et qui généralise la suite de Gysin des fibrés en cercles :

THÉORÈME 2.4 ([29], [30]). — Si \mathcal{F} est un flot riemannien sur une variété compacte M , on a la suite exacte longue

$$(2.6) \quad \cdots \rightarrow H^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H_{\kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge^e} H^{i+1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

Remarque 2.5. — Dans [29], le théorème 2.4 est démontré en utilisant un argument à la Mayer-Vietoris. On peut aussi le déduire de la suite spectrale du fibré comme pour les fibrés en cercles, en s'appuyant sur le fait que la suite spectrale vérifie $E_2^{*,q} = 0$ pour $q \geq 2$ et en suivant la même démarche que dans [4] (chapitre 3, §14).

Remarque 2.6. — Il est bien connu que si M est simplement connexe, alors le flot est nécessairement isométrique : c'est par exemple un cas particulier d'un résultat d'É. Ghys ([15]) et on peut le retrouver en remarquant que

$$[\kappa] \in H^1(M/\mathcal{F}) \subset H^1(M) = \{0\}.$$

La suite de Gysin montre que l'hypothèse $H^1(M) = \{0\}$ implique aussi $[e] \neq 0$. En effet, on a alors la suite exacte

$$(2.7) \quad \{0\} \rightarrow H_\kappa^0(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge^e} H^2(M/\mathcal{F}) \rightarrow$$

et comme $[k] = 0$, on a

$$H_\kappa^0(M/\mathcal{F}) = H^0(M/\mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}.$$

L'application \wedge^e étant injective, elle est donc aussi non triviale. Par conséquent $[e] \neq 0$.

Le corollaire découle des résultats énoncés précédemment.

Démonstration du corollaire 1.5. — Si la classe d'Euler $[e]$ est nulle, la suite de Gysin se décompose en suites exactes courtes de la forme

$$(2.8) \quad 0 \rightarrow H^i(M/\mathcal{F}) \rightarrow H^i(M) \rightarrow H_\kappa^{i-1}(M/\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

On en déduit que $b_p(M) = \dim H^i(M/\mathcal{F}) + \dim H_\kappa^{i-1}(M/\mathcal{F})$ et donc que $m_p = 0$. Par contraposée, on obtient la première affirmation du corollaire.

Si la classe d'Álvarez est non nulle, alors $H^{n-1}(M/\mathcal{F}) = 0$ (théorème 2.3) et donc $H_\kappa^0(M/\mathcal{F}) = 0$ (fait 2). On peut alors déduire de la suite de Gysin que $H^1(M/\mathcal{F}) \simeq H^1(M)$, et on obtient finalement que $m_1 = 0$.

Il reste à montrer que si $[\kappa] = 0$ et $[e] \neq 0$, alors on a effectivement une petite valeur propre pour les 1-formes. Le début de la suite de Gysin s'écrit :

$$(2.9) \quad 0 \rightarrow H^1(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{i} H^1(M) \xrightarrow{j} H_\kappa^0(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge^e} H^2(M/\mathcal{F}) \rightarrow$$

Le fait que $[\kappa] = 0$ implique que $H_\kappa^0(M/\mathcal{F}) \simeq H^0(M/\mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}$, le noyau de \wedge^e est donc \mathbb{R} ou $\{0\}$. La cohomologie $H_\kappa^0(M/\mathcal{F})$ étant alors représentée par les fonctions constantes sur M , l'application \wedge^e est nulle si et seulement si $[e] = 0$. Si $[e] \neq 0$, alors le noyau de \wedge^e est $\{0\}$ et l'application j est nulle, et donc $H^1(M/\mathcal{F}) \simeq H^1(M)$. Si $[\kappa] = 0$ et $[e] \neq 0$, on a finalement

$$m_1 = \dim H^{n-1}(M/\mathcal{F}) = \dim H_\kappa^0(M/\mathcal{F}) = 1.$$

□

Remarque 2.7. — L'absence de petite valeur propre se traduit sur la suite de Gysin par le fait que toutes les applications

$$H_{\kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge^e} H^{i+1}(M/\mathcal{F})$$

sont nulles. Si le flot est isométrique, le cas $i = 1$ permet d'en déduire que la classe d'Euler est nulle, mais le raisonnement ne se généralise pas aux autres flots, et on peut trouver des flots pour lesquels toutes les applications \wedge^e sont nulles sans que la classe d'Euler soit nulle (voir paragraphe 4.2.2).

3. Géométrie des effondrements

Avant de démontrer les théorèmes 1.8 et 1.11, nous allons d'abord justifier la notion d'adhérence générique :

LEMME 3.1. — *Soit M une variété riemannienne compacte et \mathcal{F} un flot riemannien sur M . Il existe un flot linéaire \mathcal{F}_0 sur un tore T^k tel que toute restriction du flot \mathcal{F} à une adhérence de feuille soit conjuguée à un flot quotient de \mathcal{F}_0 , et que la réunion des adhérences des feuilles de \mathcal{F} sur lesquelles le flot est conjugué à \mathcal{F}_0 forme un ouvert dense de mesure pleine de M .*

Les flots quotients de \mathcal{F}_0 sont les flots obtenus, pour tout $l \leq k$, en projetant linéairement T^k sur un tore T^l (en incluant l'identité et les quotients d'indice fini, si $k = l$).

Cette notion de feuille générique correspond à celle de feuille régulière sans holonomie introduite dans [1]. Par ailleurs, on peut noter que les adhérences des feuilles du flot sont de dimension au plus k .

Démonstration du lemme 3.1. — On va s'appuyer sur le fait que toute feuille F du flot admet un voisinage ouvert U , appelé « voisinage de Carrière », vérifiant les propriétés suivantes (voir [5]) :

- le voisinage U est saturé par le flot ;
- il existe un difféomorphisme $U \rightarrow S^1 \times T^k \times B^{n-k}$ envoyant l'adhérence de F sur $S^1 \times T^k \times \{0\}$;
- le flot restreint à U est conjugué au flot obtenu par la suspension d'un difféomorphisme $T \times R$ de $T^k \times B^{n-k-1}$, où T est une translation irrationnelle et R une rotation de la boule B^{n-k-1} .

On peut décomposer la rotation R en somme de rotations planes :

$$(3.1) \quad R = \begin{pmatrix} R_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & R_m & 0 \\ 0 & \dots & 0 & Id \end{pmatrix}$$

où les R_i sont des rotations non triviales du plan.

Supposons d'abord que $R \neq Id$. On définit les points génériques de la boule B^{n-k-1} comme étant les points qui ne sont fixés par aucune des rotations R_i . Si x et y sont deux tels points, il existe une matrice diagonale D et une rotation R' commutant toutes deux avec R et telle que $y = DR'(x)$. Les orbites de x et y sous l'action de R sont conjuguées via l'application DR' , donc leur orbites pour le flot le sont aussi, ainsi que les adhérences de ces orbites. L'ensemble des points génériques de la boule forme un ouvert de mesure pleine de B^{n-k-1} , donc la réunion de leurs orbites pour le flot est un ouvert de mesure pleine de U . On appellera feuilles génériques (resp. adhérences génériques) de U ces orbites (resp. leur adhérence). Si on considère un point z non générique de la boule, l'adhérence de son orbite pour le flot peut s'écrire comme le quotient de l'adhérence générique par l'adhérence du groupe engendré par les rotation R'_i qui fixent ce point.

Si on suppose maintenant que $R = Id$, toutes les restrictions du flot aux adhérences des feuilles de U sont conjuguées au flot sur \bar{F} , qui représente alors la feuille générique de U .

Par compacité, il suffit d'un nombre fini de voisinages de Carrière pour recouvrir la variété M . Si deux de ces ouverts ont une intersection commune, ils auront en particulier une feuille en commun qui sera une feuille générique de chacun des deux ouverts. Par connexité, on en déduit que tous les ouverts du recouvrement ont la même adhérence générique. La réunion des feuilles génériques formant un ouvert dense de mesure pleine sur chaque ouvert du recouvrement, leur réunion sur l'ensemble de la variété est aussi un ouvert dense de mesure pleine. Il en va de même pour les adhérences génériques. \square

Quand on effondre la variété M par g_ε , elle tend vers un espace métrique X qui est le quotient de M par les adhérences des feuilles du flot. La distance de Gromov-Hausdorff $\delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)$ entre (M, g_ε) et X est alors de l'ordre du maximum du diamètre des adhérences des feuilles pour la

métrique induite. Plus précisément, on sait (voir [7], en particulier le théorème 2.6) que si on note $\pi : M \rightarrow X$ la projection de M sur X et qu'on pose

$$(3.2) \quad \delta'(\varepsilon) = \sup_{x \in X} \text{diam}(\pi^{-1}(x), g_\varepsilon),$$

alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de ε telle que

$$(3.3) \quad \frac{1}{c} \cdot \delta'(\varepsilon) \leq \delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon) \leq c \cdot \delta'(\varepsilon),$$

pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$. En nous appuyant sur cette remarque, on va montrer que $\delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)$ est contrôlé par le diamètre d'une adhérence générique.

LEMME 3.2. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte munie d'un flot riemannien \mathcal{F} d'adhérence générique (T^k, \mathcal{F}_0) . Si \bar{g} est une métrique sur T^k et en notant (g_ε) et (\bar{g}_ε) les effondrements adiabatiques de M et T^k pour leur flot respectif, alors il existe une constante $c > 0$ ne dépendant pas de ε telle que*

$$\frac{1}{c} \cdot \text{diam}(T^k, \bar{g}_\varepsilon) \leq \delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon) \leq c \cdot \text{diam}(T^k, \bar{g}_\varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$.

Démonstration. — Pour tout $x \in X$, la métrique g induit une métrique sur $\pi^{-1}(x)$. On peut ainsi définir une application continue de X dans l'espace des métriques du tore T^k : Si x est l'image par π d'une adhérence générique, l'image de x est simplement la métrique g_x induite par g sur cette adhérence, et on peut prolonger cette application par continuité sur les adhérences non génériques, quitte à ce que la métrique g_x soit dégénérée dans le cas où l'adhérence de la feuille est de dimension strictement inférieure à k , le diamètre de $\pi^{-1}(x)$ étant dans tous les cas majoré par $\text{diam}(T^k, g_x)$.

L'espace X étant compact, on peut trouver une constante $\tau > 0$ telle que pour tout $x \in X$, $g_x \leq \tau \bar{g}$, où \bar{g} est la métrique canonique de $\mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$. En notant $(g_{x,\varepsilon})$ et (\bar{g}_ε) les effondrements adiabatiques associés, on a $g_{x,\varepsilon} \leq \tau \bar{g}_\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que

$$(3.4) \quad \text{diam}(\pi^{-1}x, g_\varepsilon) \leq \text{diam}(T^k, g_{x,\varepsilon}) \leq \tau \text{diam}(T^k, \bar{g}_\varepsilon)$$

pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon \in]0, 1]$, et donc que

$$(3.5) \quad \delta'(\varepsilon) \leq \tau \text{diam}(T^k, \bar{g}_\varepsilon).$$

Si on se donne un point $x_0 \in X$ qui soit la projection par π d'une adhérence générique, on peut trouver $\tau' > 0$ tel que $\tau' \bar{g} \leq g_{x_0}$. On a alors

$$(3.6) \quad \tau' \text{diam}(T^k, \bar{g}_\varepsilon) \leq \delta'(\varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$. On peut alors conclure en utilisant l'encadrement (3.3). \square

Le lemme 3.2 assure que

$$(3.7) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \delta(M, \mathcal{F}, g_\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \text{diam}(T^k, \bar{g}_\varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

Pour démontrer le théorème 1.8, il reste donc à décrire la géométrie de l'effondrement d'une adhérence générique dans le cas où elle est de dimension 2. Le flot est entièrement déterminé par la donnée d'un irrationnel $\alpha \in \mathbb{R}$, le flot étant induit par le vecteur $(1, \alpha) \in \mathbb{R}^2$. On va étudier le comportement asymptotique du diamètre d'un tore T^2 plat au cours de l'effondrement d'un flot linéaire :

LEMME 3.3. — Soit $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, g le quotient sur T^2 de la métrique canonique de \mathbb{R}^2 , α un réel irrationnel et (g_ε) l'effondrement adiabatique associé à g et au flot linéaire induit par le vecteur $(1, \alpha)$. On a alors :

$$(3.8) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \text{diam}(T^2, g_\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \frac{1}{\mu(\alpha)}.$$

Démonstration. — On va en fait montrer que

$$(3.9) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \text{inj}(T^2, g_\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = 1 - \frac{1}{\mu(\alpha)},$$

le lemme s'en déduit en utilisant le fait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(3.10) \quad \frac{1}{C} \cdot \text{Vol}(T^2, g_\varepsilon) \leq \text{inj}(T^2, g_\varepsilon) \cdot \text{diam}(T^2, g_\varepsilon) \leq C \cdot \text{Vol}(T^2, g_\varepsilon).$$

et que $\text{Vol}(T^2, g_\varepsilon) = \varepsilon$.

Notons $\|\cdot\|_\varepsilon$ la norme sur \mathbb{R}^2 obtenue en relevant la métrique g_ε . On peut remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$(3.11) \quad \text{inj}(T^2, g_\varepsilon) = \frac{1}{2} \inf_{\substack{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \\ (p,q) \neq (0,0)}} \|(p, q)\|_\varepsilon$$

Le problème est donc d'estimer la distance pour la métrique g_ε entre les points non nuls de \mathbb{Z}^2 et l'origine. On notera D la droite vectorielle de \mathbb{R}^2 engendrée par $(1, \alpha)$, et θ l'angle entre la droite D et l'axe des abscisses pour la métrique g .

On va d'abord minorer cette distance en fonction de l'exposant d'irrationalité de α . Soit ν un réel tel que $\nu > \mu(\alpha)$. L'inéquation $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\nu}$ n'a

alors qu'un nombre fini de solutions, on peut donc trouver une constante $0 < c(\alpha) < 1$ telle que

$$(3.12) \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^\nu}$$

pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on définit une partie A_ε de \mathbb{R}^2 par :

$$(3.13) \quad A_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x\alpha - y| < c \cdot \varepsilon^{1-\frac{1}{\nu}}, |x| < \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\nu}}} \right\}.$$

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, le seul point à coordonnées entières contenu dans A_ε est $(0, 0)$. En effet, si $(q, p) \in A_\varepsilon \cap \mathbb{Z}^2$, alors $|q| < \varepsilon^{-\frac{1}{\nu}}$ et $|q\alpha - p| < c \cdot \varepsilon^{1-\frac{1}{\nu}}$. Si $q \neq 0$ ceci implique $|q\alpha - p| < \frac{c}{q^{\nu-1}}$, et donc $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{c}{q^\nu}$, ce qui contredit (3.12). Si $q = 0$, alors $|p| < c \cdot \varepsilon^{1-\frac{1}{\nu}}$ ce qui implique $p = 0$.

Le domaine A_ε est, pour la métrique g , un parallélogramme dont un coté, parallèle à la droite D , est de longueur $\frac{2}{\cos \theta} \varepsilon^{-\frac{1}{\nu}}$, et l'autre, parallèle à l'axe des ordonnées, est de longueur $2c \cdot \varepsilon^{1-\frac{1}{\nu}}$. Il contient donc un rectangle R dont les cotés, respectivement parallèles et orthogonaux à D , sont de longueurs $\frac{2}{\cos \theta} \varepsilon^{-\frac{1}{\nu}} - 2c|\sin \theta| \varepsilon^{1-\frac{1}{\nu}}$ et $2c \cdot \cos \theta \cdot \varepsilon^{1-\frac{1}{\nu}}$. Pour la métrique g_ε , R est un rectangle de cotés $\varepsilon^{1-\frac{1}{\nu}} (\frac{2}{\cos \theta} - 2c|\sin \theta| \varepsilon)$ et $2c \cdot \cos \theta \cdot \varepsilon^{1-\frac{1}{\nu}}$. On peut donc trouver un réel $\rho > 0$ ne dépendant pas de ε tel que, pour la métrique g_ε , la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon $\rho \varepsilon^{1-\frac{1}{\nu}}$ soit contenue dans A_ε et donc ne contienne pas d'autre point à coordonnées entières. On a par conséquent la minoration

$$(3.14) \quad \text{inj}(T^2, g_\varepsilon) \geq \frac{\rho}{2} \varepsilon^{1-\frac{1}{\nu}}$$

et, en tenant compte du fait que $\ln \varepsilon$ est négatif, la majoration

$$(3.15) \quad \frac{\ln \text{inj}(T^2, g_\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \leq 1 - \frac{1}{\nu} + \frac{\ln \frac{\rho}{2}}{\ln \varepsilon}.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ puis $\nu \rightarrow \mu(\alpha)$, on obtient

$$(3.16) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \text{inj}(T^2, g_\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \leq 1 - \frac{1}{\mu(\alpha)},$$

On va maintenant majorer $\text{inj}(T^2, g_{\varepsilon_n})$ pour une suite (ε_n) tendant vers zéro. Soit $\nu < \mu(\alpha)$. Il existe deux suites d'entiers (p_n) et (q_n) telles que (q_n) soit strictement croissante et $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^\nu}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit P_n le projeté orthogonal de (p_n, q_n) sur la droite D . On peut noter que P_n est indépendant du choix de la métrique dans la famille (g_ε) . Si on note d et d' les distances pour la métrique canonique de l'origine à P_n et de P_n à (p_n, q_n) , on a $\|(p_n, q_n)\|_\varepsilon^2 = \varepsilon^2 d^2 + d'^2$. D'un part, la distance d' peut

s'écrire $d' = |q_n\alpha - p_n| \cos \theta$, donc $d' \leq q_n^{1-\nu} \cos \theta$. D'autre part, comme $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha$, on a la majoration

$$(3.17) \quad d^2 \leq p_n^2 + q_n^2 = q_n^2 \left(\frac{p_n^2}{q_n^2} + 1 \right) \leq q_n^2 (\alpha + 2).$$

Si on pose $\varepsilon_n = q_n^{-\nu}$, on a finalement

$$(3.18) \quad \|(p_n, q_n)\|_{\varepsilon_n}^2 \leq q_n^{2(1-\nu)} (\cos^2 \theta + \alpha + 2) = \varepsilon_n^{2(1-\frac{1}{\nu})} (\cos^2 \theta + \alpha + 2).$$

On en déduit que

$$(3.19) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{inj}(T^2, g_\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \operatorname{inj}(T^2, g_{\varepsilon_n})}{\ln \varepsilon_n} \geq 1 - \frac{1}{\nu},$$

et, en passant à la limite quand $\nu \rightarrow \mu(\alpha)$,

$$(3.20) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{inj}(T^2, g_\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \geq 1 - \frac{1}{\mu(\alpha)}.$$

□

Remarque 3.4. — Le théorème 1.8 apporte un élément de réponse à la question, posée par P. Pansu dans [28], de savoir si dans l'exemple 1.1 on peut mesurer l'écart entre deux métriques obtenues en fixant ε et en faisant varier α . On voit que si on choisit deux valeurs de α ayant des exposants d'irrationalité différents, on pourra effectivement trouver des valeurs de ε pour lesquelles la distance de Gromov-Hausdorff entre les deux métriques est minorées.

Remarque 3.5. — Les adhérences non génériques empêchent de contrôler le rayon d'injectivité global en fonction de $\mu(\mathcal{F})$. On peut voir dans l'exemple 1.1 que le rayon d'injectivité est donné par la longueur des feuilles compactes et qu'il est donc de l'ordre de ε quel que soit $\mu(\mathcal{F})$.

Une difficulté apparaît si on cherche à généraliser le lemme 3.3 aux tores de dimension supérieure. On peut représenter un flot linéaire sur T^k par un vecteur $(1, \alpha) \in \mathbb{R}^k$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{k-1}$ et définir un exposant d'irrationalité de α par

$$(3.21) \quad \mu(\alpha) = \sup \left\{ \nu, \left\| \alpha - \frac{p}{q} \right\| < \frac{1}{q^\nu} \text{ a une infinité de solutions } (p, q) \in \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z} \right\}.$$

Cet invariant permet de contrôler le rayon d'injectivité du tore lors de l'effondrement, mais la relation (3.10) se généralise par

$$(3.22) \quad \frac{1}{C(k)} \operatorname{inj}^{k-1}(T^k) \cdot \operatorname{diam}(T^k) \leqslant \\ \operatorname{Vol}(T^k) \leqslant C(k) \cdot \operatorname{inj}(T^k) \cdot \operatorname{diam}^{k-1}(T^k),$$

ce qui ne permet pas de contrôler le diamètre en fonction du rayon d'injectivité aussi précisément qu'en dimension 2. Cependant, dans le cas où α est difficilement approchable, on a montré dans [16] le résultat suivant :

PROPOSITION 3.6. — *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{k-1}$ un vecteur difficilement approchable, \mathcal{F} le flot linéaire induit sur T^k par le vecteur $(1, \alpha)$, g une métrique sur T^k et (g_ε) l'effondrement adiabatique associé à \mathcal{F} et g . Il existe une constante $c(g, \alpha) > 0$ telle que*

$$(3.23) \quad \frac{1}{c} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{k}} \leqslant \operatorname{inj}(T^k, g_\varepsilon) \leqslant \operatorname{diam}(T^k, g_\varepsilon) \leqslant c \cdot \varepsilon^{\frac{1}{k}}.$$

Le lemme 3.2 permet d'en déduire directement le théorème 1.11.

4. Exemples

4.1. Flots isométriques

4.1.1. Effondrements de sphères

Les sphères ayant un gros groupe d'isométrie, elles permettent de construire facilement des exemples de flots isométriques. En outre, on obtient aisément des flots pour lesquels l'espace limite de l'effondrement est singulier. On peut généraliser l'exemple 1.1 de la manière suivante :

Exemple 4.1. — On considère la sphère

$$(4.1) \quad S^{2n-1} = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n, |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 = 1\}$$

sur laquelle le tore T^n agit isométriquement par

$$(4.2) \quad (\theta_1, \dots, \theta_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) = (e^{i\theta_1} a_1, \dots, e^{i\theta_n} a_n).$$

Un sous-groupe à un paramètre du tore T^n induit un flot isométrique non singulier sur S^{2n-1} . Si ce sous-groupe est dense dans T^n , l'espace limite de l'effondrement est $X = S^{2n-1}/T^n$, qu'on peut identifier à un domaine de la sphère S^{n-1} :

$$(4.3) \quad X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1 \text{ et } x_1, \dots, x_n \geqslant 0\}.$$

Cet espace est difféomorphe à un simplexe de dimension $n - 1$.

Le même argument que dans l'exemple 1.1 assure que ces effondrements produisent des petites valeurs propres. La classe d'Euler de ces flots est donc non nulle, selon le corollaire 1.5.

Remarque 4.2. — Comme les sphères de dimension paire ont une caractéristique d'Euler non nulle, non seulement elles n'admettent pas de flot non singulier mais elles n'admettent pas non plus d'effondrement à courbure bornée.

Remarque 4.3. — La suite de Gysin permet de calculer la cohomologie basique du flot, on a $H^p(M/\mathcal{F}) = \mathbb{R}$ quand p est pair et $H^p(M/\mathcal{F}) = \{0\}$ quand p est impair. On a donc des petites valeurs propres en tout degré autre que 0 et n .

4.1.2. Prescription de l'exposant d'irrationalité

Dans l'exemple 1.1, comme sur n'importe quelle variété dont le groupe d'isométrie contient un tore T^2 , on peut construire pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un flot dont le vecteur directeur sur une adhérence générique est $(1, \alpha)$. Pour tout $\mu \in [2, +\infty]$, on peut construire un α dont l'exposant d'irrationalité est μ en utilisant le fait que l'exposant d'irrationalité peut se calculer à l'aide du développement en fraction continue de α :

THÉORÈME 4.4 ([34]). — *Soit α un irrationnel, $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ son développement en fraction continue et $\frac{p_n}{q_n}$ les réduites successives de ce développement. On a alors*

$$\mu(\alpha) = 1 + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{\ln q_n} = 2 + \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln a_{n+1}}{\ln q_n}.$$

Sachant qu'on a aussi $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, on voit qu'on peut aisément construire une suite (a_n) ayant l'exposant d'irrationalité souhaité, par exemple en posant la relation de récurrence $a_{n+1} = [q_n^\mu]$ si μ est fini. Le cas $\mu = +\infty$ correspond aux nombres de Liouville.

Si le groupe d'isométrie contient un tore T^k , on peut construire un flot linéaire sur ce tore — et donc un flot isométrique sur la variété — dont la direction est difficilement approchable, en utilisant le fait que si $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ est une base d'un corps de nombres réel, alors $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ est difficilement approchable ([33], théorème 4A, p.42).

4.1.3. Fibrés principaux en tores

Si on considère un fibré $T^2 \hookrightarrow M \rightarrow N$ principal, un vecteur $(1, \alpha)$ sur T^2 induit un flot isométrique dont toutes les feuilles sont génériques. En suivant la construction donnée dans [16], on peut obtenir un effondrement pour lequel le rayon d'injectivité global est du même ordre que celui d'une fibre quelconque. On peut donc construire, pour tout $\mu \geq 2$, un flot pour l'effondrement duquel on a

$$(4.4) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda_{p,i}(M, g_\varepsilon)}{\ln \text{inj}(M, g_\varepsilon)} = \frac{2\mu}{\mu - 1},$$

Pour tout $i \leq m_p$.

4.2. Flots non isométriques

4.2.1. Fibrés en tores sur le cercle

On peut construire un grand nombre d'exemples de flots non isométriques en prenant comme support des fibrés en tores sur le cercle. Si on se donne une matrice $A \in \text{SL}_k(\mathbb{Z})$, cette matrice induit un difféomorphisme linéaire du tore T^k et on peut construire un fibré $T^k \hookrightarrow M \rightarrow S^1$ par suspension de ce difféomorphisme. Chaque vecteur propre de A induit sur T^k un flot linéaire qui s'étend en un flot global sur M . Si on munit M d'une structure de solvariété et d'une métrique invariante comme dans [17], on peut aisément représenter le flot considéré par un champ de vecteur invariant et vérifier que la métrique est quasi-fibrée pour ce flot (voir les exemples donnés dans [30]).

Pour illustrer le corollaire 1.5, on va donner deux exemples illustrant chacun des cas $[e] = 0$ et $[e] \neq 0$.

Exemple 4.5. — On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le flot correspondant est l'exemple le plus simple de flot non isométrique — il représente l'unique classe de flots non isométriques dans la classification des flots riemanniens établie en dimension 3 par Y. Carrière dans [5] —, et sa classe d'Euler est nulle (cf. [30]). L'effondrement du flot ne produit donc aucune petite valeur propre.

Exemple 4.6. — On pose

$$(4.5) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la théorie de J. Lott ([21]), les effondrements du fibré obtenu ne produisent jamais de petites valeurs propres pour les 1-formes différentielles, mais on a montré dans [17] que l'effondrement du flot produisait des petites valeurs propres sur les 2-formes. On peut en déduire que $[\kappa] \neq 0$ et $[e] \neq 0$.

Dans [30] est présenté un exemple de variété de dimension 6 admettant un flot riemannien vérifiant $[\kappa] \neq 0$ et $[e] \neq 0$. Dans l'exemple 4.6 ci-dessus, la variété est de dimension 5. On ne peut pas trouver de tels exemples en dimension 3 selon la classification de Y. Carrière. On va voir au paragraphe suivant qu'il en existe en dimension 4, mais que leur effondrement ne peut pas produire de petites valeurs propres.

4.2.2. Existence de petites valeurs propres et annulation de la classe d'Euler

Nous allons construire dans ce paragraphe un exemple de flot dont la classe d'Euler est non nulle mais dont l'effondrement adiabatique ne produit pas de petite valeur propre. Pour cela, nous commencerons par établir deux lemmes. Le premier fournit un critère concernant l'annulation des classes d'Euler et d'Álvarez :

LEMME 4.7. — *Soit \mathcal{F} un flot riemannien sur une variété M , et N une sous-variété de M stable par \mathcal{F} . Si la classe d'Álvarez (resp. d'Euler) de \mathcal{F} est nulle, alors la classe d'Álvarez (resp. d'Euler) du flot restreint à N est nulle aussi.*

Démonstration. — Le cas de la classe d'Álvarez est évident quand on se souvient que $[\kappa] = 0$ signifie que le flot est isométrique : si une métrique sur M est invariante par le flot, sa restriction à N sera aussi invariante sous l'action de la restriction du flot.

Si χ est la forme caractéristique du flot sur M , la forme d'Euler est définie par $d\chi = \kappa \wedge \chi + e$, et $[e] = 0$ signifie que e est une forme exacte pour la différentielle tordue $d_{-\kappa}$, c'est-à-dire qu'il existe une forme basique β telle que $e = d\beta + \kappa \wedge \beta$. On a donc $d\chi = \kappa \wedge \chi + d\beta + \kappa \wedge \beta$. Si on note i l'injection $i : N \rightarrow M$, on peut en déduire

$$d(i^*\chi) = (i^*\kappa) \wedge (i^*\chi) + d(i^*\beta) + (i^*\kappa) \wedge (i^*\beta).$$

On peut vérifier que $i^*\chi$ est bien la forme caractéristique du flot restreint à N , et que $i^*\kappa$ et $i^*\beta$ sont des formes basiques pour ce flot. On en déduit que $i^*\kappa$ est la forme de courbure et $d(i^*\beta) + (i^*\kappa) \wedge (i^*\beta) = d_{-i^*\kappa}i^*\beta$ la

forme d'Euler du flot sur N , et que la classe d'Euler correspondante est nulle. \square

Le second lemme concerne le spectre du laplacien en dimension 4 :

LEMME 4.8. — *L'effondrement adiabatique d'un flot riemannien non isométrique sur une variété de dimension 4 ne produit pas de petites valeurs propres.*

Démonstration. — La théorie de Hodge assure qu'en dimension 4, le spectre du laplacien de Hodge-de Rham est entièrement déterminé par sa restriction aux 1-formes différentielles. Or, on a vu que l'effondrement d'un flot non isométrique ne produit pas de petite valeur propre sur les 1-formes.

On peut aussi remarquer que pour un flot non isométrique en dimension 4, on a

$$H_{\kappa}^0(M/\mathcal{F}) = H^3(M/\mathcal{F}) = \{0\},$$

et donc toutes les applications $H_{\kappa}^{i-1}(M/\mathcal{F}) \xrightarrow{\wedge^e} H^{i+1}(M/\mathcal{F})$ dans la suite de Gysin du flot sont nulles, ce qui garantit qu'il n'y a pas de petites valeurs propres (*cf.* remarque 2.7). \square

En vertu du lemme précédent, il nous suffit de construire un flot riemannien non isométrique sur une variété de dimension 4 dont la classe d'Euler est non nulle. L'exemple que nous allons considérer appartient à une famille de flots non isométriques exhibée dans [1], nous allons en donner une construction qui permet de facilement mettre en évidence le fait que $[\kappa] \neq 0$ et $[e] \neq 0$ en utilisant le lemme 4.7.

On commence par considérer le flot de l'exemple 1.1 sur la sphère (le coefficient α déterminant la direction du flot sera fixé ultérieurement). En prenant le produit de la sphère S^3 par un cercle, on obtient un flot sur $S^3 \times S^1$ dont l'adhérence générique est de dimension 2 et dont l'espace limite de l'effondrement est $[0, \frac{\pi}{2}] \times S^1$. On peut noter qu'au dessus de $]0, \frac{\pi}{2}[\times S^1$, le flot se décompose en un produit trivial entre l'adhérence générique et $]0, \frac{\pi}{2}[\times S^1$.

On modifie maintenant la variété de manière à ajouter une anse à l'espace limite : le nouvel espace limite X est obtenu en enlevant deux disques D_0 et D_1 à $[0, \frac{\pi}{2}] \times S^1$ et en recollant le long des bords de ces deux disques un cylindre $S^1 \times [0, 1]$. La variété M sur laquelle sera défini le nouveau flot est obtenu en enlevant les deux parties de la forme $D_i \times T^2$ au dessus des deux disques de l'espace limite, et en recollant le long du bord le produit $S^1 \times [0, 1] \times T^2$. On doit préciser la manière d'effectuer le recollement car la topologie de la variété M en dépend : on se donne une matrice $A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$

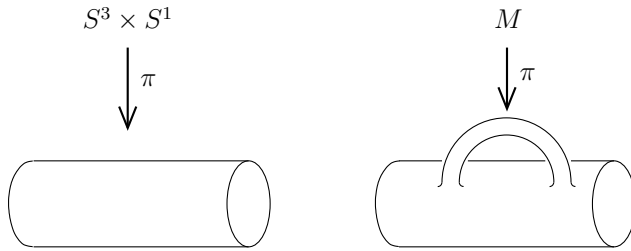


FIG. 4.1.

et on identifie les bords de $D_i \times T^2$ et $S^1 \times [0, 1] \times T^2$ par

$$(4.6) \quad \begin{cases} \partial D_0 \times T^2 & \rightarrow S^1 \times \{0\} \times T^2 \\ (x, y) & \rightarrow (x, y) \end{cases}$$

et

$$(4.7) \quad \begin{cases} \partial D_1 \times T^2 & \rightarrow S^1 \times \{1\} \times T^2 \\ (x, y) & \rightarrow (x, Ay) \end{cases},$$

l'identification entre ∂D_i et S^1 provenant de l'adjonction d'anse sur l'espace limite.

On construit le flot riemannien sur M en munissant $S^1 \times [0, 1] \times T^2$ du flot obtenu par produit de l'adhérence générique du flot sur $S^3 \times S^1$ par $S^1 \times [0, 1]$. Pour assurer la compatibilité du flot avec le recollement ci-dessus, on choisit la matrice A telle qu'elle admette une valeur propre irrationnelle — par exemple la matrice A de l'exemple 4.5 —, et on prend comme direction du flot sur S^3 la direction propre correspondante. On obtient bien ainsi un flot linéaire dense dans T^2 qui est invariant par A .

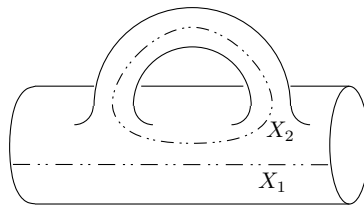


FIG. 4.2.

Il reste à montrer que les classes d'Álvarez et d'Euler du flot sont non nulles. On va pour cela définir deux sous-variétés N_1 et N_2 de M , stable par

le flot, et appliquer le lemme 4.7. Pour N_1 , on choisit une sphère $S^3 \times \{x\}$ dans $S^3 \times S^1$ qui ne rencontre pas les $D_i \times T^2$, et qui est donc préservée dans M . L'espace limite de l'effondrement de N_1 est un segment X_1 dans X . On construit N_2 en se donnant un cercle X_2 dans X qui passe par l'anse (voir figure 4.2) et en définissant N_2 comme étant le fibré en tore T^2 au dessus de X_2 .

La sous-variété N_1 est une sphère donc le flot restreint à N_1 a une classe d'Euler non nulle, et N_2 est la suspension du difféomorphisme linéaire de T^2 induit par la matrice A , donc le flot restreint à N_2 est non isométrique d'après la classification de [5]. En vertu du lemme 4.7, les classes d'Álvarez et d'Euler du flot sur M sont toutes les deux non nulles.

Remarque 4.9. — Le procédé d'adjonction d'anse sur l'espace limite peut aisément se généraliser à d'autres flots, par exemple ceux du paragraphe 4.1.1, pour construire des exemples de flots non isométriques.

4.2.3. Construction de flots difficilement approchables

On va présenter ici une construction de flots riemanniens non isométriques dont la direction est difficilement approchable. Notons qu'une construction semblable apparaît aussi dans [14] pour d'autres de ses propriétés.

On considère une variété compacte B telle que $b_1(B) \neq 0$, et on note \tilde{B} son revêtement universel. L'idée est de se donner un flot linéaire sur T^k dont la direction est difficilement approchable, et de construire un fibré en tore T^k sur B dont le groupe de structure est formé de difféomorphismes linéaires de T^k préservant le flot orienté sur le tore.

On se donne une extension algébrique réelle \mathbb{K} de \mathbb{Q} de degré k , on note r le nombre de plongements réels de \mathbb{K} et s son nombre de paires de plongements complexes conjugués. On montre en appendice que si $v \in \mathbb{R}^k$ est un vecteur dont les composantes forment une base d'entiers de \mathbb{K} — c'est-à-dire une base de \mathbb{K} sur \mathbb{Q} qui est aussi une base de l'anneau des entiers de \mathbb{K} , vu comme \mathbb{Z} -module —, alors v est difficilement approchable et le groupe G_v défini par

$$(4.8) \quad G_v = \{A \in \mathrm{SL}_k(\mathbb{Z}), Av = \lambda v \text{ avec } \lambda > 0\}.$$

est un groupe abélien libre de rang $r + s - 1$, et ce rang peut prendre toutes les valeurs entre $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ et $k - 1$ selon le choix du corps \mathbb{K} (voir théorème 4.17 et remarque 4.19).

On obtient un fibré M en tore sur B en se donnant un morphisme de groupe $\varphi : \pi_1(B) \rightarrow G_v$ et en définissant M comme le quotient de $\tilde{B} \times T^k$

pour l'action de $\pi_1(B)$ définie par $\gamma \cdot (x, y) = (\gamma \cdot x, \varphi(\gamma) \cdot y)$. Comme la direction de v est invariante par G_v , le flot induit par v sur $\tilde{B} \times T^k$ passe au quotient sur M en un flot difficilement approchable.

Si l'image de φ est non triviale, le flot n'est pas isométrique : en effet, si le flot était isométrique, son action sur M s'étendrait en une action de son adhérence dans le groupe d'isométrie de M , cette adhérence étant compacte et isomorphe au tore T^k . le fibré serait alors principal et son groupe de structure pourrait se réduire à des translation sur le tore T^k .

Remarque 4.10. — L'image de φ dans G_v est un quotient abélien de $\pi_1(B)$, donc son rang est majoré par $b_1(B)$. L'hypothèse $b_1(B) \neq 0$ assure que l'on peut choisir l'application φ telle que son image soit non triviale.

Remarque 4.11. — On peut appliquer à la variété obtenue un procédé chirurgical semblable à celui pratiqué au paragraphe 4.2.2 pour construire un flot dont la classe d'Euler est non nulle.

Remarque 4.12. — Les éléments du groupe G_v ont r directions propres simples en commun. On peut donc construire r flots difficilement approchables distincts sur la variété M obtenue.

Appendice

Sur les propriétés arithmétiques des flots riemanniens

À un flot riemannien dont l'adhérence générique est de dimension k , on peut associer un sous-groupe de $\mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$ de la manière suivante : si v est un vecteur de \mathbb{R}^k , on définit le groupe G_v par

$$(4.9) \quad G_v = \{A \in \mathrm{SL}_k(\mathbb{Z}), Av = \lambda v \text{ avec } \lambda > 0\}.$$

Si le flot linéaire sur l'adhérence générique d'une flot riemannien \mathcal{F} est induit par un vecteur v , on définit $G_{\mathcal{F}}$ comme étant égal au groupe G_v , c'est le groupe des difféomorphismes linéaires du tore qui préservent le flot linéaire orienté induit par v sur T^k . Le vecteur v dépendant d'un choix de base dans \mathbb{Z}^k , le groupe $G_{\mathcal{F}}$ est défini à conjugaison près dans $\mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$.

Les groupes G_v interviennent dans la classification des feuilletages totalement géodésiques de dimension 1 établie dans [14], où É. Ghys montre en particulier que ces groupes sont nécessairement abéliens libres et de rang inférieur ou égal à $k - 1$. Le groupe $G_{\mathcal{F}}$ possède aussi la propriété suivante, qui a été remarquée dans des situations particulières ([14], [1]) mais dont nous n'avons pas trouvé de démonstration générale dans la littérature :

THÉORÈME 4.13. — *Si le groupe $G_{\mathcal{F}}$ est trivial, alors le flot \mathcal{F} est isométrique.*

Démonstration. — On commence par appliquer le procédé de désingularisation du flot décrit par P. Molino dans [25] (voir aussi [5] pour son application aux flots) : si \mathcal{F} est un flot riemannien sur une variété M^n et qu'on note \tilde{M} la variété de dimension $n(n-1)$ définie comme étant le fibré des repères orthonormés directs transverses au flot, le flot \mathcal{F} induit un flot riemannien $\tilde{\mathcal{F}}$ sur \tilde{M} , dont toutes les feuilles sont génériques et qui a la propriété d'avoir la même adhérence générique que \mathcal{F} . De plus, la variété \tilde{M} possède une structure de fibré sur une variété B dont les fibres sont les adhérences T^k des feuilles du flot.

Le groupe de structure du fibré $\tilde{M} \rightarrow B$ est composé des difféomorphismes du tore qui préservent le flot linéaire sur l'adhérence générique. D'après le lemme 4.7 de [12], on peut réduire ce groupe de structure aux difféomorphismes affines du tore qui préservent le flot, leur partie linéaire étant alors nécessairement contenue dans $G_{\tilde{\mathcal{F}}} = G_{\mathcal{F}}$. Si le groupe $G_{\mathcal{F}}$ est trivial, la fibration $\tilde{M} \rightarrow B$ est principale. Le flot $\tilde{\mathcal{F}}$ est donc isométrique, car on peut munir \tilde{M} d'une métrique invariante pour l'action de T^k qui sera nécessairement invariante par le flot.

On conclut en utilisant le fait ([26], proposition I.1) que \mathcal{F} est isométrique si et seulement si $\tilde{\mathcal{F}}$ est isométrique. \square

On va étudier plus précisément les groupes G_v afin de pouvoir déterminer si un flot est difficilement approchable et pour en construire des exemples. On s'intéresse au cas où le flot linéaire induit par v sur le tore T^k est à orbites denses, c'est-à-dire que les composantes de v sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . Si on note $v = (v_1, \dots, v_k)$, on peut donc associer à v un espace vectoriel sur \mathbb{Q} de dimension k , noté E_v , par $E_v = \text{vect}_{\mathbb{Q}}(1, \frac{v_2}{v_1}, \dots, \frac{v_k}{v_1})$.

THÉORÈME 4.14. — *Si A est un élément de G_v , alors la matrice A est diagonalisable sur \mathbb{C} , ses valeurs propres ont toutes la même multiplicité.*

Si de plus le vecteur v est vecteur simple de A , alors E_v est un corps de nombres et v est difficilement approchable.

Démonstration. — On commence par remarquer, comme dans la démonstration du lemme 5.3 de [14], que l'indépendance linéaire des composantes de v implique que si M est une matrice à coefficients entiers telle que $Mv = 0$ alors $M = 0$. C'est en particulier vrai pour les matrices de la forme $P(A)$, où P est un polynôme à coefficients entiers et A un élément de G_v . Soit λ le réel tel que $Av = \lambda v$. Si P est un polynôme annulateur

de λ , alors $P(A)v = P(\lambda)v = 0$, donc P est un polynôme annulateur de A . Réciproquement, si $P(A) = 0$, alors $P(\lambda) = 0$. Le polynôme minimal de λ est donc aussi polynôme minimal de A . Comme les racines du polynôme minimal d'un réel algébrique sont nécessairement simples, la matrice A est diagonalisable sur \mathbb{C} . De plus, comme le polynôme caractéristique de A est à coefficient entier, il reste invariant par l'action du groupe de Galois du polynôme minimal de λ , donc toutes ses racines ont la même multiplicité.

La suite de la démonstration s'appuie sur une autre remarque faite par É. Ghys dans [14], à savoir que l'application $\varphi : G_v \rightarrow \mathbb{R}^*$ qui à une matrice $A \in G_v$ associe sa valeur propre associée à v est un morphisme de groupe dont l'image est contenue dans E_v . En reprenant les notations précédentes, on a donc $\lambda \in E_v$, mais aussi $\lambda^i \in E_v$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, et par conséquent $\mathbb{Q}(\lambda) \subset E_v$. Si v est vecteur simple d'une matrice $A \in G_v$, alors son polynôme minimal est de degré k , donc $[\mathbb{Q}(\lambda) : \mathbb{Q}] = k = \dim E_v$, c'est-à-dire que $\mathbb{Q}(\lambda) = E_v$. L'espace vectoriel E_v est alors un corps de nombres réel, dont une base est formé par la famille $(1, \frac{v_2}{v_1}, \dots, \frac{v_k}{v_1})$. Par conséquent le vecteur v est difficilement approchable ([33], théorème 4A, p.42). \square

Remarque 4.15. — Le théorème 4.14 assure que les multiplicités des valeurs propres des éléments de G_v sont nécessairement des diviseurs de k . Si on considère un flot riemannien \mathcal{F} dont la dimension k de l'adhérence générique est un nombre premier et que le groupe $G_{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial — par exemple si le flot \mathcal{F} n'est pas isométrique, selon le théorème 4.13 — il contient un élément dont les valeurs propres sont simples, et donc le flot est difficilement approchable.

Remarque 4.16. — Dans [14], É. Ghys introduit, pour la donnée d'une forme $\omega \in \mathbb{R}^{n*}$ telle que $\omega(v) \neq 0$, le groupe $G_{v,\omega}$ des éléments $A \in G_v$ tels que ω soit vecteur propre de tA . On peut déduire du théorème 4.14 que si $A \in G_v$, il existe nécessairement une forme propre ω de tA telle que $\omega(v) \neq 0$, et si v est vecteur simple de A cette forme est unique, à une constante multiplicative près. Comme les éléments de G_v commutent, cette forme sera aussi forme propre des transposées des autres éléments de G_v . Sous l'hypothèse que v est vecteur simple d'un élément de A , on a donc $G_{v,\omega} = G_v$.

On va donner maintenant une description plus globale des groupes G_v : on peut en effet les classifier en les interprétant comme une représentation d'un sous-groupe du groupe des unités d'un corps de nombres réel. On obtient en particulier une méthode pour construire des groupes G_v non triviaux, dans le but de construire des flots riemanniens non isométriques difficilement approchables (cf. paragraphe 4.2.3).

Précisons quelques notations : si on considère un corps de nombres réel \mathbb{K} de rang k , on note $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ son anneau des entiers, $\mathcal{U}_{\mathbb{K}} = \mathcal{O}_{\mathbb{K}}^*$ son groupe des unités et $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}^+$ le sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}$ formé des éléments positifs dont la norme (par rapport à l'extension \mathbb{K}/\mathbb{Q}) est égale à 1. On peut alors écrire :

THÉORÈME 4.17. — *Soit \mathbb{K} un corps de nombres réel et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_k)$ une base d'entiers de \mathbb{K} . Il existe un morphisme injectif $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}^+ \hookrightarrow \mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$ dont l'image, que noterons $G_{\mathbb{K}, \mathcal{B}}$, est le groupe G_v pour le vecteur $v = (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$, qui est difficilement approchable.*

Réciproquement, Si $v \in \mathbb{R}^k$ est un vecteur dont les composantes sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} , il existe un entier d qui divise k , une extension algébrique réelle \mathbb{K} de \mathbb{Q} de degré d , une base d'entiers \mathcal{B} de \mathbb{K} et une matrice $P \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Q})$ tels que $G_v = P^{-1}G'P \cap \mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$, où G' est le groupe

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, A \in G_{\mathbb{K}, \mathcal{B}} \right\}.$$

Remarque 4.18. — Le rang du groupe G_v est majoré par le rang du groupe $G_{\mathbb{K}, \mathcal{B}}$ qui est égal au rang de $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}$. Si r et s sont respectivement le nombre de plongement réels de \mathbb{K} et le nombre de paires de plongements complexes conjugués, on a $k = r + 2s$ et le théorème des unités de Dirichlet affirme que le rang de $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}$ est majoré par $r + s - 1$. On retrouve donc le fait que le rang de G_v est au plus $k - 1$. Remarquons aussi que si les valeurs propres de $A \in G_v$ sont simples, alors r est le nombre de valeurs propres réelles de A et $2s$ son nombre de valeurs propres complexes. La seule connaissance de A permet donc de majorer le rang de G_v .

Remarque 4.19. — Comme $k = r + 2s$ et $r \geq 1$ (il existe au moins un plongement réel de \mathbb{K} , à savoir l'identité) le rang du groupe $G_{\mathbb{K}, \mathcal{B}}$ est compris entre $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ et $k - 1$.

Remarque 4.20. — La matrice P du théorème 4.17 et son inverse ne sont pas nécessairement entières, donc les éléments de $P^{-1}G'P$ ne sont *a priori* pas contenu dans $\mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$. Cependant, une partie du groupe G' peut rester entière à travers cette conjugaison. Par exemple, considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ -6 & -15 & -38 \\ -2 & -6 & -15 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A et B sont des matrices diagonalisables qui commutent, donc sont éléments d'un G_v , où v est un vecteur propre commun à A et B . La matrice $P^{-1}AP$ n'est pas entière, mais $P^{-1}BP$ l'est.

Remarque 4.21. — Déterminer une famille de générateurs du groupe des unités d'un corps de nombre, et donc des groupes G_v , est un problème difficile. On connaît un algorithme pour les corps quadratiques, mais il n'existe rien de tel dès que le degré du corps dépasse 2.

Démonstration du théorème 4.17. — Soit \mathbb{K} un corps de nombres réel, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_k)$ une base d'entiers de \mathbb{K} et a un élément de $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}^+$. On considère l'application $m_a : x \mapsto a \cdot x$ qui est un isomorphisme du \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{K} , et on note $M_a = (m_{i,j})$ sa matrice dans la base \mathcal{B} . Comme a est un entier de \mathbb{K} , le \mathbb{Z} -module $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ est stable par m_a , donc la matrice M_a est entière, et le déterminant de m_a est par définition égal à la norme de a qui vaut 1. La matrice M_a appartient donc à $\mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$. Par ailleurs, l'égalité $m_a(b_i) = a \cdot b_i$ peut s'écrire $\sum_j m_{j,i} b_j = a \cdot b_i$ pour tout i , c'est-à-dire que

$$(4.10) \quad {}^t M_a \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Si on pose $v = (b_1, \dots, b_k)$, c'est un vecteur difficilement approchable car ses composantes forment une base d'un corps de nombres, et c'est un vecteur propre de la matrice ${}^t M_a$, pour tout $a \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}^+$. L'application $\rho : a \mapsto {}^t M_a$, qui est naturellement un morphisme de groupe, est donc à valeur dans G_v , et elle est injective car le fait que $M_a = I$ implique que $a = 1$. On peut se convaincre que c'est une bijection en remarquant que le morphisme injectif $\varphi : G_v \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui apparaît dans la démonstration du théorème 4.14 est en fait à valeur dans $\mathcal{U}_{\mathbb{K}}^+$ et constitue une application réciproque de ρ .

Considérons maintenant un vecteur $v = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^k$ dont les composantes sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} . L'espace vectoriel E_v n'est pas nécessairement un corps, mais il contient le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par l'image du morphisme $\varphi : G_v \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, qui est un corps et qu'on notera \mathbb{K} . Si $M = (m_{i,j}) \in G_v$ et $Mv = \lambda v$, alors E_v est stable par multiplication par λ : en effet, on a alors $\lambda v_i = \sum_j m_{j,i} v_j \in E_v$, pour tout i . Cette multiplication définit une action libre de $\varphi(G_v)$ sur E_v , qui s'étend par \mathbb{Q} -linéarité en une opération multiplicative de \mathbb{K} sur E_v , c'est-à-dire que E_v est un espace vectoriel sur \mathbb{K} . En notant d le degré de \mathbb{K} , on se donne une base $(e_1, \dots, e_{k/d})$ de E_v sur \mathbb{K} telle que $e_1 = 1$. Si $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_d)$ est une base de \mathbb{K} , les produits $(b_i \cdot e_j)_{i,j}$ forment une base \mathcal{B}' de E_v sur \mathbb{Q} .

L'équation $\lambda v_i = \sum_j m_{i,j} v_j$ montre que ${}^t M$ est la matrice de l'endomorphisme $m_\lambda : x \mapsto \lambda \cdot x$ dans la base (v_i) de E_v ; on va chercher quelle forme prend sa matrice dans la base \mathcal{B}' . Remarquons d'abord que \mathbb{K} est stable par m_λ , ainsi que tous les sous-espaces de la forme $\mathbb{K} \cdot e_j$, et que les matrices des restrictions $m_{\lambda|_{\mathbb{K} \cdot e_j}}$ dans les bases $(b_i \cdot e_j)_i$ sont toutes les mêmes. Il suffit donc de déterminer la matrice de m_λ restreint à \mathbb{K} . Or on l'a déjà calculé, c'est la transposée de la matrice $A = \rho(\lambda) \in G_{\mathbb{K}, \mathcal{B}}$. La transposée de la matrice de m_λ dans la base \mathcal{B}' est donc

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Si on note P la transposée de la matrice de passage de (v_i) à \mathcal{B}' , on a donc $M = P^{-1} A' P$. Comme la matrice P ne dépend pas de M , on a montré que G_v est contenu dans le groupe $P^{-1} G' P$.

Réciproquement, un élément $M = (m_{i,j}) \in P^{-1} G' P$ est la transposée de la matrice dans la base (v_i) d'un endomorphisme m_λ avec $\lambda \in \mathcal{U}_{\mathbb{K}}^+$, et donc vérifie $\lambda v_i = \sum_j m_{i,j} v_j$ pour tout i . Le vecteur v est donc vecteur propre de M , et si de plus $M \in \mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$, alors M appartient à G_v . Finalement, on a bien $G_v = P^{-1} G' P \cap \mathrm{SL}_k(\mathbb{Z})$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. ALMEDIA & P. MOLINO, « Flots riemanniens sur les 4-variétés compactes », *Tôhoku Math. J.* **38** (1986), p. 313-326.
- [2] J. A. ÁLVAREZ LÓPEZ, « The basic component of the mean curvature form of riemannian foliations », *Ann. Global Anal. Geom.* **10** (1992), n° 2, p. 179-194.
- [3] J. A. ÁLVAREZ LÓPEZ & Y. A. KORDYUKOV, « Adiabatic limits and spectral sequences for Riemannian foliations », *Geom. funct. anal.* **10** (2000), n° 5, p. 977-1027.
- [4] R. BOTT & L. W. TU, *Differential form in algebraic topology*, Springer Verlag, 1982.
- [5] Y. CARRIÈRE, « Flots riemanniens », in *Structures transverses des feuilletages*, Astérisque, vol. 116, SMF, 1984, p. 31-52.
- [6] ———, « Les propriétés topologiques des flots riemanniens retrouvées à l'aide du théorème des variétés presque plates », *Math. Z.* **186** (1984), p. 393-400.
- [7] J. CHEEGER, K. FUKAYA & M. GROMOV, « Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds », *J. Am. Math. Soc.* **5** (1992), n° 2, p. 327-372.
- [8] B. COLBOIS & G. COURTOIS, « A note on the first non zero eigenvalue of the Laplacian acting on p -forms », *Manuscripta Math.* **68** (1990), n° 2, p. 143-160.
- [9] ———, « Petites valeurs propres des p -formes différentielles et classe d'Euler des S^1 -fibrés », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), n° 5, p. 611-645.

- [10] J. DODZIUK, « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. Am. Math. Soc.* **85** (1982), p. 438-443.
- [11] A. EL KACIMI, V. SERGIESCU & G. HECTOR, « La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie », *Math. Z.* **188** (1985), p. 593-599.
- [12] D. EPSTEIN, « Transversaly hyperbolic foliations », in *Structures transverses des feuilletages*, Astérisque, vol. 116, SMF, 1984, p. 53-69.
- [13] R. FORMAN, « Spectral Sequences and Adiabatic Limits », *Comm. Math. Phys.* **168** (1995), n° 1, p. 57-116.
- [14] E. GHYS, « Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un », *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), p. 543-572.
- [15] ———, « Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes », *Ann. Inst. Fourier* **34** (1984), n° 4, p. 203-223.
- [16] P. JAMMES, « Petites valeurs propres des fibrés principaux en tores », prépublication, math.DG/0404536.
- [17] ———, « Sur le spectre des fibrés en tore qui s'effondrent », *Manuscripta Math.* **110** (2003), n° 1, p. 13-31.
- [18] ———, « Effondrements et petites valeurs propres des formes différentielles », *Sémin. Théor. Spectr. Géom.* **23** (2005), p. 115-124.
- [19] F. W. KAMBER & P. TONDEUR, « Duality for Riemannian foliations », in *Singularities*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 40, Amer. Math. Soc., 1983, p. 609-618.
- [20] ———, « Duality theorems for foliations », in *Structures transverses des feuilletages*, Astérisque, vol. 116, SMF, 1984, p. 108-116.
- [21] J. LOTT, « Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a smooth limit space », *Duke Math. J.* **114** (2002), n° 2, p. 267-306.
- [22] ———, « Remark about the spectrum of the p -form Laplacian under a collapse with curvature bounded below », *Proc. Am. Math. Soc.* **132** (2004), n° 3, p. 911-198.
- [23] P. MASSOT, « Geodesible contact structures on 3-manifolds », *Geom. Topol.* **12** (2008), n° 3, p. 1729-1776.
- [24] R. MAZZEO & R. MELROSE, « The adiabatic limit, Hodge cohomology and Leray spectral sequence for a fibration », *J. Differ. Geom.* **31** (1990), n° 1, p. 185-213.
- [25] P. MOLINO, « Feuilletages transversalement complets et applications », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10** (1977), p. 289-307.
- [26] P. MOLINO & V. SERGIESCU, « Deux remarques sur les flots riemanniens », *Manuscripta Math.* **51** (1985), p. 145-161.
- [27] P. MOUNOUD, « Feuilletages totalement géodésiques, flots riemanniens et variétés de Seifert », *Ann. Inst. Fourier* **55** (2005), n° 4, p. 1411-1438.
- [28] P. PANSU, « Effondrements des variétés riemanniennes », in *Séminaire Bourbaki 83/84*, Astérisque, vol. 121-122, SMF, 1985, p. 63-82.
- [29] J. I. ROYO PRIETO, « The Euler class for Riemannian flows », *C. R. Acad. Sci. Paris* **332** (2001), n° 1, p. 45-50.
- [30] ———, « The Gysin sequence for Riemannian flows », in *Global Differential Geometry : The Mathematical Legacy of Alfred Gray*, Contemporary Mathematics, vol. 288, AMS, 2001, p. 415-419.
- [31] K. S. SARKARIA, « The de Rham cohomology of foliated manifolds », Thèse de doctorat, SUNY, Stony Brook, 1974.
- [32] ———, « A finiteness theorem for foliated manifolds », *J. Math. Soc. Japan* **30** (1978), n° 4, p. 687-696.

- [33] W. SCHMIDT, *Diophantine approximations*, Lecture notes in mathematics, vol. 785, Springer Verlag, 1980.
- [34] J. SONDOW, « Irrationality Measures, Irrationality Bases, and a Theorem of Jarnik », prépublication, math.NT/0406300.
- [35] P. TONDEUR, *Geometry of foliations*, Birkhäuser, 1997.

Manuscrit reçu le 15 septembre 2008,
accepté le 27 mars 2009.

Pierre JAMMES
Université d'Avignon et des pays de Vaucluse
Laboratoire d'analyse non linéaire et géométrie
(EA 2151)
84018 Avignon (France)
Pierre.Jammes@ens-lyon.org