ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Aurélien DJAMENT

Le foncteur $V \mapsto \mathbb{F}_2[V]^{\otimes 3}$ entre $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels est noethérien

Tome 59, nº 2 (2009), p. 459-490.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_2_459_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
59, 2 (2009) 459-490

LE FONCTEUR $V \mapsto \mathbb{F}_2[V]^{\otimes 3}$ ENTRE $\mathbb{F}_2$-ESPACES VECTORIELS EST NOETHÉRIEN

par Aurélien DJAMENT

Résumé. — Les foncteurs entre espaces vectoriels, ou *représentations génériques* des groupes linéaires d'après Kuhn, interviennent en topologie algébrique et en K-théorie comme en théorie des représentations. Nous présentons ici une nouvelle méthode pour aborder les problèmes de finitude et la dimension de Krull dans ce contexte.

Plus précisément, nous démontrons que, dans la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs entre espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_2$, le produit tensoriel entre $P^{\otimes 3}$, où P désigne le foncteur projectif $V \mapsto \mathbb{F}_2[V]$, et un foncteur de longueur finie est noethérien et déterminons sa structure. Seul était antérieurement connu le caractère noethérien de $P^{\otimes 2} \otimes F$ pour F de longueur finie.

Nous utilisons pour cela plusieurs foncteurs de division, dont nous analysons l'effet sur des foncteurs de type fini de $\mathcal{F}$ à l'aide des *catégories de foncteurs en grassmanniennes*. Cela nous permet de ramener le problème initial à des calculs explicites finis portant sur des représentations modulaires de groupes linéaires (où intervient notamment la représentation de Steinberg), qui renseignent finalement sur des phénomènes infinis en théorie des représentations.

Abstract. — Functors between vector spaces, or *generic representations* of linear groups after Kuhn intervene in algebraic topology and in K-theory as in representation theory. We present here a new method to approach finiteness problems and the Krull dimension in this context.

More precisely, we prove that, in the category $\mathcal{F}$ of functors between $\mathbb{F}_2$-vector spaces, the tensor product between $P^{\otimes 3}$, where P denotes the projective functor $V \mapsto \mathbb{F}_2[V]$, and a functor of finite length is noetherian and we determine its structure. The only case known to date was the noetherian character of $P^{\otimes 2} \otimes F$ for F of finite length.

For this we use several division functors, whose effect on finitely generated functors of $\mathcal{F}$ is analyzed with the help of *grassmannian functor categories*. It allows us to reduce the initial problem to finite calculations on modular representations of linear groups (where appears in particular Steinberg's representation), which inform ultimately on infinite phenomena in representation theory.

Mots-clés : catégories de foncteurs, représentations modulaires, groupes linéaires, foncteurs de division, filtration de Krull, grassmanniennes.
Classification math. : 18A25, 16P60, 18D10, 18E25, 20C33, 55S10.

Introduction

La catégorie des *représentations génériques* des groupes linéaires sur le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$ désigne, depuis les articles de Kuhn [7] et [8], la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{E})$, notée $\mathcal{F}$, des foncteurs de $\mathcal{E}^f$ vers $\mathcal{E}$, où l'on note $\mathcal{E}$ la catégorie des $\mathbb{F}_2$-espaces vectoriels et $\mathcal{E}^f$ celle des espaces vectoriels de dimension finie — le corps de base $\mathbb{F}_2$ sera par la suite implicite. Étudiée par les topologues, en raison de ses liens avec l'algèbre de Steenrod, cette catégorie abélienne possède aussi des liens cohomologiques profonds avec les groupes linéaires ; nous renvoyons pour cela le lecteur à l'ouvrage de synthèse [5]. La catégorie $\mathcal{F}$ possède des objets simples classifiés à l'aide de la théorie des représentations des groupes symétriques ou linéaires, et l'on dispose d'outils de calcul cohomologique efficaces sur les foncteurs de longueur finie. Cependant, la compréhension intrinsèque de la catégorie $\mathcal{F}$ comme de ses liens avec les différents groupes linéaires se complique énormément dès que l'on passe des foncteurs simples (ou de longueur finie) à des foncteurs de type fini. En effet, la structure de nombreux foncteurs demeure inconnue, et la plupart des assertions reliant les propriétés des facteurs de composition d'un foncteur à sa structure globale restent conjecturales.

Pour illustrer ces difficultés, rappelons que la catégorie $\mathcal{F}$ est engendrée par les foncteurs projectifs de type fini P_V, dits *standard*, définis par $P_V = \mathbb{F}_2[\hom_{\mathcal{E}^f}(V, -)]$. Ici V désigne un objet de $\mathcal{E}^f$ et $\mathbb{F}_2[E]$ l'espace vectoriel librement engendré par un ensemble E ; le lemme de Yoneda fournit un isomorphisme naturel $\hom_{\mathcal{F}}(P_V, F) \simeq F(V)$. L'existence de ces générateurs montre que $\mathcal{F}$ est une *catégorie de Grothendieck* (i.e. une catégorie abélienne possédant des colimites filtrantes exactes et un ensemble de générateurs [(1)]).

On notera P le foncteur $P_{\mathbb{F}_2}$, lorsqu'aucune confusion ne peut en résulter ; remarquer que l'on a $P_V \simeq P^{\otimes \dim V}$, le produit tensoriel de $\mathcal{F}$ étant calculé au but. Les problèmes soulevés par l'étude des foncteurs projectifs standard sont illustrés par la conjecture suivante, ouverte depuis une quinzaine d'années.

Conjecture 1. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $P^{\otimes n}$ est noethérien (i.e. toute suite croissante de sous-foncteurs de $P^{\otimes n}$ stationne).*

Cet énoncé, équivalent au caractère localement noethérien de la catégorie $\mathcal{F}$, est connu sous le nom de *conjecture artinienne* car sa formulation

[(1)] Le lecteur est invité à se reporter à l'ouvrage de Popescu [11] pour les généralités sur les catégories abéliennes.

initiale, émise par Lannes et Schwartz à partir du contexte topologique sous-jacent à $\mathcal{F}$, était donnée en termes duaux d'objets artiniens. Rappelons ici que la catégorie $\mathcal{F}$ possède un foncteur de dualité $D : \mathcal{F}^{op} \to \mathcal{F}$ tel que $D(F)(V) = F(V^*)^*$, où $(-)^*$ désigne le foncteur de dualité usuel des espaces vectoriels ; la plupart des premières investigations sur la structure de $\mathcal{F}$ ont été menées sur les objets injectifs $I_V = DP_V$.

La conjecture artinienne 1, discutée en détails dans les articles [15] et [3], est facile pour $n \leqslant 1$ ($P_0 = \mathbb{F}_2$, foncteur constant, est simple ; P est somme directe de $\mathbb{F}_2$ et d'un foncteur unisériel de facteurs de composition les puissances extérieures) ; elle a été démontrée par Powell pour $n = 2$ dans [12]. Nous avons étendu le caractère noethérien de $P^{\otimes 2}$ à $P^{\otimes 2} \otimes F$, où $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}$ est un foncteur de longueur finie, dans l'article [3], grâce à l'introduction des *catégories de foncteurs en grassmanniennes*. Ces catégories de foncteurs, dont la définition et quelques propriétés sont rappelées dans la section 1, permettent non seulement de progresser dans l'étude de la conjecture artinienne, mais aussi de préciser nettement son énoncé (forme « extrêmement forte »), à l'aide d'une description conjecturale de la filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{F}$ (*cf.* conjecture 1.11). Le travail du dernier chapitre de [3] ramène la conjecture artinienne dans sa forme renforcée à celui de la description des foncteurs nilpotents pour des endofoncteurs de $\mathcal{F}$, notés $\tilde{\nabla}_n$, introduits par Powell dans [13], qu'il a lourdement utilisés pour démontrer son résultat relatif à $P^{\otimes 2}$ — le théorème principal dudit chapitre de [3] étend d'ailleurs, dans le contexte des catégories de foncteurs en grassmanniennes, le théorème de structure donné par Powell dans [14].

Dans [12], les renseignements sur le foncteur $\tilde{\nabla}_2$ nécessaires à établir la conjecture artinienne pour $n = 2$ sont obtenus par une méthode assez directe, inspirée par la théorie des représentations. De fait, Powell remarque que les facteurs de composition possibles d'un foncteur F tel que $\tilde{\nabla}_2(F) = 0$ sont limités — ce sont forcément des puissances extérieures — et que, de plus, certaines extensions entre puissances extérieures ne peuvent apparaître comme sous-quotients d'un tel foncteur. Il s'appuie alors sur le calcul des extensions entre puissances extérieures, qui s'avèrent peu nombreuses, pour conclure. La généralisation de cette approche se heurte au problème majeur suivant : pour $n \geqslant 3$, les extensions entre les foncteurs simples annihilés par $\tilde{\nabla}_n$ sont beaucoup plus nombreuses qu'entre des puissances extérieures et elles ne sont de plus pas comprises en général.

Dans le cas $n = 3$, le présent article contourne cet obstacle ; nous parvenons à estimer les foncteurs annihilés par $\tilde{\nabla}_3$, aboutissant au théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Si F est un foncteur de longueur finie de $\mathcal{F}$, le foncteur $P^{\otimes 3} \otimes F$ est noethérien. En particulier, $P^{\otimes 3}$ est noethérien.*

Notre observation initiale consiste à remarquer que le foncteur $\tilde{\nabla}_3$ peut être avantageusement remplacé, pour les considérations d'annulation qui nous intéressent, par certains *foncteurs de division*, c'est-à-dire par des adjoints à gauche au produit tensoriel par un foncteur. D'une manière générale, pour tout entier $n \geqslant 1$, deux foncteurs de division, dont l'un est exact, annihilent exactement les mêmes foncteurs simples de $\mathcal{F}$ que $\tilde{\nabla}_n$. Les deux foncteurs en question proviennent de la *représentation de Steinberg* de $GL_n(\mathbb{F}_2)$, dont nous avons déjà observé, dans la section 16.1 de [3], qu'elle peut jouer un rôle important dans l'étude de la structure de la catégorie $\mathcal{F}$.

Notre manipulation des foncteurs de division « remplaçant » le foncteur $\tilde{\nabla}_3$ repose sur plusieurs idées. D'une part, nous n'abordons pas directement le problème de l'annulation de ces foncteurs de division, mais celui de foncteurs de division plus simples, que nous utilisons ensuite abondamment : heuristiquement, nous cherchons à produire successivement des foncteurs A tels que l'on contrôle la taille d'un foncteur raisonnable F dès que la taille de la division de F par A est contrôlée.

Pour mener à bien ce programme, nous établissons des propriétés générales des foncteurs de division qui reposent sur les catégories de foncteurs en grassmanniennes. On peut résumer, de manière imprécise, les résultats de la manière suivante :

(1) les foncteurs de division des catégories de foncteurs en grassmanniennes préservent les foncteurs de longueur finie et diminuent (au sens large) leur taille ;
(2) on contrôle le terme principal de la division d'un foncteur en grassmanniennes de longueur finie X ; si X est assez gros, ce terme principal est du même ordre de grandeur que X ;
(3) en revanche, les foncteurs dérivés de degré strictement positif des foncteurs de division diminuent toujours strictement la taille des foncteurs en grassmanniennes de longueur finie.

La dernière propriété s'avère essentielle pour pallier l'inexactitude des foncteurs de division et permettre certains raisonnements inductifs utilisant les suites exactes longues d'homologie associées aux foncteurs de division pour aborder la conjecture 1.

Outre ces propriétés essentiellement formelles, nos arguments nécessitent des ingrédients propres à assurer le fonctionnement d'arguments de récurrence emboîtant différents foncteurs de division. Ceux-ci proviennent de la théorie des représentations : des calculs concrets de produits tensoriels de représentations simples des groupes linéaires interviennent, dans des cas particulièrement élémentaires du point de vue des représentations, ce qui explique que la généralisation de notre approche au cas $n > 3$ de la conjecture artinienne 1 pose des problèmes encore non élucidés.

Dans l'article [2], nous utilisions déjà des foncteurs de division dans la catégorie $\mathcal{F}$ pour progresser dans l'étude de la conjecture artinienne. Il s'agissait, comme dans le présent travail, de combiner des propriétés formelles de ces foncteurs à des considérations concrètes issues de la théorie des représentations. Cependant, les deux démarches présentent de notables différences conceptuelles.

Tout d'abord, [2] adopte des conventions duales de celles de cet article : celui-là s'intéresse aux injectifs I_V, alors que nous travaillons dans celui-ci sur les projectifs P_V. Pour traduire en termes d'objets projectifs la démarche de [2], il faut donc s'attacher aux foncteurs duaux des foncteurs de division, c'est-à-dire les foncteurs hom internes (adjoints à *droite* au produit tensoriel). De fait, les comportements des foncteurs hom internes et des foncteurs de division diffèrent profondément sur les foncteurs P_V : si F est un foncteur non nul, la division de P_V par F est toujours non nulle pourvu que la dimension de V soit assez grande, tandis que l'image de P_V par le foncteur hom interne de source F est toujours nulle si F est de longueur finie et sans terme constant. Pour autant, les foncteurs hom interne et de division se comportent de manière analogue sur les foncteurs simples de $\mathcal{F}$, qui sont auto-duaux, de sorte que certains raisonnements sur les facteurs de composition employés dans cet article et dans [2] se rejoignent partiellement.

Une autre différence fondamentale entre les deux approches que nous discutons réside dans le principe même d'utilisation des foncteurs de division pour comprendre la structure d'un objet de la catégorie $\mathcal{F}$. Dans [2], toute la stratégie repose sur la détection de facteurs de composition significatifs dans certains foncteurs : il s'agit d'une stratégie « locale », qui étudie les foncteurs à partir de leurs constituants élémentaires. Ici, notre stratégie est « globale » en ce sens qu'elle consiste au contraire à étudier les objets de $\mathcal{F}$ en leur appliquant des foncteurs de division, ce qui en général a pour effet, entre autres, d'en annihiler de nombreux facteurs de composition. Elle pourrait d'ailleurs souvent s'exprimer en termes de catégories quotients, à ceci près qu'on ne peut procéder ainsi sans de lourdes précautions en raison de l'inexactitude des foncteurs de division (c'est là qu'intervient le contrôle sur les foncteurs dérivés évoqué précédemment).

Pour terminer les remarques générales relatives aux techniques développées dans le présent travail, soulignons les nombreux détours nécessaires pour parvenir au résultat principal. La propriété des foncteurs annihilés par $\tilde{\nabla}_3$ dont elle se déduit requiert l'emploi successif de nombreux foncteurs auxiliaires et contient plusieurs récurrences imbriquées. La manière hautement non explicite dont elle se démontre illustre l'extrême complexité combinatoire des sous-foncteurs de $P^{\otimes 3}$ (et a fortiori des $P^{\otimes 3} \otimes F$). La situation semble encore plus intrigante au-delà, car le cadre formel de cet article ne suffit pas à prouver le caractère noethérien de $P^{\otimes 4}$. Les améliorations envisageables pour y parvenir posent de grandes difficultés relatives aux représentations des groupes linéaires qui font apparaître le cas de $P^{\otimes 3}$ — pourtant nettement plus ardu que celui de $P^{\otimes 2}$, où des techniques encore assez explicites fonctionnent — comme miraculeusement élémentaire.

Cet article s'organise comme suit. La première section introduit nos notations générales et présente les rappels nécessaires sur les catégories de foncteurs en grassmanniennes (ce matériel se trouve dans [3]). La deuxième section fournit tous les outils formels pour manipuler les foncteurs de division dans l'optique de la conjecture artinienne (on pourra en première lecture se concentrer sur les énoncés des propositions 2.19 et 2.20 puis aborder directement la dernière section). Enfin, la troisième section donne la démonstration du théorème 1, à partir d'énoncés généraux mettant en évidence les éléments non formels issus de la théorie des représentations nécessaires pour la mener à bien. L'appendice rappelle quant à lui quelques faits classiques sur la catégorie $\mathcal{F}$ et les notions de finitude afférentes ; il fixe les notations de paramétrisation des foncteurs simples et des représentations simples des groupes linéaires à l'aide des partitions.

L'auteur adresse ses chaleureux remerciements à Geoffrey Powell pour ses discussions sur la catégorie $\mathcal{F}$ et ses conseils qui ont permis d'améliorer ce texte. Il témoigne aussi sa gratitude à Lionel Schwartz pour ses conversations sur la conjecture artinienne et à Vincent Franjou pour ses utiles remarques sur la première version de ce travail.

1. Les foncteurs en grassmanniennes

Cette section expose sans démonstration les constructions et résultats principaux de l'article [3], qui mène l'étude de la catégorie $\mathcal{F}$ à partir de catégories de foncteurs auxiliaires. Le lecteur peut se reporter à l'appendice pour ce qui concerne les définitions, notations et premiers faits classiques sur la catégorie $\mathcal{F}$.

Les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$. L'outil fondamental introduit dans [3] pour étudier la structure de la catégorie $\mathcal{F}$ est donné par les *catégories de foncteurs en grassmanniennes*, dont les plus importantes sont les suivantes. On désigne par $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ la catégorie des couples (V,W), où V est un objet de $\mathcal{E}^f$ et W un sous-espace vectoriel de V (on notera $\mathcal{G}r(V)$ l'ensemble de ces sous-espaces) ; les morphismes $(V,W) \to (V',W')$ de $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ sont les flèches $f : V \to V'$ de $\mathcal{E}^f$ telles que $f(W) = W'$. Si n est un entier, on introduit les sous-catégories pleines $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ des objets (V,W) tels que $\dim W = n$ et $\dim W \leqslant n$ respectivement. On pose $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r},\mathcal{E})$, $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,n},\mathcal{E})$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,\leqslant n},\mathcal{E})$. Les inclusions $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,n} \hookrightarrow \mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ et $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r,\leqslant n} \hookrightarrow \mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r}$ induisent par précomposition des foncteurs de restrictions $\mathcal{R}_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{R}_{\leqslant n} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$. On dispose également de foncteurs de *prolongement par zéro* $\mathcal{P}_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et $\mathcal{P}_{\leqslant n} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, à l'aide desquels on peut identifier $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ à des sous-catégories épaisses de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$.

La précomposition par le foncteur d'oubli $\mathcal{E}^f_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{E}^f \quad (V,W) \mapsto V$ fournit un foncteur $\iota : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Il possède un adjoint à gauche $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \to \mathcal{F}$, appelé foncteur d'*intégrale en grassmanniennes*. Explicitement, on a

$$\omega(X)(V) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(V)} X(V,W).$$

On note ω_n le foncteur composé $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \xrightarrow{\mathcal{P}_n} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r} \xrightarrow{\omega} \mathcal{F}$. Les foncteurs ω et ω_n sont exacts (ils commutent même à toutes les limites et colimites).

Remarque 1.1. — Les foncteurs ω et ω_n constituent l'outil essentiel de la théorie ; leur principale vertu est de transformer de petits foncteurs (par exemple, les foncteurs constants) en des foncteurs beaucoup plus gros. Il s'agit ainsi de ramener la compréhension d'objets infinis de $\mathcal{F}$ à celle d'objets finis des catégories de foncteurs en grassmanniennes.

Foncteurs différences et foncteurs finis. Pour $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}^f$, on introduit des endofoncteurs de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ appelés *décalages par E*, tous notés $\Delta^{\mathcal{G}r}_E$, donnés par $\Delta^{\mathcal{G}r}_E(X)(V,W) = X(V \oplus E, W)$; ils sont analogues au foncteur décalage Δ_E de la catégorie $\mathcal{F}$ (*cf.* appendice, page 489).

On introduit ensuite des endofoncteurs de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ appelés *foncteurs différences* et notés $\Delta^{\mathcal{G}r}$ par le scindement $\Delta^{\mathcal{G}r}_{\mathbb{F}_2} \simeq id \oplus \Delta^{\mathcal{G}r}_{\mathbb{F}_2}$. Les foncteurs décalages et différences commutent à toutes les limites et colimites, comme dans le cas de la catégorie $\mathcal{F}$.

Les notions de *foncteurs polynomiaux* et de *degré* d'un foncteur polynomial se définissent dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ comme dans $\mathcal{F}$, en remplaçant Δ par $\Delta^{\mathcal{G}r}$.

Nous utiliserons l'analogue suivant de la proposition A.6 :

Proposition 1.2 ([3], section 5.5). — (1) *Dans les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$, les foncteurs finis sont les foncteurs polynomiaux à valeurs de dimension finie.*

(2) *Un foncteur X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ est fini si et seulement s'il est polynomial, à valeurs de dimension finie et qu'il existe un entier n tel que X appartienne à l'image essentielle de $\mathcal{P}_{\leqslant n} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$.*

Pour alléger, nous noterons simplement $\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r}$ la catégorie $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}r})^f$ des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ (*cf.* appendice) et adopterons d'autres simplifications d'écriture analogues.

Remarque 1.3. — Dans la catégorie $\mathcal{F}$, les foncteurs polynomiaux de degré (au plus) 0 sont les foncteurs constants. Dans les catégories de foncteurs en grassmanniennes, il y a plus de foncteurs de degré nul ; ces foncteurs sont nommés *foncteurs pseudo-constants*.

Nous donnons maintenant leur description dans le cas de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

Notation 1.4. — (1) On note $\varepsilon_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to GL_n - \mathbf{mod}$ le foncteur d'évaluation donné sur les objets par $\varepsilon_n(X) = X(\mathbb{F}_2{}^n, \mathbb{F}_2{}^n)$.

(2) Si W est un espace vectoriel de dimension n, on désigne par Iso $(\mathbb{F}_2{}^n, W)$ le GL_n-ensemble à droite libre et transitif des isomorphismes de $\mathbb{F}_2{}^n$ sur W.

(3) On note $\rho_n : GL_n - \mathbf{mod} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ le foncteur donné par

$$\rho_n(M)(V,W) = \mathbb{F}_2[\mathrm{Iso}(\mathbb{F}_2{}^n, W)] \underset{GL_n}{\otimes} M.$$

Proposition 1.5. — (1) *Le foncteur ρ_n est adjoint à gauche au foncteur ε_n.*

(2) *Le noyau du foncteur différence de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ (i.e. la sous-catégorie pleine des foncteurs pseudo-constants) égale l'image essentielle du foncteur ρ_n.*

Les foncteurs définis ci-après sont les « constituants élémentaires » de l'intégrale en grassmanniennes des foncteurs pseudo-constants.

Définition 1.6. — *Pour $\lambda \in \mathfrak{p}_n$, on pose $Q_\lambda = \omega_n \rho_n(R_\lambda)$. Un tel foncteur est appelé* foncteur de Powell.

Rappelons quelques faits utiles sur ces foncteurs (*cf.* [14], où les duaux des Q_λ sont étudiés sous le nom de *foncteurs co-Weyl*, et [3], section 2.3, pour une présentation analogue à celle-ci) :

Proposition 1.7. — (1) *Le cosocle*[2] *de Q_λ est S_λ ;*

(2) *si $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ est pseudo-constant, alors $\omega\mathcal{P}_{\leqslant n}(X)$ possède une filtration finie dont les sous-quotients sont des foncteurs de Powell Q_λ avec $\lambda_1 \leqslant n$. Cela vaut en particulier pour le foncteur projectif $P^{\otimes n}$.*

Notation 1.8. — Soient n et k deux entiers. On désigne par $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}[n,k]$ la sous-catégorie pleine (qui est épaisse) de $\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r}$ formée des foncteurs X tels que :

(1) X appartient à l'image essentielle du foncteur $\mathcal{P}_{\leqslant n} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n} \to \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$;

(2) le foncteur $\mathcal{R}_n(X)$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ est de degré inférieur à k.

Si l'on munit $(\mathbb{N} \cup \{-1\})^2$ de l'ordre lexicographique, on a $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}[n,k] \subset \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}[n',k']$ pour $(n,k) \leqslant (n',k')$; la proposition 1.2 montre que $\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r}$ est la réunion des sous-catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}[n,k]$. Nombre des arguments de récurrence utilisés dans la section 2 seront relatifs à ce bon ordre sur $(\mathbb{N}\cup\{-1\})^2$, utilisé dans ce contexte. C'est ce qui motive l'introduction de la notation 1.8, qui n'apparaît pas dans [3].

Si X est un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, le plus petit (n,k) tel que $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}[n,k]$ sera appelé *bidegré*[3] de X ; on le note $\operatorname{bideg} X$. Il s'agit de la notion de taille d'un foncteur en grassmanniennes adaptée à cet article.

Les foncteurs induits et le théorème de simplicité généralisé. Powell a introduit dans [13] une filtration fondamentale du foncteur décalage $\Delta_{\mathbb{F}_2} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ par des foncteurs noté $\tilde{\nabla}_n$. Les foncteurs que nous notons ainsi sont en fait les *duaux* de ceux introduits par Powell ; on a alors une suite d'endofoncteurs

$$\Delta_{\mathbb{F}_2} \simeq id \oplus \Delta \simeq \tilde{\nabla}_0 \supset \tilde{\nabla}_1 \simeq \Delta \supset \tilde{\nabla}_2 \supset \cdots \supset \tilde{\nabla}_n \supset \cdots$$

Nous renvoyons à [13] pour les propriétés de ces foncteurs (qui sont traduites dans notre contexte dual dans [3], section 1.5). Rappelons notamment que pour $n \geqslant 2$, le foncteur $\tilde{\nabla}_n$ n'est pas exact, mais il est additif et préserve toujours épimorphismes et monomorphismes ; par ailleurs, le

[2] i.e. plus grand quotient semi-simple, *cf.* appendice.

[3] On prendra garde que la deuxième composante du bidegré d'un foncteur fini n'est pas toujours son degré !

foncteur $\tilde{\nabla}_n$ annihile un foncteur simple S_λ si et seulement si la longueur $l(\lambda)$ de la partition régulière λ est strictement inférieure à n.

On peut montrer que la sous-catégorie pleine, notée $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$, des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$-nilpotents de $\mathcal{F}$ est épaisse ([13], § 4.2).

Théorème 1.9 (Théorème de simplicité généralisé, [3]). — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}$ induit une équivalence entre $\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r,n}$ et une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_{n+1}}/\mathcal{N}il_{\tilde{\nabla}_n}$.*

Ce théorème (établi dans la section 16.2 de [3]) donne une indication forte en faveur des conjectures équivalentes suivantes, discutées dans le chapitre 12 de [3].

On rappelle que les notations $\mathbf{NT}_n(\mathcal{F})$ (foncteurs noethériens de type n) et $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})$ (filtration de Krull de $\mathcal{F}$) qui apparaissent ci-après sont introduites au début de l'appendice.

Conjecture 1.10 (Conjecture artinienne extrêmement forte, première version). — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}$ induit une équivalence entre $\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathbf{NT}_n(\mathcal{F})/\mathbf{NT}_{n-1}(\mathcal{F})$.*

Conjecture 1.11 (Conjecture artinienne extrêmement forte, deuxième version). — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \to \mathcal{F}$ induit une équivalence entre $\mathcal{F}^{lf}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$.*

Le principe intuitif de la conjecture artinienne extrêmement forte consiste à ramener tous les foncteurs de type fini de la catégorie $\mathcal{F}$ à l'image par le foncteur ω de foncteurs finis de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Mais tout objet de $\mathcal{F}^{tf}$ (i.e. de type fini — *cf.* appendice) n'appartient pas à l'image essentielle de la restriction de ω aux objets finis. Pour donner une dernière forme de la conjecture qui ne fasse pas apparaître de catégorie quotient, nous sommes ainsi amenés à introduire la définition suivante.

Définition 1.12. —
1. *Disons qu'une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est* semi-épaisse *si elle contient 0 et que pour toute suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$ de $\mathcal{A}$, si deux des trois objets de A, B et C sont dans $\mathcal{C}$, alors il en est de même pour le troisième.*
2. *Pour tout entier n, on note $\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$ la sous-catégorie semi-épaisse de $\mathcal{F}$ engendrée par les $\omega(X)$, où $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r}$ est de bidegré (k,j) avec $k \leqslant n$. Les objets de $\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$ sont appelés* foncteurs induits de hauteur au plus *n de $\mathcal{F}$.*

On rappelle qu'une sous-catégorie *épaisse* est une sous-catégorie semi-épaisse qui est stable par sous-objets.

La catégorie $\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$ est constituée des foncteurs qui sont constructibles à partir des foncteurs $\omega(X)$ du type indiqué dans l'énoncé en ce sens qu'on peut les obtenir en un nombre fini d'étapes du type extension, noyau d'épimorphisme, conoyau de monomorphisme à partir de ces derniers. Cela justifie la notation.

Conjecture 1.13 (Conjecture artinienne extrêmement forte, troisième version). — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$ de $\mathcal{F}$ est épaisse.*

Cette conjecture s'aborde par récurrence sur l'entier n, ce qui amène à introduire l'hypothèse suivante :

$H^\omega(n)$ *Pour tout entier $i \leqslant n$, la sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-cons(i)}$ de $\mathcal{F}$ est épaisse.*

La première assertion de la proposition suivante est un corollaire direct du théorème de simplicité généralisé ; pour les autres points, voir [3], section 12.2.

Proposition 1.14. — *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

(1) *Si l'hypothèse $H^\omega(n-1)$ est satisfaite et que tout foncteur de type fini $\tilde{\nabla}_n$-nilpotent appartient à $\mathcal{F}^{\omega-cons(n-1)}$, alors l'hypothèse $H^\omega(n)$ est satisfaite .*

(2) *Si l'hypothèse $H^\omega(n)$ est satisfaite, alors le foncteur $\omega_k : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k} \to \mathcal{F}$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r,k} \to \mathcal{F}^{\omega-cons(k)}/\mathcal{F}^{\omega-cons(k-1)}$$

pour $k \leqslant n$.

(3) *Si l'hypothèse $H^\omega(n)$ est satisfaite, alors $P^{\otimes i} \otimes F$ est noethérien de type i pour tout foncteur fini F de $\mathcal{F}$ et tout entier naturel $i \leqslant n$.*

Remarque 1.15. — Supposons l'hypothèse $H^\omega(n)$ satisfaite. La deuxième assertion de la proposition 1.14 permet de transporter la notion de bidegré $\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$: pour $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$, on définit le *bidegré* de F, noté $||F||$, comme le couple (k,j), où k est le plus petit entier tel que $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{\omega-cons(k)}$, et j le degré d'un foncteur fini X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,k}$ tel que $F \simeq \omega_k(X)$ dans $\mathcal{F}^{\omega-cons(k)}/\mathcal{F}^{\omega-cons(k-1)}$. Ainsi, pour tout $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r}$ de bidegré (k,j) avec $k \leqslant n$, le foncteur $\omega(X)$ de $\mathcal{F}$ est de bidegré (k,j).

Stratégie d'approche de la conjecture artinienne extrêmement forte. Le fait que $H^\omega(1)$ est vérifiée est une conséquence directe du théorème de simplicité généralisé et de ce que les objets finis de $\mathcal{F}$ sont polynomiaux ; dans [3] (section 16.4), nous avons observé que les résultats de

Powell sur les foncteurs annulés par $\tilde{\nabla}_2$ (*cf.* [12]) impliquent $H^\omega(2)$ (résultat que nous retrouverons d'ailleurs par une méthode différente dans le présent article). Notre but consiste à établir $H^\omega(3)$. Dans la section suivante, nous ramènerons la vérification de cette hypothèse à celle d'énoncés relatifs à des foncteurs de division, grâce à la proposition 2.19.

2. Étude des foncteurs de division

Si F est un foncteur de $\mathcal{F}$ à valeurs de dimension finie, alors l'endofoncteur $-\otimes F$ de $\mathcal{F}$ commute aux limites ; pour des raisons formelles, on en déduit qu'il possède un adjoint à droite, appelé foncteur de *division par* F et noté $(-:F)$ (*cf.* [3], appendice C3). En fait, $(-:-)$ définit même un bifoncteur $\mathcal{F}\times\mathcal{F}^{op}\to\mathcal{F}$ exact à droite en chaque variable. Pour des raisons typographiques, le foncteur $(-:F)$ sera aussi noté $\mathcal{D}[F]$, et ses foncteurs dérivés à gauche $\mathcal{D}^i[F]$. Une observation évidente, omniprésente dans la suite, réside dans la commutation naturelle de deux foncteurs de division : $\mathcal{D}[F]\circ\mathcal{D}[G]\simeq\mathcal{D}[F\otimes G]\simeq\mathcal{D}[G]\circ\mathcal{D}[F]$; en particulier, la i-ième itérée $\mathcal{D}[F]^{\circ i}$ (notation à ne pas confondre avec $\mathcal{D}^i[F]$!) de $\mathcal{D}[F]$ est isomorphe à $\mathcal{D}[F^{\otimes i}]$. La division par un foncteur injectif (à valeurs de dimension finie) de $\mathcal{F}$ est un foncteur *exact* ; la division par un foncteur injectif de co-type fini [(4)] commute également aux limites.

On peut donner une description explicite des foncteurs de division à partir du lemme de Yoneda (*cf.* [2] et [3]) : on a $(P_V:F)\simeq F(V)^*\otimes P_V$ (ce qui montre d'ailleurs que les foncteurs de division préservent $\mathcal{F}^{tf}$) et

$$(A:B)(V)^*\simeq\hom_{\mathcal{F}}(\Delta_V(A),B). \tag{2.1}$$

Les foncteurs $\mathcal{D}^i[B]$ se décrivent de façon similaire en remplaçant hom par Ext^i.

Remarque 2.1 (fondamentale). — Les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ peuvent se définir à partir de foncteurs de division : il existe des foncteurs A_n et B_n à valeurs de dimension finie et un morphisme $f_n:B_n\to A_n$ de $\mathcal{F}$ tels que $\tilde{\nabla}_n = im\,(\mathcal{D}[A_n]\xrightarrow{\mathcal{D}[f_n]}\mathcal{D}[B_n])$.

Il existe de même, dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, des foncteurs de division $(-:X)_{\mathcal{G}r}$, où $X\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ prend des valeurs de dimension finie. On adoptera aussi la notation $\mathcal{D}_{\mathcal{G}r}[X]$, et $\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r}[X]$ pour les foncteurs dérivés. Dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$, on emploie les notations analogues $\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r,n}[X]$ et $\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r,\leqslant n}[X]$.

(4) *Cf.* début de l'appendice pour cette notion.

Une observation élémentaire mais fondamentale est que, dans $\mathcal{F}$ comme dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ ou $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, *le foncteur différence est un foncteur de division* (le cas de $\mathcal{F}$ est traité dans l'appendice de [13], celui des catégories de foncteurs en grassmanniennes dans la section 5.3 de [3]) ; par conséquent, tous les foncteurs de division commutent, à isomorphisme naturel près, au foncteur différence. Comme le foncteur différence est exact et préserve les foncteurs projectifs, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 2.2. — *Les dérivés des foncteurs de division commutent, à isomorphisme naturel près, au foncteur différence.*

2.1. Lien entre les foncteurs $\mathcal{D}[S_{<n>}]$, $\mathcal{D}[L(n)]$ et $\tilde{\nabla}_n$

L'objectif de ce paragraphe consiste à montrer que les foncteurs $\mathcal{D}[S_{<n>}]$, $\mathcal{D}[L(n)]$ (les notations $< n >$, $S_{<n>}$ et $L(n)$ sont introduites dans l'appendice, remarque A.4) et $\tilde{\nabla}_n$ annihilent les mêmes foncteurs simples de $\mathcal{F}$, ce qui permettra notamment de remplacer la condition de $\tilde{\nabla}_n$-nilpotence à manier pour vérifier l'hypothèse $H^\omega(n)$ par une condition de $\mathcal{D}[L(n)]$-nilpotence.

Tous les cas de non-annulation par division considérés dans cet article s'appuient sur les deux lemmes suivants, dont la démonstration repose sur des considérations explicites sur les foncteurs de Weyl et les foncteurs simples de $\mathcal{F}$.

Lemme 2.3. — *Soient λ et μ deux partitions telles que $\lambda + \mu$ soit régulière. Il existe un épimorphisme $W_\lambda \otimes W_\mu \twoheadrightarrow W_{\lambda+\mu}$, où $\lambda + \mu$ désigne la partition $(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_i + \mu_i, \dots)$.*

Démonstration. — Cette propriété s'obtient aussitôt à l'aide des éléments semi-standard des foncteurs de Weyl, qui engendrent $W_{\lambda+\mu}$ par l'hypothèse de régularité de $\lambda+\mu$ (*cf.* remarque A.1). L'épimorphisme recherché est la restriction de la flèche $\Lambda^\lambda \otimes \Lambda^\mu \twoheadrightarrow \Lambda^{\lambda+\mu}$ obtenue par produit tensoriel des morphismes canoniques (produits) $\Lambda^{\lambda_i} \otimes \Lambda^{\mu_i} \twoheadrightarrow \Lambda^{\lambda_i+\mu_i}$. □

Lemme 2.4. — *Soit λ une partition régulière de longueur au moins n. Il existe une partition α et un épimorphisme $W_\alpha \otimes S_{<n>} \twoheadrightarrow S_\lambda$.*

Démonstration. — On rappelle d'abord que $S_{<n>} \simeq W_{<n>}$ (*cf.* remarque A.4). Comme la partition λ est régulière, il existe une partition α telle que $\alpha + < n > = \lambda$. On obtient donc par le lemme 2.3 un épimorphisme $W_\alpha \otimes S_{<n>} \twoheadrightarrow W_{\alpha+<n>} = W_\lambda \twoheadrightarrow S_\lambda$. □

La proposition suivante justifie, à l'aune du théorème de simplicité généralisé, l'intérêt pour les foncteurs de division par $S_{<n>}$ et $L(n)$. L'avantage spécifique du premier est d'être « plus petit », celui du second réside dans son exactitude.

PROPOSITION 2.5. — *Soient λ une partition régulière et $n \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *$l(\lambda) < n$ (on rappelle que $l(\lambda)$ désigne la longueur de λ — cf. appendice) ;*

(2) *$(S_\lambda : L(n)) = 0$;*

(3) *$(S_\lambda : S_{<n>}) = 0$;*

(4) *$\tilde{\nabla}_n(S_\lambda) = 0$.*

Démonstration. — L'équivalence entre les assertions 1 et 4 est déjà connue (*cf.* [13], théorème 1).

Grâce à l'isomorphisme (2.1), si l'assertion 2 est fausse, il existe $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}^f$ et un morphisme non nul $\Delta_V(S_\lambda) \to L(n)$, de sorte que $\Delta_V(S_\lambda)$ a un facteur de composition $S_{<n>}$. En appliquant le foncteur $\tilde{\nabla}_n$, qui préserve épimorphismes et monomorphismes, commute aux foncteurs de décalage, et n'annihile pas $S_{<n>}$, on en déduit que $\tilde{\nabla}_n(S_\lambda)$ est non nul. Ainsi $4 \Rightarrow 2$.

L'implication $2 \Rightarrow 3$ est évidente puisque l'inclusion $S_{<n>} \hookrightarrow L(n)$ induit une surjection $\mathcal{D}[L(n)] \twoheadrightarrow \mathcal{D}[S_{<n>}]$.

Montrons que 3 entraîne 1. Si λ est de longueur $\geqslant n$, alors on dispose par le lemme 2.4 d'un épimorphisme $W_\alpha \otimes S_{<n>} \twoheadrightarrow S_\lambda$, d'où par dualité $S_\lambda \hookrightarrow S_{<n>} \otimes DW_\alpha$ (les objets simples de $\mathcal{F}$ étant auto-duaux), ce qui montre que $(S_\lambda : S_{<n>})$ est non nul. □

Remarque 2.6. — On a

$$\tilde{\nabla}_n(F) = 0 \;\Rightarrow\; (F : L(n)) = 0 \;\Rightarrow\; (F : S_{<n>}) = 0$$

pour tout $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$.

Nous déduisons maintenant de la proposition 2.5 la comparaison entre foncteurs $\tilde{\nabla}_n$-nilpotents et $\mathcal{D}[L(n)]$-nilpotents.

COROLLAIRE 2.7. — *Soient $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

(1) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

   (a) *$(F : L(n)) = 0$;*

   (b) *si un foncteur simple S_λ est facteur de composition de F, alors la partition régulière λ est de longueur strictement inférieure à n ;*

(c) *tous les facteurs de composition de F sont annihilés par le foncteur $\tilde{\nabla}_n$.*

(2) *Si le foncteur F est annulé par une itérée $\tilde{\nabla}_n^{\circ i}$ de $\tilde{\nabla}_n$, il est annulé par l'itérée $\mathcal{D}[L(n)]^{\circ i}$ de $\mathcal{D}[L(n)]$.*

Démonstration. —

(1) Comme le foncteur $\mathcal{D}[L(n)]$ est exact et commute aux limites et colimites, la condition $\mathcal{D}[L(n)](F) = 0$ équivaut à $\mathcal{D}[L(n)](S_\lambda) = 0$ pour tout facteur de composition S_λ de F (écrire ce foncteur comme colimite de foncteurs de type fini, qui sont limites de foncteurs finis). L'équivalence des trois conditions résulte alors de la proposition 2.5.

(2) Si $\tilde{\nabla}_n(F) = 0$, alors $\tilde{\nabla}_n(S_\lambda) = 0$ pour tout facteur de composition S_λ de F, car le foncteur $\tilde{\nabla}_n$ préserve les monomorphismes et les épimorphismes. Ce qui précède montre alors que $\tilde{\nabla}_n(F) = 0$ entraîne $\mathcal{D}[L(n)](F) = 0$, ce qui traite le cas $i = 1$. Le cas général s'en déduit par récurrence, parce que les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ et $\mathcal{D}[L(n)]$ commutent, par le lemme 2.8 ci-après.

□

Lemme 2.8. — *Soient n et m deux entiers naturels. Les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ et $\mathcal{D}[L(m)]$ commutent à isomorphisme près.*

Démonstration. — Écrivons $\tilde{\nabla}_n = im\,(\mathcal{D}[A] \xrightarrow{\mathcal{D}[f]} \mathcal{D}[B])$ où $B \xrightarrow{f} A$ est un morphisme convenable de $\mathcal{F}$ (avec A et B à valeurs de dimension finie). Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}[A] \circ \mathcal{D}[L(m)] \arrow[r, "\mathcal{D}[f]\mathcal{D}[L(m)]"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathcal{D}[B] \circ \mathcal{D}[L(m)] \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathcal{D}[L(m)] \circ \mathcal{D}[A] \arrow[r, "\mathcal{D}[L(m)]\mathcal{D}[f]"] & \mathcal{D}[L(m)] \circ \mathcal{D}[B]. \end{tikzcd}$$

L'image de la flèche supérieure est $\tilde{\nabla}_n \circ \mathcal{D}[L(m)]$, et celle de la flèche inférieure s'identifie à $\mathcal{D}[L(m)] \circ \tilde{\nabla}_n$ par exactitude du foncteur $\mathcal{D}[L(m)]$. Cela démontre le lemme. □

2.2. Foncteurs de division dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$

Nous commençons par établir un lien formel entre les foncteurs de division dans $\mathcal{F}$ et dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Il s'agit d'étudier l'effet de foncteurs de division sur des foncteurs de type fini de $\mathcal{F}$ à partir de l'effet de foncteurs de division sur des foncteurs *finis* de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, via le foncteur ω.

Le contenu de ce paragraphe recoupe partiellement les considérations de [3] (chapitre 9) sur les foncteurs de division.

Proposition 2.9. — *Il existe un isomorphisme naturel gradué*

$$\mathcal{D}^*[F]\circ\omega\simeq\omega\circ\mathcal{D}^*_{\mathcal{G}r}[\iota(F)]$$

de foncteurs $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}\to\mathcal{F}$, *pour* $F\in\operatorname{Ob}\mathcal{F}$ *à valeurs de dimension finie.*

Démonstration. — Le cas du degré 0 est traité dans la section 9.2 de [3] (il s'agit d'une conséquence formelle de l'adjonction entre les foncteurs ι et ω) ; le cas général s'en déduit aussitôt parce que le foncteur ω est exact et préserve les objets projectifs, son adjoint à droite ι étant exact. □

Les deux propositions suivantes permettent de passer de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ aux catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

Proposition 2.10. — *Soient* X *un objet de* $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ *à valeurs de dimension finie et* $n\in\mathbb{N}$. *Il existe un isomorphisme naturel gradué* $\mathcal{D}^*_{\mathcal{G}r}[X]\circ\mathcal{P}_{\leqslant n}\simeq\mathcal{P}_{\leqslant n}\circ\mathcal{D}^*_{\mathcal{G}r,\leqslant n}[\mathcal{R}_{\leqslant n}(X)]$ *de foncteurs* $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}\to\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$.

Démonstration. — Le foncteur de prolongement par zéro $\mathcal{P}_{\leqslant n}:\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}\to\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ est adjoint à gauche au foncteur de restriction $\mathcal{R}_{\leqslant n}:\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}\to\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ (*cf.* [3], section 5.1), qui commute au produit tensoriel. Par conséquent, les foncteurs $\mathcal{D}^*_{\mathcal{G}r}[X]\circ\mathcal{P}_{\leqslant n}$ et $\mathcal{P}_{\leqslant n}\circ\mathcal{D}^*_{\mathcal{G}r,\leqslant n}[\mathcal{R}_{\leqslant n}(X)]$ sont isomorphes : ils sont tous deux adjoints à gauche au foncteur composé $\mathcal{R}_{\leqslant n}\circ(-\otimes X)$, ce qui fournit l'isomorphisme recherché en degré 0. Le cas général s'en déduit, comme dans la démonstration de la proposition 2.9, par exactitude des foncteurs $\mathcal{P}_{\leqslant n}$ et $\mathcal{R}_{\leqslant n}$. □

Dans la proposition suivante, on note, par abus, $\mathcal{R}_n:\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}\to\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{P}_n:\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}\to\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ les foncteurs de restriction et de prolongement par zéro respectivement, analogues à ceux considérés dans la section 1.

Proposition 2.11. — *Soient* $n\in\mathbb{N}$ *et* X *un objet de* $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ *à valeurs de dimension finie. Il existe un isomorphisme naturel gradué* $\mathcal{R}_n\circ\mathcal{D}^*_{\mathcal{G}r,\leqslant n}[X]\simeq\mathcal{D}^*_{\mathcal{G}r,n}[\mathcal{R}_n(X)]\circ\mathcal{R}_n$ *de foncteurs* $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}\to\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

Démonstration. — Cette fois-ci, le foncteur de prolongement par zéro $\mathcal{P}_n:\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}\to\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ est adjoint à *droite* au foncteur de restriction $\mathcal{R}_{\leqslant n}:\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}\to\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ (*cf.* [3], § 5.1). On conclut par un argument formel similaire à celui invoqué pour la proposition 2.10. □

Nous examinons maintenant le comportement des foncteurs de division dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ sur les foncteurs *pseudo-constants* (ces foncteurs sont définis en 1.3 ; les notations ρ_n et ϵ_n qui apparaissent dans l'énoncé ci-dessous sont celles introduites en 1.4).

Proposition 2.12. — *Soient $n \in \mathbb{N}$, X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ à valeurs de dimension finie et M un GL_n-module. Il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r,n}[X](\rho_n(M)) \simeq \begin{cases} \rho_n(M \otimes \varepsilon_n(X)^*) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Démonstration. — La catégorie monoïdale symétrique $GL_n - \mathbf{mod}$ (le produit tensoriel étant pris sur $\mathbb{F}_2$) possède également des foncteurs de division par des modules finis, qui sont donnés par $(M : N)_{GL_n} = M \otimes N^*$ (*cf.* [1], § 10.D, par exemple). En particulier, ces foncteurs sont *exacts*.

Maintenant, la proposition s'obtient formellement (*cf.* les démonstrations précédentes) à partir des trois observations suivantes :

(1) le foncteur ρ_n est adjoint à gauche à ε_n (*cf.* proposition 1.5) ;

(2) le foncteur ε_n commute au produit tensoriel ;

(3) les foncteurs ρ_n et ε_n sont exacts.

□

La proposition suivante constitue le résultat principal sur la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ de ce paragraphe.

Proposition 2.13. — *Soit X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ à valeurs de dimension finie.*

(1) *Les foncteurs $\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r}[X]$ préservent les objets finis.*

(2) *Pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r}$, on a* $\mathrm{bideg}\,\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r}[X](Y) \leqslant \mathrm{bideg}\,Y$. *De plus, si Y est non nul, l'égalité advient si et seulement si les deux conditions sont satisfaites :*

  (a) *$i = 0$;*

  (b) *$X(\mathbb{F}_2{}^n, \mathbb{F}_2{}^n) \neq 0$, où n est la première composante de* $\mathrm{bideg}\,Y$.

Démonstration. — Nous avons observé que les foncteurs de division et leurs dérivés commutent au foncteur différence (proposition 2.2). Par conséquent, les foncteurs $\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r}[X]$ préservent les foncteurs polynomiaux et diminuent (au sens large) leur degré.

D'autre part, pour $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r}$, les $\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r}[X](Y)$ sont à valeurs de dimension finie. C'est une conséquence facile du lemme de Yoneda et de ce que les objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ possèdent des résolutions projectives de type fini (*cf.* [3], § 5.5).

Si $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r}$ est non nul et de bidegré (n,k), il existe $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\leqslant n}$ tel que $Y \simeq \mathcal{P}_{\leqslant n}(Z)$, et que $\mathcal{R}_n(Z) = \mathcal{R}_n(Y)$ est de degré k. Par la proposition 2.10, on a $\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r}[X](Y) \simeq \mathcal{P}_{\leqslant n}\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r,\leqslant n}[\mathcal{R}_{\leqslant n}(X)](Z)$.

Cela prouve déjà, compte-tenu du début de la démonstration et de la proposition 1.2, que les foncteurs $\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r}[X]$ préservent les objets finis. On en déduit également que le bidegré de $\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r}(Y)$ est $(n, \deg \mathcal{R}_n\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r,\leqslant n}[\mathcal{R}_{\leqslant n}(X)](Z))$ si $\mathcal{R}_n\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r,\leqslant n}[\mathcal{R}_{\leqslant n}(X)](Z) \neq 0$, et strictement inférieur à (n,k) si

$$\mathcal{R}_n\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r,\leqslant n}[\mathcal{R}_{\leqslant n}(X)](Z) = 0.$$

Par la proposition 2.11, $\mathcal{R}_n\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r,\leqslant n}[\mathcal{R}_{\leqslant n}(X)](Z) \simeq \mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r,n}[\mathcal{R}_n(X)](\mathcal{R}_n(Y))$. Si $\mathcal{R}_n(Y)$ est pseudo-constant (i.e. $k = 0$), la proposition 2.12 donne la conclusion souhaitée. Le cas général s'en déduit par récurrence sur k, puisque les foncteurs $\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r,n}[X]$ commutent au foncteur différence. □

Corollaire 2.14. — *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$ à valeurs de dimension finie tel que $F(\mathbb{F}_2{}^n) = 0$. Alors tout foncteur induit de hauteur au plus n est $\mathcal{D}[F]$-nilpotent.*

Démonstration. — La proposition 2.13 montre que si X est un foncteur fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ dont la première composante du bidegré est au plus n, alors il existe un entier k pour lequel

$$\mathcal{D}^{i_1}_{\mathcal{G}r}[\iota(F)]\mathcal{D}^{i_2}_{\mathcal{G}r}[\iota(F)]\dots\mathcal{D}^{i_k}_{\mathcal{G}r}[\iota(F)](X) = 0$$

pour toute suite d'entiers naturels $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, puisque $\iota(F)(\mathbb{F}_2{}^n, \mathbb{F}_2{}^n) = F(\mathbb{F}_2{}^n) = 0$ par hypothèse.

On en déduit, par la proposition 2.9, que le foncteur $A = \omega(X)$ est tel que

$$\mathcal{D}^{i_1}[F]\mathcal{D}^{i_2}[F]\dots\mathcal{D}^{i_k}[F](A) = 0$$

pour toute suite d'entiers naturels $(i_1, i_2, \dots, i_k)$.

Le corollaire découle alors de ce que la sous-catégorie pleine des foncteurs A de $\mathcal{F}$ pour lesquels existe un tel k est semi-épaisse (définition 1.12). □

Rappelons que la notion de bidegré noté $||.||$ dans la catégorie $\mathcal{F}$ a été introduite dans la remarque 1.15.

Proposition 2.15. — *Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que l'hypothèse $H^\omega(n)$ est vérifiée, F un foncteur de $\mathcal{F}$ à valeurs de dimension finie et $G \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$.*

(1) *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{D}^i[F](G) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$.*

(2) *On a $||\mathcal{D}^i[F](G)|| \leqslant ||G||$. Lorsque G est non nul, l'égalité a lieu si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

   (a) *$i = 0$;*

(b) $F({\mathbb{F}_2}^j) \neq 0$, *où j est la première composante de* $||G||$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur $||G||$, noté (j,k) : on suppose le résultat connu pour les bidegrés strictement inférieurs à (j,k). Soit $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r,j}$ un foncteur de degré k tel que $G \simeq \omega_j(X)$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{\omega-cons(j)}/\mathcal{F}^{\omega-cons(j-1)}$. Il existe donc une suite exacte

$$0 \to N \to G \xrightarrow{f} \omega_j(X) \to C \to 0$$

dans laquelle les foncteurs N et C appartiennent à $\mathcal{F}^{\omega-cons(j-1)}$. Par conséquent, leurs bidegrés sont strictement inférieurs à (j,k), et l'hypothèse de récurrence donne en particulier $||\mathcal{D}^i[F](N)|| < (j,k)$ et $||\mathcal{D}^i[F](C)|| < (j,k)$ pour tout i. Par ailleurs, la proposition 2.9 donne $\mathcal{D}^i[F](\omega_j(X)) \simeq \omega(\mathcal{D}^i_{\mathcal{G}r}[\iota(F)](Y))$, où $Y = \mathcal{P}_n(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^f_{\mathcal{G}r}$ est de bidegré (k,j). La proposition 2.13 décrit donc le bidegré de $\mathcal{D}^i[F](\omega_j(X))$.

Notons $H = im\, f$: les suites exactes longues pour $\mathcal{D}^*[F]$ associées aux suites exactes courtes $0 \to H \to \omega_j(X) \to C \to 0$ puis $0 \to N \to G \to H \to 0$ donnent alors la conclusion, puisque dans une suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$ de $\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$, on a $||B|| = \max(||A||, ||C||)$. $\square$

2.3. Foncteurs de division et foncteurs induits

L'hypothèse suivante, dans laquelle A désigne un foncteur de $\mathcal{F}$ à valeurs de dimension finie et i un entier, jouera un rôle fondamental dans cet article.

$H_{div}(A,i)$ *Si* $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{tf}$ *vérifie* $(F : A) = 0$, *alors* $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(i-1)}$.

Remarque 2.16. — (1) Cette hypothèse ne peut être vérifiée que si $A({\mathbb{F}_2}^i) \neq 0$, puisque le foncteur projectif $P_{{\mathbb{F}_2}^i}$ n'est pas dans $\mathcal{F}^{\omega-cons(i-1)}$ et que $(P_{{\mathbb{F}_2}^i} : A) \simeq A({\mathbb{F}_2}^i)^* \otimes P_{{\mathbb{F}_2}^i}$. Si la conjecture artinienne extrêmement forte est vraie, alors réciproquement, pour tout foncteur A à valeurs de dimension finie tel que $A({\mathbb{F}_2}^i) \neq 0$, l'hypothèse $H_{div}(A,i)$ est satisfaite (cela découle de la proposition 2.15).

(2) L'hypothèse $H_{div}(A,i)$ est surtout intéressante lorsque le foncteur $\mathcal{D}[A]$ est nilpotent sur $\mathcal{F}^{\omega-cons(i-1)}$, condition équivalente à

$$A({\mathbb{F}_2}^{i-1}) = 0$$

(*cf.* le paragraphe précédent, notamment le corollaire 2.14).

(3) Nous ne manierons l'hypothèse $H_{div}(A,i)$ que lorsque l'hypothèse $H^{\omega}(i-1)$ est satisfaite, le but de la considération de $H_{div}(A,i)$ consistant alors à établir $H^{\omega}(i)$.

(4) Si A est un sous-foncteur d'un produit tensoriel $B \otimes C$ de foncteurs à valeurs de dimension finie, alors l'hypothèse $H_{div}(A,i)$ entraîne $H_{div}(B,i)$, puisque l'inclusion induit un épimorphisme

$$\mathcal{D}[C]\mathcal{D}[B] \simeq \mathcal{D}[B \otimes C] \twoheadrightarrow \mathcal{D}[A].$$

(5) Le cas où A est un foncteur injectif, équivalent à l'exactitude de $\mathcal{D}[A]$, joue un rôle particulier (*cf.* lemme 2.18). Nous aurons à manier l'hypothèse $H_{div}(A,i)$ pour différents foncteurs A, notamment des foncteurs simples, mais la connaissance de la situation pour certains foncteurs injectifs sera nécessaire.

(6) Les remarques précédentes illustrent l'intérêt de $H_{div}(A,i)$ pour A injectif tel que $A({\mathbb{F}_2}^{i-1}) = 0$ et $A({\mathbb{F}_2}^{i}) \neq 0$. Le plus petit — en ce sens que la hauteur de son dual, comme foncteur induit, est minimale — foncteur A de ce type est le foncteur $L(i)$; c'est pourquoi l'hypothèse $H_{div}(L(i),i)$ occupera une place centrale dans cet article.

Notation 2.17. — Nous désignerons par $H_{div}(i)$ l'hypothèse $H_{div}(L(i),i)$.

Lemme 2.18. — *Sous les hypothèses $H_{div}(i)$ et $H^{\omega}(i-1)$, tout foncteur de type fini $\mathcal{D}[L(i)]$-nilpotent est induit de hauteur au plus $i-1$.*

Démonstration. — Soient $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{tf}$, $f : F \to \mathcal{D}[L(i)](F) \otimes L(i)$ l'unité de l'adjonction et $N = ker\, f$. On a $\mathcal{D}[L(i)](N) = 0$, car $\mathcal{D}[L(i)]$ est exact et $\mathcal{D}[L(i)](f)$ injectif. Comme F est de type fini et $L(i)$ localement fini, il existe un sous-foncteur fini A de $L(i)$ tel que $im\, f \subset \mathcal{D}[L(i)](F) \otimes A$.
Si $\mathcal{D}[L(i)](F)$ est induit de hauteur au plus $i-1$, la stabilité de $\mathcal{F}^{\omega-cons(i-1)}$ par $- \otimes A$ (*cf.* [3], § 12.1) et l'hypothèse $H^{\omega}(i-1)$ assurent que $im\, f$ appartient à $\mathcal{F}^{\omega-cons(i-1)}$. En particulier, comme tout foncteur induit est de présentation finie (*cf.* ibid.), N est de type fini, et l'hypothèse $H_{div}(i)$ assure que N est induit de hauteur au plus $i-1$, donc F aussi. Une récurrence immédiate fournit alors la conclusion. □

Les progrès sur la conjecture artinienne présentés dans cet article reposent sur la proposition suivante.

Proposition 2.19. — *Supposons que les hypothèses $H_{div}(i)$ et $H^{\omega}(i-1)$ soient vérifiées. Alors il en est de même pour $H^{\omega}(i)$.*

Démonstration. — Ce résultat découle du corollaire 2.7, du lemme 2.18 et de la proposition 1.14. □

La dernière section de ce travail démontrera la validité de l'hypothèse $H_{div}(i)$ pour $i \leqslant 3$.

L'énoncé suivant, qui s'appuie sur le lemme 2.18 et le paragraphe 2.2, permettra de mener à bien le pas de la récurrence intervenant dans l'argument principal de cet article.

Proposition 2.20. — *Soient i, j et n des entiers tels que $i-1 \leqslant j \leqslant n$ et $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}$ un foncteur à valeurs de dimension finie. On suppose que les hypothèses $H^\omega(n)$, $H_{div}(i)$ et $H_{div}(A,i)$ sont vérifiées.*

Si $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{tf}$ est tel que $(F : A) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(j)}$, alors

$$F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(j)}.$$

Démonstration. — On procède par deux récurrences imbriquées, dont la première porte sur j.

On commence par traiter le cas $j = i-1$. Comme tout foncteur induit de hauteur au plus $i-1$ est $\mathcal{D}[L(i)]$-nilpotent par le corollaire 2.14, il existe k tel que $\mathcal{D}[L(i)]^{\circ k}\mathcal{D}[A](F) = 0$. On a donc $\mathcal{D}[A]\mathcal{D}[L(i)]^{\circ k}(F) = 0$, puis $\mathcal{D}[L(i)]^{\circ k}(F) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(i-1)}$ par l'hypothèse $H_{div}(A,i)$. Quitte à augmenter la valeur de k, on peut supposer $\mathcal{D}[L(i)]^{\circ k}(F) = 0$. Le lemme 2.18 procure alors la conclusion souhaitée : $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(i-1)}$.

On suppose maintenant $i \leqslant j \leqslant n$ et l'assertion vérifiée pour les valeurs de j strictement inférieures. Comme l'hypothèse $H^\omega(n)$ est satisfaite et j inférieur à n, il existe un foncteur fini X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,j}$, dont nous noterons d le degré, et une flèche $(F : A) \xrightarrow{f} \omega_j(X)$ de noyau et conoyau induits de hauteur strictement inférieure j. Si $X = 0$, $(F : A)$ est en fait induit de hauteur au plus $j-1$, et l'hypothèse de récurrence sur j donne la conclusion. On suppose donc $d \geqslant 0$, et l'on peut également supposer que notre assertion est vérifiée pour les valeurs strictement inférieures de d. Soient $u : F \to \mathcal{D}[A](F) \otimes A$ l'unité de l'adjonction, N son noyau et Q son image. Sous-foncteur de $\mathcal{D}[A](F) \otimes A$, Q est induit de hauteur au plus j (grâce à l'hypothèse $H^\omega(n)$). On en déduit que Q est de présentation finie, donc N de type fini. De plus, l'application du foncteur $\mathcal{D}[A]$ à la suite exacte

$$0 \to N \to F \to Q \to 0 \tag{2.2}$$

procure une suite exacte

$$\mathcal{D}^1[A](Q) \to \mathcal{D}[A](N) \to \mathcal{D}[A](F) \to \mathcal{D}[A](Q) \to 0$$

dont la flèche $\mathcal{D}[A](F) \to \mathcal{D}[A](Q)$ est un isomorphisme, par construction de Q (laquelle assure que $\mathcal{D}[A](u)$ est injectif), de sorte que $\mathcal{D}[A](N)$

est un quotient de $\mathcal{D}^1[A](Q)$. On a par conséquent $||\mathcal{D}[A](N)|| < ||Q|| = ||\mathcal{D}[A](Q)|| = ||\mathcal{D}[A](F)|| = (j,d)$ par la proposition 2.15 — en effet, $A(\mathbb{F}_2{}^j) \neq 0$ car $j \geqslant i$ et $H_{div}(A,i)$ est satisfaite (ce qui implique $A(\mathbb{F}_2{}^i) \neq 0$ — *cf.* remarque 2.16).

L'hypothèse de récurrence (sur j si la première composante de $||\mathcal{D}[A](N)||$ est strictement inférieure à j, sur d sinon) s'applique donc à N (nous avons déjà remarqué que ce foncteur est de type fini). Elle montre que $N \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}^{\omega-cons(j)}$. La suite exacte (2.2) établit ensuite $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}^{\omega-cons(j)}$, d'où la proposition. □

3. Structure du foncteur $P^{\otimes 3} \otimes F$ pour F fini

La section précédente fournit les outils nécessaires pour manier des propriétés d'annulation de foncteurs de division de type H_{div}. Dans cette section, nous donnons d'abord des énoncés généraux pour vérifier de nouvelles propriétés de ce type à partir d'hypothèses relatives aux simples de $\mathcal{F}$ ou aux représentations des groupes linéaires (§ 3.1). Les deux paragraphes suivants les appliquent pour démontrer d'abord $H_{div}(2)$ (§ 3.2), ce qui permet d'affiner des résultats déjà connus, puis d'établir $H_{div}(3)$ (§ 3.3), avec pour conséquence le théorème de structure des foncteurs $P^{\otimes 3} \otimes F$ (pour $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}^f$).

3.1. Cadre formel

Hypothèse 1. — *Dans tout ce paragraphe, on se donne un entier naturel n tel que l'hypothèse $H^\omega(n)$ est vérifiée.*

Notation 3.1. — On désigne par $\mathcal{T}_n$ la classe des foncteurs T de $\mathcal{F}$ à valeurs de dimension finie ayant la propriété suivante : *si $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}^{tf}$ est tel que $(F:T) \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$, alors $F \in \operatorname{Ob}\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$.*

La lettre T est utilisée comme abréviation du terme *test* : la division par T teste l'appartenance à la classe $\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$. Le but de ce paragraphe consiste à montrer que si l'on sait montrer que suffisamment de foncteurs appartiennent à la classe $\mathcal{T}_n$, alors on peut obtenir des renseignements sur les foncteurs de division par d'autres foncteurs — précisément, démontrer la condition $H_{div}(A, n+1)$ pour certains foncteurs A.

Nous donnons d'abord un critère valable pour un foncteur quelconque.

Proposition 3.2. — *Soit A un foncteur de $\mathcal{F}$ à valeurs de dimension finie vérifiant la propriété suivante : pour tout entier $m > n$, il existe $T \in \mathcal{T}_n$ tel que pour tous $\lambda, \mu \in \mathfrak{p}_m$ on ne puisse avoir simultanément $(S_\lambda : A) = 0$, $(S_\mu : A) = 0$ et S_λ facteur de composition de $T \otimes S_\mu$.*

Alors l'hypothèse $H_{div}(A, n+1)$ est satisfaite.

Démonstration. — Soit $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{tf}$ tel que $(F : A) = 0$, il s'agit de montrer que F est induit de hauteur au plus n. Posons $m = \max\{\lambda_1 \,|\, \lambda \in \mathfrak{p},\ \hom_{\mathcal{F}}(F, S_\lambda) \neq 0\}$. Alors F est quotient d'une somme directe finie P_F de projectifs indécomposables P_λ avec $(S_\lambda : A) = 0$ (puisque $\mathcal{D}[A]$ est exact à droite) et $\lambda_1 \leqslant m$ (*cf.* remarque A.7). Comme un tel foncteur P_λ est facteur direct de $P_{\mathbb{F}_2{}^m}$, qui est objet de $\mathcal{F}^{\omega-cons(m)}$, l'hypothèse $H^\omega(n)$ permet d'en déduire $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$ si $m \leqslant n$.

On suppose donc $m > n$ et l'assertion vérifiée pour les valeurs de m strictement inférieures. Soit $T \in \mathcal{T}_n$ comme dans l'énoncé ; on examine le foncteur $(F : T)$. Posons $\mathfrak{p}(F, T) = \{\mu \in \mathfrak{p} \,|\, \hom_{\mathcal{F}}((F : T), S_\mu) \neq 0\}$ et $m' = \max\{\mu_1 \,|\, \mu \in \mathfrak{p}(F, T)\}$.

D'une part, comme $(P_F : T) \twoheadrightarrow (F : T)$, la relation $\mu \in \mathfrak{p}(F, T)$ entraîne qu'il existe $\lambda \in \mathfrak{p}$, avec $(S_\lambda : A) = 0$ et $\lambda_1 \leqslant m$, tel que $\hom_{\mathcal{F}}((P_\lambda : T), S_\mu) \neq 0$. Par adjonction, cela équivaut à $\hom_{\mathcal{F}}(P_\lambda, T \otimes S_\mu) \neq 0$, i.e. à S_λ facteur de composition de $T \otimes S_\mu$. Cette condition implique elle-même $\mu_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant m$ (évaluer sur $\mathbb{F}_2{}^{\lambda_1}$).

D'autre part, comme $((F : T) : A) \simeq ((F : A) : T) = 0$, si $\mu \in \mathfrak{p}(F, T)$, alors $(S_\mu : A) = 0$.

En combinant les deux points précédents, on obtient que si $\mu \in \mathfrak{p}(F, T)$ est tel que $\mu_1 \geqslant m$, alors $\mu \in \mathfrak{p}_m$, $(S_\mu : A) = 0$, et il existe $\lambda \in \mathfrak{p}_m$ tel que $(S_\lambda : A) = 0$ et que S_λ soit facteur de composition de $T \otimes S_\mu$. Ces conditions étant incompatibles par hypothèse, il vient $m' < m$. L'hypothèse de récurrence montre alors que $(F : T)$, qui est annihilé par $\mathcal{D}[A]$, est induit de hauteur au plus n. Comme $T \in \mathcal{T}_n$, on en déduit que F est également induit de hauteur au plus n, ce qui achève la démonstration. □

L'hypothèse de la proposition précédente est très contraignante. Nous abordons maintenant un critère plus souple pour la satisfaction d'une hypothèse du type H_{div} ; en contrepartie, il ne s'applique qu'à des objets injectifs.

On rappelle que la notation R_λ pour les GL_n-modules simples est introduite dans l'appendice.

Proposition 3.3. — *Soient J un objet injectif de co-type fini de $\mathcal{F}$ et $\mathfrak{p}^{div}(J) = \{\lambda \in \mathfrak{p} \,|\, (S_\lambda : J) = 0\}$. On pose également, pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{p}^{div}_m(J) = \mathfrak{p}^{div}(J) \cap \mathfrak{p}_m$. On suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée :*

pour tout entier $m > n$, il existe un ordre total sur $\mathfrak{p}_m^{div}(J)$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathfrak{p}_m^{div}(J)$, il existe $T_\lambda \in \mathcal{T}_n$ tel que si R_μ (où $\mu \in \mathfrak{p}_m^{div}(J)$) est facteur de composition du GL_m-module $R_\lambda \otimes T_\lambda(\mathbb{F}_2{}^m)^*$, alors $\mu < \lambda$.

Alors l'hypothèse $H_{div}(J, n+1)$ est satisfaite.

Démonstration. — Comme le foncteur $\mathcal{D}[J]$ est un facteur direct d'une somme directe finie de foncteurs décalages (car J est facteur direct d'une somme directe finie de foncteurs I_V), tout foncteur F de $\mathcal{F}$ possède un plus grand quotient annihilé par $\mathcal{D}[J]$, que nous noterons $\mathcal{Q}_J(F)$ — précisément, le foncteur $\mathcal{D}[J]$ possède un adjoint à droite du type $- \otimes G$ (*cf.* [13], appendice), où G est un foncteur projectif de type fini, $\mathcal{Q}_J(F)$ est le conoyau de la coünité $\mathcal{Q}_J(F) \otimes G \to F$. On obtient ainsi un endofoncteur exact à droite $\mathcal{Q}_J$ de $\mathcal{F}$.

Il s'agit de montrer que pour tout $F \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{tf}$, on a

$$\mathcal{Q}_J(F) \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{\omega-cons(n)}.$$

Par exactitude à droite de $\mathcal{Q}_J$, il suffit de le faire lorsque F est *projectif* de type fini, on encore lorsque F est un foncteur de Powell Q_λ (*cf.* définition 1.6), puisque les projectifs de type fini de $\mathcal{F}$ possèdent une filtration finie dont les sous-quotients sont des foncteurs de Powell.

On procède par récurrence sur $m = \lambda_1$. Pour $m \leqslant n$, le foncteur Q_λ est lui-même objet de $\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$, donc l'hypothèse $H^\omega(n)$ entraîne le résultat. On suppose donc $m > n$ et établi que $\mathcal{Q}_J(Q_\mu) \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$ pour $\mu \in \mathfrak{p}_i$ avec $i < m$.

On remarque d'abord que si $\lambda \notin \mathfrak{p}_m^{div}(J)$, alors le cosocle S_λ de Q_λ (*cf.* proposition 1.7) n'est pas annulé par $\mathcal{D}[J]$, donc aucun quotient de Q_λ n'est annulé par $\mathcal{D}[J]$, soit $\mathcal{Q}_J(Q_\lambda) = 0$. On suppose donc $\lambda \in \mathfrak{p}_m^{div}(J)$. Une récurrence sur l'ordre total de l'énoncé permet de supposer que $\mathcal{Q}_J(Q_\mu) \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$ pour $\mu \in \mathfrak{p}_m^{div}(J)$ tel que $\mu < \lambda$.

Notons $X = (\mathcal{P}_m \rho_m(R_\lambda) : \iota(T_\lambda))$: d'après les résultats du paragraphe 2.2, X est un foncteur fini pseudo-constant de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, on a $\mathcal{R}_i(X) = 0$ pour $i > m$, $\mathcal{R}_m(X) \simeq \rho_m(R_\lambda \otimes T_\lambda(\mathbb{F}_2{}^m)^*)$ et $(Q_\lambda : T_\lambda) \simeq \omega(X)$. Par conséquent, il existe une suite exacte

$$0 \to F \to (Q_\lambda : T_\lambda) \to \omega_m \rho_m(R_\lambda \otimes T_\lambda(\mathbb{F}_2{}^m)^*) \to 0$$

où $F = \omega \mathcal{P}_{\leqslant m-1} \mathcal{R}_{\leqslant m-1}(X)$, foncteur qui possède une filtration finie dont les sous-quotients sont des foncteurs de Powell du type Q_μ avec $\mu_1 < m$.

Établissons maintenant que $\mathcal{Q}_J(Q_\lambda : T_\lambda) \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$. L'hypothèse de récurrence sur m montre déjà que $\mathcal{Q}_J(F) \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$.

Pour prouver que $\mathcal{Q}_J(\omega_m \rho_m(R_\lambda \otimes T_\lambda(\mathbb{F}_2{}^m)^*)) \in \operatorname{Ob} \mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$, on note que le foncteur $\omega_m \rho_m(R_\lambda \otimes T_\lambda(\mathbb{F}_2{}^m)^*)$ s'obtient par extensions successives des foncteurs Q_μ, où $\mu \in \mathfrak{p}_m$ est tel que R_μ est facteur de composition de $R_\lambda \otimes T_\lambda({\mathbb{F}_2}^m)^*$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{Q}_J(Q_\mu) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$ pour ces partitions μ. On distingue pour cela deux cas :

(1) $\mu \in \mathfrak{p}_m^{div}(J)$. On a donc $\mu < \lambda$, par choix de T_λ. L'hypothèse de récurrence sur $\mathfrak{p}_m^{div}(J)$ donne alors $\mathcal{Q}_J(Q_\mu) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$.

(2) Si $\mu \notin \mathfrak{p}_m^{div}(J)$, alors $\mathcal{Q}_J(Q_\mu) = 0$ (*cf.* supra).

On a donc

$$\mathcal{Q}_J(\omega_m \rho_m(R_\lambda \otimes T_\lambda({\mathbb{F}_2}^m)^*)) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(n)},$$

puis $\mathcal{Q}_J(Q_\lambda : T_\lambda) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$. Le foncteur $(\mathcal{Q}_J(Q_\lambda) : T_\lambda)$ est un quotient de $(Q_\lambda : T_\lambda)$ annulé par $\mathcal{D}[J]$, car $\mathcal{D}[T_\lambda]$ et $\mathcal{D}[J]$ commutent, c'est donc un quotient de $\mathcal{Q}_J(Q_\lambda : T_\lambda)$, d'où $(\mathcal{Q}_J(Q_\lambda) : T_\lambda) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$ puisque $H^\omega(n)$ est vérifiée. Étant donné que $T_\lambda \in \mathcal{T}_n$, cela entraîne $\mathcal{Q}_J(Q_\lambda) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(n)}$ comme souhaité. □

3.2. La structure de $P^{\otimes 2} \otimes F$ pour F fini revisitée

Le théorème de simplicité généralisé (théorème 1.9) et la proposition A.6 impliquent formellement que l'hypothèse $H^\omega(1)$ est vérifiée. À partir de cette seule observation, des résultats de la section 2, utilisée via la proposition suivante, et de la proposition 3.2, nous allons établir l'importante proposition 3.5.

Proposition 3.4. — *L'hypothèse $H_{div}(\Lambda^1, 1)$ est satisfaite.*

Démonstration. — Si F est un foncteur fini de degré n de $\mathcal{F}$, alors le foncteur $(F : \Lambda^1)$ est de degré $n-1$, donc non nul, si F est non constant (*cf.* [2], corollaire 3.10). Comme $\mathcal{D}[\Lambda^1]$ est exact à droite, on en déduit qu'un foncteur F tel que $(F : \Lambda^1) = 0$ n'a des quotients finis que constants. Comme F est limite de ses quotients finis (*cf.* proposition A.6), cela montre que F est constant, donc fini, F étant de type fini, d'où la conclusion. □

Proposition 3.5. — *L'hypothèse $H_{div}(S_{<2>}, 2)$ est satisfaite.*

Démonstration. — Nous avons déjà rappelé que $H^\omega(1)$ est vérifiée. Comme l'hypothèse $H_{div}(1)$ est vérifiée ($\mathcal{D}[L(1)] \simeq \Delta$ n'annihile que les foncteurs constants), les propositions 3.4 et 2.20 impliquent qu'un foncteur $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{tf}$ tel que $(F : \Lambda^1) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{\omega-cons(1)}$ est lui-même objet de $\mathcal{F}^{\omega-cons(1)}$. Autrement dit, avec la terminologie du paragraphe 3.1, on a $\Lambda^1 \in \mathcal{T}_1$; c'est le seul foncteur « test » dont nous aurons besoin ici. Vérifions à présent que l'hypothèse de la proposition 3.2 est satisfaite pour

$A = S_{<2>}$: la proposition 2.5 montre que les partitions régulières λ telles que $(S_\lambda : S_{<2>}) = 0$ vérifient $l(\lambda) \leqslant 1$. La conclusion résulte alors de ce que Λ^m n'est pas facteur de composition de $\Lambda^1 \otimes \Lambda^m$ si $m > 1$. $\square$

On retrouve en particulier la satisfaction de $H^\omega(2)$, déduite dans [3] (§ 16.4) des résultats de [12] sur le foncteur $\tilde{\nabla}_2$:

Corollaire 3.6. — *Les hypothèses $H_{div}(2)$ et $H^\omega(2)$ sont vérifiées.*

Démonstration. — Comme $S_{<2>}$ est un sous-foncteur de $L(2)$, $\mathcal{D}[S_{<2>}]$ est un quotient de $\mathcal{D}[L(2)]$, de sorte que $H_{div}(S_{<2>}, 2)$ implique $H_{div}(2)$. La proposition 2.19 montre alors qu'il en est de même pour $H^\omega(2)$. $\square$

On retrouve ainsi le caractère noethérien de type 2 de $P^{\otimes 2} \otimes F$ pour $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^f$.

Remarque 3.7. — Les renseignements obtenus par notre démarche sont un petit peu plus précis que ceux donnés par l'approche de Powell dans [12]. En effet, par le corollaire 2.7, on voit que le corollaire 3.6 décrit tous les foncteurs de type fini F n'ayant pour facteurs de composition que des puissances extérieures (modulo les foncteurs finis, ce sont les quotients des sommes directes d'un nombre fini de copies de $P_{\mathbb{F}_2}$). En revanche, l'article [12] utilise fortement que les foncteurs de type fini F tels que $\tilde{\nabla}_2(F) = 0$ non seulement n'ont que des puissances extérieures comme facteurs de composition, mais n'ont pas non plus de sous-quotients isomorphes à certaines extensions entre puissances extérieures. De plus, on constate que [12] nécessite la connaissance de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{F}}(\Lambda^i, \Lambda^j)$ (groupes déterminés par Franjou dans [4]), alors que notre démonstration n'utilise, comme point non formel, que le fait très élémentaire que Λ^i n'est facteur de composition de $\Lambda^1 \otimes \Lambda^i$ que pour $i = 1$.

Nous terminons ce paragraphe par une autre conséquence directe de la proposition 3.5, fondée sur la remarque 2.16. 4.

Proposition 3.8. — *L'hypothèse $H_{div}(\Lambda^2, 2)$ est satisfaite.*

Démonstration. — Si $(F : \Lambda^2) = 0$, alors $(F : \Lambda^2 \otimes \Lambda^1) = 0$; comme $S_{<2>}$ est facteur direct de $\Lambda^2 \otimes \Lambda^1$, on en déduit $(F : S_{<2>}) = 0$. La conclusion résulte donc de la proposition 3.5. $\square$

3.3. Les résultats principaux

Théorème 3.9. — *L'hypothèse $H_{div}(3)$ est vérifiée.*

Démonstration. — Nous déduirons ce résultat de la proposition 3.3. Comme $H^\omega(2)$ est vérifiée, la satisfaction de $H_{div}(2)$, $H_{div}(S_{<2>}, 2)$, $H_{div}(\Lambda^1, 1)$ et $H_{div}(\Lambda^2, 2)$ (*cf.* paragraphe précédent) implique, par la proposition 2.20, que $S_{<2>}$, Λ^1 et Λ^2 sont dans $\mathcal{T}_2$ (*cf.* notation 3.1).

La proposition 2.5 nous apprend que $\mathfrak{p}^{div}(L(3)) = \{\lambda \in \mathfrak{p} \mid l(\lambda) \leqslant 2\}$, selon la notation de la proposition 3.3. Pour $m > 2$, on munit l'ensemble $\mathfrak{p}_m^{div}(L(3))$ de l'ordre total donné comme suit :

$$(m) < (m, 1) < (m, 2) < \cdots < (m, m-1).$$

Comme $R_{(m)}$ est l'unité du produit tensoriel des GL_m-modules, on a

$$R_{(m)} \otimes S_{<2>}({\mathbb{F}_2}^m)^* \simeq R^*_{(m,2,1)} \simeq R_{(m,m-1,m-2)}.$$

Ce GL_m-module n'a pas de facteur de composition R_μ avec $\mu \in \mathfrak{p}_m^{div}(L(3))$.

Pour $0 < i < m-1$, on a

$$\begin{aligned} R_{(m,i)} \otimes \Lambda^1({\mathbb{F}_2}^m)^* &\simeq R_{(m,i)} \otimes R^*_{(m,1)} \\ &\simeq R_{(m,i)} \otimes R_{(m,m-1)} \simeq (\Lambda^i \otimes \Lambda^{m-1})({\mathbb{F}_2}^m). \end{aligned}$$

Comme $i < m-1$, les facteurs de composition du foncteur $\Lambda^i \otimes \Lambda^{m-1}$ sont les $S_{(m-1+t,i-t)}$ pour $0 \leqslant t \leqslant i$, donc les facteurs de composition de $(\Lambda^i \otimes \Lambda^{m-1})({\mathbb{F}_2}^m)$ sont $R_{(m,m-1,i)}$ et $R_{(m,i-1)}$. Ainsi, $\mu \in \mathfrak{p}_m^{div}(L(3))$ et R_μ facteur de composition de $R_{(m,i)} \otimes \Lambda^1({\mathbb{F}_2}^m)^*$ implique $\mu = (m, i-1) < (m, i)$ (ou $\mu = (m) < (m, 1)$ si $i = 1$).

De façon analogue, $R_{(m,m-1)} \otimes \Lambda^2({\mathbb{F}_2}^m)^* \simeq (\Lambda^{m-1} \otimes \Lambda^{m-2})({\mathbb{F}_2}^m)$ a pour facteurs de composition $R_{(m,m-1,m-2)}$ et $R_{(m,m-3)}$ ($R_{(3)}$ si $m = 3$). Donc si $\mu \in \mathfrak{p}_m^{div}(L(3))$ est tel que R_μ est facteur de composition de $R_{(m,i)} \otimes \Lambda^1({\mathbb{F}_2}^m)^*$, on a $\mu = (m, m-3) < (m, m-1)$ (ou $\mu = (3) < (3, 2)$ si $m = 3$).

La proposition 2.5 procure alors la satisfaction de $H_{div}(L(3), 3) = H_{div}(3)$. □

Ce théorème donne un renseignement bornant la « taille » des foncteurs de type fini dont les facteurs de composition sont limités. Précisément :

Corollaire 3.10. — *Un foncteur de type fini de $\mathcal{F}$ dont tous les facteurs de composition sont associés à des partitions de longueur au plus* 2 *est induit de hauteur au plus* 2.

Démonstration. — Par le corollaire 2.7, les foncteurs annihilés par $\mathcal{D}[L(3)]$ sont exactement ceux dont les facteurs de composition sont du type S_λ avec $l(\lambda) \leqslant 2$. Le théorème 3.9 donne donc la conclusion. □

Remarque 3.11. — Il semble très difficile de donner des informations beaucoup plus explicites sur les foncteurs de type fini dont les facteurs de composition sont associés à des partitions de longueur au plus 2. Cette observation suggère qu'on ne peut pas trouver d'approche directe pour démontrer la corollaire 3.10.

L'avancée principale sur la structure globale de la catégorie $\mathcal{F}$ apportée par le théorème 3.9 est le résultat suivant.

COROLLAIRE 3.12. — *L'hypothèse* $H^{\omega}(3)$ *est vérifiée : la sous-catégorie* $\mathcal{F}^{\omega-cons(3)}$ *des foncteurs induits de hauteur au plus* 3 *de* $\mathcal{F}$ *est épaisse.*

Démonstration. — Ce résultat se déduit du théorème 3.9 et de la proposition 2.19. □

Compte-tenu de la proposition 1.14, on en déduit le résultat suivant, qui semble constituer la meilleure forme partielle démontrée de la conjecture artinienne.

COROLLAIRE 3.13. — *Pour tout foncteur fini* F *de* $\mathcal{F}$, *le foncteur* $P^{\otimes 3} \otimes F$ *est noethérien de type* 3.

Annexe A. La catégorie $\mathcal{F}$ et les représentations des groupes linéaires

Les propriétés élémentaires de la catégorie $\mathcal{F}$ rappelées dans cet appendice, qui sert surtout à fixer les notations, sont exposées et démontrées en détails dans les articles fondamentaux [7] et [8] (où l'on trouvera également d'autres références).

Propriétés de finitude dans une catégorie de Grothendieck $\mathcal{A}$ (*cf.* [11]). Les objets *simples* de $\mathcal{A}$ sont les objets non nuls n'ayant pas de sous-objet strict non nul. Les objets de *longueur finie* (i.e. possédant une filtration finie de sous-quotients simples) sont simplement appelés objets *finis* dans cet article ; la sous-catégorie pleine des objets finis de $\mathcal{A}$ est notée $\mathcal{A}^f$. Les objets localement finis sont les colimites d'objets finis de $\mathcal{A}$; ils forment une sous-catégorie pleine $\mathcal{A}^{lf}$.

La *filtration de Krull* de $\mathcal{A}$ est la suite croissante $(\mathcal{K}_n(\mathcal{A}))$ de sous-catégories localisantes (c'est-à-dire épaisses et stables par colimites) de $\mathcal{A}$ définie par récurrence par $\mathcal{K}_n(\mathcal{A}) = \{0\}$ si $n < 0$ et le fait que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ est la sous-catégorie localisante de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ engendrée par les objets finis de cette catégorie. Un objet de $\mathcal{A}$ est dit *noethérien de* *type* n s'il est noethérien et appartient à $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$ (la définition usuelle d'objet noethérien de type n et son équivalence avec celle-là sont rappelées à la fin de l'appendice B de [3]). La sous-catégorie pleine des objets noethériens de type n de $\mathcal{A}$ sera notée $\mathbf{NT}_n(\mathcal{A})$; elle est épaisse.

Les objets *de type fini* de $\mathcal{A}$ sont les objets A tels que toute suite croissante de sous-objets de A de colimite A stationne. Ainsi, les objets noethériens sont ceux dont tous les sous-objets sont de type fini. Dans la catégorie $\mathcal{F}$, les objets de type fini sont exactement les quotients des sommes directes finies de foncteurs projectifs standard. La sous-catégorie pleine des objets de type fini de $\mathcal{A}$ sera notée $\mathcal{A}^{tf}$.

Un objet A de $\mathcal{F}$ est de *présentation finie* s'il existe une suite exacte $P' \to P \to A \to 0$ avec P et P' projectifs de type fini (cette définition est adaptée car $\mathcal{F}$ a assez de projectifs de type fini).

Dans $\mathcal{F}$, nous dirons qu'un objet est de *co-type fini* si son dual est de type fini.

Les simples de $\mathcal{F}$. Les objets simples de $\mathcal{F}$ peuvent se classifier à l'aide des représentations irréductibles (sur $\mathbb{F}_2$) des groupes symétriques. On utilise pour cela les *partitions*, i.e. les suites finies décroissantes d'entiers strictement positifs $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ (r s'appelle alors la *longueur* de λ et se note $l(\lambda)$; la somme des λ_i s'appelle le *degré* de λ et se note $|\lambda|$). Par convention, on posera $\lambda_i = 0$ pour $i > l(\lambda)$.

Si λ est une partition, notons Λ^λ le produit tensoriel de puissances extérieures $\Lambda^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \Lambda^{\lambda_r}$. Le foncteur Λ^λ possède un sous-foncteur remarquable appelé *foncteur de Weyl* associé à λ et noté W_λ.

Remarque A.1. — Les éléments *semi-standard* de $\Lambda^\lambda(V)$, c'est-à-dire les éléments du type

$$(u_1 \wedge \cdots \wedge u_{\lambda_1}) \otimes (u_1 \wedge \cdots \wedge u_{\lambda_2}) \otimes \cdots \otimes (u_1 \wedge \cdots \wedge u_{\lambda_{l(\lambda)}}),$$

où $u_1, \dots, u_{\lambda_1}$ sont des éléments de V, appartiennent à $W_\lambda(V)$.

Lorsque la partition λ est régulière (notion rappelée ci-dessous), le foncteur W_λ est engendré par les éléments semi-standard. Cela résulte de la variante fonctorielle des résultats classiques de James [6] qui est présentée par exemple dans l'article [10] (5).

Si λ est une partition 2-*régulière* (nous dirons simplement *régulière* dans cet article, le corps de base étant fixé à $\mathbb{F}_2$), i.e. une suite finie *strictement* décroissante d'entiers strictement positifs, le cosocle (i.e. plus grand

(5) On prendra garde que nos conventions en matière de partitions sont duales de celles de [10].

quotient semi-simple) de W_λ est un foncteur simple noté S_λ. Lorsque λ parcourt l'ensemble des partitions régulières, S_λ décrit un système complet de représentants des objets simples de $\mathcal{F}$ modulo isomorphisme (*cf.* [10]).

Les objets simples de $\mathcal{F}$ sont *auto-duaux* : $DS_\lambda \simeq S_\lambda$ (l'auto-dualité est en fait une condition un petit peu plus forte — *cf.* [10]).

Notation A.2. —

(1) On désigne par $\mathfrak{p}$ l'ensemble des partitions régulières.
(2) Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $\mathfrak{p}_i = \{\lambda \in \mathfrak{p} \mid \lambda_1 = i\}$.
(3) Pour $\lambda \in \mathfrak{p}$, on note P_λ la couverture projective de S_λ.
(4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $< n >$ la partition $(n, n-1, \dots, 1)$ de $n(n+1)/2$.

Exemple A.3. —

(1) Les foncteurs puissances extérieures sont simples : $S_{(i)} = \Lambda^i$.
(2) Pour $i > j > 0$, les facteurs de composition (i.e. sous-quotients simples) de $\Lambda^i \otimes \Lambda^j$ sont exactement les $S_{(i+t,j-t)}$ pour $0 \leqslant t \leqslant j$ (en convenant que $S_{(k,0)} = \Lambda^k$). Les facteurs de composition de $\Lambda^i \otimes \Lambda^i$ sont Λ^i et les $S_{(i+t,i-t)}$ pour $0 < t \leqslant i$.
(3) Le foncteur $S_{<2>}$ est caractérisé par le scindement
$$\Lambda^2 \otimes \Lambda^1 \simeq \Lambda^3 \oplus S_{<2>}.$$

Les GL_n - modules simples. On note $GL_n = GL_n(\mathbb{F}_2)$ le groupe linéaire sur $\mathbb{F}_2$ et $GL_n - \mathbf{mod}$ la catégorie des $\mathbb{F}_2[GL_n]$-modules à gauche, appelés simplement GL_n-modules dans cet article.

Pour $\lambda \in \mathfrak{p}_n$, le GL_n-module $S_\lambda(\mathbb{F}_2{}^n)$, que nous noterons R_λ, est simple, et les R_λ constituent un système complet de représentants des GL_n-modules simples lorsque λ décrit $\mathfrak{p}_n$ (*cf.* [8] ; on prendra garde que les conventions d'indexation de cet article de Kuhn, de l'article [10] de Piriou et Schwartz et du présent travail sont deux à deux distinctes).

Pour $\lambda \in \mathfrak{p}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \notin \mathfrak{p}_n$, on a $S_\lambda(\mathbb{F}_2{}^n) = 0$ si $n < \lambda_1$ et $S_\lambda(\mathbb{F}_2{}^n) \simeq R_{(n,\lambda)}$ si $\lambda_1 > n$.

Nous noterons $(-)^*$ le foncteur de dualité contragrédiente de $GL_n - \mathbf{mod}$. Son effet sur les simples est donné par $R_\lambda^* \simeq R_{(n,n-\lambda_r,\dots,n-\lambda_2)}$ pour $\lambda \in \mathfrak{p}_n$, où $r = l(\lambda)$. Cette observation, qui se déduit aussitôt de [8] (§ 6) et de ce que les représentations $\Lambda^i(\mathbb{F}_2{}^n)$ et $\Lambda^{n-i}(\mathbb{F}_2{}^n)$ de GL_n sont duales, est utilisée dans la démonstration du théorème 3.9.

Remarque A.4. — La partition régulière $< n >$ joue un rôle important dans cet article ; il convient de noter que $R_{<n>}$ est la *représentation* *de Steinberg* de $GL_n(\mathbb{F}_2)$, assertion qui a déjà été exploitée dans la section 13.1 de [3]. Une de ses propriétés utiles est que la projection canonique $W_{<n>} \twoheadrightarrow S_{<n>}$ est un isomorphisme — *cf.* [6], corollaire 24.9 ; nous renvoyons aussi à l'article [9] de Mitchell, où l'on trouvera une démonstration de l'équivalence entre les définitions classiques de la représentation de Steinberg et la définition « fonctorielle » $R_{<n>}$.

L'enveloppe injective de $S_{<n>}$ (dans $\mathcal{F}$) se note traditionnellement $L(n)$. L'exemple 3.0.3.2 de l'article [14] montre que l'inclusion $S_{<n>} \hookrightarrow L(n)$ est un isomorphisme lorsqu'on l'évalue sur un espace de dimension au plus n ; en particulier, on a $L(n)({\mathbb{F}_2}^{n-1}) = 0$.

Foncteur différence et foncteurs finis. Pour $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{E}^f$, on introduit l'endofoncteur Δ_E de $\mathcal{F}$, appelé *décalage par* E, donné par $\Delta_E(F)(V) = F(V \oplus E)$.

Le *foncteur différence* Δ est caractérisé par le scindement $\Delta_{\mathbb{F}_2} \simeq id \oplus \Delta$. Il commute à toutes les limites et colimites.

Les foncteurs F de $\mathcal{F}$ tels qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^i(F) = 0$ sont appelés *foncteurs polynomiaux*. Le degré d'un foncteur polynomial F est le plus grand entier positif $\deg F$ tel que $\Delta^{\deg F} F \neq 0$ si $F \neq 0$; par convention, $\deg 0 = -1$.

Exemple A.5. — Si λ est une partition, les foncteurs Λ^λ, et W_λ de $\mathcal{F}$, de même que S_λ si λ est régulière, sont polynomiaux de degré $|\lambda|$.

Un résultat de base sur la catégorie $\mathcal{F}$ est le suivant :

Proposition A.6 (*cf.* [7]). — (1) *Un foncteur de $\mathcal{F}$ est fini si et seulement s'il est polynomial et à valeurs de dimension finie.*

(2) *Tout foncteur de type fini de F est limite de ses quotients polynomiaux (donc finis).*

Remarque A.7. — (1) Une conséquence utile de la deuxième assertion est la suivante : pour tout $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{F}^{tf}$, l'épimorphisme canonique $F \twoheadrightarrow \mathrm{cosoc}\,F$ de F sur son cosocle est essentiel, donc, si l'on écrit $\mathrm{cosoc}\,F \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{p}} S_\lambda^{\oplus a_\lambda}$, alors F est isomorphe à un quotient de $\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{p}} P_\lambda^{\oplus a_\lambda}$, qui en est une couverture projective.

(2) Un corollaire de la première assertion est la stabilité par produit tensoriel des objets finis dans la catégorie $\mathcal{F}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. W. Curtis & I. Reiner, *Methods of representation theory. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication, xxiv+819 pages.

[2] A. Djament, « Foncteurs de division et structure de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ dans la catégorie $\mathcal{F}$ », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **57** (2007), n° 6, p. 1771-1823.

[3] A. Djament, « Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2007), n° 111, p. xx+213.

[4] V. Franjou, « Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques », *J. Algebra* **179** (1996), n° 2, p. 501-522.

[5] V. Franjou, E. M. Friedlander, T. Pirashvili & L. Schwartz, *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003, xxii+132 pages.

[6] G. D. James, *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 682, Springer, Berlin, 1978, v+156 pages.

[7] N. J. Kuhn, « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I », *Amer. J. Math.* **116** (1994), n° 2, p. 327-360.

[8] ———, « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II », *K-Theory* **8** (1994), n° 4, p. 395-428.

[9] S. Mitchell, « On the Steinberg module, representations of the symmetric groups, and the Steenrod algebra », *J. Pure Appl. Algebra* **39** (1986), n° 3, p. 275-281.

[10] L. Piriou & L. Schwartz, « Extensions de foncteurs simples », *K-Theory* **15** (1998), n° 3, p. 269-291.

[11] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, London, 1973, London Mathematical Society Monographs, No. 3, xii+467 pages.

[12] G. M. L. Powell, « The Artinian conjecture for $I^{\otimes 2}$ », *J. Pure Appl. Algebra* **128** (1998), n° 3, p. 291-310, With an appendix by Lionel Schwartz.

[13] ———, « Polynomial filtrations and Lannes' T-functor », *K-Theory* **13** (1998), n° 3, p. 279-304.

[14] ———, « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), n° 10, p. 4167-4193.

[15] ———, « On Artinian objects in the category of functors between $\mathbf{F}_2$-vector spaces », in *Infinite length modules (Bielefeld, 1998)*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2000, p. 213-228.

Manuscrit reçu le 1er octobre 2007,
accepté le 28 août 2008.

Aurélien DJAMENT
Université de Nantes
Laboratoire de mathématiques Jean Leray
2 rue de la Houssinière
BP 92208
44322 Nantes cedex 3 (France)
djament@math.univ-nantes.fr