



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Emmanuel PHILIPPE

Les groupes de triangles $(2, p, q)$ sont déterminés par leur spectre des longueurs

Tome 58, n° 7 (2008), p. 2659-2693.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_7_2659_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

LES GROUPES DE TRIANGLES $(2, p, q)$ SONT DÉTERMINÉS PAR LEUR SPECTRE DES LONGUEURS

par Emmanuel PHILIPPE

RÉSUMÉ. — On décrit le début du spectre des longueurs des groupes de triangles ayant un angle droit et on montre que le spectre des longueurs caractérise la classe d'isométrie d'un tel groupe.

ABSTRACT. — We describe the beginning of the length spectrum of fuchsian triangles groups $(2, p, q)$ and we show that the length spectrum gives a geometric characterization of such a group.

Si S est une surface hyperbolique (*i.e.* de caractéristique d'Euler strictement négative) fermée (*i.e.* compacte sans bord), on peut s'intéresser à son spectre des longueurs, c'est à dire à l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées de S rangées dans l'ordre croissant en respectant les multiplicités éventuelles. Cet ensemble considéré, on peut se demander l'information géométrique qu'il contient : peut-on déduire du spectre des longueurs le genre de S ? la classe d'isométrie de S ?

Dans le cas où S est fermée, ces questions ont été largement traitées. En particulier, on montre que la donnée du spectre des longueurs est équivalente à la donnée du spectre du Laplacien sur S (c'est le théorème de Huber, [4]). On peut déduire de cela que le spectre des longueurs détermine l'aire de la surface, et donc le genre ou, ce qui revient au même, la classe d'homéomorphie (on pourra se référer à [2]). Pour ce qui est de la classe d'isométrie de la surface, la réponse est négative, même si l'on dispose du théorème de Wolpert ([10], [4]) qui informe qu'une surface hyperbolique fermée de genre g est « en général » (il convient de donner un sens précis à cette formule. . .) déterminée à isométrie près par son spectre des longueurs. On sait notamment construire explicitement des surfaces de genre $g \geq 4$ ayant le même

Mots-clés : groupes fuchsien, espace des modules, géodésiques.

Classification math. : 20H10, 32G15, 53C22.

spectre des longueurs et étant géométriquement distinctes (on renvoie à [4] pour une présentation élégante et synthétique de ces exemples).

On dispose, parallèlement, de certains résultats de rigidité, par exemple pour les surfaces hyperboliques compactes de genre 1 avec une seule composante de bord ([3]), pour les pantalons compacts ou avec 1,2 ou 3 cusps ([6]).

Dans le cas où S est fermée et de genre 2 ou 3, la question reste ouverte.

Si maintenant S admet des points coniques (*i.e.* si son groupe fondamental contient des éléments elliptiques), on définit de la même manière le spectre des longueurs, en demandant aux géodésiques d'être les courbes qui minimisent la distance entre leurs points sur le complémentaire des points coniques. On dispose d'un analogue partiel du théorème de Huber dans ce cas (on consultera [5]).

On se propose ici de démontrer que pour les surfaces hyperboliques de genre 0 ayant trois points coniques dont l'un est d'ordre 2, le spectre des longueurs permet de déterminer l'ordre de tous les points coniques, et donc la classe d'isométrie. Pour des calculs numériques de systoles dans certains groupes de triangles, on renvoie à [7], [8] et [9], cette dernière référence s'attardant sur le groupe $\Gamma(2, 3, 7)$.

Ceci est un premier résultat de rigidité pour le cas des surfaces hyperboliques fermées à points coniques, qui s'applique en particulier à la surface modulaire.

1. Préliminaires

1.1. Introduction

On considère ici le demi-plan de Poincaré

$$\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} ; \operatorname{Im} z > 0\}$$

que l'on munit de la distance hyperbolique

$$\cosh d(x, y) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2 \operatorname{Im} x \operatorname{Im} y}.$$

Cet espace possède un groupe d'isométrie $\operatorname{Isom} \mathbf{H}$ qui s'identifie à $PGL(2, \mathbf{R})$ tandis que le groupe des isométries directes est assimilé à $PSL(2, \mathbf{R})$. Un élément γ de $\operatorname{Isom}^+ \mathbf{H}$ est alors hyperbolique si la trace d'une des matrices associées de $SL(2, \mathbf{R})$ est strictement plus grande que 2 en valeur absolue. Un tel élément agit sur \mathbf{H} en laissant stable une géodésique appelée axe

de γ et le long de laquelle γ agit comme une translation de distance de translation

$$l(\gamma) = \text{Inf}\{d(x, \gamma x) ; x \in \mathbf{H}\}.$$

Si maintenant $2 \leq p \leq q$ sont des entiers vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$$

on leur associe un triangle T de \mathbf{H} ayant pour angles $\pi/2, \pi/p, \pi/q$. Le groupe d'isométrie engendré par les réflexions relatives aux côtés de T est noté $\Gamma_0(2, p, q)$ tandis que l'ensemble de ses éléments préservant l'orientation est appelé $\Gamma(2, p, q)$. C'est ce dernier groupe que l'on va étudier ici.

$\Gamma_0(2, p, q)$ agit sur \mathbf{H} avec T comme domaine fondamental, ce qui fournit un pavage \mathcal{P}_0 admettant trois types de sommets : ceux de valence 2, de valence p ou de valence q . Considérons \mathcal{P} le sous pavage obtenu en considérant uniquement les sommets de valence q et les arêtes les reliant : celui-ci est constitué de p -gones de côté $2c$ avec

$$\cosh c = \frac{\cos \frac{\pi}{p}}{\sin \frac{\pi}{q}}$$

et les angles aux sommets sont tous égaux à $2\pi/q$.

Nous dirons que $\Gamma(2, p, q)$ et $\Gamma(2, p', q')$ sont isométriques si les quotients $\mathbf{H} \backslash \Gamma(2, p, q)$ et $\mathbf{H} \backslash \Gamma(2, p', q')$ le sont.

On décrit ici le début du spectre des longueurs

$$\text{Lsp } \Gamma(2, p, q) = \{l(\gamma) ; \gamma \text{ élément hyperbolique de } \Gamma(2, p, q)\}$$

qui est l'ensemble des distances de translation comptées avec multiplicités et ordonnées dans l'ordre croissant. Le plus petit élément de cet ensemble est la systole.

Commençons par expliquer notre approche, avant de donner la liste des résultats prouvés dans cet article.

Il est naturel de penser qu'un élément hyperbolique γ de $\Gamma(2, p, q)$ ayant une distance de translation petite (disons $\leq l_0$) déplace au moins un sommet de \mathcal{P} d'une distance petite également (Idée 1).

De plus, on peut penser que deux points du pavage proches pour la distance hyperbolique le restent également si on considère leur éloignement au sens de la distance combinatoire D associée au pavage (cette distance étant le nombre minimal d'arêtes permettant de relier ces deux points) (Idée 2).

Dans la pratique, nous aurons donc besoin

- de définir le « déplacement minimal » de γ sur \mathcal{P} , noté $\lambda(\gamma)$;
- de relier la distance hyperbolique d et la distance combinatoire D .

Le résultat obtenu (propriété 2.3) s'écrit alors

$$\forall l_0, \exists n_0 ; \forall \gamma \text{ hyperbolique}, l(\gamma) \leq l_0 \Rightarrow \lambda(\gamma) \leq n_0.$$

La démonstration de ce fait repose sur deux résultats formalisant les idées précédentes (lemme 2.1 et lemme 2.2).

Le premier indique qu'effectivement le « rayon hyperbolique » ρ des boules combinatoire augmente avec le rayon combinatoire de celles-ci.

Le second affirme comme il était pressenti que tout élément hyperbolique γ de distance de translation $l(\gamma)$ majorée par l_0 déplacera un point du pavage \mathcal{P} d'une distance majorée par

$$C(l_0) = \text{Argcosh} \left[(\cosh c)^2 (\cosh l_0 - 1) + 1 \right]$$

où cette constante ne dépend que de l_0 et des entiers p, q .

On obtient alors la propriété 2.3 cherchée.

Nous utilisons ensuite les résultats de la section 2 pour

- décrire le début du spectre des longueurs de $\Gamma(2, p, q)$;
- en déduire que le spectre des longueurs caractérise le groupe $\Gamma(2, p, q)$ parmi les groupes de triangles de ce type.

On a le résultat de rigidité spectral suivant (théorème 5.1) :

THÉORÈME A. — *Soit $\Gamma(2, p, q)$ et $\Gamma(2, p', q')$ deux groupes de triangles isospectraux au sens des longueurs. Alors ces deux groupes sont isométriques.*

Au passage, on aura démontré et exploité le résultat suivant (corollaire 5.2, section 5.1) :

THÉORÈME B. — *La systole de $\Gamma(2, p, q)$ est déterminée par l'alternative suivante :*

- (1) Si $p \geq 4$, il s'agit de $2 \text{ Argcosh} \left[2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} \right]$
- (2) Si $p = 3$, il s'agit de $2 \text{ Argcosh} \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 - \frac{1}{2} \right]$.

La section 2 expose comme annoncé la preuve de la propriété 2.3. C'est l'aspect théorique de l'étude.

La section 3 est consacrée au calcul explicite des distances de translation des hyperboliques vérifiant $\lambda(\gamma) = 1, 2$.

La section 4 est dédiée au calcul de $\rho(3)$ et à la mise en pratique de la propriété 2.3 pour les longueurs qui nous intéressent.

La section 5 démontre le résultat de rigidité spectral.

1.2. Notations

Rappelons que tous les points du pavage \mathcal{P} sont par hypothèse de valence q .

Si x, y, z sont trois éléments de \mathbf{H} , on désigne par $\angle(xy, xz)$ l'angle orienté formé par les segments géodésiques xy et xz en x . En l'absence de précisions, on considère la mesure de cet angle dans $[0, 2\pi[$. La mesure géométrique de cet angle est la valeur absolue de sa mesure principale.

Si x, y sont deux sommets de \mathcal{P} , on considère l'ensemble des chemins β du pavage formés d'arêtes consécutives de \mathcal{P} et reliant x et y . Le nombre d'arêtes d'un tel chemin est sa longueur, notée $L(\beta)$. La distance combinatoire entre x et y est

$$D(x, y) = \text{Inf}\{L(\beta) ; \beta \text{ reliant } x \text{ et } y\}.$$

C'est un entier.

Fixons maintenant s_0 dans \mathcal{P} . Pour $n \geq 1$, la boule combinatoire de centre s_0 et de rayon combinatoire n est l'ensemble des sommets de \mathcal{P} qui se trouvent à une distance combinatoire au plus égale à n de s_0 . On pose alors

$$\rho(n) = \text{Inf}\{d(s_0, s) ; D(s_0, s) = n\}.$$

Moralement, il s'agit du rayon hyperbolique minimal de la sphère combinatoire de rayon n . Ce nombre est évidemment indépendant de s_0 . Nous sommes notamment amenés, pour démontrer les résultats annoncés, à calculer $\rho(3)$ dans la section 4.1.

Décrivons de manière plus minutieuse la sphère combinatoire de rayon 3. Si s vérifie $D(s_0, s) = 3$, il existe un chemin $\beta = \{s_0 s_1, s_1 s_2, s_2 s\}$ du pavage reliant s_0 à s . On note $2k_1\pi/q$ et $2k_2\pi/q$ les mesures dans $[0, 2\pi[$ de l'angle orienté de β en s_1 et s_2 . Le sommet s s'écrit alors $s(k_1, k_2)$ et on note

$$d(k_1, k_2) := d(s_0, s(k_1, k_2)).$$

Remarquons qu'il existe plusieurs points du type $s(k_1, k_2)$ pour des entiers fixés et qu'ils sont tous à la même distance hyperbolique de s_0 . C'est cette distance, invariante, que l'on étudie : ceci justifie la notation précédente.

Enfin, pour tout γ élément hyperbolique de $\Gamma(2, p, q)$, on définit son niveau

$$\lambda(\gamma) = \text{Inf}\{D(s, \gamma s) ; s \in \mathcal{P}\}$$

qui mesure le déplacement minimal de γ sur \mathcal{P} au sens combinatoire du terme.

2. Aspect théorique de l'étude

Il s'agit ici de démontrer la propriété 2.3 annoncée en introduction, sur laquelle repose l'étude pratique du spectre des longueurs.

Commençons par montrer le lemme suivant établissant la croissance de $\rho : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{R}^*$ et reliant ainsi les distances d et D .

LEMME 2.1. — *L'application ρ est croissante.*

Preuve du lemme 2.1. — Fixons s_0 un sommet de \mathcal{P} et $n \geq 2$ un entier. Soit x un sommet à distance combinatoire n de s_0 . Montrons qu'il existe toujours un élément y de \mathcal{P} étant à une distance combinatoire $n - 1$ de s_0 et qui soit plus proche de s_0 que x au sens de la distance hyperbolique. En choisissant $x = x_0$ de manière adaptée, on obtiendra alors $y = y_0$ vérifiant

$$\rho(n) = d(s_0, x_0) \geq d(s_0, y_0) \geq \rho(n - 1)$$

et le lemme sera démontré.

Soit donc x avec la propriété invoquée. Il existe un chemin $\beta = \{c_1, \dots, c_n\}$ du pavage reliant s_0 à x . On écrit $c_n = yx$ et on désigne par z le milieu de xy , qui est un point de valence 2 du pavage \mathcal{P}_0 . L'élément y est de valence q et vérifie

$$d(s_0, x) \geq d(s_0, y).$$

En effet, si m est la médiatrice de xy , m sépare les points x et s_0 : établissons ce fait.

Commençons par écrire le complémentaire de m comme union de deux sous espaces ouverts H_x et H_y , avec des notations évidentes, et supposons que s_0 est dans H_x . Nous allons contredire la minimalité de β .

Le chemin β intersecte m en au moins deux points, dont l'un est z . Notons w le premier point d'intersection de β avec m quand β est parcouru de s_0 vers x . C'est un sommet de \mathcal{P}_0 , donc de valence q ou 2.

Cas 1 : w est de valence q .

On écrit tout d'abord

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \{yx\}$$

où β_1 relie s_0 à w et β_2 relie w à y . On pose alors

$$\beta' = \beta_1 \cup \overline{\beta_2}$$

où $\overline{\beta_2}$ désigne le chemin de \mathcal{P} image de β_2 par la réflexion d'axe m . Le chemin β' relie s_0 à x et se trouve être de longueur strictement plus petite que β , ce qui contredit la minimalité de β et impose à s_0 d'appartenir à H_y .

Cas 2 : w est de valence 2.

w est alors le milieu d'une arête $x'y'$ avec x' et y' dans \mathcal{P} . Nous supposons que $x' \in H_x$ et écrivons

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \{yx\} \cup \{x'y'\}$$

où β_1 relie s_0 à x' et β_2 relie y' à y . Il suffit maintenant de considérer

$$\beta' = \beta_1 \cup \overline{\beta_2}$$

pour contredire là encore la minimalité de β .

Dans tous les cas, on a bien $s_0 \in H_y$ et

$$d(s_0, x) \geq d(s_0, y).$$

Reste à constater que y est exactement à une distance combinatoire $n - 1$ de s_0 : en effet, $\beta' = \{c_1, \dots, c_{n-1}\}$ est un chemin reliant s_0 à y (ce qui fournit une majoration de la distance cherchée) et si $D(s_0, y)$ était strictement inférieure à $n - 1$, on aurait β de longueur strictement inférieure à n .

Ceci achève la preuve du lemme 2.1.

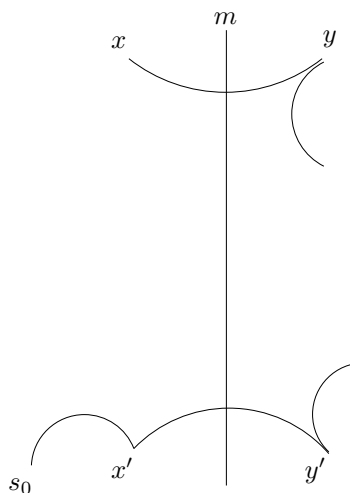


FIG. 2.1. Le cas où w est de valence 2.

□

Montrons maintenant le lemme 2.2 qui assure l'existence d'un « déplacement minimal » maximal pour les éléments hyperboliques dont la distance de translation est bornée.

LEMME 2.2. — Soit $l_0 > 0$. Alors il existe une constante $C(l_0)$ telle que tout élément hyperbolique γ de $\Gamma(2, p, q)$ ayant une distance de translation inférieure ou égale à l_0 déplace au moins un sommet s_0 de \mathcal{P} d'une distance

$$d(s_0, \gamma s_0) \leq C(l_0)$$

On a de plus

$$\cosh C(l_0) = (\cosh c)^2 (\cosh l_0 - 1) + 1$$

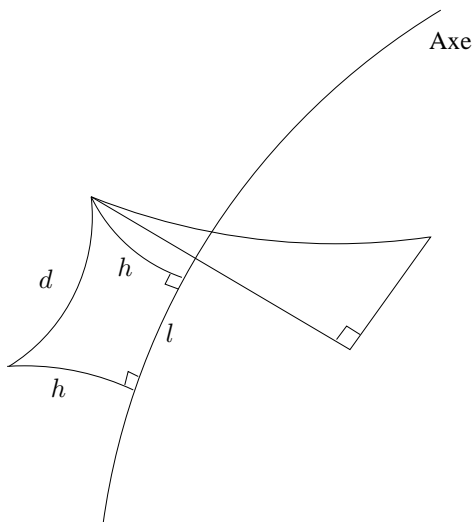


FIG. 2.2. Illustration du lemme 2.2

Preuve du lemme 2.2. — Considérons ss' une arête du pavage \mathcal{P} qui possède une intersection non vide avec A , l'axe de γ . Si s est l'extrémité de l'arête la plus proche de A au sens hyperbolique, cette distance est nécessairement inférieure à c . On obtient alors

$$\begin{aligned} \cosh d(s, \gamma s) &= (\cosh d(s, A))^2 (\cosh l(\gamma) - 1) + 1 \\ &\leq (\cosh c)^2 (\cosh l(\gamma) - 1) + 1 \\ &\leq (\cosh c)^2 (\cosh l_0 - 1) + 1 \end{aligned}$$

On peut donc prendre $s_0 = s$. □

On est maintenant en mesure de montrer la

PROPOSITION 2.3. — Soit $l_0 > 0$. Alors il existe un entier n_0 tel que, pour tout élément hyperbolique γ de $\Gamma(2, p, q)$,

$$l(\gamma) \leq l_0 \Rightarrow \lambda(\gamma) \leq n_0$$

Preuve de la proposition 2.3. — Par croissance de ρ , il existe un plus petit entier n tel que $\rho(n) > C(l_0)$. Supposons dès lors que $\lambda(\gamma) > n$. Pour tout s dans \mathcal{P} , on a

$$d(s, \gamma s) \geq \rho(\lambda(\gamma)) \geq \rho(n) > C(l_0)$$

et le lemme 2.1 permet alors d'affirmer que $l(\gamma) > l_0$. Nous pouvons donc choisir $n_0 = n - 1$. \square

3. Aspect pratique de l'étude : première partie

On décrit ici les valeurs du spectre des longueurs apparaissant avec les éléments hyperboliques de niveau 1 et 2, c'est à dire les distances de translations correspondant aux éléments hyperboliques de $\Gamma(2, p, q)$ qui déplacent au moins un point du pavage d'une distance combinatoire 1 ou 2. On y trouve des formules explicites élémentaires et on ordonne ces valeurs dans l'ordre croissant, en tenant compte des valeurs des entiers p et q .

3.1. Les hyperboliques de niveau 1

Soit γ un élément hyperbolique de $\Gamma(2, p, q)$ déplaçant au moins un sommet s_0 d'une distance combinatoire 1. Choisissons un s_0 tel que $D(s_0, \gamma s_0) = 1$ et décomposons γ en produit de deux réflexions dont les axes sont des géodésiques G et G' du pavage \mathcal{P}_0 : expliquons comment.

Si s_0 et tel que $D(s_0, \gamma s_0) = 1$, écrivons $\gamma^2 s_0 = x$. L'arête $\gamma s_0 x$ se trouve donc être l'image par γ de l'arête $s_0 \gamma s_0$. Prenons pour G la médiatrice de $s_0 \gamma s_0$ et pour G' la bissectrice de l'angle formé par ces deux arêtes au sommet γs_0 . On note $G' = G'_k$ où k est un entier entre 1 et $q - 1$ tel que $\angle(\gamma s_0 s_0, \gamma s_0 x) = 2k\pi/q$. Un calcul trigonométrique permet d'affirmer que la distance de translation de $\gamma = \bar{r}_{G'_k} \bar{r}_G$ est alors donnée par

$$l_1(k) = 2 \operatorname{Argcosh} D_1(k) ; 1 \leq k \leq q - 1$$

dès que la quantité

$$D_1(k) = \sin \frac{k\pi \cos \frac{\pi}{p}}{q \sin \frac{\pi}{q}} ; 1 \leq k \leq q - 1$$

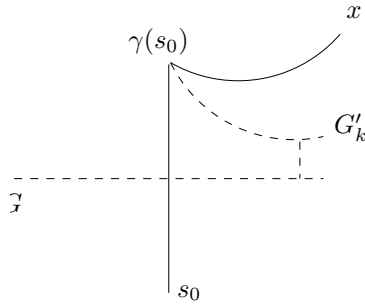


FIG. 3.1. Les hyperboliques de niveau 1

est strictement plus grande que 1 : dans le cas contraire, γ n'est pas hyperbolique ([1], p. 157 et p. 179).

On constate que les valeurs prises par $D_1(k)$ sont symétriques par rapport à la valeur en la partie entière de $q/2$. On a notamment :

$$D_1(1) = \cos \frac{\pi}{q} < 1$$

$$D_1(2) = 2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q}$$

$$D_1(3) = \cos \frac{\pi}{p} [4(\cos \frac{\pi}{q})^2 - 1].$$

On dispose du résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. — Soit $\Gamma(2, p, q)$ avec p, q deux entiers tels que $p \leq q$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$.

(1) Si $p \geq 4$ et $q \geq 6$, les deux distances de translation les plus petites parmi les éléments hyperboliques de niveau 1 sont, dans l'ordre croissant :

$$l_1(2) = 2 \operatorname{Argcosh}[2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q}]$$

$$l_1(3) = 2 \operatorname{Argcosh} \cos \frac{\pi}{p} [4(\cos \frac{\pi}{q})^2 - 1].$$

(2) Si $p = 3$ où bien $(p, q) \in \{(4, 5), (5, 5)\}$, la plus petite distance de translation parmi les éléments hyperboliques de niveau 1 est :

$$l_1(3) = 2 \operatorname{Argcosh} \cos \frac{\pi}{p} [4(\cos \frac{\pi}{q})^2 - 1].$$

Preuve de la proposition 3.1. — Un calcul rapide montre que $l_1(2) = l_1(3)$ si et seulement si $q = 5$. Il est de plus évident que $D_1(2)$ est strictement supérieur à 1 si $p \geq 4$ et strictement inférieur à 1 dès que $p = 3$. □

3.2. Les hyperboliques de niveau 2

Soit γ un élément hyperbolique de $\Gamma(2, p, q)$ déplaçant au moins un sommet s_0 du pavage d'une distance combinatoire 2, c'est à dire $D(s_0, \gamma s_0) = 2$. Cette isométrie se décompose là encore en deux réflexions dont les axes sont des géodésiques G et G' du pavage \mathcal{P}_0 . Expliquons comment s'en persuader.

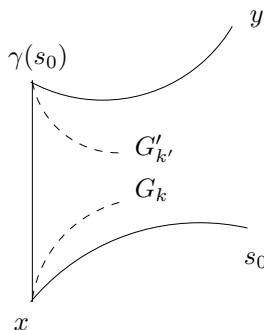


FIG. 3.2. Les hyperboliques de niveau 2

Considérons $\beta = \{s_0x, x\gamma s_0\}$ un chemin de longueur 2 reliant s_0 à son image. Posons maintenant $y = \gamma x$ et considérons dès lors pour G la bissectrice de l'angle $\angle(x s_0, x \gamma s_0)$ et pour G' la bissectrice de l'angle $\angle(\gamma s_0 x, \gamma s_0 y)$.

La longueur de translation de $\gamma = \bar{r}_{G'_k} \bar{r}_{G_k}$ est alors donnée par

$$l_2(k, k') = 2 \operatorname{Argcosh} D_2(k, k') ; 1 \leq k, k' \leq q - 1$$

dès que la quantité

$$D_2(k, k') = \left| \sin \frac{k'\pi}{q} \sin \frac{k\pi}{q} \cosh 2c - \cos \frac{k\pi}{q} \cos \frac{k'\pi}{q} \right| ; 1 \leq k, k' \leq q - 1$$

est strictement plus grande que 1. Dans les formules précédentes,

$$\cosh 2c = \frac{2(\cos \frac{\pi}{p})^2 + (\cos \frac{\pi}{q})^2 - 1}{(\sin \frac{\pi}{q})^2}.$$

Il convient de remarquer que $D_2(q - 1, k)$ est égal à $D_2(1, q - k)$ et cela pour tout k compris entre 1 et $q - 1$.

Rangeons ces valeurs dans l'ordre croissant. On dispose pour cela du résultat élémentaire suivant :

LEMME 3.2. — Soit K et K' deux entiers compris entre 1 et la partie entière de $q/2$. Alors pour tout k compris entre K et $q - K$ et tout k' compris entre K' et $q - K'$, on a

$$\begin{aligned} \sin \frac{k\pi}{q} \sin \frac{k'\pi}{q} \cosh 2c - \cos \frac{k\pi}{q} \cos \frac{k'\pi}{q} \\ \geq \sin \frac{K\pi}{q} \sin \frac{K'\pi}{q} \cosh 2c - \cos \frac{K\pi}{q} \cos \frac{K'\pi}{q}. \end{aligned}$$

Preuve du lemme 3.2. — On constate que pour les valeurs de k indiquées,

$$\sin \frac{k\pi}{q} \geq \sin \frac{K\pi}{q} > 0$$

et qu'il en est de même pour k' et K' . On a donc

$$\sin \frac{k\pi}{q} \sin \frac{k'\pi}{q} \geq \sin \frac{K\pi}{q} \sin \frac{K'\pi}{q} > 0.$$

Maintenant,

$$\cos \frac{k\pi}{q} \leq \cos \frac{K\pi}{q}$$

avec le même résultat pour k' et K' . On en déduit

$$\cos \frac{k\pi}{q} \cos \frac{k'\pi}{q} \leq \cos \frac{K\pi}{q} \cos \frac{K'\pi}{q}.$$

Ceci est évident sans se préoccuper du signe du terme de gauche car le terme de droite est toujours positif par hypothèse sur K et K' . On conclut en remarquant que $\cosh 2c$ est toujours strictement positif. \square

Nous énonçons maintenant le principal résultat de ce paragraphe :

PROPOSITION 3.3. — Soit $\Gamma(2, p, q)$ avec p, q deux entiers tels que $p \leq q$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$.

- (1) Si $p \geq 5$, les deux distances de translation les plus petites parmi les éléments hyperboliques de niveau 2 sont, dans l'ordre croissant :

$$l_2(1, 2) = 2 \operatorname{Argcosh} \left[\cos \frac{\pi}{q} \left(4 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 1 \right) \right]$$

$$l_2(1, q-1) = 2 \operatorname{Argcosh} \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 - 1 \right].$$

- (2) Si $p = 4$ la plus petite distance de translation parmi les éléments hyperboliques de niveau 2 est :

$$l_2(1, q-1) = 2 \operatorname{Argcosh} \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 - 1 \right].$$

- (3) Si $p = 3$ et $q = 7$, la plus petite distance de translation parmi les éléments hyperboliques de niveau 2 est :

$$l_2(1, q-1) = 2 \operatorname{Argcosh} \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 - \frac{1}{2} \right].$$

(4) Si $p = 3$ et $q \geq 8$, les deux plus petites distances de translation parmi les éléments hyperboliques de niveau 2 sont :

$$l_2(1, q - 1) = 2 \operatorname{Argcosh}\left[2\left(\cos \frac{\pi}{q}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]$$

$$l_2(1, 6) = 2 \operatorname{Argcosh}\left[2 \cos \frac{\pi}{q} \left(2\left(\cos \frac{\pi}{q}\right)^2 - 1\right)\right].$$

Preuve de la proposition 3.3.

Un calcul préliminaire.

Pour clarifier la démonstration, nous commençons par obtenir une première minoration des quantités $D_2(k, k')$ en distinguant deux cas ($p \geq 4$ et $p = 3$).

Si $p \geq 4$, la quantité entre les valeurs absolues est positive dès que $1 \leq k \leq q - 1$ et $2 \leq k' \leq q - 2$. Cela résulte d'un calcul élémentaire et de l'utilisation du lemme 3.2. Ceci permet de faciliter la manipulation des quantités $D_2(k, k')$ en supprimant les valeurs absolues dans leur expression initiale. On a alors, pour tout $2 \leq k, k' \leq q - 2$,

$$D_2(k, k') = \sin \frac{k'\pi}{q} \sin \frac{k\pi}{q} \cosh 2c - \cos \frac{k\pi}{q} \cos \frac{k'\pi}{q}$$

$$\geq \sin \frac{2\pi}{q} \sin \frac{2\pi}{q} \cosh 2c - \cos \frac{2\pi}{q} \cos \frac{2\pi}{q}$$

$$= D_2(2, 2)$$

ceci résultant du lemme 3.2.

Si $p = 3$, la quantité entre les valeurs absolues définissant $D_2(k, k')$ est positive dès que $1 \leq k \leq q - 1$ et $3 \leq k' \leq q - 3$ et on a de même, pour tout $2 \leq k \leq q - 2$ et tout $3 \leq k' \leq q - 3$,

$$D_2(k, k') = \sin \frac{k'\pi}{q} \sin \frac{k\pi}{q} \cosh 2c - \cos \frac{k\pi}{q} \cos \frac{k'\pi}{q}$$

$$\geq \sin \frac{2\pi}{q} \sin \frac{3\pi}{q} \cosh 2c - \cos \frac{2\pi}{q} \cos \frac{3\pi}{q}$$

$$= D_2(2, 3).$$

Il convient donc d'étudier séparément le cas $p = 3$.

Le cas $p \geq 4$.

Montrons maintenant la proposition dans le cas où p est supérieur ou égal à 4.

On constate que

$$D_2(1, 2) < D_2(1, q - 1) \leq D_2(1, 3) \leq D_2(2, 2)$$

avec un cas d'égalité qui caractérise la situation $p = 4$.

En effet, on dispose des formules

$$D_2(1, 2) = \cos \frac{\pi}{q} \left[4 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 1 \right]$$

$$D_2(1, q-1) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 1$$

$$D_2(1, 3) = 8 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 + 1$$

$$D_2(2, 2) = 8 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 1$$

et le résultat provient des constatations suivantes

$$D_2(1, 3) - D_2(1, q-1) = 2 \left(2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 - 1 \right) \left(2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 1 \right) \geq 0$$

$$D_2(1, q-1) - D_2(1, 2) > 2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - \left(4 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 1 \right) + 2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 1 = 0$$

$$D_2(2, 2) - D_2(1, 3) \geq 4 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 2 \geq 0.$$

La première différence est nulle si et seulement si $p = 4$ car on demande $p \leq q$. Remarquons ensuite que si p est supérieur ou égal à 5, $D_2(1, 2) > 1$ alors que $D_2(1, 2) < 1 < D_2(1, q-1)$ si p prend la valeur 4.

Il reste à démontrer qu'aucune valeur $D_2(k, k')$ ne vient s'intercaler dans la liste proposée. Si k et k' sont entre 2 et $q-2$, cela résulte de la minoration obtenue en début de preuve. Si $k = 1$, on constate que $D_2(1, k)$ est supérieur à $D_2(1, 3)$ dès que k est compris entre 3 et $q-3$, toujours en utilisant le lemme 3.2. Clairement, $D_2(1, 1) < 1$. Un calcul montre ensuite que, si $p \geq 4$,

$$\begin{aligned} D_2(1, q-2) - D_2(1, q-1) &= 4 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 \cos \frac{\pi}{q} + 4 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^3 - 3 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right) \\ &\quad - 2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 + 1 \\ &\geq 4 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^3 - 2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 - \left(\cos \frac{\pi}{q} \right) \\ &> 0 \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant d'une simple étude de fonction. Enfin, si $k = q-1$, on utilise que $D_2(q-1, k') = D_2(1, q-k')$. Ceci achève la situation où p est supérieur à 4.

Le cas $p = 3$.

Considérons maintenant le cas où $p = 3$. On montre alors que

$$1 < D_2(1, q-1) \leq D_2(1, 6)$$

avec un cas d'égalité qui caractérise la situation où $q = 7$. Pour cela, on examine les formules

$$D_2(1, q-1) = D_2(1, 5) = 2\left(\cos \frac{\pi}{q}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$D_2(1, 6) = D_2(2, q-1) = D_2(2, 3) = 2\left(\cos \frac{\pi}{q}\right)\left(2\left(\cos \frac{\pi}{q}\right)^2 - 1\right).$$

On constate ensuite que $D_2(1, k)$ est supérieur à $D_2(1, 6)$ dès que k est compris entre 6 et $q-6$ puis on examine les valeurs restantes comme précédemment pour confirmer qu'elles ne viennent pas s'intercaler dans la suite précédente.

□

4. Aspect pratique de l'étude : deuxième partie

Pour $p = 3$, on démontre (section 4.2.2) que tout élément hyperbolique de $\Gamma(2, p, q)$ ayant une distance de translation inférieure ou égale à $l_1(4)$ est de niveau 1 ou 2. Autrement dit, en appliquant la propriété 2.3 si $l_0 = l_1(4)$, on obtient $n_0 = 2$. Rappelons que l'on a étudié ces éléments dans la section précédente.

Pour $p \in \{4, 5\}$ et $p \geq 11$, la section 4.2.1 montre qu'il en est de même pour les éléments hyperboliques de $\Gamma(2, p, q)$ ayant une distance de translation inférieure ou égale à $l_2(1, q-1)$.

Enfin, pour $p \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$, la section 4.2.3 explique pourquoi tout hyperbolique de $\Gamma(2, p, q)$ ayant une distance de translation inférieure ou égale à $l_1(2)$ est également de niveau 1 ou 2.

Dans chaque cas, l'objectif est donc d'expliquer pourquoi un élément hyperbolique ayant une telle distance de translation ne peut pas déplacer un élément du pavage d'une distance combinatoire supérieure ou égale à 3 et il est donc nécessaire, en préliminaire, d'examiner de plus près la quantité $\rho(3)$.

4.1. Calcul de $\rho(3)$

Fixons s_0 un sommet du pavage et considérons l'ensemble des sommets qui constituent la sphère de centre s_0 et de rayon 3 pour la distance combinatoire. Chaque point de cette sphère sera écrit sous la forme $s(k_1, k_2)$ avec k_1 et k_2 entre 1 et $q-1$. Cherchons celui qui est géométriquement (*i.e.* au sens de la distance hyperbolique d) le plus proche de s_0 .

Commençons par établir le

LEMME 4.1. — Soit s et s_0 deux sommets de \mathcal{P} tels que $D(s, s_0) = 3$. Si $\beta = \{s_0x, xy, ys\}$ est un chemin minimal de \mathcal{P} reliant s à s_0 , alors la mesure géométrique de l'angle $\angle(yx, ys_0)$ est inférieure ou égale à π/q .

En reprenant la mesure de l'angle orienté, le lemme affirme que

$$\angle(yx, ys_0) \in \left[0, \frac{\pi}{q}\right] \cup \left[2\pi - \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{q}\right].$$

Preuve du lemme 4.1. — Commençons par signaler le fait que dans le triangle isocèle s_0xy , l'angle à la base $\angle(yx, ys_0)$ est une fonction décroissante de l'angle au sommet $\angle(xs_0, xy)$. Cela résulte des formules classiques de trigonométrie hyperbolique.

Le cas $p \geq 4$.

Ici, on écrit $s = s(k_1, k_2)$ avec k_1 et k_2 entre 1 et $q - 1$. La mesure géométrique de l'angle $\angle(xs_0, xy)$ est donc minimale pour $k_1 = 1$, et un simple calcul (on pourra dessiner un p -gone et représenter les points s_0, x, y) montre que si $p \geq 4$, l'angle $\angle(yx, ys_0)$ a dans ce cas une mesure géométrique toujours inférieure ou égale à π/q avec comme cas d'égalité la valeur $p = 4$.

Le cas $p = 3$.

On écrit $s = s(k_1, k_2)$ avec k_1 et k_2 entre 2 et $q - 2$. Remarquons que si $k_1 = 1$ ou $k_1 = q - 1$, l'angle $\angle(yx, ys_0)$ a une mesure géométrique égale à $2\pi/q$ et le raisonnement précédent n'est a priori pas exploitable. Cependant, avec l'hypothèse où k_2 doit être entre 2 et $q - 2$, la mesure géométrique de l'angle $\angle(xs_0, xy)$ est minimale pour $k_1 = 2$ ou $k_1 = q - 2$. On trouve alors une mesure géométrique égale à π/q pour l'angle $\angle(xs_0, xy)$ (on pourra là encore dessiner un p -gone pour s'en convaincre). Comme il s'agit du cas extrémal, cela conclut la preuve. □

On déduit de cela le résultat suivant :

LEMME 4.2. — Supposons $p \geq 3$. Soit K un entier compris entre 1 et la partie entière de $q/2$. Pour tout k_1 entre 1 et $q - 1$ et k_2 entre K et $q - K$,

$$d(k_1, k_2) \geq \text{Min}\{d(k_1, K), d(k_1, q - K)\}.$$

Preuve du lemme 4.2. — On se fixe s_0 un point du pavage et un couple d'entier (k_1, k_2) auquel on associe un point $s = s(k_1, k_2)$ de la sphère combinatoire de rayon 3 et de centre s_0 . On dispose d'un chemin $\beta = \{s_0x, xy, ys\}$

associé à ce couple d'entier. Dans le triangle s_0ys , la longueur s_0s est minimale quand la mesure géométrique de l'angle $\angle(ys_0, ys)$ est minimal. En notant α la mesure géométrique de l'angle $\angle(yx, ys_0)$, on peut distinguer deux cas :

Si $2k_2\pi/q$ est dans $]0, \pi]$, la mesure géométrique de $\angle(ys_0, ys)$ est égale à

$$2k_2\pi/q - \alpha.$$

Elle est donc minimale pour $k_2 = K$.

Si $2k_2\pi/q$ est dans $]\pi, 2\pi]$, cette mesure géométrique est égale à

$$2(q - k_2)\pi/q + \alpha$$

et est minimale pour $k_2 = q - K$.

Ceci termine la preuve. □

Ce lemme affirme par symétrie que

$$d(k_1, k_2) \geq \text{Min}\{d(K, k_2), d(q - K, k_2)\}$$

si k_1 varie entre K et $q - K$ et k_2 est un entier quelconque entre 1 et $q - 1$.

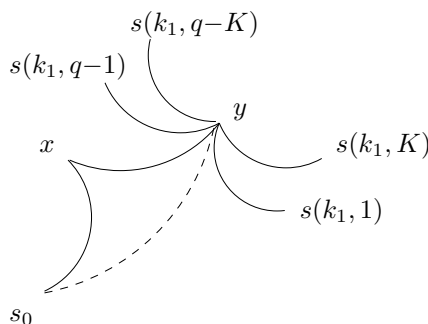


FIG. 4.1. Illustration du lemme 4.2

On déduit du lemme 4.2 la propriété suivante :

PROPOSITION 4.3. — La valeur de $\rho(3)$ est déterminée de la manière suivante :

- (1) si $p \geq 6$, $\rho(3) = d(s_0, s(1, 1))$
- (2) si $p = 4$, $\rho(3) = d(s_0, s(1, 2))$
- (3) si $p = 5$, $\rho(3) = d(s_0, s(1, q - 1))$
- (4) si $p = 3$, $\rho(3) = d(s_0, s(2, 2))$.

Preuve de la proposition 4.3. — On se fixe s_0 un sommet du pavage et on désigne les points de la sphère de centre s_0 et de rayon 3 pour la distance combinatoire par les sommets $s(k_1, k_2)$ avec k_1 et k_2 compris entre 1 et $q - 1$.

Le cas $p \geq 6$.

Dans ce cas, pour tous k_1 et k_2 compris entre 1 et $q - 1$, le point $s(k_1, k_2)$ est à une distance combinatoire 3 de s_0 .

Pour tout k_1 fixé, en appliquant le lemme 4.2 à deux reprises, on a

$$d(k_1, k_2) \geq \text{Min}\{d(1, 1), d(1, q - 1)\}.$$

Montrons que, pour $p \geq 6$, $d(1, q - 1)$ est toujours supérieur à $d(1, 1)$.

En écrivant $\beta_1 = \{s_0x, xy, ys(1, 1)\}$ et $\beta_2 = \{s_0x, xy, ys(1, q - 1)\}$ des chemins du pavage associés à $s(1, 1)$ et $s(1, q - 1)$, on raisonne dans les triangles $s_0ys(1, 1)$ et $s_0ys(1, q - 1)$. Notons α la mesure géométrique de l'angle $\angle(yx, ys_0)$. L'angle en y du premier triangle (qui est $2\pi/q - \alpha$) est strictement inférieur à celui du second (qui est $2\pi/q + \alpha$). On termine en invoquant le fait que dans un triangle hyperbolique, la longueur d'un côté est une fonction croissante de l'angle opposé à ce côté.

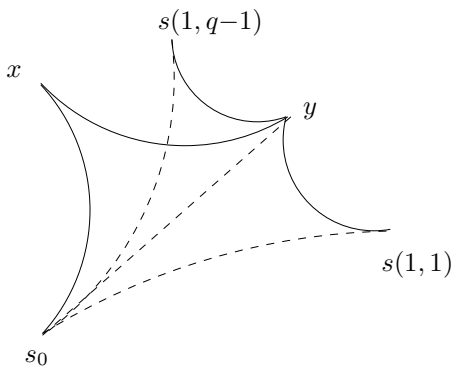


FIG. 4.2. *Illustration du fait que $d(1, 1) < d(1, q - 1)$*

Le cas $p = 4$ ou $p = 5$.

Ici, si $k_1 = 1$ et $k_2 = 1$, on a $D(s_0, s(1, 1)) < 3$ donc il s'agit de retirer cette possibilité.

Le raisonnement précédent, s'appuyant sur le lemme 4.2, permet d'établir, d'une part, que pour tous k_1, k_2 entre 2 et $q - 2$,

$$d(k_1, k_2) \geq \text{Min}\{d(2, 2), d(2, q - 2)\}$$

et d'autre part que pour k_1 entre 1 et $q - 1$ et k_2 entre 2 et $q - 2$,

$$d(k_1, k_2) \geq \text{Min}\{d(1, 2), d(q - 1, 2)\}.$$

Une nouvelle application permet d'affirmer

$$d(q - 1, 2) \geq d(q - 1, 1)$$

en remarquant que $s(q - 1, 1)$ est bien à une distance combinatoire 3 de s_0 ici. Reste donc à comparer $d(1, 2)$ et $d(1, q - 1)$ pour $p = 4$ et $p = 5$ pour conclure.

En écrivant $\beta_1 = \{s_0x, xy, ys(1, 2)\}$ et $\beta_2 = \{s_0x, xy, ys(1, q - 1)\}$ des chemins du pavage associés à $s(1, 2)$ et $s(1, q - 1)$, on raisonne dans les triangles $s_0ys(1, 2)$ et $s_0ys(1, q - 1)$. Les angles au sommet y sont égaux dans ces deux triangles si $p = 4$ alors que l'angle en y du triangle $s_0ys(1, 2)$ est plus grand que celui du triangle $s_0ys(1, q - 1)$ si $p = 5$ (on pourra dessiner un p -gone pour s'en convaincre). On conclut comme précédemment en invoquant le fait que, dans un triangle hyperbolique, la longueur d'un côté est une fonction croissante de l'angle opposé à ce côté.

Le cas $p = 3$.

Dans ce dernier cas, k_1 et k_2 doivent évoluer entre 2 et $q - 2$ pour que l'on obtienne bien un point $s(k_1, k_2)$ qui soit à une distance 3 de s_0 . On utilise le lemme 4.2 pour établir que

$$d(s_0, s(k_1, k_2)) \geq \text{Min}\{d(2, 2), d(2, q - 2)\}$$

et il reste à comparer ces deux longueurs pour conclure : il s'agit du même argument que lorsqu'on voulait comparer $d(1, 1)$ et $d(1, q - 1)$ dans le cas où $p \geq 6$.

Ceci termine la preuve du lemme. □

Reste à calculer explicitement ces valeurs en fonction de p et q . Pour cela, on utilise le changement de variable suivant :

$$X = \cos \frac{\pi}{p} ; Y = \cos \frac{\pi}{q}.$$

On démontre alors la proposition

PROPOSITION 4.4. — Avec les notations précédentes, on dispose des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \cosh d(1, 2) &= \frac{32X^2Y^2(X^2 + Y^2 - 1)(4X^2 - 1) + 2X^2 + Y^2 - 1}{1 - Y^2} \\ \cosh d(1, 1) &= \frac{16X^2(X^2 + Y^2 - 1)(2X^2 - 1) + 2X^2 + Y^2 - 1}{1 - Y^2} \\ \cosh d(1, q - 1) &= \frac{(2X^2 + Y^2 - 1)[16X^2(X^2 + Y^2 - 1) + 1]}{1 - Y^2} \\ \cosh d(2, 2) &= \frac{64X^2Y^2(X^2 + Y^2 - 1)(8Y^2X^2 - 1) + 2X^2 + Y^2 - 1}{1 - Y^2}. \end{aligned}$$

Preuve de la proposition 4.4. — Dans toute cette preuve, s_0 est un sommet fixé du pavage \mathcal{P} .

Une première formule générale.

On suppose que $2k_1\pi/q$ et $2k_2\pi/q$ sont strictement inférieurs à π . On montre ici que

$$\begin{aligned} \cosh d(k_1, k_2) &= \cosh 2c(\sinh 2c)^2 \left(1 - \cos \frac{2k_1\pi}{q}\right) \left(1 - \cos \frac{2k_2\pi}{q}\right) \\ &\quad - (\sinh 2c)^2 \sin \frac{2k_1\pi}{q} \sin \frac{2k_2\pi}{q} + \cosh 2c \end{aligned}$$

Si $s = s(k_1, k_2)$, notons s_0, x, y, s les sommets consécutifs du quadrilatère hyperbolique formé par le chemin reliant s_0 à s dans \mathcal{P} en y rajoutant le segment géodésique de \mathbf{H} reliant s à s_0 . On a

$$\begin{aligned} \cosh d(s_0, s) &= \cosh 2c \cosh d(s_0, y) \\ &\quad - \sinh 2c \sinh d(s_0, y) \cos\left(\frac{2k_2\pi}{q} - \angle(yx, ys_0)\right) \\ &= \cosh 2c \cosh d(s_0, y) \\ &\quad - \sinh 2c \sinh d(s_0, y) \cos \frac{2k_2\pi}{q} \cos \angle(yx, ys_0) \\ &\quad - \sinh 2c \sinh d(s_0, y) \sin \frac{2k_2\pi}{q} \sin \angle(yx, ys_0) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \cosh d(s_0, y) &= (\sinh 2c)^2 \left(1 - \cos \frac{2k_1\pi}{q}\right) + 1 ; \\ \sin \angle(yx, ys_0) \sinh d(s_0, y) &= \sinh 2c \sin \frac{2k_1\pi}{q} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \cosh d(s_0, s) &= \cosh 2c[(\sinh 2c)^2(1 - \cos \frac{2k_1\pi}{q}) + 1] \\ &\quad - \sinh 2c \sinh d(s_0, y) \cos \frac{2k_2\pi}{q} \cos \angle(yx, ys_0) \\ &\quad - (\sinh 2c)^2 \sin \frac{2k_1\pi}{q} \sin \frac{2k_2\pi}{q} \end{aligned}$$

mais on sait que

$$\cosh 2c = \cosh 2c \cosh d(s_0, y) - \sinh 2c \sinh d(s_0, y) \cos \angle(yx, ys_0)$$

ce qui entraîne

$$\sinh 2c \sinh d(s_0, y) \cos \angle(yx, ys_0) = \cosh 2c[\cosh d(s_0, y) - 1]$$

d'où

$$\begin{aligned} \cosh d(s_0, s) &= \cosh 2c[(\sinh 2c)^2(1 - \cos \frac{2k_1\pi}{q}) + 1] \\ &\quad - (\sinh 2c)^2 \cosh 2c \cos \frac{2k_2\pi}{q} (1 - \cos \frac{2k_1\pi}{q}) \\ &\quad - (\sinh 2c)^2 \sin \frac{2k_1\pi}{q} \sin \frac{2k_2\pi}{q} \\ &= \cosh 2c(\sinh 2c)^2(1 - \cos \frac{2k_1\pi}{q}) + \cosh 2c \\ &\quad - (\sinh 2c)^2 \sin \frac{2k_1\pi}{q} \sin \frac{2k_2\pi}{q} \\ &\quad - \cosh 2c(\sinh 2c)^2(1 - \cos \frac{2k_1\pi}{q}) \cos \frac{2k_2\pi}{q} \\ &= \cosh 2c(\sinh 2c)^2(1 - \cos \frac{2k_1\pi}{q})(1 - \cos \frac{2k_2\pi}{q}) \\ &\quad - (\sinh 2c)^2 \sin \frac{2k_1\pi}{q} \sin \frac{2k_2\pi}{q} + \cosh 2c \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la formule à établir.

Applications de la formule obtenue.

La formule ci-dessus permet de trouver toutes les quantités cherchées à l'exception de $d(1, q - 1)$. Examinons en détail le cas de $d(1, 2)$. Via les

formules

$$\begin{aligned} \cosh 2c &= 2(\cosh c)^2 - 1 = \frac{2X^2 + Y^2 - 1}{1 - Y^2} ; \\ (\cosh 2c)^2 - 1 &= 4 \frac{X^2(X^2 + Y^2 - 1)}{(1 - Y^2)^2} ; \\ \cos \frac{2\pi}{q} &= 2Y^2 - 1 ; \\ \cos \frac{4\pi}{q} &= -8Y^2(1 - Y^2) + 1 ; \\ \sin \frac{2\pi}{q} \sin \frac{4\pi}{q} &= 8Y^2(1 - Y^2)(2Y^2 - 1) \end{aligned}$$

qu'il convient de faire intervenir dans la formule générale obtenue plus haut, on obtient

$$\begin{aligned} \cosh d(1, 2) &= \cosh 2c((\cosh 2c)^2 - 1) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{q}\right) \left(1 - \cos \frac{4\pi}{q}\right) \\ &\quad - ((\cosh 2c)^2 - 1) \sin \frac{2\pi}{q} \sin \frac{4\pi}{q} + \cosh 2c \\ &= \frac{(2X^2 + Y^2 - 1)4X^2(X^2 + Y^2 - 1)(2 - 2Y^2)8Y^2(1 - Y^2)}{(1 - Y^2)^3} \\ &\quad - \frac{4X^2(X^2 + Y^2 - 1)8Y^2(1 - Y^2)(2Y^2 - 1)}{(1 - Y^2)^2} + \frac{2X^2 + Y^2 - 1}{1 - Y^2} \\ &= \frac{32(X^2 + Y^2 - 1)X^2Y^2(4X^2 - 1) + 2X^2 + Y^2 - 1}{1 - Y^2}. \end{aligned}$$

C'est ce que l'on voulait. On laisse au lecteur le soin de détailler les autres cas.

Calcul de $d(1, q - 1)$.

De la même manière que ci-dessus, on note s_0, x, y, s les sommets consécutifs du pavage associés au chemin de longueur combinatoire 3 reliant s_0 à $s = s(1, q - 1)$. On a

$$\begin{aligned} \cosh d(s_0, s) &= \cosh 2c \cosh d(s_0, y) \\ &\quad - \sinh 2c \sinh d(s_0, y) \cos \left(\frac{2\pi}{q} + \angle(yx, ys_0) \right) \\ &= \cosh 2c \cosh d(s_0, y) \\ &\quad - \sinh 2c \sinh d(s_0, y) \cos \frac{2\pi}{q} \cos \angle(yx, ys_0) \\ &\quad + \sinh 2c \sinh d(s_0, y) \sin \frac{2\pi}{q} \sin \angle(yx, ys_0) \end{aligned}$$

le calcul est essentiellement identique à celui fait dans le cas où les angles étaient inférieurs à π . On trouve alors le résultat annoncé.

□

Avant, de poursuivre, signalons qu'il existe une méthode plus rapide pour calculer $d(1, 1)$.

En désignant par O le centre du polygone du pavage \mathcal{P} admettant s_0 et s parmi ses sommets, et en appelant b la distance hyperbolique de O à une arête quelconque de ce polygone, on a

$$\cosh b = \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\sin \frac{\pi}{p}}$$

et

$$\cosh d(s_0, s(1, 1)) = (\sinh b)^2 \left(1 - \cos \frac{6\pi}{p} \right) + 1.$$

4.2. Recherche des longueurs les plus courtes

On va maintenant utiliser le calcul de $\rho(3)$ pour appliquer la proposition 2.3 et décrire les distances de translation du spectre des longueurs de $\Gamma(2, p, q)$ qui se trouvent être inférieures à une certaine valeur l_0 . Cette longueur l_0 étant différente suivant les valeurs de p , nous exposons les résultats de cette partie en fonction du paramètre p .

4.2.1. Le cas où $p = 4, 5$ ou $p \geq 11$

Supposons dans ce paragraphe que $p \in \{4, 5\}$ ou bien $p \geq 11$.

On montre que les éléments hyperboliques γ de $\Gamma(2, p, q)$ qui sont de longueur inférieure ou égale à $l_0 = l_2(1, q - 1)$ ont un niveau $\lambda(\gamma)$ nécessairement inférieur ou égal à 2.

Nous allons pour cela mettre en pratique la proposition 2.3 : il suffit de prouver que

$$\rho(3) > C(l_2(1, q - 1)).$$

C'est l'objet de la

PROPOSITION 4.5. — *Si $p \in \{4, 5\}$ ou $p \geq 11$, tout élément hyperbolique γ de $\Gamma(2, p, q)$ tel que $\lambda(\gamma) \geq 3$ a une distance de translation strictement supérieure à $l_2(1, q - 1)$.*

Preuve de la proposition 4.5. — Examinons ce qui se passe pour les différentes valeurs de p .

Le cas $p = 4$.

Si $p = 4$ on sait par la proposition 4.3 que $\rho(3) = d(2, 1)$ et il suffit d'établir que

$$\cosh d(2, 1) > (\cosh c)^2(\cosh l_2(1, q - 1) - 1) + 1$$

Le terme de gauche a été calculé à la proposition 4.4. Le terme de droite est donné par

$$\begin{aligned} & (\cosh c)^2(\cosh l_2(1, q - 1) - 1) + 1 \\ &= 2((D_2(1, q - 1))^2 - 1) \frac{X^2}{1 - Y^2} + 1 \\ &= \frac{2X^2((2X^2 + 2Y^2 - 1)^2 - 1) + 1 - Y^2}{1 - Y^2} \\ &= \frac{2X^2(2X^2 + 2Y^2 - 2)(2X^2 + 2Y^2 - 1 + 1) + 1 - Y^2}{1 - Y^2} \\ &= \frac{8X^2(X^2 + Y^2 - 1)(X^2 + Y^2) + 1 - Y^2}{1 - Y^2}. \end{aligned}$$

Ce qui mène à l'étude de la fonction

$$\begin{aligned} h(X, Y) &= \frac{2(X^2 + Y^2 - 1) [4X^2(16X^2Y^2 - 5Y^2 - X^2) + 1]}{1 - Y^2} \\ &= \frac{g(X, Y)}{1 - Y^2} \end{aligned}$$

et l'on conclut en remarquant que $g(\sqrt{2}/2, Y)$ est strictement positive sur $[\cos \pi/5, 1[$.

En effet, on observe que

$$4X^2(16X^2Y^2 - 5Y^2 - X^2) + 1 = 6Y^2 > 0$$

ce qui termine la preuve dans le cas $p = 4$.

Le cas $p = 5$.

Cette fois ci, $\rho(3) = d(1, q - 1)$ et il s'agit de montrer que

$$\cosh d(1, q - 1) > (\cosh c)^2(\cosh l_2(1, q - 1) - 1) + 1$$

On constate pour cela que la fonction

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= (2X^2 + Y^2 - 1)(16X^2(X^2 + Y^2 - 1) + 1) \\ &\quad - 8X^2(X^2 + Y^2 - 1)(X^2 + Y^2) - 1 + Y^2 \end{aligned}$$

est strictement positive pour $X = \cos \pi/5$ sur $[\cos \frac{\pi}{5}, 1[$ ce qui termine le cas $p = 5$.

Le cas $p \geq 11$.

On a $\rho(3) = d(1, 1)$. Il suffit de montrer

$$\cosh d(1, 1) > (\cosh c)^2 (\cosh l_2(1, q - 1) - 1) + 1$$

qui est une conséquence du fait que la fonction

$$\begin{aligned} g(X, Y) &= (X^2 + Y^2 - 1) [16 X^2(2X^2 - 1) - 8 X^2(X^2 + Y^2) + 2] \\ &= (X^2 + Y^2 - 1) h(X, Y) \end{aligned}$$

soit strictement positive sur $[\cos \frac{\pi}{11}, 1]^2$ en remarquant que sur ce produit,

$$h(X, Y) > h(X, 1) = 24 X^4 - 24 X^2 + 2 > 0.$$

Ceci termine la preuve de la proposition 4.5.

□

On a donc déterminé toutes les valeurs du spectre des longueurs des groupes $\Gamma(2, 4, q)$, $\Gamma(2, 5, q)$ et $\Gamma(2, p, q)$, $p \geq 11$ qui sont inférieures à $l_2(1, q-1)$.

4.2.2. Le cas $p = 3$

On étudie ici les groupes $\Gamma(2, 3, q)$ avec $q \geq 7$. Là encore, il s'agit de mettre en pratique la propriété 2.3, mais cette fois-ci avec $l_0 = l_1(4)$.

On montre la proposition suivante

PROPOSITION 4.6. — *Si $p = 3$, alors tout élément hyperbolique γ de $\Gamma(2, 3, q)$ tel que $\lambda(\gamma) \geq 3$ a une distance de translation strictement supérieure à $l_1(4)$.*

Preuve de la proposition 4.6. — Soit s un sommet du pavage \mathcal{P} . Il suffit de démontrer que

$$\cosh \rho(3) > (\cosh c)^2 (\cosh l_1(4) - 1) + 1.$$

On rappelle pour cela que $\rho(3) = d(2, 2)$, quantité dont on dispose déjà d'une formule à la proposition 4.4. Un calcul établit en outre

$$(\cosh c)^2 (\cosh l_1(4) - 1) + 1 = \frac{Y^2 [2(2Y^2 - 1)^2 - 1] + \frac{1}{2}}{1 - Y^2}.$$

On conclut en considérant la différence et en constatant

$$g(Y) = 24Y^6 - 32Y^4 + 12Y^2 - 1$$

est strictement positive sur $[\cos \frac{\pi}{7}, 1]$, ce qu'une étude élémentaire confirme.

□

On a donc déterminé toutes les distances de translation inférieures à $l_1(4)$ se trouvant dans le spectre des longueurs des groupes $\Gamma(2, 3, q)$.

4.2.3. Le cas $6 \leq p \leq 10$

On suppose $6 \leq p \leq 10$ et on montre la propriété suivante, en appliquant encore une fois la proposition 2.3 dans ce cas précis avec $l_0 = l_1(2)$.

PROPOSITION 4.7. — *Soit $6 \leq p \leq 10$. Alors tout élément hyperbolique γ de $\Gamma(2, p, q)$ vérifiant $\lambda(\gamma) \geq 3$ a une distance de translation strictement supérieure à $l_1(2)$.*

Preuve de la proposition 4.7. — On montre que pour les valeurs de p indiquées,

$$\cosh \rho(3) > (\cosh c)^2 (\cosh l_1(2) - 1) + 1.$$

Rappelons que $\rho(3) = d(1, 1)$ a déjà été calculé à la propriété 4.4. On établit de plus que

$$(\cosh c)^2 (\cosh l_1(2) - 1) + 1 = \frac{2X^2(4X^2Y^2 - 1) + (1 - Y^2)}{1 - Y^2}.$$

Et nous sommes amené à étudier le signe de la fonction

$$g(X, Y) = 16X^2(2X^2 - 1)(X^2 + Y^2 - 1) + 2X^2 + 2Y^2 - 2 - 2X^2(4X^2Y^2 - 1)$$

qui s'avère être strictement positif pour $X \in [\sqrt{3}/2, 1[$ et $Y \in [X, 1[$.

En effet,

$$g(X, Y) \geq 16X^2(2X^2 - 1)^2 + 4X^2 - 2 - 2X^2(4X^2 - 1) > 0$$

sur le domaine de définition étudié. □

La preuve montre que le résultat de la proposition 4.7 est en fait valable pour $p \geq 6$.

On a donc décrit toutes les distances de translation inférieures à $l_1(2)$ pour les groupes $\Gamma(2, p, q)$ qui manquaient à l'appel.

5. Rigidité spectrale

Dans cette partie, nous décrivons les premières valeurs du spectre des longueurs des groupes $\Gamma(2, p, q)$ dans le théorème 5.1. Nous en déduisons en particulier une formule explicite de la systole dans le corollaire 5.2 avant d'utiliser ces formules pour démontrer la rigidité spectrale de ces objets. On commence par établir cette rigidité pour les groupes vérifiant $p \geq 11$ avant de généraliser.

5.1. Description du début du spectre

Nous pouvons désormais énoncer le théorème central de l'étude.

THÉORÈME 5.1. — Soit $\Gamma(2, p, q)$ avec p et q deux entiers vérifiant $p \leq q$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$. Alors le début du spectre des longueurs est donné par les formules suivantes :

- $\text{Lsp } \Gamma(2, 3, 7) = \{l_2(1, q - 1) = \dots\}$
- $\text{Lsp } \Gamma(2, 3, q) = \{l_2(1, q - 1) = \dots < l_1(4) \dots\}$ pour tout $q \geq 8$
- $\text{Lsp } \Gamma(2, 4, 5) = \{l_1(2) = \dots < l_2(1, q - 1) \dots\}$
- $\text{Lsp } \Gamma(2, 4, q) = \{l_1(2) = \dots < l_1(3) = \dots < l_2(1, q - 1) \dots\}$ pour $q = 6, 7$
- $\text{Lsp } \Gamma(2, 4, q) = \{l_1(2) = \dots < l_2(1, q - 1) \dots\}$ pour tout $q \geq 8$
- $\text{Lsp } \Gamma(2, 5, 5) = \{l_1(2) = \dots < l_2(1, q - 1) \dots\}$
- $\text{Lsp } \Gamma(2, 5, q) = \{l_1(2) = \dots < l_2(1, 2) \dots\}$ pour tout $q \geq 6$
- $\text{Lsp } \Gamma(2, p, q) = \{l_1(2) = \dots\}$ pour tout $p \in \{6, 7, 8, 9, 10\}$
- $\text{Lsp } \Gamma(2, p, q) = \{l_1(2) = \dots < l_2(1, 2) \dots\}$ pour tout $p \geq 11$

avec

$$l_2(1, q - 1) = 2 \operatorname{Argch} \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 + 2 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 - 1 \right]$$

$$l_2(1, 2) = 2 \operatorname{Argch} \left[\cos \frac{\pi}{q} \left[4 \left(\cos \frac{\pi}{p} \right)^2 - 1 \right] \right]$$

$$l_1(2) = 2 \operatorname{Argch} \left[2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} \right]$$

$$l_1(3) = 2 \operatorname{Argch} \left[\cos \frac{\pi}{p} \left[4 \left(\cos \frac{\pi}{q} \right)^2 - 1 \right] \right]$$

Preuve du théorème 5.1. — Nous devons ranger dans l'ordre croissant les valeurs trouvées dans les propositions 3.1 et 3.3.

Le cas $p = 3$.

En utilisant les formules données, on établit que

$$1 < D_1(3) = D_2(1, q - 1) \leq D_1(4) = D_2(1, 6)$$

avec égalité si et seulement si $q = 7$.

Le cas $p = 4$.

Cette fois ci, on doit différencier deux cas.

Si $q = 5, 6, 7$, on a

$$D_2(1, 2) < 1 < D_1(2) \leq D_1(3) < D_2(1, q - 1)$$

avec égalité si et seulement si $q = 5$.

Si par contre $q \geq 8$, on constate que

$$D_2(1, 2) < 1 < D_1(2) < D_2(1, q - 1) < D_1(3)$$

ce qui achève la preuve dans ce cas.

Le cas $p \geq 5$.

On constate ici que

$$1 < D_1(2) \leq D_2(1, 2) \leq D_1(3)$$

avec égalité si et seulement si $q = 5$. Toujours si $p = q = 5$, on constate enfin que

$$D_1(3) < D_2(1, q - 1)$$

ce qui achève la preuve.

□

En particulier, on obtient le

COROLLAIRE 5.2. — *La systole de $\Gamma(2, p, q)$ est déterminée par l'alternative suivante :*

- (1) Si $p \geq 4$, il s'agit de $2 \operatorname{Argcosh}\left[2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q}\right]$
- (2) Si $p = 3$, il s'agit de $2 \operatorname{Argcosh}\left[2\left(\cos \frac{\pi}{q}\right)^2 - \frac{1}{2}\right]$.

5.2. Interprétation géométrique

Sachant que les classes de conjugaison des éléments hyperboliques de distance de translation l_0 de $\Gamma(2, p, q)$ donnent naissance aux géodésiques fermées de longueur l_0 de la surface à points coniques $\mathbf{H}/\Gamma(2, p, q)$, il est naturel de chercher à représenter les géodésiques obtenues ci-dessus, et notamment la systole.

Autrement dit, on cherche quelle est la forme géométrique des géodésiques les plus courtes sur les surfaces à points coniques considérées.

Rappelons que ces quotients sont de genre 0 et admettent trois points coniques non équivalents qui correspondent aux trois classes de conjugaison d'éléments elliptiques présents dans $\Gamma(2, p, q)$.

Les figures jointes présentent les systoles des différents groupes considérés. On pourra faire un dessin local du pavage pour s'en convaincre.

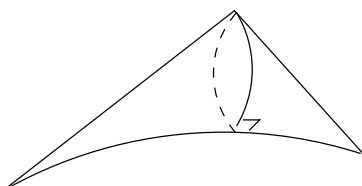


FIG. 5.1. $l_2(1, q - 1)$ pour $p \geq 3$.

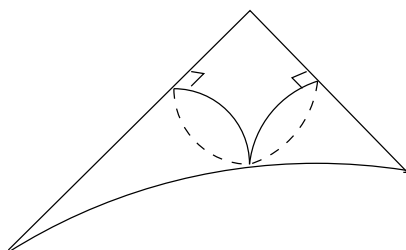


FIG. 5.2. $l_1(2)$ pour $p \geq 4$

5.3. Rigidité dans le cas $p \geq 11$

Dans cette partie, on montre que si $\Gamma(2, p, q)$ et $\Gamma(2, p', q')$ vérifient $p \geq 11$ et $p' \geq 11$ et ont le même spectre des longueurs, alors ils sont isométriques.

PROPOSITION 5.3. — Si $\Gamma(2, p, q)$ et $\Gamma(2, p', q')$ sont deux groupes de triangles ayant le même spectre des longueurs et vérifiant $p \geq 11$ et $p' \geq 11$, alors $p = p'$ et $q = q'$.

Preuve de la proposition 5.3. — On rappelle que le début du spectre est alors donné par

$$\text{Lsp } \Gamma(2, p, q) = \{l_1(2) = \dots < l_2(1, 2) \dots\}$$

et que l'on connaît donc les longueurs $l_1(2)$ et $l_2(1, 2)$ si le spectre est donné.

Notons l_1, l_2 les deux premières valeurs distinctes du spectre et déterminons

$$L_i = \cosh \frac{l_i}{2}; \quad i = 1, 2.$$

Il suffit d'établir que le système

$$\begin{cases} 2XY & = L_1 \\ Y(4X^2 - 1) & = L_2 \end{cases}$$

admet un unique couple de solution (X, Y) dans $[0, 1]^2$. Cela revient à montrer que le polynôme

$$P(u) = 4L_1u^2 - 2L_2u - L_1$$

a une unique racine dans $[0, 1]$: cette racine est alors X . Le polynôme P admettant toujours deux racines réelles de signes opposés, il en existe une seule dans l'intervalle considéré. Ceci achève la preuve, modulo le changement de variable $X = \cos(\pi/p)$ et $Y = \cos(\pi/q)$. \square

5.4. Le cas général

Avant d'entamer la preuve du théorème central, commençons par énoncer et démontrer le résultat suivant :

LEMME 5.4. — *Un groupe $\Gamma(2, p', q')$ avec $p' \leq 8$ ne peut pas avoir le même spectre des longueurs qu'un groupe $\Gamma(2, p, q)$ avec $p \geq 9$.*

Un groupe $\Gamma(2, 3, q)$ ne peut pas avoir le même spectre des longueurs qu'un groupe $\Gamma(2, p', q')$ avec $p' > 5$.

Preuve du lemme 5.4. — Commençons par montrer la première assertion.

Traitons d'abord le cas $p' \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Dans le cas d'isospectralité, on aurait égalité des systoles et donc

$$\cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{p'} < \cos \frac{\pi}{8} ; p \geq 9.$$

Ceci impose

$$\left(\cos \frac{\pi}{p}\right)^2 < \cos \frac{\pi}{8}$$

donc $p \leq 11$. On a de plus $q \leq 17$ en résolvant

$$\cos \frac{\pi}{8} > \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} \geq \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{q}.$$

Il s'agit donc de trouver $4 \leq p' \leq 8$; $q' \geq p'$ tels que

$$\cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} = \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} ; 9 \leq p \leq 11 ; p \leq q \leq 17.$$

En examinant séparément les cas où $p' \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ on constate qu'un tel q' n'existe pas.

Montrons maintenant que $\Gamma(2, p, q)$ ne peut être isospectral à un groupe $\Gamma(2, 3, q')$. Pour cela, il suffit de constater que ces groupes ne peuvent pas avoir la même systole car on aurait

$$\frac{3}{2} > 2\left(\cos \frac{\pi}{q'}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q}$$

ce qui montre que $p \leq 5$. La deuxième assertion est une conséquence de ce qui vient d'être dit : la systole d'un groupe $\Gamma(2, 3, q)$ est nécessairement inférieure à $3/2$ ce qui est impossible dès que p est supérieur à 6. \square

On se propose d'établir maintenant le résultat principal de cet article.

THÉORÈME 5.5. — *Soit $\Gamma(2, p, q)$ et $\Gamma(2, p', q')$ deux groupes de triangles ayant le même spectre des longueurs. Alors ces deux groupes sont isométriques.*

Preuve du théorème 5.5. — Fixons nous un groupe $\Gamma(2, p, q)$ et montrons qu'il ne peut pas être isospectral à un groupe $\Gamma(2, p', q')$ avec $p \neq p'$ ou bien $q \neq q'$.

Le cas $p = 10$.

On écarte les cas où $p' \leq 8$ en utilisant le lemme 5.4 . Le cas $p' = 9$ s'exclut par symétrie en considérant les calculs faits pour $p = 9$. Enfin, il n'est pas envisageable de trouver un groupe $\Gamma(2, 10, q)$ isospectral à un groupe $\Gamma(2, p', q')$ avec $p' \geq 11$ car cela imposerait, par égalité des systoles,

$$\cos \frac{\pi}{10} > \cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} \geq \left(\cos \frac{\pi}{p'} \right)^2$$

donc $p' \leq 14$, et

$$\cos \frac{\pi}{10} > \cos \frac{\pi}{11} \cos \frac{\pi}{q'}$$

ce qui impose $q' \leq 23$. On aurait alors un entier $q \geq 10$ tel que

$$\cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{q} \in \left\{ \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} ; 11 \leq p' \leq 14 ; p' \leq q' \leq 23 \right\}$$

ce qui est impossible.

Le cas $p = 9$.

On écarte les cas où $p' \leq 8$ par le lemme 5.4. Le cas $p' = 9$ est trivial. Montrons qu'un groupe $\Gamma(2, 9, q)$ ne peut pas avoir le même spectre des longueurs qu'un groupe $\Gamma(2, p', q')$ avec $p' \geq 10$.

L'égalité des systoles impliquerait en effet

$$\left(\cos \frac{\pi}{p'} \right)^2 \leq \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{q} < \cos \frac{\pi}{9}$$

donc $p' \leq 12$. De même, on aurait

$$\cos \frac{\pi}{9} > \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} \geq \cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{q'}$$

ce qui impose $q' \leq 20$. Il s'agit donc de trouver $q \geq 9$ tel que

$$\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{q} \in \left\{ \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} ; 10 \leq p' \leq 12 ; p' \leq q' \leq 20 \right\}$$

ce qui s'avère impossible.

Le cas $p = 8$.

Supposons $\Gamma(2, 8, q)$ et $\Gamma(2, p', q')$ isospectraux. On a nécessairement $p' \leq 8$ et $p' \neq 3$ par le lemme 5.4. Si $p' = 8$, cela impose évidemment $q' = q$. Examinons le cas $p' \in \{4, 5, 6, 7\}$. L'égalité des systoles se traduit par

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} < \cos \frac{\pi}{7}$$

ce qui impose $q \leq 14$. Il s'agit donc de trouver q' entier tel que

$$\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} ; 4 \leq p' \leq 7 ; 8 \leq q \leq 14.$$

Les calculs montrent qu'un tel q' n'existe pas.

Le cas $p = 7$.

Supposons $\Gamma(2, 7, q)$ et $\Gamma(2, p', q')$ isospectraux. On a nécessairement $p' \leq 8$ par le lemme 5.4. Le cas $p' = 8$ s'écarte par symétrie (cf. le cas $p = 8$). Si $p' = 7$, cela impose $q' = q$. Examinons le cas $p' \in \{4, 5, 6\}$. L'égalité des systoles se traduit par

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} < \cos \frac{\pi}{6}$$

ce qui impose $q \leq 11$. Il s'agit donc de trouver q' entier tel que

$$\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} ; 4 \leq p' \leq 6 ; 7 \leq q \leq 11.$$

Là encore, un tel q' n'existe pas.

Le cas $p = 6$.

Supposons $\Gamma(2, 6, q)$ et $\Gamma(2, p', q')$ isospectraux. On a là encore $p' \leq 8$ en vertu du lemme 5.4. Les cas où $p' \in \{7, 8\}$ s'excluent par symétrie (cf. les cas où $p \in \{7, 8\}$) et le cas $p' = 6$ impose $q' = q$. Examinons les cas où $p' \in \{4, 5\}$. L'égalité des systoles se traduit toujours par

$$\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} < \cos \frac{\pi}{5}$$

ce qui impose $q \leq 8$. Il s'agit donc de trouver q' entier tel que

$$\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{p'} \cos \frac{\pi}{q'} ; 4 \leq p' \leq 5 ; 6 \leq q \leq 8.$$

Les calculs montrent l'inexistence d'un tel q' .

Le cas $p = 5$.

Supposons $\Gamma(2, 5, q)$ et $\Gamma(2, p', q')$ isospectraux. On a nécessairement $p' \leq 8$ par application du lemme 5.4. On exclut les cas où $p' \in \{6, 7, 8\}$ par symétrie. Si $p' = 5$, cela impose $q' = q$. Examinons le cas $p' = 4$. L'égalité des systoles s'écrit

$$\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{q'} < \cos \frac{\pi}{4}$$

ce qui impose $q \leq 6$. Il s'agit de trouver q' entier tel que

$$\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{q} = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{q'} ; 5 \leq q \leq 6$$

ce qui est là encore impossible. Reste le cas $p' = 3$. Pour celui-ci, on doit trouver q et q' tels que

$$2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{q} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{q'} \right)^2 - \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$$

et cela impose $q \leq 8$. On doit résoudre

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{q'} \right)^2 - \frac{1}{2} \in \left\{ 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{q} ; q = 5, 6, 7, 8 \right\}$$

ce qui n'est possible que pour $q' = 10$ quand $q = 5$.

Les groupes $\Gamma(2, 5, 5)$ et $\Gamma(2, 3, 10)$ ont donc les mêmes systoles. Ils ne sont cependant pas isospectraux, car la seconde longueur du spectre est différente.

Le cas $p = 4$.

Supposons $\Gamma(2, 4, q)$ et $\Gamma(2, p', q')$ isospectraux. Le lemme 5.4 montre que l'on a nécessairement $p' \leq 8$. On peut écarter les cas où $p' \in \{5, 6, 7, 8\}$ par symétrie en se référant aux calculs effectués dans les cas où $p \in \{5, 6, 7, 8\}$ qui figurent plus bas dans ce paragraphe. Si $p' = 4$, cela implique $q' = q$. Examinons donc le cas $p' = 3$, où l'égalité des systoles se traduit par

$$\sqrt{2} > 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{q} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{q'} \right)^2 - \frac{1}{2}$$

qui impose $q' \leq 15$. Reste à résoudre

$$\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{q} \in \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi}{q'} \right)^2 - \frac{1}{2} ; q' = 7, 8, \dots, 15 \right\}$$

ce qui n'est possible que pour $q' = 12$ quand $q = 12$. Les groupes $\Gamma(2, 4, 12)$ et $\Gamma(2, 3, 12)$ ont donc les mêmes systoles. Ils ne sont cependant pas isospectraux, ce qui se constate là encore en considérant la seconde longueur du spectre.

Le cas $p = 3$.

Le lemme 5.4 montre que $\Gamma(2, 3, q)$ ne peut pas être isospectral à $\Gamma(2, p', q')$ avec $p' \geq 6$. Les cas $p' = 4$ et $p' = 5$ s'avèrent impossibles également (cf. les calculs effectués pour les cas $p = 4$ et $p = 5$). Enfin, $p' = 3$ impose clairement $q' = q$.

Le cas $p \geq 11$.

Le cas $p' \geq 11$ est exclu par la proposition 5.3. Les cas où $p' \leq 8$ sont impossibles cette fois ci en invoquant le lemme 5.4. Reste les cas où $p' \in \{9, 10\}$ qui doivent être écartés par symétrie (on renvoie aux calculs effectués dans les cas $p \in \{9, 10\}$).

Ceci achève la preuve du théorème 5.5. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. F. BEARDON, *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer-Verlag, New York, 1995, Corrected reprint of the 1983 original, xii+337 pages.
- [2] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194, Springer-Verlag, Berlin, 1971, vii+251 pages.
- [3] P. BUSER & K.-D. SEMMLER, « The geometry and spectrum of the one-holed torus », *Comment. Math. Helv.* **63** (1988), n° 2, p. 259-274.
- [4] P. BUSER, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Progress in Mathematics, vol. 106, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992, xiv+454 pages.
- [5] E. DRYDEN & A. STROHMAIER, « Huber's theorem for hyperbolic orbisurfaces », *Canadian Mathematical Bulletin*, to appear, www.arXiv.org/abs/math/0504571.
- [6] A. HAAS, « Length spectra as moduli for hyperbolic surfaces », *Duke Math. J.* **52** (1985), n° 4, p. 923-934.
- [7] U. HAMENSTÄDT & R. KOCH, « Systoles of a family of triangle surfaces », *Experiment. Math.* **11** (2002), n° 2, p. 249-270.
- [8] R. LEHMAN & C. WHITE, « Hyperbolic billiards path ».
- [9] R. VOGELER, « On the geometry of Hurwitz surfaces », Thèse, Univ. Florida, 2003.
- [10] S. WOLPERT, « The length spectra as moduli for compact Riemann surfaces », *Ann. of Math. (2)* **109** (1979), n° 2, p. 323-351.

Manuscrit reçu le 8 octobre 2007,
accepté le 28 février 2008.

Emmanuel PHILIPPE
Université Paul Sabatier
Laboratoire Emile Picard
31062 Toulouse Cedex 9 (France)
matahari@netcourrier.com