ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Philippe BLANC & Patrick DELORME

Vecteurs distributions H-invariants de représentations induites, pour un espace symétrique réductif p-adique G/H.

Tome 58, nº 1 (2008), p. 213-261.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_1_213_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
58, 1 (2008) 213-261

VECTEURS DISTRIBUTIONS H-INVARIANTS DE REPRÉSENTATIONS INDUITES, POUR UN ESPACE SYMÉTRIQUE RÉDUCTIF p-ADIQUE G/H.

par Philippe BLANC & Patrick DELORME

dédié à Alain Guichardet

RÉSUMÉ. — Soit G le groupe des points sur $\mathbb{F}$ d'un groupe réductif linéaire défini sur $\mathbb{F}$, un corps local non archimédien de caractéristique 0. Soit σ une involution rationnelle de ce groupe algébrique définie sur $\mathbb{F}$ et soit H le groupe des points sur $\mathbb{F}$ d'un sous-groupe ouvert, défini sur $\mathbb{F}$, du groupe des points fixes de σ. Nous construisons des familles de vecteurs H-invariants dans le dual de séries principales généralisées, en utilisant l'homologie des groupes. Des résultats de A.G.Helminck, S.P.Wang et A.G.Helminck, G.F.Helminck sur la structure des espaces symétriques réductifs p-adiques sont aussi essentiels.

ABSTRACT. — Let G be the group of $\mathbb{F}$-points of a linear reductive group defined over $\mathbb{F}$, a non archimedean local field of characteristic zero. Let σ be a rational involution of this group defined over $\mathbb{F}$ and let H be the group of $\mathbb{F}$-points of an open subgroup, defined over $\mathbb{F}$, of the group of fixed points by σ. We built rational families of H-fixed vectors in the dual of generalized principal series, using homology of groups. Results of A.G.Helminck, S.P.Wang and A.G.Helminck, G.F.Helminck on the structure of p-adic reductive symmetric spaces are also essential.

Introduction

Soit G le groupe des points sur $\mathbb{F}$ d'un groupe linéaire algébrique réductif $\underline{G}$, défini sur $\mathbb{F}$, un corps local non archimédien de caractéristique 0. Soit σ une involution de ce groupe algébrique $\underline{G}$, définie sur $\mathbb{F}$, H le groupe des points sur $\mathbb{F}$ d'un sous-groupe ouvert, défini sur $\mathbb{F}$, du groupe des points fixes de σ. Cet article est destiné à débuter l'analyse harmonique sur l'espace

Mots-clés : symmetric spaces, reductive p-adic groups, distribution vectors, induced representations.
Classification math. : 22E35.

symétrique réductif G/H, en analogie avec celle sur les espaces symétriques réels (cf. [10] pour un survey sur ce sujet).

La premère étape que nous franchissons ici est la construction de familles de formes linéaires H-invariantes sur des séries principales généralisées. Cette étape a été franchie dans le cas réel dans [6], à l'aide de la théorie des D-modules.

L'outil principal est ici l'homologie lisse (voir plus bas).

Notre construction se limite à celle de sous-groupes paraboliques particuliers dits σ-sous-groupes paraboliques. C'est l'expérience du cas réel qui conduit à cette restriction : dans ce cas, ces familles de représentations suffisent à décrire la partie continue de la formule de Plancherel pour l'espace symétrique. Un travail à paraître de Nathalie Lagier précise le rôle joué par les σ-sous-groupes paraboliques dans l'étude des représentations admissibles de G qui sont H-sphériques i.e. qui possèdent une forme linéaire non nulle H-invariante. On notera, pour se fixer les idées, que si G n'admet pas de σ-sous-groupe parabolique différent de G alors toutes les composantes isotropes de G sont contenues dans H ([13], Lemme 4.5).

Il faut remarquer que notre approche est différente de celle de [14], [15], [19] qui déterminent, pour certains cas, toutes les représentations irréductibles ayant un vecteur non nul invariant par un bon sous-groupe compact maximal et une forme linéaire non nulle H-invariante, et obtiennent une formule de Plancherel, ou bien de l'approche de [20] qui cherchent toutes les représentations unitaires irréductibles de GL_{2n}, ayant une forme linéaire non nulle invariante sous le groupe symplectique. Dans [19] notamment les fonctions sphériques sont explicitées à l'aide de polynômes de Macdonald, alors que dans [20], on utilise des théorèmes sur les périodes des formes automorphes. En particulier, nous ne cherchons pas à expliciter complètement les zéros et les pôles des familles construites.

On note $RatG$ le groupe des caractères rationnels de G définis sur $\mathbb{F}$ et $\mathfrak{a}_G = Hom_{\mathbb{Z}}(RatG, \mathbb{R})$ et on note $H_G : G \to \mathfrak{a}_G$, l'application qui, à $g \in G$, associe l'application $\chi \mapsto |\chi(g)|_{\mathbb{F}}$. Alors $\mathfrak{a}_G^* = RatG \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on dispose d'une application surjective de $(\mathfrak{a}_G^*)_{\mathbb{C}}$ dans l'ensemble $X(G)$ des caractères non ramifiés de G, qui à $\chi \otimes s$ associe le caractère $g \longmapsto |\chi(g)|_{\mathbb{F}}^s$.

L'involution σ agit sur $\mathfrak{a}_G$ et $\mathfrak{a}_G^*$. On note $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$ (resp. $\mathfrak{a}_G^\sigma$) l'ensemble des éléments de $\mathfrak{a}_G$ antiinvariants (resp. invariants) par σ. Alors $\mathfrak{a}_G = \mathfrak{a}_{G,\sigma} \oplus \mathfrak{a}_G^\sigma$ et $\mathfrak{a}_{G,\sigma}^*$ s'identifie à un sous-espace de $\mathfrak{a}_G^*$. On note $X(G)_\sigma$ l'image de $(\mathfrak{a}_{G,\sigma}^*)_{\mathbb{C}}$ par l'application précédente. Elle possède une structure de variété algébrique comme quotient d'un espace vectoriel par un réseau.

On introduit des notations similaires pour les sous-groupes de Lévi σ-stables de G. On considère un sous-groupe parabolique P de G tel que $\sigma(P)$ soit égal à l'opposé de P relativement à un tore déployé maximal, A_0, contenu dans P et σ-stable. On dit que P est un σ-sous-groupe parabolique. On note M le sous-groupe de Lévi σ-stable de P, qui est égal à $P \cap \sigma(P)$, et U son radical unipotent. On note A un tore déployé du centre de M, maximal pour la propriété d'être contenu dans $\{x \in G | \sigma(x) = x^{-1}\}$.

Alors $\mathfrak{a}^*_{M,\sigma}$ s'identifie à $\mathfrak{a}^* = RatA \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On note $X = X(M)_\sigma$ et B l'algèbre des fonctions régulières sur X.

Soit (δ, V_δ) une représentation lisse de M irréductible, ou simplement admissible de type fini, qu'on prolonge à P en la prenant triviale sur U. On introduit pour $\chi \in X$, la représentation $\delta_\chi = \delta \otimes \chi$ de M. On définit également une structure de (M, B)-module sur $V_\delta \otimes B$ en faisant agir B par multiplication sur le deuxième facteur et $m \in M$ par le produit tensoriel de $\delta(m)$ avec la multiplication par l'élément b_m de B défini par : $b_m(\chi) = \chi(m),\ \chi \in X$.

Soit encore :

$$\delta_B(m)(v \otimes b) = (\delta(m)v) \otimes b_m b$$

On étend l'action de M à P en la prenant triviale sur U. On notera $\delta_\bullet$ à la place de δ_χ ou bien δ_B.

On considère $ind_P^G V_{\delta_\bullet}$ l'ensemble des $\varphi : G \to V_{\delta_\bullet}$ qui sont invariantes à gauche par un sous-groupe compact ouvert et telles que

$$\varphi(gmu) = \delta_\bullet(m^{-1})\varphi(g),\ \ g \in G, m \in M, u \in U$$

On le note aussi $I_\bullet$. Le groupe G agit sur $I_\bullet$ par la représentation régulière gauche. De plus B agit naturellement sur I_B.

L'objet de cet article est de déterminer les familles de vecteurs H-invariants dans le dual de I_χ dépendant, en un certain sens (voir plus bas), de façon polynomiale de χ.

Une remarque fondamentale pour notre travail est le fait que si V est un module lisse, l'espace des éléments H-invariants du dual de V, V^{*H}, est égal à $H_0(H, V)^*$, où $H_0(H, V)$ est le quotient de V par le sous-espace engendré par les vecteurs $gv - v$ où g décrit H et v décrit V.

Dans la première partie de l'article, on étudie les foncteurs d'homologie lisse en degré supérieur. On les introduit grâce aux résolutions projectives dans la catégorie des modules lisses. Une série de propriétés sont brièvement établies (voir aussi [3], [9] et aussi [5], [11] pour la cohomologie continue) notamment le lemme de Shapiro, une utilisation des sous-groupes distingués fermés qui sont union de sous-groupes compacts, la résolution standard, le complexe de chaines inhomogènes. On établit qu'une action naturelle du centre de G sur le complexe des chaines inhomogènes induit une action triviale sur l'homologie.

Tous ces résultats sont utilisés dans la preuve du Théorème principal.

Hypothèse simplificatrice, pour l'introduction seulement : On suppose que HP est la seule (H,P)-double classe ouverte dans G.

THÉORÈME PRINCIPAL. —

(i) *On note* $J_\chi = \{\varphi \in I_\chi | \ \varphi$ *est à support contenu dans* $HP\}$ *qui est un sous-*H*-module lisse. Alors* $H_0(H, J_\chi)$ *est naturellement isomorphe à* $H_0(M \cap H, V_\delta)$*.*

(ii) *Il existe un polynome* $q \in B$*, non nul tel que pour tout* $\chi \in X$ *vérifiant* $q(\chi) \neq 0$*, l'injection naturelle de* J_χ *dans* I_χ *détermine un isomorphisme :*

$$H_0(H, J_\chi) \simeq H_0(H, I_\chi)$$

(iii) *Passant aux duaux dans (i) et (ii), si* $\chi \in X$ *et* $q(\chi) \neq 0$*, on dispose d'un isomorphisme :*

$$V_\delta^{*M\cap H} \to I_\chi^{*H}$$

qu'on note :

$$\eta \mapsto j(P, \delta, \chi, \eta)$$

On peut réaliser les I_χ *dans un espace fixe* I*, par restriction des fonctions de* G *à un sous-groupe compact maximal* K*. Alors le polynôme* q *peut être choisi de telle sorte que pour tout* $\eta \in V_\delta^{*M\cap H}$ *et* $\varphi \in I$*,* $\chi \mapsto q(\chi) < j(P, \delta, \chi, \eta), \varphi >$*,* $\chi \in X$*, soit un élément de* B*, i.e une fonction régulière sur* X*.*

Donnons une idée de la démonstration de ce théorème.

On commence par étudier I_χ comme H-module. D'abord il existe un nombre fini de (H,P)-doubles classes HxP et on note Ω un ensemble, qui contient e, de représentants de celles-ci. On introduit des ouverts $O_0 = HP \subset O_1 \subset ... \subset O_n = G$ de sorte que $O_{i+1} \backslash O_i = Hx_{i+1}P$ puis on note $I_i = \{\varphi \in I_\chi | supp\varphi \subset O_i\}$ de sorte que $I_0 = J_\chi$ et $\{0\} \subset I_0 \subset I_1 ... \subset I_n$. On montre (voir aussi [1], Théorème 5.2) que :

$$I_i / I_{i-1} \simeq ind_{H\cap x_i P x_i^{-1}}^H \delta_{\chi | H\cap x_i P x_i^{-1}}^{x_i}$$

pour $i = 0, ..., n$, où $\delta_\chi^{x_i}$ est la représentation de $x_i P x_i^{-1}$ dans V définie par :

$$\delta_\chi^{x_i}(x_i p x_i^{-1}) = \delta_\chi(p), p \in P$$

Ici les fonctions de l'espace de l'induite sont à support compact modulo le sous-groupe induisant et sont invariantes à gauche par un sous-groupe compact ouvert de H.

En particulier :

$$J_\chi \simeq ind_{H\cap P}^H(V_{\delta_\chi})$$

Grâce au lemme de Shapiro, $H_0(H, J_\chi) = H_0(H\cap P, V_{\delta_\chi})$. Mais $H\cap P = H\cap M$ car P est un σ-sous-groupe parabolique de G et $\chi \in X(M)_\sigma$ est trivial sur $M\cap H$. D'où le point (i) du Théorème.

Maintenant on choisit $x = x_i$ avec $i > 0$. On pose : $P' = xPx^{-1}$, $\delta' = \delta^x$, $\chi' = \chi^x$, $M' = xMx^{-1}$ etc.

On veut calculer $H_*(H, I_i/I_{i-1})$. D'après le Lemme de Shapiro, cet espace est isomorphe à $H_*(H\cap P', V_{\delta'_{\chi'}})$.

Soit $V' = (M'\cap\sigma(U'))(U'\cap\sigma(P'))$. Alors $V'\cap(M'\cap\sigma(M')) = \{e\}$ et V' est un sous-groupe unipotent distingué dans $H\cap P'$. Comme $V'\cap H$ est un sous-groupe distingué de $P'\cap H = ((M'\cap\sigma(M')\cap H)(V'\cap H)$, qui est de plus la réunion de sous-groupes compacts, les propriétés de l'homologie lisse montrent que :

$$H_*(H\cap P', V_{\delta'_{\chi'}}) = H_*(H\cap M', H_0(V'\cap H, V_{\delta'})_{\chi'})$$

Ici l'indice χ' indique, dans le second membre, la tensorisation par le caractère $\chi'_{|_{H\cap M'}}$.

On note que l'action de V' sur $V_{\delta'_{\chi'}}$ ne dépend pas de χ', car χ', étendu à P' en le prenant trivial sur U', est trivial sur V' puisque celui-ci est réunion de sous-groupes compacts ouverts.

On a $P'\cap\sigma(P') = (M'\cap\sigma(M'))V'$. Un argument qui est une adaptation au cas p-adique d'une idée de [7], montre alors que $H_0(V'\cap H, V_{\delta'}) \simeq H_0(M'\cap\sigma(U'), V_{\delta'})$. Finalement on a :

$$H_*(H, I_i/I_{i-1}) \simeq H_*(H\cap M', H_0(M'\cap\sigma(U'), V_{\delta'})_{\chi'})$$

Mais $M'\cap\sigma(U')$ est le radical unipotent du sous-groupe parabolique de M', $M'\cap\sigma(P')$, de sous-groupe de Lévi $M'\cap\sigma(M')$.

Donc $H_0(M'\cap\sigma(U'), V_{\delta'})$ est un $M'\cap\sigma(M')$-module admissible de type fini. Ceci implique qu'il existe des caractères $\chi_1, ..., \chi_p$ du centre Z' de $M'\cap\sigma(M')$ tels que pour tout $z\in Z$, $(z-\chi_1(z))...(z-\chi_p(z))$ agisse trivialement sur celui-ci. Mais on peut trouver un élément z_0 de $Z'\cap H$ tel que l'application $b_{z_0} : X' \to \mathbb{C}$, donnée par $\chi' \mapsto \chi'(z_0)$, ne soit pas constante. Alors, tenant compte du fait que l'action de z_0, qui est dans le centre de $H\cap M' = H\cap M'\cap\sigma(M')$, sur $H_*(M\cap H, H_0(M\cap\sigma(U'), V_{\delta'})_\chi)$ est triviale, on voit facilement que si $q'(\chi) = (1-\chi_1(z_0)\chi'(z_0))...(1-\chi_p(z_0)\chi'(z_0))$ est non nul, l'homologie ci-dessus est nulle, donc aussi $H_*(H, I_i/I_{i-1})$.

Un argument de longue suite exacte donne le point (ii) du Théorème, en utilisant pour q le produit des q' lorsque i varie dans $\{1, ..., n\}$.

Pour établir les propriétés de rationalité de (iii), on reprend l'étude ci-dessus en remplacant δ_χ par δ_B.

Les racines du plus grand tore déployé du centre de M, A_M, dans l'algèbre de Lie de P s'identifient à des éléménts de $\mathfrak{a}_M^*$, dont on note ρ_P la demi-somme comptée avec les mutiplicités.

On note $C(G, P, \delta^*, \chi)$ l'espace des fonctions ψ sur G, à valeur dans le dual V_δ^* de V_δ, telles que :

$$\text{Pour tout } v \in V_\delta,\ g \mapsto < \psi(g), v > \ \text{ est continue et :} \tag{0.1}$$
$$\psi(gmu) = e^{-2\rho_P(H_M(m))}\chi(m)\delta^*(m^{-1})\psi(g), g \in G, m \in M, u \in U$$

Le groupe G agit par représentation régulière gauche sur cet espace.

Si $\psi \in C(G, P, \delta^*, \chi)$ et $\varphi \in I_\chi$, on note $< \psi, \varphi >= \int_K < \psi(k), \varphi(k) > dk$ qui définit un crochet de dualité G-invariant sur ces espaces. Ceci permet d'identifier $C(G, P, \delta^*, \chi)$ à un sous-espace de $I_{\delta_\chi}^*$.

On introduit une application $\varepsilon(G, P, \delta, \chi, \eta) : G \to V_{\delta^*}$, caractérisée par la propriété de covariance (0.1), nulle en dehors de HP, H-invariante à gauche et valant η en e.

On introduit enfin une fonction $\| \ \|$ sur G/H et $M/M \cap H$.

Théorème. — *Soit $\eta \in V_\delta^{*M\cap H}$ et $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in V_\delta$, l'application de $M/M \cap H$ dans $\mathbb{C}$:*

$$m(M \cap H) \mapsto < \delta^*(m)\eta, v >$$

soit bornée par un multiple de $\|m(M \cap H)\|^r$.

Alors il existe $\nu_0 \in \mathfrak{a}_{M,\sigma}^* \subset \mathfrak{a}_M^*$, P-dominant, tel que pour tout $\chi \in X$ avec $Re\,\chi - 2\rho_P - \nu_0$ strictement dominant par rapport aux racines de A_M dans l'algèbre de Lie de P, la fonction $\varepsilon(G, P, \delta, \chi, \eta)$ est un élément de $C(G, P, \delta^*, \chi)$.

L'élément de I_χ^* correspondant à $\varepsilon(G, P, \delta, \chi, \eta)$ est égal à $j(P, \delta, \chi, \eta)$.

Des résultats récents de Nathalie Lagier indiquent que tout $\eta \in V_\delta^{*M\cap H}$ vérifie la condition du théorème.

On notera que lorsque $G = G_1 \times G_1$ et σ est l'involution qui échange les facteurs, notre article donne une nouvelle approche des intégrales d'entrelacement (cf. [6] pour le cas réel).

Il est important de noter que les résultats de A.G. Helminck et S.P. Wang [13], et A.G. Helminck et G.F. Helminck [12], sur la structure des espaces symétriques p-adiques sont à la base de ce travail. Il faut également dire que la page web de A. G. Helminck annonce, dans un rapport, un travail avec G.F. Helminck sur le même sujet que celui traité dans cet article.

Nous espérons que nos résultats seront complémentaires et que notre méthode, à savoir l'utilisation de l'homologie lisse, pourra être utile dans d'autres situations.

Remerciements :
Nous remercions Jean-Pierre Labesse pour avoir répondu à de nombreuses questions pendant l'élaboration de ce travail.

1. Homologie lisse de l-groupes

1.1. Modules projectifs

On appelle l-groupe, un groupe localement compact, G, dénombrable à l'infini, qui admet une base de voisinages de l'élément neutre formée de sous-groupes ouverts compacts. On notera dg une mesure de Haar à gauche sur G. On note $C_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact, à valeurs complexes. On note $\mathcal{M}(G)$ la catégorie des G-modules lisses, i.e. des représentations de G dans un espace vectoriel complexe dont tout vecteur est fixé par un sous-groupe compact ouvert. On voit facilement que $C_c^\infty(G)$ muni de l'action régulière droite, resp. gauche, est un G-module lisse. Appliquant ce résultat à G^n, puis plongeant G diagonalement dans G^n, on voit que $C_c^\infty(G^n)$ muni de l'action régulière gauche L, (resp. droite R), de G (où G agit diagonalement sur G^n) est un G-module lisse. Nous redonnons ici une preuve d'un résultat de [9], Théorème A.4, qui est la version p-adique d'un résultat de [2] pour les groupes de Lie.

Lemme 1.1. — *Le module $C_c^\infty(G^{n+1})$ muni de l'action régulière droite est projectif dans $\mathcal{M}(G)$.*

Démonstration. — On fixe $\varphi \in C_c^\infty(G^{n+1})$ tel que $\int_{G^{n+1}} \varphi(x)dx = 1$. Si g, $x \in G^{n+1}$, $f \in C_c^\infty(G^{n+1})$, on définit :

$$f_g(x) = f(x)\varphi(xg) \tag{1.1}$$

Alors f_g est élément de $C_c^\infty(G^{n+1})$. Par un calcul immédiat on voit que :

$$R_h f_{h^{-1}g} = (R_h f)_g \tag{1.2}$$

Soit $P : U \to V \to 0$ un morphisme surjectif de G-modules lisses et $F : C_c^\infty(G^{n+1}) \to V$ un morphisme de G-modules. Soit S une section linéaire de la surjection $P : U \to V$

On définit :

$$\overline{F}(f) := \int_{G^{n+1}} g_0 S {g_0}^{-1} F(f_g) dg, \;\; f \in C_c^\infty(G^{n+1})$$

Ici $g = (g_0, ..., g_n)$.

On va vérifier que $\overline{F}$ est un morphisme de G-modules entre $C_c^\infty(G^{n+1})$ et U tel que $P \circ \overline{F} = F$.

Soit $f \in C_c^\infty(G^{n+1})$. Alors :

$$P(\overline{F}(f)) = \int_{G^{n+1}} P(g_0 S g_0^{-1} F(f_g)) dg$$

Mais $Pg_0 = g_0 P$ et $PS = Id_V$. Donc :

$$P \circ \overline{F}(f) = \int_{G^{n+1}} F(f_g) dg$$

Mais

$$\int_{G^{n+1}} F(f_g) dg = F(\int_{G^{n+1}} f_g dg)$$

car l'intégration est en fait une somme finie. De plus

$$\int_{G^{n+1}} f_g(x) dg = \int_{G^{n+1}} f(x) \varphi(xg) dg = f(x)$$

Il en résulte que $P\overline{F}(f) = F(f)$. Il faut maintenant voir que $\overline{F}$ est un G-morphisme. Grâce à (1.2), on voit que pour $h = (h_0, ...h_0) \in G^{n+1}$ avec $h_0 \in G$:

$$\overline{F}(R_h f) = \int_{G^{n+1}} g_0 S g_0^{-1} F(R_h f_{h^{-1}g}) dg$$

On effectue le changement de variable $g' = h^{-1} g$, qui implique que $g_0 = h_0 g'_0$ et l'on trouve

$$\overline{F}(R_h f) = \int_{G^{n+1}} h_0 g_0 S g_0^{-1} F(f_g) dg = h_0 \overline{F}(f),$$

car F est un morphisme de G-modules. □

Il résulte de ce qui précède que si V est un G-module lisse, $C_c^\infty(G) \otimes V$ est projectif pour l'action régulière droite sur le premier facteur. Remarquons que l'on peut remplacer l'action régulière droite par l'action régulière gauche sur $C_c^\infty(G)$ car l'application $f \to f^\vee$ où $f^\vee(g) = f(g^{-1})$ entrelace ces deux actions. Montrons que :

(1.3) *L'application de $C_c^\infty(G)\otimes V$ dans V définie par :*

$$f\otimes v \to \int_G f(g)gvdg$$

est un morphisme surjectif de G -modules lisses pour le produit tensoriel de la représentation régulière gauche sur $C_c^\infty(G)$ avec la représentation triviale sur V

Il est surjectif car, si v est fixé par K, on prend $f = 1_K/vol(K)$, où 1_K est l'indicatrice de K et $f\otimes v$ a pour image v. Comme $L_h f\otimes v$ a pour image $\int_G f(h^{-1}g)gvdg$, on fait le changement de variable $g' = h^{-1}g$ pour voir que c'est un G-morphisme. Donc $\mathcal{M}(G)$ a suffisamment de projectifs et :

(1.4) *Tout $V\in\mathcal{M}(G)$ admet une résolution projective par des modules du type $C_c^\infty(G)\otimes W$, où G agit par produit tensoriel de la représentation régulière gauche avec la représentation triviale sur W.*

Mais on dispose d'une autre action de G sur $C_c^\infty(G)\otimes V$: le produit tensoriel des actions sur $C_c^\infty(G)$ et sur V. On remarque que $C_c^\infty(G)\otimes V$ est égal à $C_c^\infty(G, V)$. Plus généralement G agit sur $C_c^\infty(G^{n+1}, V)$ par :

$$(g.f)(g_0,...,g_n) = gf(g^{-1}g_0,...,g^{-1}g_n),\quad f\in C_c^\infty(G^{n+1},V),\ \ g,g_0,...,g_n\in G \tag{1.5}$$

Notons que $C_c^\infty(G^{n+1}, V)$ est isomorphe au G-module $C_c^\infty(G^{n+1})\otimes V$ où G agit par la représentation régulière gauche de manière diagonale sur le premier facteur et trivialement sur le second, l'isomorphisme étant donné par :

(1.6) $f\mapsto\tilde f$ où $\tilde f(g_0,...,g_n) = g_0^{-1}f(g_0,...,g_n)$, $f\in C_c^\infty(G^{n+1},V)$

Notons que l'inverse de cet isomorphisme est donné par :

(1.7) $f\to\widehat f, f\in C_c^\infty(G^{n+1},V)$ *avec :* $\widehat f(g_0,...,g_n) = g_0 f(g_0,...,g_n)$

car on a :

$$\begin{aligned}(\tilde{gf})(x) &= x_0^{-1}(gf)(x) = (x_0^{-1}g)f(g^{-1}x)\\ &= (gx_0)^{-1}f(g^{-1}x) = \tilde f(g^{-1}x)\end{aligned} \tag{1.8}$$

Donc $C_c^\infty(G^{n+1}, V)$ est projectif pour ses deux structures de G-modules.

1.2. Homologie lisse, résolution standard et complexe de chaines inhomogènes

DÉFINITION 1.2. — *Pour un module lisse V, on définit $V_G = J_G(V)$, l'espace des coinvariants, comme le quotient de V par l'espace vectoriel engendré par les $gv - v$, $g \in G, v \in V$. Alors J_G est un foncteur exact à droite. On définit alors l'homologie lisse de V, $H_*(G,V)$, comme étant l'homologie du complexe :*

$$\cdots \to J_G(P_1) \to J_G(P_0) \to 0$$

qui est obtenu par application du foncteur J_G à une résolution projective de V

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to V \to 0$$

Par des arguments classiques (cf e.g. [8], *Ch V, §3), $H_*(G,V)$ ne dépend pas de la résolution projective choisie. De plus, $H_0(G,V)$ est canoniquement isomorphe à $J_G(V)$.*

En particulier on dispose de la résolution standard de V (cf. e.g. [11], Ch. I, Équation (12.2), pour le cas des groupes discrets) :

LEMME 1.3. — *On considère la suite*

$$\begin{aligned} \cdots \to C_c^\infty(G^{n+2},V) &\xrightarrow{\delta_n} C_c^\infty(G^{n+1},V) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \cdots \\ &\xrightarrow{\delta_0} C_c^\infty(G,V) \xrightarrow{\eta} V \to 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

où :

$$(\delta_n f)(g_0,...,g_n) = \sum_{i=o}^{n+1} (-1)^i \int_G f(g_0,...,g_{i-1},g,g_i,...,g_n)dg \tag{1.10}$$

Ici :

$$\eta(f) = \int_G f(g)dg,\ si f \in C_c^\infty(G,V) \tag{1.11}$$

et l'action sur $C_c^\infty(G^{n+1},V)$ est celle définie en (1.5). C'est une résolution projective de V, dite résolution standard.

Démonstration. — Pour voir que la suite (1.9) est exacte, on montre que pour chaque sous-groupe ouvert compact, la suite :

$$\begin{aligned} \to C_c^\infty((K\backslash G)^{n+2},V^K) &\xrightarrow{\delta_n} C_c^\infty((K\backslash G)^{n+1},V^K) \\ &\to \cdots C_c^\infty(K\backslash G,V^K) \xrightarrow{\eta} V^K \to 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

est exacte. Pour cela on introduit :

$$\begin{aligned} \sigma_n \; &: C_c^\infty((K\backslash G)^n, V^K) \to C_c^\infty((K\backslash G)^{n+1}, V^K) \\ (\sigma_n f)(g_0, ..., g_n) &= (1_K(g_0)/vol(K)) f(g_1, ..., g_n) \\ \textit{avec} \quad (g_0, ..., g_n) &\in G^{n+1} \; \textit{et} \; f \in C_c^\infty((K\backslash G)^n, V^K) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Alors σ_n est une homotopie contractante comme on le vérifie aisément, car on a :

$$\eta\sigma_0 = Id_{V^K}$$

et

$$\delta_n\sigma_{n+1} + \sigma_n\delta_{n-1} = Id_{C_c^\infty((K\backslash G)^{n+1}, V^K)}$$

puisque, pour $f \in C_c^\infty((K\backslash G)^{n+1}, V^K)$:

$$\begin{aligned} (\delta_n\sigma_{n+1} f)(g_0, ..., g_n) &= (\delta_n((1_K/volK) \otimes f))(g_0, ..., g_n) \\ &= f(g_0, ...g_n) - (1_K(g_0)/vol(K)) \otimes (\delta_{n-1} f)(g_1, ..., g_n) \end{aligned}$$

soit encore :

$$(\delta_n\sigma_{n+1} f)(g_0, ..., g_n) = f(g_0, ..., g_n) - ((\sigma_n\delta_{n-1})(f))(g_0, ..., g_n)$$

qui est l'égalité voulue. Comme tout $f \in C_c^\infty(G^{n+1}, V)$ est élément de $C_c^\infty((K/G)^{n+1}, V^K)$ pour K sous-groupe compact ouvert assez petit, l'existence de l'homotopie contractante σ_n prouve l'exactitude du complexe (1.9). Ainsi, tenant compte du Lemme 1 et de (1.5), (1.9) est une résolution projective de V. □

Donc $H_n(G, V)$ est le n-ième groupe d'homologie du complexe :

$$\cdots \xrightarrow{\delta_1'} H_0(G, C_c^\infty(G^2, V)) \xrightarrow{\delta_0'} H_0(G, C_c^\infty(G, V)) \to 0 \tag{1.14}$$

où δ_n' est déduit de δ_n par passage aux coinvariants.

Définissons :

$$T_n \; : C_c^\infty(G^{n+1}, V) \to C_c^\infty(G^n, V)$$

(1.15) par

$$(T_n(f))(g_1, ..., g_n) = \int_G g^{-1} f(g, gg_1, ..., gg_1...g_n) dg$$

Lemme 1.4. — *Alors T_n est surjectif et $Ker\; T_n$ est engendré par les éléments de la forme $g.f - f$, où on utilise les notations de (1.5).*

Avant de procéder à la démonstration du Lemme 3, établissons un autre Lemme.

Lemme 1.5. —

(i) *Soit* $\varphi \in C_c^\infty(G,W)$ *où* W *est un espace vectoriel. Alors si :*

$$\int_G \varphi(g)dg = 0$$

φ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $L_g\psi - \psi$, $\psi \in C_c^\infty(G,W), g \in G$.

(ii) *L'application de* $C_c^\infty(G,W)$ *dans* W *donnée par l'intégration sur* G *par rapport à* dg *passe au quotient en un isomorphisme entre* $H_0(G, C_c^\infty(G,W))$ *et* W.

Démonstration. — (i) Comme $C_c^\infty(G,W) = C_c^\infty(G) \otimes W$, et que $\varphi \in C_c^\infty(G,W)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on se ramène au cas où W est de dimension finie, puis, en prenant une base de W, au cas où W est de dimension 1, i.e. $C_c^\infty(G,W) = C_c^\infty(G)$, ce que l'on suppose dans la suite. Soit donc φ comme dans l'énoncé.

Alors φ est invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert assez petit.

Donc

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i 1_{x_i K}$$

où 1_{xK} est l'indicatrice de xK.

La condition sur φ montre que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$. Donc :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i (1_{x_i K} - 1_K) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (L_{x_i} 1_K - 1_K)$$

ce qui achève de prouver (i).

Prouvons (ii). L'application est injective d'après (i) et surjective d'après (1.3). $\square$

Corollaire 1.6. — *Soit* W *une représentation lisse de* G. *On fait agir* G *sur* $C_c^\infty(G,W)$ *par la représentation*

$$(g,\varphi) \to (g.\varphi)$$

en posant :

$$(g.\varphi)(x) \ := g\varphi(g^{-1}x),\ g,x \in G$$

Si :

$$\int_G g^{-1}\varphi(g)dg = 0$$

alors φ *est combinaison linéaire de fonctions de la forme* $g.\psi - \psi$ *où* $\psi \in C_c^\infty(G,W)$.

Démonstration du Lemme 1.4. — D'abord, un simple changement de variable montre que $Ker T_n$ contient les combinaisons linéaires de fonctions du type $g.f - f$. Soit $f \in Ker\, T_n$. On applique le corollaire à f regardée comme élément de $C_c^\infty(G, C_c^\infty(G^n, V))$, où l'on fait agir G sur $W := C_c^\infty(G^n, V)$ par :

$$(g \diamond h)(g_1, ..., g_n) := gh(g^{-1}g_1, ..., g^{-1}g_n),\ \ h \in C_c^\infty(G^n, V)$$

Alors f est combinaison linéaire de fonctions de la forme : $g * F - F$, où $F \in C_c^\infty(G, W)$, $g \in G$ et :

$$(g * F)(x) := (g \diamond F)(g^{-1}x),\ \ x \in G$$

Alors, identifiant F à un élément de $C_c^\infty(G^{n+1}, V)$:

$$(g * F)(g_0, ..., g_n) = gF(g^{-1}g_0, g^{-1}g_1, ..., g^{-1}g_n)$$

i.e., avec les notations de (1.5) :

$$g * F = g.F$$

Ce qui précède achève la détermination du noyau de T_n.

En utilisant (1.3), on voit de même que si on pose :

$$(\widetilde{T}_n f)(g_1, ...g_n) = \int_G g^{-1} f(g, gg_1, ..., gg_n)dg, \quad f \in C_c^\infty(G^{n+1})$$

l'image de $\widetilde{T}_n$ est égale à $W = C_c^\infty(G^n, V)$. Montrons que cela implique que l'image de T_n est aussi égale à $C_c^\infty(G^n, V)$.

Si $F \in C_c^\infty(G^n, V)$, on définit :

$$H(x_1, ..., x_n) = F(x_1, x_1^{-1}x_2, ..., x_{n-1}^{-1}x_n), \quad x_1, ..., x_n \in G$$

donc $H \in C_c^\infty(G^n, V)$. De plus

$$F(g_1, ..., g_n) = H(g_1, g_1g_2, ..., g_1...g_n), \quad g_1, ..., g_n \in G \tag{1.16}$$

D'après ce qui précède, il existe $f \in C_c^\infty(G^{n+1}, V)$ tel que $\widetilde{T}_n f = F$. Alors, tenant compte de (1.16) et (1.15), on voit que ceci implique que $T_n f = F$ et ceci montre que T_n est surjective. □

D'après le Lemme 1.5, $H_0(G, C_c^\infty(G^{n+1}, V))$ est isomorphe par T_n à $C_c^\infty(G^n, V)$. Un calcul direct montre que :

$$d_n(T_{n+1}(f)) = T_n(\delta_n(f)),\ f \in C_c^\infty(G^{n+2}, V) \tag{1.17}$$

où pour tout $n \geqslant 1$ et $f \in C_c^\infty(G^{n+1}, V)$

$$(1.18)\quad \begin{aligned}(d_n f)(g_1, ..., g_n) = \int_G g^{-1} f(g, g_1, ..., g_n) dg + \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \int_G f(g_1, ..., g_{i-1}, g, g^{-1} g_i, g_{i+1}, ..., g_{n_1}) dg \\ +(-1)^{n+1} \int_G f(g_1, ..., g_n, g) dg\end{aligned}$$

et

$$d_0 f = \int_G g^{-1} f(g) dg - \int_G f(g) dg, f \in C_c^\infty(G, V)$$

Donc

Proposition 1.7. — *La différentielle δ'_n transportée par ces isomorphisme est égale à d_n et l'homologie lisse de V s'identifie à l'homologie du complexe, dit complexe de chaines inhomogènes :*

$$(1.19)\quad \cdots \to C_c^\infty(G^{n+1}, V) \xrightarrow{d_n} C_c^\infty(G^n, V) \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_0} V \to 0$$

1.3. Action de G sur $H_*(G, V)$

Pour tout $g \in G$ on définit un automorphisme R_g de $C_c^\infty(G^{n+1}, V)$ muni de la structure de G-module défini en (1.5). L'opérateur R_g correspond à l'action régulière droite de la diagonale i.e. :

$$(R_g f)(g_0, ..., g_n) = f(g_0 g, ..., g_n g), \;\; f \in C_c^\infty(G^{n+1}, V)$$

On vérifie sans peine que, si $\Delta_G(g) = 1$, où Δ_G est la fonction modulaire de G, R_g est un automorphisme de G-modules de la résolution standard de V, en complétant les flèches R_g par l'identité de V. Donc il est homotope à l'automorphisme identité, par une homotopie formée de morphismes de G-modules (cf. e.g., [11] Chapitre I, Proposition 2.2). Cette homotopie détermine une homotopie du complexe d'espaces vectoriels (1.14) dont la cohomologie est l'homologie lisse. Donc le morphisme R_g induit l'identité sur l'homologie lisse de V.

Proposition 1.8. — *Pour tout $g \in G$ tel que $\Delta_G(g) = 1$ et tout $f \in C_c^\infty(G^n, V)$ on note :*

$$(\widetilde{R}_g f)(g_0, ..., g_n) = g f(g^{-1} g_0 g, g^{-1} g_1 g, ..., g^{-1} g_n g)$$

(i) *Cette formule définit un automorphisme $\widetilde{R}_g$ du complexe des chaines inhomogènes (1.19), homotope à l'identité.*

(ii) *En particulier si f est un élément du noyau de d_n, $Z_n(G,V)$, alors $\widetilde{R}_g f - f$ est élément de l'image de d_{n+1}, $B_n(G,V)$.*

Démonstration. — Un calcul immédiat montre que $\widetilde{R}_g$, est le transporté de R_g par T_n, au scalaire multiplicatif $\Delta_G(g)$ près. □

Corollaire 1.9. — *Si $z \in Z(G)$ est tel que $z - Id_V$ est inversible, $H_n(G,V) = \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. — En effet, si $f \in Z_n(G,V)$, on vient de voir que $\widetilde{R}_z f - f \in B_n(G,V)$. Mais $((\widetilde{R}_z - Id)f)(g_1, ...g_n) = (z - Id_V)f(g_1, ...g_n)$. Il est alors facile de voir que $f \in B_n(G,V)$, puisque $(z - Id_V)^{-1}$ préserve $B_n(G,V)$. Donc $H_n(G,V) = \{0\}$. □

1.4. Longue suite exacte d'homologie

Le lemme suivant est standard.

Proposition 1.10. — *Soit $0 \to V \xrightarrow{i} W \xrightarrow{p} V/W \to 0$, une suite exacte courte de G-modules lisses. Alors notons $i_* : H_*(G,V) \to H_*(G,W)$ (resp. $p_* : H_*(G,W) \to H_*(G,V/W)$) les morphismes en homologie déduits de i et p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des morphismes canoniques $c_n : H_n(G,V/W) \to H_{n-1}(G,V)$ tels que l'on ait la suite exacte longue :*

$$\cdots H_{n+1}(G,V/W) \xrightarrow{c_{n+1}} H_n(G,V) \xrightarrow{i_n} H_n(G,W) \xrightarrow{p_n} H_n(G,V/W) \xrightarrow{c_n}$$
$$\cdots \xrightarrow{p_0} H_0(G,V/W) \to 0$$

1.5. Homologie lisse et sous-groupes distingués

Lemme 1.11. — *Soit G un l-groupe qui est réunion de sous-groupes compacts. Alors :*

(i) *Le foncteur $H_0(G,.)$ est un foncteur exact sur $\mathcal{M}(G)$.*

(ii) *De plus $H_i(G,V) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout V objet de $\mathcal{M}(G)$.*

Démonstration. — (i) est classique et (ii) résulte de (i) et de la définition de l'homologie lisse. □

Proposition 1.12. — *Soit G un l-groupe, H un sous-groupe fermé et distingué de G qui est réunion de sous-groupes compacts (donc unimodulaire). Alors si V est un G-module lisse, $H_0(H,V)$ est un G/H-module lisse et $H_*(G,V)$ est naturellement isomorphe à $H_*(G/H, H_0(H,V))$.*

Démonstration. — L'assertion sur $H_0(H,V)$ est claire. D'après (1.4), le G-module lisse V admet une résolution projective : $\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to V \to 0$, telle que pour tout n, P_n soit de la forme $C_c^\infty(G)\otimes W_n$ où G agit par le produit tensoriel de la représentaion régulière gauche sur $C_c^\infty(G)$ avec la représentation triviale sur W_n. Alors $H_0(H,P_n) \simeq H_0(H,C_c^\infty(G)) \otimes W_n$ comme G/H-module. Mais $H_0(H,C_c^\infty(H)) \simeq \mathbb{C}$, d'après le Lemme 1.5. Tenant compte de l'isomorphisme du Lemme 3.2 de l'Appendice pour les actions régulières gauches, on en déduit que $H_0(H,C_c^\infty(G))$ s'identifie à $C_c^\infty(H\setminus G)$ ($=C_c^\infty(G/H)$ puisque H est distingué dans G). On vérifie facilement que c'est un isomorphisme de G/H-modules. Il en résulte que $H_0(H,P_n)$ est un G/H-module lisse projectif. Des Lemmes 1.1 et 1.11 appliqués à H, on déduit que :

$$\cdots \to H_0(H,P_n) \to \cdots \to H_0(H,P_0) \to H_0(H,V) \to 0$$

est une résolution projective du G/H-module lisse $H_0(H,V)$.

Donc $H_*(G/H,H_0(H,V))$ est l'homologie du complexe :

$$\cdots \to H_0(G/H,H_0(H,P_n)) \to \cdots \to H_0(G/H,H_0(H,P_0)) \to 0$$

Mais il est clair que pour tout G-module lisse W, $H_0(G/H,H_0(H,W))$ s'identifie à $H_0(G,W)$. Alors le complexe dont l'homologie donne $H_*(G/H, H_0(H,W))$ s'identifie à celui dont l'homologie donne $H_*(G,V)$. D'où la Proposition. □

1.6. Représentations induites comme espaces d'homologie

Soit H un sous-groupe fermé du l-groupe G, et (V,π) une représentation lisse de H. On note $ind_H^G\pi$ la représentation régulière gauche de G dans l'espace $ind_H^G V$ des fonctions φ de G dans V, invariantes à gauche par un sous-groupe compact ouvert de G, à support compact modulo H, et telles que :

$$\varphi(gh) = \pi(h)^{-1}\varphi(g),\ \ g\in G,\ h\in H$$

C'est une représentation lisse de G.

Proposition 1.13. — *Si $f\in C_c^\infty(G)$ et $v\in V$, on définit :*

$$i(f\otimes v)(g) = \int_H f(gh)\pi(h)v\,dh,\ \ g\in G$$

Ici dh est une mesure de Haar à gauche sur H.

(i) *Alors* $i(f \otimes v) \in ind_H^G V$ *et* i *se prolonge en un morphisme linéaire de* G*-modules entre* $C_c^\infty(G) \otimes V$*, muni du produit tensoriel de la représentation régulière gauche de* G *avec la représentation triviale sur* V*, et* $(ind_H^G V, ind_H^G \pi)$*, noté* i *ou* $i_{G,\pi}$*.*

(ii) *Cette application est surjective.*

(iii) *Son noyau est égal à l'espace engendré par les* $((R_h \otimes \pi(h)\Delta_H^{-1}(h))\varphi) - \varphi$*,* $h \in H$*,* $\varphi \in ind_H^G V$ *où* R *est la représentation régulière droite de* G *sur* $C_c^\infty(G)$ *et* Δ_H *est la fonction modulaire de* H*. Celle-ci est caractérisée par*

$$\int_H f(hh_0)dh = \Delta_H(h_0) \int_H f(h)dh \quad \text{pour} \quad h_0 \in H. \tag{1.20}$$

(iv) *Par passage au quotient* i *définit un isomorphisme naturel entre les* G*-modules* $H_0(H, C_c^\infty(G) \otimes V)$ *et* $(ind_H^G V, ind_H^G \pi)$*, où* $C_c^\infty(G) \otimes V$ *est muni du produit tensoriel de l'action régulière droite de* H *avec* $\Delta_H^{-1}\pi$*. Ici* G *agit sur* $H_0(H, C_c^\infty(G) \otimes V)$ *par passage au quotient du produit tensoriel* $L \otimes Id$ *de la représentation régulière gauche sur* $C_c^\infty(G)$ *avec la représentation triviale sur* V*.*

(v) *Si* U *est un ouvert* H*-invariant à droite, on notera* $(ind_H^G V)(U)$ *ou* $C_c^\infty(U, \pi)$ *l'espace formé des* $\varphi \in ind_H^G V$ *tels que le support de* φ *est contenu dans* U*. Alors* $C_c^\infty(U, \pi)$ *est l'image de* $C_c^\infty(U) \otimes V$ *par* i*.*

Démonstration. —
(i) résulte d'un simple changement de variable.

(ii) On va montrer (v) qui implique (ii). Soit $\varphi \in C_c^\infty(U, \pi)$. Alors φ est invariante à gauche par un sous-groupe ouvert compact K, donc de support de la forme $\bigcup_{x \in X} KxH$. Les KxH sont ouverts car K est ouvert.

Le support de φ étant compact modulo H, φ est nulle en dehors de la réunion $\bigcup_j Kx_jH$, pour un nombre fini de x_j, où l'union est disjointe et contenue dans U. On note $v_j = \varphi(x_j)$. Les propriétés d'invariance à gauche de φ par K et de covariance à droite sous H montrent que v_j est invariant par $x_j^{-1}Kx_j \cap H$.

L'intégrale $\int_H 1_{x_j{}^{-1}Kx_j \cap H}(h)dh$ est non nulle car $x_j^{-1}Kx_j \cap H$ est ouvert dans H. On note c_j son inverse. Nous affirmons que :

$$\varphi = i(\Sigma_j c_j(f_j \otimes v_j)), \text{ où } f_j = 1_{Kx_j}$$

En effet les deux membres ont les mêmes propriétés d'invariance à gauche sous K et de covariance à droite sous H. Ils sont nuls en dehors de $\bigcup_j Kx_jH$, et sont déterminés par leur valeurs en les x_j. Or la valeur en x_j du second membre est égale à

$$c_j \int_H 1_{Kx_j}(x_j h)\pi(h)v_j dh = c_j \int_H 1_{x_j{}^{-1}Kx_j \cap H}(h)\pi(h)v_j dh = v_j$$

comme désiré. Ceci achève de prouver (v) et (ii).

Prouvons (iii) qui implique (iv). On va se ramener à déterminer le noyau de $i_{G,\pi}$ dans le cas où $G = H$. En effet, d'après l'appendice, Lemme 3.2, pour l'action régulière droite de H, $C_c^\infty(G)$ est isomorphe à $C_c^\infty(G/H) \otimes C_c^\infty(H)$ où H agit par la représentation régulière droite sur le deuxième facteur et trivialement sur le premier. Notons s une section continue de la projection $G \to G/H$ (cf. [18]). De même, on a un isomorphisme T d'espaces vectoriels entre $C_c^\infty(G/H) \otimes ind_H^H V$ et $ind_H^G V$, défini par :

$$T(\psi \otimes f)(s(x)h) = \psi(x)f(h),\ \psi \in C_c^\infty(G/H),\ f \in ind_H^H V,\ x \in G/H,\ h \in H$$

d'inverse :

$$(T^{-1}(\varphi)(x,h) = \varphi(s(x)h), \ \ x \in G/H, \ \ h \in H, \ \ \varphi \in ind_H^G V$$

Dans ces isomorphismes $i_{G,\pi}$ s'identifie à $id_{C_c^\infty(G/H)} \otimes i_{H,\pi}$. La détermination du noyau de $i = i_{G,\pi}$, se réduit donc bien à celle de $i_{H,\pi}$. On suppose désormais que $G = H$ et l'on note Δ au lieu de Δ_H.

Soit f élément du noyau de $i_{G,\pi}$. Alors :

$$\int_G \pi(g)f(g)dg = 0$$

Mais $\Delta(g)dg$ est une mesure de Haar invariante à droite sur G, notée $d_r g$.

Donc

$$\int_G \pi(g)\Delta(g)^{-1}f(g)d_r g = 0$$

On applique à la fonction sous le signe somme le Lemme 4 (ou plûtot sa version à « droite »). Alors

$$\pi(g)\Delta(g)^{-1}f(g) = \Sigma_{i=1}^n (R_{x_i}\varphi_i)(g) - \varphi_i(g), \ \ g \in G$$

où $\varphi_i \in C_c^\infty(G,V)$ et $x_i \in G$.

On pose, pour $g \in G$, $\psi_i(g) = \pi(g)^{-1}\Delta(g)\varphi_i(g)$, de sorte que $\varphi_i(g) = \pi(g)\Delta(g)^{-1}\psi_i(g)$.

Alors

$$f(g) = \Sigma_{i=1}^n (\pi(g)^{-1}\Delta(g)\pi(gx_i)\Delta(gx_i)^{-1}\psi_i(gx_i) - \psi_i(g), g \in G$$

D'où

$$f = \Sigma_{i=1}^n \pi(x_i)\Delta(x_i)^{-1}R_{x_i}\psi_i - \psi_i$$

comme désiré. □

1.7. Lemme de Shapiro en homologie lisse

LEMME 1.14. — *Si (π, V) est un G-module lisse, $H_0(G, ind_H^G V)$ est naturellement isomorphe à $H_0(H, V)$. Si $T : V \to V'$ est un morphisme de H-modules, l'application entre $H_0(G, ind_H^G V)$ et $H_0(G, ind_H^G V')$, déduite de l'application entre $H_0(H, V)$ et $H_0(H, V')$ par les isomorphismes ci-dessus, est égale à l'application déduite du morphisme induit, $indT$, entre $ind_H^G V$ et $ind_H^G V'$, par passage au quotient.*

Démonstration. — En effet il résulte de la Proposition 1.13 (iv) que :

$$ind_H^G V \simeq H_0(H, C_c^\infty(G) \otimes V)$$

où $C_c^\infty(G) \otimes V$ est muni du produit tensoriel de l'action régulière droite de H avec $\Delta_H^{-1}\pi$. Cette action commute avec l'action régulière gauche de G. Donc :

$$H_0(G, ind_H^G V) \simeq H_0(G \times H, C_c^\infty(G) \otimes V)$$

qui est aussi isomorphe à $H_0(H, H_0(G, C_c^\infty(G) \otimes V))$. Mais tenant compte du Lemme 1.5 (ii), on a finalement :

$$H_0(G, ind_H^G V) \simeq H_0(H, V)$$

où H agit sur V par π. L'assertion sur les morphismes est immédiate en suivant les isomorphismes précédents. □

PROPOSITION 1.15. — *(Lemme de Shapiro pour l'homologie lisse)*
Soit V un H-module lisse. Alors $H_*(G, ind_H^G V)$ est naturellement isomorphe à $H_*(H, V)$.

Début de la démonstration de la Proposition 1.15. —
Soit :

$$\xrightarrow{u_n} P_n \cdots \xrightarrow{u_0} P_0 \to V \to 0$$

une résolution projective du H-module lisse V par des modules projectifs du type $C_c^\infty(H) \otimes W_n$, où H agit par la représentation régulière gauche sur $C_c^\infty(H)$.

Alors $ind_H^G(P_n)$ est un G-module lisse projectif isomorphe à $C_c^\infty(G) \otimes W_n$ d'après le Lemme suivant. □

LEMME 1.16. — *Soit W un espace vectoriel. Le G-module $ind_H^G C_c^\infty(H)$ induit du H-module $C_c^\infty(H)$ pour l'action régulière gauche de H est isomorphe à $C_c{}^\infty(G)$ muni de l'action régulière gauche de G.*

Démonstration. — Clairement : $ind_{\{e\}}^H \mathbb{C} = C_c^\infty(H)$, où $\mathbb{C}$ est le H-module trivial et $C_c^\infty(H)$ est muni de l'action régulière gauche. Utilisant l'induction par étages, qui s'établit facilement, on en déduit le lemme. □

Fin de la démonstration de la Proposition 1.15. — Donc

$$\cdots \xrightarrow{ind\, u_n} ind_H^G P_n \cdots \to ind_H^G P_{n-1} \cdots \xrightarrow{ind\, u_0} ind_H^G P_0 \to ind_H^G V \to 0$$

est une résolution projective du G-module lisse $ind_H^G V$.

L'homologie lisse $H_*(G, ind_H^G V)$ est naturellement isomorphe, d'après le Lemme 1.14, à l'homologie du complexe :

$$\cdots \to H_0(H, P_n) \to \cdots \to H_0(H, P_0) \to 0$$

D'où l'isomorphisme voulu. □

1.8. Filtration d'une représentation induite

On suppose maintenant que P et H sont deux sous-groupes fermés d'un l-groupe G dénombrable à l'infini et que G n'admet qu'un nombre fini de (H, P)-doubles classes. Utilisant l'action de $H \times P$ sur G, H agissant à gauche et P à droite, on déduit de l'Appendice, Lemme 3.1, qu'il existe des ouverts :

$$U_0 = \emptyset \subset U_1 \cdots \subset U_n = G$$

tels que pour $i \geqslant 0$, $U_i \setminus U_{i-1}$ soit une double classe Hx_iP ouverte dans $G \setminus U_{i-1}$.

Proposition 1.17. — *Soit (δ, V) une représentation lisse de P. On note :*

$$I_i = \{\varphi \in ind_P^G V |\ \text{le support de } \varphi \text{ est contenu dans } U_i\}$$

Alors I_i est H-invariant et la représentation de H dans I_i/I_{i-1} est isomorphe à $ind^H_{H\cap x_iPx_i^{-1}} \delta^{x_i}_{|H\cap x_iPx_i^{-1}}$, où δ^{x_i} est la représentation de $x_iPx_i^{-1}$ dans V définie par :

$$\delta^{x_i}(x_ipx_i^{-1}) = \delta(p), p \in P$$

Démonstration. — En utilisant l'isomorphisme naturel de $ind_P^G \delta$ et $ind^G_{x_iPx_i{}^{-1}} \delta^{x_i}$, on se ramène à démontrer l'assertion sur I_i/I_{i-1} dans le cas où x_i est l'élément neutre de G, ce que l'on fait dans la suite. On notera I au lieu de I_i, J au lieu de I_{i-1}, U au lieu de U_i, U' au lieu de U_{i-1}.

On associe à $f \in I$ sa restriction à H, $r_H(f)$. Montrons que $\varphi := r_H(f)$ est un élément de l'espace $ind^H_{H\cap P}\ \delta_{|H\cap P}$.

La seule chose qui n'est pas immédiate est que le support de φ est compact modulo $H \cap P$. Le support de φ est égal à $Supp f \cap H$.

Soit (h_n) une suite dans $Supp\varphi$. Il faut trouver (x_n) suite dans $H \cap P$ telle que $(h_n x_n)$ ait une sous-suite convergente. Comme $Supp f$ est compact modulo P, il existe une suite (p_n) dans P telle que $(h_n p_n)$ admette une sous-suite convergente.

Notons $H \times_{H\cap P} P$ le quotient de $H \times P$ par $H \cap P$, agissant à droite sur le premier facteur et à gauche sur le second. D'après l'Appendice, Lemme 3.1, appliqué à l'action de $H \times P$ sur G, l'application produit $H \times P \to HP$ passe au quotient en un isomorphisme topologique de $H \times_{H\cap P} P$ sur HP.

Il en résulte qu'il existe une suite (x_n) dand $H \cap P$ telle que $(h_n x_n)$ et $(x_n^{-1} p_n)$ admettent des sous-suites convergentes. Ceci achève de prouver la compacité du support de $r_H(f)$ modulo $H \cap P$ et donc que $r_H(f)$ est élément de l'espace $ind_{H\cap P}^{H} \delta_{|H\cap P}$.

Le reste de la démonstration consiste à montrer que r_H est surjective, de noyau J.

Soit $f \in Ker\, r_H$. Cela signifie que f est nulle sur H donc sur HP. Elle est donc à support dans $U \setminus HP = U'$, i.e. $f \in J$. Il reste seulement à prouver la surjectivité.

On note r la restriction des éléments de $C_c^\infty(U) \otimes V$ à $C_c^\infty(HP) \otimes V$ qui est surjective car $HP = U \setminus U'$ est fermé dans U.

On dispose d'une application $i_{P,\delta}$ de $C_c^\infty(U_i) \otimes V$ dans I_i qui est surjective, (cf. Proposition 1.13 (iv)).

Enfin on définit une application $j_{H,\delta}$ de $C_c^\infty(HP) \otimes V$ dans l'espace de $ind_{H\cap P}^{H} \delta_{|H\cap P}$, en posant :

$$(j_{H,\delta}(f))(h) = \int_P \delta(p) f(hp) dp, f \in C_c^\infty(HP) \otimes V, h \in H$$

où dp est une mesure de Haar à gauche sur P (la même que celle utilisée dans la définition de $i_{P,\delta}$).

Alors on a :

$$j_{H,\delta} \circ r = r_H \circ i_{H,\delta} \tag{1.21}$$

Tenant compte de l'isomorphisme topologique entre $H \times_{H\cap P} P$ et HP, on voit qu'on a une flèche surjective $i_{H,P}$ de $C_c^\infty(H) \otimes C_c^\infty(P) \otimes V$ dans $C_c^\infty(HP) \otimes V$, donnée par :

$$i_{H,P}(\varphi \otimes \psi \otimes v)(hp) = \int_{H\cap P} \varphi(hx)\psi(x^{-1}p) dx$$

où dx est une mesure de Haar à gauche sur $H \cap P$.

Pour prouver la surjectivité de r_H, tenant compte de celle de r et de (1.21), il suffit de démontrer la surjectivité de la composée :

$$k := j_{H,\delta} \circ i_{H,P}$$

La définition de k comporte deux intégrations successives. D'après le Théorème de Fubini, on peut intervertir l'ordre des intégrations (les fonctions considérées sont à support compact). On trouve ainsi, pour $\varphi \in C_c^\infty(H), \psi \in C_c^\infty(P)$ et $v \in V$

$$(k(\varphi \otimes \psi \otimes v))(h) = \int_{H\cap P} (\int_P \varphi(hx)\psi(x^{-1}p)\delta(p)vdp)dx$$

On change alors p en $x^{-1}p$ et on tient compte de l'invariance à gauche de la mesure dp :

$$(k(\varphi \otimes \psi \otimes v)(h) = \int_{H\cap P} \varphi(hx)\delta(x)(\int_P \psi(p)\delta(p)vdp)dx$$

On prend pour ψ l'indicatrice d'un sous-groupe compact ouvert de P, laissant fixe v, divisée par le volume de ce sous-groupe.

Alors :

$$k(\varphi \otimes \psi \otimes v) = i_{H,\delta_{|H\cap P}}(\varphi \otimes v)$$

Tenant compte de la Proposition 1.13, ceci achève de montrer la surjectivité de k. Ceci achève la preuve de la Proposition. $\square$

2. Vecteurs distributions H-invariants de représentations induites

2.1. Groupes réductifs, notations

On va utiliser largement des notations et conventions de [23]. Soit $\mathbb{F}$ un corps local non archimédien, de caractéristique 0, de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. On considère divers groupes algébriques définis sur $\mathbb{F}$, et on utilisera des abus de terminologie du type suivant : « soit A un tore déployé « signifiera » soit A le groupe des points sur $\mathbb{F}$ d'un tore défini et déployé sur $\mathbb{F}$ ». Soit G un groupe linéaire algébrique réductif et connexe. On fixe un sous-tore A_0 de G, déployé et maximal pour cette propriété, dont le centralisateur est noté M_0. Si P est un sous-groupe parabolique contenant A_0, il possède un unique sous-groupe de Lévi contenant A_0, noté M (noté aussi M_P). Son radical unipotent sera noté U ou U_P. Si H est un groupe algébrique, on note $Rat(H)$ le groupe des caractères rationnels de H définis sur $\mathbb{F}$. Si E est un espace vectoriel , on note E^* son dual. S'il est de plus réel, on note $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié. On note A_G le plus grand tore déployé dans le centre de G.

On note $\mathfrak{a}_G = Hom_{\mathbb{Z}}(Rat(G), \mathbb{R})$. La restriction des caractères rationnels de G à A_G induit un isomorphisme :

$$Rat(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq Rat(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \tag{2.1}$$

On dispose de l'application canonique, $H_G : G \to \mathfrak{a}_G$ définie par :

$$e^{<H_G(x),\chi>} = |\chi(x)|_{\mathbb{F}},\ x \in G, \chi \in Rat(G) \tag{2.2}$$

où $|.|_{\mathbb{F}}$ est la valuation normalisée de $\mathbb{F}$. Le noyau de H_G, qui est noté G^1, est l'intersection des noyaux des caractères de G de la forme $|\chi|_{\mathbb{F}}$, $\chi \in Rat(G)$. On notera $X(G) = Hom(G/G^1, \mathbb{C}^*)$. On a des notations similaires pour les sous-groupes de Lévi.

Si P est un sous-groupe parabolique contenant A, on notera $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$, $H_P = H_{M_P}$. On note $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{M_0}$, $H_0 = H_{M_0}$.

On note $\mathfrak{a}_{G,\mathbb{F}}$, resp. $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,\mathbb{F}}$ l'image de G, resp. A_G, par H_G. Alors G/G^1 est un réseau isomorphe à $\mathfrak{a}_{G,\mathbb{F}}$. Soit M un sous-groupe de Lévi contenant A_0. Les inclusions : $A_G \subset A_M \subset M \subset G$, déterminent un morphisme surjectif $\mathfrak{a}_{M,\mathbb{F}} \to \mathfrak{a}_{G,\mathbb{F}}$, resp. un morphisme injectif $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,\mathbb{F}} \to \tilde{\mathfrak{a}}_{M,\mathbb{F}}$, qui se prolonge de manière unique en une application linéaire surjective entre $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_G$, resp. injective entre $\mathfrak{a}_G$ et $\mathfrak{a}_M$. La deuxième application permet d'identifier $\mathfrak{a}_G$ à un sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ et le noyau de la première, $\mathfrak{a}_M^G$, vérifie ;

$$\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_M^G \oplus \mathfrak{a}_G \tag{2.3}$$

Il y a une surjection :

$$(\mathfrak{a}_G^*)_{\mathbb{C}} \to X(G) \to 1 \tag{2.4}$$

qui est définie comme suit : en utilisant la définition de $\mathfrak{a}_G$, en remplaçant G par A_G, grâce à (2.1), on associe à $\chi \otimes s$, le caractère $g \mapsto |\chi(g)|^s$. Le noyau est un réseau et ceci définit sur $X(G)$ une structure de variété algébrique complexe pour laquelle $X(G) \simeq \mathbb{C}^{*d}$, où $d = dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_G$. Pour $\chi \in X(G)$, soit $\nu \in \mathfrak{a}_{G,\mathbb{C}}^*$ un élément se projetant sur χ par l'application (2.4). La partie réelle $Re\,\nu \in \mathfrak{a}_G^*$ est indépendante du choix de ν. Nous la noterons $Re\,\chi$. Si $\chi \in Hom(G, \mathbb{C}^*)$ est continu, le caractère $|\chi|$ appartient à $X(G)$. On pose $Re\,\chi = Re\,|\chi|$. De même, si $\chi \in Hom(A_G, \mathbb{C}^*)$ est continu, le caractère $|\chi|$ se prolonge de façon unique en un élément de $X(G)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, que l'on note encore $|\chi|$ et on pose $Re\,\chi = Re\,|\chi|$.

On définit $Im\,X(G) := \{\chi \in X(G) | Re\,\chi = 0\}$ l'ensemble des éléments unitaires de $X(G)$.

De l'isomorphisme naturel (2.1) on déduit aisément l'égalité :

$$A_G^1 = A_G \cap G^1 \tag{2.5}$$

On voit facilement que A_G^1 est le plus grand sous-groupe compact de A_G. On note $X_*(G)$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de A_G. C'est un réseau. On fixe une fois pour toute une uniformisante. On note alors $\Lambda(G)$, l'image de $X_*(G)$ dans G par l'application « évaluation en l'uniformisante », qui est un réseau isomorphe à $X_*(G)$ par cette évaluation. En effet, tout élément de $X_*(G)$ est déterminé par sa valeur sur une uniformisante ϖ : en écrivant A_G comme un produit de tores déployés de dimension 1, on se ramène à une assertion sur les sous groupes à un paramètre d'un tore déployé de dimension 1, qui est claire. Pour tout élément non trivial de $\Lambda(G)$, il existe un caractère non ramifié réel de A_G non égal à 1 sur celui-ci : on se ramène immédiatement aux tores déployés de dimension 1. Ce caractère non ramifié de A_G ce prolonge en un caractère non ramifié de G, d'après ce qui précède. Appliquant ceci aux sous-groupes de Levi, on a :

(2.6) *Pour tout élément non trivial de $\Lambda(A_M)$, il existe $\chi \in X(M)$ différent de 1 sur cet élément.*

Soit A est un tore déployé de G, et $\lambda \in \Lambda(A)$. On note P_λ le sous-groupe parabolique contenant A pour lequel les racines α de A dans l'algèbre de Lie de P_λ vérifient $|\alpha(\lambda)|_{\mathbb{F}}$ est supérieur ou égal à 1. Alors on a :

(2.7) $P_\lambda = \{g \in G | (\lambda^{-n} g \lambda^n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{est borné}\} = \{g \in G | (\lambda^{-n} g \lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge*$\}$

Alors :

(2.8) $M_\lambda := \{g \in G | \lambda^{-1} g \lambda = g\}$ *est le sous-groupe de Lévi de P_λ contenant A.*

et

(2.9) $U_\lambda := \{g \in G | (\lambda^{-n} g \lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $e\}$ *est le radical unipotent de P_λ.*

Si A est un tore déployé maximal, tout sous-groupe parabolique de G contenant A est de cette forme.

Soit σ une involution, définie sur $\mathbb{F}$, du groupe algébrique dont G est le groupe des points sur $\mathbb{F}$. Soit H le groupe des points sur $\mathbb{F}$ d'un sous-groupe ouvert, défini sur $\mathbb{F}$, du groupe des points fixes de σ.

On suppose maintenant que P est un sous-groupe parabolique quelconque de G. Alors (cf. [13], Lemme 2.4) il contient un tore déployé maximal de G, A, qui est σ-stable. Donc $P = P_\lambda$, pour un élément λ de $\Lambda(A)$. Alors si $g \in P_\lambda$, $g = mu$ avec $m \in M_\lambda$, $u \in U_\lambda$ et $m = lim_{n\to+\infty} \lambda^{-n} g \lambda^n$. Enfin montrons que :

(2.10) *Si (g_n) est une suite dans P_λ qui converge vers g, $(\lambda^{-n} g_n \lambda^n)$ tend vers la limite de $(\lambda^{-n} g \lambda^n)$*

En effet, on se réduit facilement à (g_n), suite dans U. Mais, par réduction à $GL(n)$, grâce à la linéarité de G, on voit que :

(2.11) *Si X est une partie bornée de U et (x_n) une suite dans X, alors $(\lambda^{-n}x_n\lambda^n)$ tend vers e*

Ceci implique (2.10).

2.2. Intersection d'un sous-groupe parabolique avec H

On suppose maintenant que P est un sous-groupe parabolique. Alors P contient un tore déployé maximal de G, A, qui est σ-stable (cf. [13], Lemme 2.4), et P est de la forme P_λ pour un $\lambda \in \Lambda(A)$. On note $M := M_\lambda$, $U := U_\lambda$, $\mu := \lambda\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda)\lambda$, $Q := P_\mu$, V son radical unipotent, qu'on évitera de confondre avec l'espace d'une représentation, et $L := M_\mu$.

Proposition 2.1. —

(i) *On a :*
$$P \cap \sigma(P) = (M \cap \sigma(M))V'$$
où
$$V' = (P \cap \sigma(P)) \cap V$$
De plus V' est distingué dans $P \cap \sigma(P)$ et $V' \cap (M \cap \sigma(M)) = \{e\}$.

(ii) *On a :*
$$V' = (M \cap \sigma(U))(U \cap \sigma(P))$$
$$U \cap \sigma(P) = (U \cap \sigma(M))(U \cap \sigma(U))$$
où $U \cap \sigma(P)$ est distingué dans V' et $U \cap \sigma(U)$ est distingué dans $U \cap \sigma(P)$.

(iii) *On a :*
$$P \cap H = (M \cap \sigma(M) \cap H)(V' \cap H)$$
où $V' \cap H$ est distingué dans $P \cap H$.

(iv) *Pour tout $x \in M \cap \sigma(U)$, il existe $h \in H \cap V'$ et $y \in U \cap \sigma(P)$ tels que $x = hy$.*

Démonstration. — (i) Soit $g \in P\cap\sigma(P)$. Alors la suite $(\lambda^{-n}g\lambda^n)$ est bornée. De plus, comme $\sigma(A) = A$, on a $\lambda \in \sigma(P)$. Donc $(\lambda^{-n}g\lambda^n)$ est une suite bornée dans $\sigma(P)$. Il en résulte facilement que $(\sigma(\lambda)^p\lambda^{-n}g\lambda^n\sigma(\lambda)^p)_{n,p\in\mathbb{N}}$ est un ensemble borné dans $\sigma(P)$. En particulier, $(g_n) = (\sigma(\lambda)^{-n}\lambda^{-n}g\lambda^n\sigma(\lambda)^n)$ est bornée et g est élément de $Q = LV$. Donc $g = lv$ avec $l \in L$, $v \in V$, où l est la limite de la suite (g_n). Comme $\lambda \in A$, $\sigma(\lambda) \in P \cap \sigma(P)$. Mais $(\lambda^{-n} g \lambda^n)$ converge dans $P \cap \sigma(P)$, en particulier dans $\sigma(P)$, vers $m \in M$.

Alors d'après (2.10), (g_n) converge dans $\sigma(P)$ vers la même limite que $(\sigma(\lambda)^{-n} m \sigma(\lambda)^n)$, qui est élément de $\sigma(M)$. Donc $l \in \sigma(M)$ et par raison de symétrie, $l \in M \cap \sigma(M) \subset P \cap \sigma(M)$. Alors $v \in P \cap \sigma(P) \cap V = V'$. On a donc bien :

$$P \cap \sigma(P) = (M \cap \sigma(M))V'$$

Maintenant $M \cap \sigma(M) \subset L$ et $V' \subset V$, donc leur intersection est réduite à un élément. Enfin $P \cap \sigma(P)$ est contenu dans Q, V' est contenu dans V qui est distingué dans Q. Donc V' est distingué dans $P \cap \sigma(P)$. Ceci achève de prouver (ii).

(iii) Soit $x \in V' \subset P \cap \sigma(P)$. On écrit $x = mu$, avec $m \in M$, $u \in U$. Ici m est la limite de $(\lambda^{-n} x \lambda^n)$ qui est une suite dans $P \cap \sigma(P)$ (car $\lambda \in P \cap \sigma(P)$ puisque $\sigma(A) = A$), donc dans P. Il résulte de (2.10) que la limite de $(\sigma(\lambda)^{-n} \lambda^{-n} x \lambda^n \sigma(\lambda)^n)$ est égale à la limite de $(\sigma(\lambda)^{-n} m \sigma(\lambda)^n)$. Comme $x \in V$, cette limite est e, donc $m \in \sigma(U)$. Finalement $m \in M \cap \sigma(U)$. Par ailleurs A, donc aussi λ et $\sigma(\lambda)$ normalisent Q et V, donc aussi V'. Ainsi, la limite m est élément de V', donc u aussi. En particulier $u \in \sigma(P)$, et finalement $u \in U \cap \sigma(P)$.

Ceci prouve l'inclusion $V' \subset (M \cap \sigma(U))(U \cap \sigma(P))$. L'inclusion inverse est évidente. Ceci prouve la première égalité de (ii).

Maintenant soit $u \in U \cap \sigma(P)$. On écrit $x = m'u'$ avec $m' \in \sigma(M)$, $u' \in \sigma(U)$. Alors m' est la limite de $(\sigma(\lambda)^{-n} x \sigma(\lambda)^n)$. Comme $x \in U$, $(\lambda^{-n} x \lambda^n)$ tend vers e. Une application répétée de (2.10) montre que :

$$lim_n(\lambda^{-n} m' \lambda^n) = lim_n(\lambda^{-n} \sigma(\lambda)^{-n} x \sigma(\lambda)^n \lambda^n) = lim_n(\sigma(\lambda)^{-n} e \sigma(\lambda)^n) = e$$

Donc $m' \in U \cap \sigma(M)$.

On montre de même que $u' \in U \cap \sigma(U)$. Donc : $U \cap \sigma(P) \subset (U \cap \sigma(M))(U \cap \sigma(U))$. L'inclusion inverse est évidente et ceci achève de prouver la deuxième égalité de (ii).

Comme $\sigma(U)$ est distingué dans $\sigma(P)$, $P \cap \sigma(U)$ est distingué dans $V' \subset P \cap \sigma(P)$. On a donc prouvé (ii).

Montrons (iii). Comme $\sigma(\mu) = \mu$, Q est σ-stable et $\sigma(V) = V$.

Soit alors $p \in P \cap H$. On écrit, grâce à (i), $p = mv$ avec $m \in M \cap \sigma(M)$, $v \in V' = V \cap P \cap \sigma(P)$. Alors $p = \sigma(m)\sigma(v)$ avec $\sigma(m) \in M \cap \sigma(M)$, $\sigma(v) \in V'$. Mais ces deux décompositions doivent coincider : $\sigma(m) = m$ et $\sigma(v) = v$.

D'où l'on déduit l'égalité de (iii).

Le fait que $V' \cap H$ est distingué dans $P \cap H$ résulte de (ii) et de l'égalité : $P \cap H = \sigma(P) \cap H$. Ceci achève de prouver (iii).

(iv) Notons $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M, $\sigma(\mathfrak{u})$ l'algèbre de Lie de $\sigma(U)$. Le groupe $L\cap\sigma(U)$ est un groupe algébrique unipotent, de même que V'. Son application exponentielle est donc définie et surjective.

Soit $x \in M\cap\sigma(U) \subset V'$. Alors $x = exp(X)$ avec $X \in \mathfrak{m}\cap\sigma(\mathfrak{u})$. Alors $X+\sigma(X)$ est élément de l'algèbre de Lie de V'. On note $h = exp(X+\sigma(X))$, c'est un élément de $V'\cap H$. Alors h et x ont la même projection dans $V'/(U\cap\sigma(P)) \simeq M\cap\sigma(U)$ à savoir : $exp(X)$. Donc $x = hg$ avec $g \in U\cap\sigma(P)$. Ceci achève la preuve de la proposition. □

2.3. $H\cap P$-homologie lisse

Soit X une sous-variété de $X(M)$, la variété des caractères non ramifiés de M. On note B_X, l'algèbre des fonctions à valeurs complexes sur X engendrée par les fonctions b_m, $m\in M$, où $b_m(\chi) = \chi(m)$, pour $\chi \in X$. On la notera souvent B au lieu de B_X. Alors si (δ, V_δ) est un M-module lisse, $V_{\delta_B} = V_\delta \otimes B$ est un (M,B)-module pour la représentation lisse δ_B, de M, définie par :

$$\delta_B(m)(v\otimes b) = \delta(m)v\otimes b_m b, \quad b\in B, m\in M \tag{2.12}$$

et B agissant par multiplication sur le deuxième facteur. On étend cette action de M à P en faisant agir U trivialement.

Lemme 2.2. — *Avec les notations ci-dessus, $H_*(P\cap H, V_{\delta_B})$ est un B-module naturellement isomorphe à $H_*(M\cap H, H_0(M\cap\sigma(U), V_\delta)_B)$. Ici $H_0(M\cap\sigma(U), V_\delta)$ est muni d'une structure naturelle de $M\cap\sigma(M)$-module, car $M\cap\sigma(U)$ est le radical unipotent du sous-groupe parabolique de M, $M\cap\sigma(P)$, de sous-groupe de Lévi $M\cap\sigma(M)$.*

Démonstration. — Le groupe $P\cap H$ admet pour sous-groupe distingué $V'\cap H$, avec $M\cap H$ pour quotient. De plus V', donc aussi $V'\cap M$, est réunion de sous-groupes compacts, comme sous-groupe fermé du radical unipotent V de Q. Donc (cf. Proposition 4), $H_*(P\cap H, V_{\delta_B})$ est isomorphe à $H_*(M\cap H, H_0(V'\cap H, V_{\delta_B}))$. On vérifie aisément que c'est un isomorphisme de B-modules.

Il s'agit donc d'étudier $H_0(V'\cap H, V_{\delta_B})$. On va démontrer que pour toute représentation lisse (δ, V_δ) de M, étendue à P en faisant agir U trivialement, la surjection naturelle de $H_0(V'\cap H, V_\delta)$ dans $H_0(V', V_\delta)$ est un isomorphisme.

Il suffit pour cela de prouver la surjectivité de l'application transposée :

$$H_0(V', V_\delta)^* \to H_0(V'\cap H, V_\delta)^*$$

Mais, il est clair que $H_0(V' \cap H, V_\delta)^*$ est égal à $Hom_{V' \cap H}(V_\delta, \mathbb{C})$

Soit $T \in Hom_{V' \cap H}(V_\delta, \mathbb{C})$ et soit $x \in M \cap \sigma(U)$. D'après la Proposition 2.1 (iv), on a :

(2.13) $\quad x = hy$ *pour un* $h \in H \cap V'$ *et un* $y \in U \cap \sigma(P)$

Si $v \in V_\delta$, on a :

$$T(\delta(x)v) = T(\delta(hy)v)$$

et finalement :

$$T(\delta(x)v) = T(v)$$

car $\delta(y)v = v$ puisque $y \in U$ et $T(\delta(h)v) = T(v)$ car $T \in Hom_{H \cap V'}(V_\delta, \mathbb{C})$.

Par ailleurs si $x \in U \cap \sigma(P)$, $\delta(x)v = v$ et, grâce à la Proposition 2.1 (ii), on a finalement $T \in Hom_{V'}(V_\delta, \mathbb{C})$. Ceci prouve l'isomorphisme voulu.

L'isomorphisme $H_0(V' \cap H, \delta_B) \simeq H_0(V', \delta_B)$ est clairement un isomorphisme de B-modules. Mais comme les caractères non ramifiés de M sont triviaux sur le groupe unipotent $M \cap \sigma(U)$, $M \cap \sigma(U)$ agit sur $V_{\delta_B} = V_\delta \otimes B$ par δ sur le premier facteur et trivialement sur le second. Finalement on a un isomorphisme de B-modules :

$$H_0(M \cap \sigma(U), V_{\delta_B}) \simeq H_0(M \cap \sigma(U), V_\delta) \otimes B$$

Par ailleurs $H_0(M \cap \sigma(U), V_\delta)$ de même que $H_0(M \cap \sigma(U), V_{\delta_B})$ est un $M \cap \sigma(M)$-module, puisque $M \cap \sigma(M)$ est un sous-groupe de Lévi du sous-groupe parabolique $M \cap \sigma(P)$ de M. Alors l'isomorphisme ci-dessus détermine un isomorphisme de $(M \cap \sigma(M), B)$-modules entre :

$$H_0(M \cap \sigma(U), V_{\delta_B}) \simeq H_0(M \cap \sigma(U), V_\delta)_B$$

Ceci achève la preuve du Lemme. □

Proposition 2.3. — *On suppose que V_δ est un M-module lisse admissible de type fini, que X contient le caractère trivial de M, qu'il existe z_0 élément de l'intersection du centre de $M \cap \sigma(M)$ avec H et qu'il existe $\chi \in X$ tels que $\chi(z_0) \neq 1$. Alors il existe $q \in B = B_X$, non constant, produit d'éléments de la forme $1 - cb_{z_0}, c \in \mathbb{C}^*$, tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le B-module : $H_p(H \cap M, H_0(M \cap \sigma(U), V_\delta)_B)$ soit annulé par q.*

Démonstration. — Le $M \cap \sigma(M)$-module, $H_0(M \cap \sigma(U), V_\delta)$ est admissible de type fini. Donc il existe des caractères $\chi_1, ..., \chi_n$ du centre Z de $M \cap \sigma(M)$ tels que pour tout $z \in Z$, l'action de $(z - \chi_1(z))(z - \chi_2(z))...(z - \chi_n(z))$ soit nulle. En utilisant l'égalité :

$$(z - \chi(z)b_z)(v \otimes b) = ((z - \chi(z))v) \otimes b_z b, v \in V_\delta, b \in B$$

on voit que : $(z-\chi_1(z)b_z)...(z-\chi_n(z)b_z)$ agit trivialement sur le $(M\cap\sigma(M),B)$-module $(H_0(M\cap\sigma(U),V_\delta))_B$, donc aussi sur l'homologie lisse, $H_*(M\cap H,H_0(M\cap\sigma(U),V_\delta)_B)$.

Mais, d'après le Corollaire 2 (cf. Proposition 1.8) , pour tout cycle φ, $z_0\varphi$ est cohomologue à φ car z_0 est élément du centre de $M\cap H$. On en déduit que l'élément q de B défini par :

$$q:=(1-\chi_1(z_0)b_{z_0})...(1-\chi_n(z_0)b_{z_0})\in B$$

annule $H_*(M\cap H,H_0(M\cap\sigma(U),V_\delta)_B)$, donc $H_*(P\cap H,V_{\delta_B})$ d'après le Lemme précédent. Alors q a les propriétés voulues. □

2.4. (H,P)-doubles classes

Un tore déployé de G, $A_\emptyset$ contenu dans $\{g\in G|\sigma(g)=g^{-1}\}$ et de dimension maximale, sera dit tore σ-déployé maximal,($(\sigma,\mathbb{F})$-torus dans [13]). On appelle σ-sous groupe parabolique de G tout sous-groupe, P, de la forme P_λ, pour un $\lambda\in\Lambda(A_\emptyset)$, où $A_\emptyset$ est un tore σ-déployé maximal. Alors $\sigma(P)=P_{\lambda^{-1}}$ est opposé à P relativement à $A_\emptyset$.

Enfin HP est ouvert : en effet les algèbres de Lie de P et $\sigma(P)$, $\mathfrak{p}$ et $\sigma(\mathfrak{p})$ ont pour somme l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

Soit $x\in\mathfrak{g}$. On a $x=y+z$ avec $y\in\mathfrak{p}$, $z\in\sigma(\mathfrak{p})$. Donc $x=y'+h$ avec $y'=y-\sigma(z)\in\mathfrak{p}$ et $h=z+\sigma(z)\in\mathfrak{h}$.

Donc $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{p}$ ce qui implique que HP contient un voisinage de e, l'élément neutre. Finalement HP est bien ouvert.

D'après [13], Proposition 6.15, si P_0 est un sous-groupe parabolique minimal de G, le nombre de (H,P_0)-doubles classes est fini, donc aussi le nombre de (H,P)-doubles classes.

Par ailleurs, d'après [12], Théorème 2.9 (i), P contient un σ-sous-groupe parabolique minimal $P_\emptyset$ contenant $A_\emptyset$. Le groupe $A_\emptyset$ est l'unique tore σ-déployé maximal du sous-groupe de Lévi σ-stable de $P_\emptyset$, $P_\emptyset\cap\sigma(P_\emptyset)$ qui est égal au centralisateur de $A_\emptyset$.

On note $(A_i)_{i\in I}$, un ensemble de représentants des classes de H-conjugaison des tores σ-déployés maximaux de G. On suppose que cet ensemble contient $A_\emptyset$. Les A_i sont tous conjugués sous G, d'après la Proposition 1.16 de [12].

On choisit, pour tout i, un $x_i\in G$, avec $x_iA_\emptyset x_i^{-1}=A_i$ en prenant $x_\emptyset=e$. On note $\mathcal{P}_i$ l'ensemble des σ-sous-groupes paraboliques minimaux contenant A_i, qui est fini (cf. [12], Proposition 2.7).

Les éléments de $\mathcal{P}_i$ sont tous conjugués entre eux par des éléments du normalisateur de A_i (cf. l.c.). Comme les A_i sont conjugués entre eux, tous les éléments de $\mathcal{P}_i$ sont conjugués sous G à $P_\emptyset$ et $P_i := x_i\ P_\emptyset\ x_i^{-1}$.

On note M_i le centralisateur dans G de A_i. Si L est un sous-groupe de G, on note $W_L(A_i)$ le quotient du normalisateur dans L de A_i par son centralisateur. On note $W(A_i)$ au lieu de $W_G(A_i)$.

On note $\mathcal{W}_i$, ou $\mathcal{W}_i^G$, un ensemble de représentants dans $N_G(A_\emptyset)$ de $W_{H_i}(A_\emptyset) \setminus W(A_\emptyset)$ où $H_i = x_i^{-1}Hx_i$. On note $\mathcal{W}^G = \bigcup_{i\in I}\{x_i x | x \in \mathcal{W}_i^G\}$.

Alors (cf. [12], Théorème 3.1) :

(2.14) *$\mathcal{W}^G$ forme un ensemble de représentants des $(H, P_\emptyset)$-doubles classes ouvertes dans G. Tout $x \in \mathcal{W}^G$ vérifie $\sigma(x^{-1})x \in M_\emptyset$ et $xA_\emptyset x^{-1}$ est σ-déployé maximal.*

En particulier, comme l'ensemble des $(H, P_\emptyset)$-doubles classes est fini (cf. [13], Corollaire 6.16), on voit que I est fini.

Soit P un σ-sous-groupe parabolique contenant $P_\emptyset$. On note M le sous-groupe de Levi de P contenant $A_\emptyset$. On note $\mathcal{W}_{M,i}$ ou $\mathcal{W}_{M,i}^G$ un ensemble de représentants dans $N_G(A_\emptyset)$ des doubles classes $W_{H_i}(A_\emptyset)\setminus W(A_\emptyset)/W_M(A_\emptyset)$ contenant l'élément neutre e.

Lemme 2.4. — *Toute (H, P)-double classe ouverte de G est de la forme HyP où y est un élément de :*

$$\mathcal{W}_M^G = \bigcup_{i\in I}\{x_i x | x \in \mathcal{W}_{M,i}^G\}$$

En particulier toute (H, P)-double classe ouverte est de la forme HyP où $P^y := yPy^{-1}$ est un σ-sous-groupe parabolique de G, $yA_\emptyset y^{-1}$ est σ-déployé maximal et $\sigma(y)^{-1}y \in M_\emptyset$. On notera $\overline{\mathcal{W}}_M^G$ un ensemble de représentants des (H, P)-doubles classes ouvertes, contenant e, et contenu dans $\mathcal{W}_M^G$.

Démonstration. — Soit $y = x_i x$ avec $x \in \mathcal{W}_i^M$. Alors $Hx_i xP_\emptyset$ est ouvert d'après ce qui précède. Donc HyP est ouvert.

Réciproquement si Ω est une (H, P)-double classe ouverte, elle contient une $(H, P_\emptyset)$ double classe ouverte (cf e.g. Appendice, Lemme 3.1), donc de la forme $Hx_i xP$ avec $y \in N_G(A_\emptyset)$ d'après (2.14). Comme $Hx_i yP = Hhx_i ymP$ pour $h \in H$, $m \in M$, il en résulte que $\Omega = Hx_i xP$ pour un $x \in \mathcal{W}_{M_i}$. □

Soit P un sous-groupe parabolique σ-stable de G. On note A (resp A_M) le plus grand tore σ-déployé (resp. tore déployé) du centre du sous-groupe de Levi σ-stable de P, $M = P \cap \sigma(P)$. Si $x \in G$ et E est une partie de G, on note $E^x := xEx^{-1}$.

On note $X(M)_\sigma$ l'ensemble des caractères non ramifiés de M antiinvariants par σ. C'est un sous-groupe algébrique du groupe algébrique défini sur $\mathbb{C}$, $X(M)$, des caractères non ramifiés de M. On note X (resp. $X_\mathbb{R}$) l'ensemble des caractères non ramifiés de M qui sont l'image par l'application de (2.4) (pour M au lieu de G), de l'ensemble des éléments de $(\mathfrak{a}_M^*)_\mathbb{C}$ (resp. $\mathfrak{a}_M^*$) anti-invariants par σ (qui laisse invariant A_M donc aussi $\mathfrak{a}_M$). Alors X est la composante connexe de l'élément neutre du sous-groupe algébique $X(M)_\sigma$ de $X(M)$. L'algèbre B_X est l'algèbre des fonctions régulières sur ce groupe algébrique connexe, qui est donc une variété irréductible. Cette algèbre est donc sans diviseur de zéro. On la note désormais B.

Notez que si $\chi \in X$, alors χ est trivial sur H : en effet l'antiinvariance de χ par σ montre que pour $h \in H$ fixé, $(\chi(h))^2 = 1$, ce qui par, connexité de X, implique que $\chi(h) = 1$.

On note $X_\mathbb{R}^x$ (resp. X^x) l'ensemble des caractères non ramifiés de M^x obtenus par transport de structure de M à M^x, via la conjugaison par x, des éléments de $X_\mathbb{R}$ (resp. X).

On note A_0 un tore déployé maximal σ-stable contenu dans P et contenant A.

Lemme 2.5. — *Avec les notations précédentes, soit Ω une (H, P)-double classe. Alors :*

(i) *$\Omega = HxP$ pour un x tel que A_0^x soit un tore déployé maximal et σ-stable contenu dans P^x.*

(ii) *Soit λ un élément de $\Lambda(A^x) \subset \Lambda(A_0^x)$ tel que $P^x = P_\lambda$. On note $\mu = \lambda\sigma(\lambda)$. C'est un élément du centre de $M^x \cap \sigma(M^x)$. Supposons que Ω ne soit pas ouverte.*

Alors il existe $\chi \in X_\mathbb{R}^x$ tel que $\chi(\mu) \neq 1$.

Démonstration. — Écrivons $\Omega = HyP$. D'après [13], Lemme 2.4, $P' := yPy^{-1}$ contient A_0' un tore déployé maximal stable par σ. Soit M' le sous-groupe de Lévi de P' contenant A_0'. Alors yMy^{-1} et M' sont des sous-groupes de Lévi de P', donc conjugués par un élément p' de P'. On peut même se ramener au cas où p' conjugue les tores déployés maximaux de P', yA_0y^{-1} et A_0'. On pose $x = p'y$. Alors $xA_0x^{-1} = A_0'$ et $HxP = HyP$ car $p' \in yPy^{-1}$. Ceci prouve (i).

Montrons (ii). Comme $\Omega = HxP$ n' est pas ouvert, HP^x n'est pas ouvert. Comme $P^x = P_\lambda$ on n'a pas $\sigma(\lambda) = \lambda^{-1}$, sinon $\sigma(P_\lambda)$ serait un σ-sous-groupe parabolique de G et HP_λ serait ouvert. Donc μ est différent de e. Raisonnons par l'absurde et supposons l'assertion du Lemme fausse.

Alors, par transport de structure, tout élément de X est trivial sur $x^{-1}\lambda x x^{-1}\sigma(\lambda)x$. Mais $x^{-1}\lambda x \in \Lambda(A)$ et $x^{-1}\sigma(\lambda)x \in \Lambda(A_0)$. Le réseau $\Lambda(A_0)$ s'identifie grâce à l'application (2.2) (pour $G = A_0$) à un sous-réseau dans $\mathfrak{a}_0$.

Notant $\mathfrak{a}_\emptyset$(resp. $\mathfrak{a}_0^\sigma$) l'espace des éléments antiinvarants (resp. invariants) de σ dans $\mathfrak{a}_0$, $\Lambda(A_\emptyset)$ s'identifie à un sous-réseau de $\mathfrak{a}_\emptyset$.

Grâce à (2.3), $\mathfrak{a}_M$ s'identifie à un sous-espace de $\mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^M \oplus \mathfrak{a}_M$.

Soit $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_\emptyset \cap \mathfrak{a}_M$ et soit $\mathfrak{a}_M^\sigma$ l'espace des points fixes de $\mathfrak{a}_M$ sous σ. Alors $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_M^\sigma \oplus \mathfrak{a}$ et $\Lambda(A)$ s'identifie à un sous-réseau de $\mathfrak{a}$.

Il est facile de voir qu'un élément $\Lambda(A_0) \subset \mathfrak{a}_0$ est trivial sur tous les éléments de X si et seulement si sa projection sur $\mathfrak{a}$ parallèlement à $\mathfrak{a}_M^\sigma \oplus \mathfrak{a}_0^M$ est nulle. Notons $p_\mathfrak{a}$ cette projection. Comme l'assertion de (ii) est supposée fausse, ce qui précède montre que :

$$p_\mathfrak{a}(x^{-1}\lambda x) = -p_\mathfrak{a}(x^{-1}\sigma(\lambda)x)$$

et comme $x^{-1}\lambda x \in \mathfrak{a}$, on a :

$$x^{-1}\lambda x = -p_\mathfrak{a}(x^{-1}\sigma(\lambda)x) \tag{2.15}$$

On munit $\mathfrak{a}_0$ d'un produit scalaire invariant par le groupe de Weyl $W(A_0)$. On le prend même invariant par le groupe des automorphismes du système de racines $\Sigma(A_0)$ de A_0 dans l'algèbre de Lie de G. En particulier le produit scalaire est σ-invariant. Alors la projection $p_\mathfrak{a}$ est une projection orthogonale. Mais $x^{-1}\lambda x$ et $\sigma(x^{-1})\sigma(\lambda)\sigma(x)$ sont de même norme et :

$$x^{-1}\sigma(\lambda)x = x^{-1}\sigma(x)(\sigma(x^{-1})\sigma(\lambda)\sigma(x))\sigma(x)^{-1}x$$

Donc $x^{-1}\sigma(\lambda)x$ et $\sigma(x^{-1})\sigma(\lambda)\sigma(x)$ sont conjugués par $x^{-1}\sigma(x)$ qui normalise A_0 car A_0^x est σ-invariant. Ces deux éléments de $\mathfrak{a}_0$ sont donc de même norme, égale à celle de $x^{-1}\lambda x$, d'après les propriétés d'invariance de la norme.

Comme $p_\mathfrak{a}$ est une projection orthogonale, on déduit de (2.15) que :

$$p_\mathfrak{a}(x^{-1}\sigma(\lambda)x) = x^{-1}\sigma(\lambda)x$$

et

$$x^{-1}\lambda x = -x^{-1}\sigma(\lambda)x$$

dans $\mathfrak{a}_0$.

Ce qui conduit à : $\lambda\sigma(\lambda) = e$. Une contradiction qui achève de prouver le Lemme. □

On conserve les notations du Lemme précédent. Soit (δ, V_δ) un représentation de M. On définit le (M, B)-module (δ_B, V_{δ_B}) comme en (2.12).

On notera B^x l'algèbre des fonctions sur X^x déduite de B par transport de structure, via la conjugaison par x. Alors $((\delta_B)^x, V_{(\delta_B)^x})$ a une structure naturelle de (P^x, B^x)-module équivalente par transport de structure à $((\delta^x)_{B^x}, V_{(\delta^x)_{B^x}})$.

Lemme 2.6. — *Avec les notations ci-dessus, on suppose que HxP n'est pas ouverte.*

Alors il existe $q \in B$, non constant, produit de facteurs de la forme $1 - cb_m, c \in \mathbb{C}^*, m \in M$, tel que la multiplication par q annule le B-module $H_*(H, ind_{P^x \cap H}^H (\delta_B)^x{}_{|P^x \cap H})$.

Démonstration. — En appliquant le Lemme de Shapiro (cf. Proposition 1.14) et le Lemme2.2 on voit que le B-module $H_*(H, ind_{P^x \cap H}^H (\delta_B)^x)$ s'identifie à $H_*(M^x \cap \sigma(U), V_{(\delta_B)^x})$.

Alors, par transport de structure, le Lemme résulte de la Proposition 2.3 appliqué à P^x et à $z_0 = \mu$, car $(\delta_B)^x$ s'identifie naturellement à $(\delta^x)_{B^x}$. □

2.5. H-homologie et (H, P)-doubles classes ouvertes

On note $\mathcal{O}$, la réunion des (H, P)-doubles classes ouvertes dans G et on définit :

$$J_B = \{\varphi \in I_B | supp\varphi \subset \mathcal{O}\}$$

où $I_B = ind_P^G V_{\delta_B}$. C'est un sous-$(H, B)$-module de I_B.

On suppose désormais que δ est admissible de type fini.

Théorème 2.7. —

(i) *Il existe $q \in B$, non nul, produit d'éléments $1 - cb_m, c \in \mathbb{C}^*, m \in M$, qui annule le B-module $H_*(H, I_B/J_B)$.*

(ii) *On fixe un ensemble $\overline{\mathcal{W}}_M^G$ de représentants des (H, P)-doubles classes ouvertes comme dans le Lemme 2.4. Alors :*

$$H_*(H, J_B) = \bigoplus_{x \in \overline{\mathcal{W}}_M^G} H_*(M^x \cap H, \delta^x) \otimes_{\mathbb{C}} B$$

En particulier $H_*(H, J_B)$ est un B-module libre.

(iii) *Si $\xi \in Hom_B(H_0(H, J_B), B)$, il existe un unique $\tilde{\xi} \in Hom_B(H_0(H, I_B), B)$, tel que :*

$$\tilde{\xi}(i(\psi)) = q\xi(\psi), \psi \in H_0(H, J_B)$$

où i est le morphisme $H_0(H, J_B) \to H_0(H, I_B)$, déduit de l'injection canonique $J_B \to I_B$.

Démonstration. — (i) Le H-module I_B/J_B admet, d'après la Proposition 1.17, une filtration telle que l'on peut appliquer le Lemme 2.6 à ses sous-quotients. La longue suite exacte d'homologie permet de conclure que le produit des éléments de B, déterminés par l'application de ce Lemme à chacun des sous-quotients, annule $H_*(H, I_B/J_B)$.

(ii) Notons, pour $x \in \overline{\mathcal{W}}_M^G$, $J_B^x = \{\varphi \in I_B | supp\varphi \subset HxP\}$, alors :

$$J_B = \bigoplus_{x \in \overline{\mathcal{W}}_M^G} J_B^x$$

Mais, d'après la Proposition 1.17, J_B^x est isomorphe comme (H, B)-module à $ind_{H\cap P^x}^H (\delta_B)^x{}_{|H\cap P^x}$. Donc, d'après le Lemme de Shapiro :

$$H_*(H, J_B^x) \simeq H_*(H \cap M^x, V_{(\delta_B)^x})$$

et ceci comme B-module. D'après le Lemme 2.4, P^x est un σ-sous-groupe parabolique. De plus M^x est σ-stable car l'est et $\sigma(x)^{-1}x \in M_\emptyset \subset M$. Les éléments de X se transportent par x en des caractères non ramifiés de M^x, triviaux sur $H \cap M^x$. Il en résulte que comme $(H \cap M^x, B)$-module, $V_{(\delta_B)^x}$ est isomorphe à $V_{\delta^x} \otimes B$ où $H \cap M^x$ n'agit que sur le premier facteur et B que sur le second. Et (ii) en résulte immédiatement.

Prouvons (iii). On dispose de la suite exacte de B-modules :

$$(2.16) \quad H_1(H, I_B/J_B) \xrightarrow{c} H_0(H, J_B) \xrightarrow{i} H_0(H, I_B) \xrightarrow{p} H_0(H, I_B/J_B) \to 0$$

qui est donnée par la longue suite exacte d'homologie. Ici i est donné par passage au quotient de l'injection naturelle $J_B \to I_B$, et p par passage au quotient de la projection naturelle $I_B \to I_B/J_B$.

Soit $\varphi \in H_0(H, I_B)$. Alors $q\varphi$ a une image nulle dans $H_0(H, I_B/J_B)$, d'après (i). Donc $q\varphi$ est dans l'image par i de $H_0(H, J_B)$, d'après (2.16), i.e. :

$$(2.17) \quad q\varphi = i(\psi) \textit{ pour un } \psi \in H_0(H, J_B)$$

Montrons que ψ est unique. En effet si : $i(\psi) = i(\psi') = q\varphi$, alors $\psi - \psi'$ est dans le noyau de i, donc dans l'image de c, i.e. : $\psi - \psi' = c(\eta)$ pour $\eta \in H_1(H, I_B/J_B)$. D'après (i), η est annulé par la multiplication par q. Donc $q\eta$ est nul ainsi que $c(q\eta) = q(\psi - \psi') \in H_0(H, J_B)$. Mais d'après (ii), $H_0(H, J_B)$ est un B-module libre. Donc $\psi - \psi' = 0$ comme désiré.

On pose alors :

(2.18) $\tilde{\xi}(\varphi) := \xi(\psi)$ *pour* $\varphi \in H_0(H, I_B)$*, où* ψ *est l'unique élément de* $H_0(H, J_B)$ *tel que* $i(\psi) = q\varphi$

Calculons maintenant $\tilde{\xi}(i(\psi))$ pour $\psi \in H_0(H, J_B)$. Comme $qi(\psi) = i(q\psi)$, on a :

$$\tilde{\xi}(i(\psi)) = \xi(q\psi) = q\xi(\psi)$$

comme désiré.

Si un autre $\tilde{\xi}'$ vérifiait (iii), alors $\tilde{\xi} - \tilde{\xi}'$ serait nul sur $i(H_0(H, I_B))$ qui est égal à $Ker(p)$. D'après (i), ce noyau contient $qH_0(H, I_B)$. Donc :

$$(\tilde{\xi} - \tilde{\xi}')(q\varphi) = q(\tilde{\xi} - \tilde{\xi}')(\varphi) = 0,\ \ \varphi \in H_0(H, I_B)$$

Comme l'algèbre B est sans diviseur de 0 (voir après le Lemme 2.4), $(\tilde{\xi} - \tilde{\xi}')(\varphi) \in B$ est nul pour tout $\varphi \in H_0(H, I_B)$ comme désiré. $\square$

2.6. Spécialisation du Théorème 2.7

Soit K un sous-groupe compact maximal de G qui est le fixateur d'un point spécial de l'appartement associé à A_0 dans l'immeuble de G.

On note I l'espace de $ind_{K\cap P}^{K}\delta_{|_{K\cap P}}$. Alors la restriction des fonctions à K détermine un isomorphisme de K-modules entre l'espace I_χ de $\pi_\chi := ind_P^G(\delta \otimes \chi)$, $\chi \in X(M)$ (resp. I_B de $\pi_B := ind_P^G\delta_B$) et I (resp. $I \otimes B$). On note $\overline{\pi}_\chi$ (resp $\overline{\pi}_B$) la représentation de G sur I (resp. $I \otimes B$) déduite de π_χ (resp π_B) par transport de structure via cet isomorphisme.

Si $\varphi \in I$ et $\chi \in X(M)$, on note φ_χ l'élément de l'espace I_χ correspondant à φ par cet isomorphisme.

On note φ_B l'élément de l'espace I_B de $ind_P^G\delta_B$ dont la restriction à K est $\varphi \otimes 1_B \in I \otimes B$, où 1_B est l'unité de B. On note ev_χ l'évaluation en χ des éléments de B et $\mathcal{J}_\chi$ son noyau. Alors

$$\varphi_\chi = ev_\chi(\varphi_B)$$

où on a noté $ev_\chi(\varphi_B)$ au lieu de $(id_{V_\delta} \otimes ev_\chi)(\varphi_B)$. Il en résulte que :

(2.19) *Pour tout $\varphi \in I$ et $g \in G$, $\chi \mapsto \overline{\pi}_\chi(g)\varphi$ est un élément de $I \otimes B$ égal à $\overline{\pi}_B(g)(\varphi \otimes 1_B)$.*

Pour tout B-module M, on note $M_{(\chi)} = M/\mathcal{J}_\chi M$ sur lequel tout élément $b \in B$ agit par $b(\chi)$. Alors on a facilement :

(2.20) *l'application ev_χ entre $I_B = ind_P^G V_{\delta_B}$ et $ind_P^G V_{\delta\otimes\chi}$ passe au quotient en un isomorphisme entre $(ind_P^G V_{\delta_B})_{(\chi)}$ et $ind_P^G V_{\delta\otimes\chi}$,*

ce qui se voit aisément dans la réalisation compacte.

On note $J_\chi = \{\varphi \in I_\chi | Supp\varphi \in \mathcal{O}\}$

Théorème 2.8. —

(i) *Pour tout $\chi \in X, n \in \mathbb{N}$, on a un isomorphisme linéaire naturel :*

$$H_n(H, J_\chi) \simeq \oplus_{x \in \overline{\mathcal{W}}_M^G} H_n(M^x \cap H, V_{\delta^x})$$

(ii) *Faisant $n = 0$ dans (i) et passant au dual, on en déduit un isomorphisme naturel :*

$$J_\chi^{*H} \simeq \mathcal{V}_\delta \text{ où } \mathcal{V}_\delta := \oplus_{x \in \overline{\mathcal{W}}_M^G} (V_{\delta^x}^*)^{M^x \cap H}$$

Celui-ci associe à $\eta \in {V_{\delta^x}^*}^{M^x \cap H}$ (i.e. $\eta \in {V_\delta^*}^{M \cap x^{-1} H x}$), $\xi(P, \delta, \chi, \eta) \in J_\chi^*$ défini par

$$\xi(P, \delta, \chi, \eta)(\varphi) = \int_{H/M^x \cap H} < \varphi(hx), \eta > d\dot{h}, \ \varphi \in J_\chi$$

(iii) *Avec les notations du Théorème 2.7, soit $\chi \in X$ avec $q(\chi) \neq 0$. Notons i_χ l'injection naturelle de J_χ dans I_χ. Celle-ci passe au quotient en un isomorphisme noté encore $i_\chi : H_0(H, J_\chi) \tilde{\to} H_0(H, I_\chi)$ dont la transposée détermine un isomorphisme : ${I_\chi^*}^H \to {J_\chi^*}^H$ donné par la restriction, r_χ, des formes linéaires de I_χ à J_χ.*

On notera pour $\eta \in \mathcal{V}_\delta$, $j(P, \delta, \chi, \eta)$ l'élément de ${I_\chi^*}^H$ correspondant à $\xi(P, \delta, \chi, \eta)$ dans cet isomorphisme.

(iv) *On note $\bar{j}(P, \delta, \chi, \eta)$ l'élément de I^* déduit de $j(P, \delta, \chi, \eta)$ par transport de structure à l'aide de r_χ. Alors, pour tout $\varphi \in I$, l'application : $\chi \mapsto q(\chi) < \bar{j}(P, \delta, \chi, \eta), \varphi >$ définie sur l'ensemble des $\chi \in X$ tels que $q(\chi) \neq 0$ admet un prolongement régulier à X tout entier (i.e. se prolonge en un élément de B).*

On dira que $\chi \mapsto q\bar{j}(P, \delta, \chi, \eta)$ est une famille polynomiale de formes linéaires sur I_δ.

Démonstration. — (i) se prouve comme la partie (ii) du Théorème 2.7. (ii) résulte de l'explicitation des isomorphismes.

Prouvons (iii). Montrons la surjectivité de r_χ. Soit $\theta \in J_\chi^{*H}$. D'après l'isomorphisme du Théorème 2.7 (ii), il existe $\xi \in Hom_B(H_0(H, J_B), B)$ tel que ξ passe au quotient en un élément de :

$$Hom_{\mathbb{C}}(H_0(H, J_B)_{(\chi)}, B_{(\chi)}) \simeq Hom_{\mathbb{C}}(H_0(H, J_\chi), \mathbb{C}) \simeq J_\chi^{*H}$$

égal à θ. Alors utilisant l'élément $\tilde{\xi}$ de $Hom_B(H_0(H, I_B), B)$ donné par le Théorème 2.7 (iii) et localisant en χ comme ci-dessus, on trouve $\tilde{\theta} \in I_\chi^{*H}$ tel que :

$$\tilde{\theta}(\psi) = q(\chi)\theta(\psi), \ \psi \in J_\chi$$

Alors si $q(\chi) \neq 0$, $q(\chi)^{-1}\tilde{\theta} \in I_\chi^{*H}$ a pour image θ par r_χ. Donc r_χ est bien surjective.

Montrons maintenant que r_χ est injective. Soit $\tilde{\theta} \in Ker\ r_\chi$. Alors $\tilde{\theta}$ s'identifie à un élément de :

$$(I_\chi/J_\chi)^{*H} \simeq H_0(H, I_\chi/J_\chi)^*$$

Comme $(I_B/\mathcal{J}_\chi I_B)/(J_B/\mathcal{J}_\chi J_B) \simeq I_B/(J_B + \mathcal{J}_\chi I_B)$, on a un isomorphisme de H-modules :

$$I_\chi/J_\chi \simeq (I_B/J_B)_{(\chi)}$$

Donc $H_0(H, I_\chi/J_\chi) \simeq H_0(H, (I_B/J_B)_{(\chi)})$. Mais on vérifie facilement que pour tout (H, B)-module lisse, V, on a :

$$(H_0(H, V))_{(\chi)} \simeq H_0(H, V_{(\chi)}) \tag{2.21}$$

Donc

$$H_0(H, I_\chi/J_\chi) = H_0(H, I_B/J_B)_{(\chi)}$$

Mais la multiplication par q annule I_B/J_B donc aussi $H_0(H, I_B/J_B)$. Comme $q(\chi) \neq 0$, on en déduit que $H_0(H, I_B/J_B)_{(\chi)} = \{0\}$ et l'isomorphisme précédent implique que $H_0(H, I_\chi/J_\chi)^*$ est réduit à $\{0\}$. Donc $\tilde{\theta} = 0$ et r_χ est bien injective.

Prouvons (iv). Soit $\eta \in \mathcal{V}_\delta$. D'après le théorème 2.7 (ii), $Hom_B(H_0(H, J_B), B)$ s'identifie naturellement à $\mathcal{V}_\delta$. On note ξ l'élément de $Hom_B(H_0(H, J_B), B)$ correspondant à η par cet isomorphisme et $\tilde{\xi}$ l'élément de $Hom_B(H_0 (H, I_B), B)$ déterminé par le Théorème 1 (iii).

L'élément $\tilde{\xi}$ de $Hom_B(H_0(H, I_B), B)$ détermine, à l'aide de la projection naturelle $I_B \to H_0(H, I_B)$ et de l'isomorphisme de B-modules, décrit plus haut, entre I_B et $I \otimes B$, un élément $\bar{\xi}$ de $Hom_B(I_\delta \otimes B, B)$.

Les constructions (cf. la preuve de la surjectivité de r_χ dans (iii)) montrent que, lorsque $q(\chi)$ est non nul :

$$< q(\chi)\bar{j}(P, \delta, \chi, \eta), \varphi >= (\bar{\xi}(\varphi \otimes 1_B))(\chi)$$

Alors (iv) résulte du fait que $\bar{\xi}(\varphi \otimes 1_B) \in B$. □

2.7. Représentations rationnelles H-sphériques

Les deux faits suivants montrent comment des questions d'invariance par un sous-groupe se ramènent à des questions d'invariance par une sous-algèbre de Lie. On note $\underline{G}$ un groupe algébrique défini sur un corps algébriquement clos $\mathfrak{k}$, de caractéristique zéro. Alors (cf. [16], 13.1) :

Soit (π, V) une représentation rationnelle de dimension finie de $\underline{G}$ et W un sous-espace vectoriel de V. On note encore π la représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\underline{G}$ dans V. Alors le sous-groupe $H := \{g \in \underline{G} | \pi(g)W \subset W\}$ est un sous-groupe fermé de $\underline{G}$, admettant $\mathfrak{h} := \{X \in \mathfrak{g} \,|\pi(X)W \subset W\}$ comme algèbre de Lie.

De plus (cf. [16], 13.2)) :

Si H est un sous groupe fermé de $\underline{G}$, possédant la même algèbre de Lie que $\underline{G}$, alors $H = \underline{G}$.

Nous utiliserons ces résultats pour la clôture algébrique de $\mathbb{F}$. Nous utiliserons également les propriétés des représentations de plus haut poids de dimension finie pour les algèbres de Lie semi-simples sur cette clôture algébrique (cf. [17], ch. VI).

Soit $P_\emptyset$ un σ-sous-groupe parabolique minimal de G, $M_\emptyset = P_\emptyset \cap \sigma(P_\emptyset)$ le sous-groupe de Lévi σ-stable de $P_\emptyset$, $A_\emptyset$ le plus grand tore σ-déployé du centre de $M_\emptyset$ qui est un tore σ-déployé maximal. On fixe A_0 un tore déployé maximal contenant $A_\emptyset$, i.e. un tore déployé maximal de $M_\emptyset$ et σ-stable (cf. [13], Lemme 4.5).

On remarque qu'alors σ agit naturellement sur $\mathfrak{a}_0$ et que $\mathfrak{a}_\emptyset$ s'identifie au sous-espace des éléments antiinvariants de $\mathfrak{a}_0$. On note P_0 un sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans $P_\emptyset$ et contenant A_0. On note P un σ-sous-groupe parabolique de G contenant $P_\emptyset$ et M son sous-groupe de Lévi σ-stable. On note U_0 (resp. $U_\emptyset$, resp. U) le radical unipotent de P_0 (resp. $P_\emptyset$, resp. P). On note $A_{G,\sigma}$ le plus grand tore σ-déployé de A_G et $\mathfrak{a}_G^\sigma$ (resp. $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$) l'ensemble des points fixes (resp. antiinvariants) de $\mathfrak{a}_G$ sous σ.

On note p_σ la projection de $\mathfrak{a}_G$ sur $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$ parallèlement à $\mathfrak{a}_G^\sigma$ et $H_{G,\sigma}$ la composée $p_\sigma \circ H_G$.

Alors, remarquant que tout caractère rationnel de G tel que $\chi^\sigma = \chi^{-1}$ vérifie $\chi^2 = \chi\chi^{-\sigma}$, on établit immédiatement que :

(2.22) *Le noyau G_σ^1 de $H_{G,\sigma}$ est égal à l'intersection des noyaux des caractères $|\chi|_\mathbb{F}$ où χ décrit l'ensemble des caractères rationnels de G tels que $\chi^\sigma = \chi^{-1}$.*

Nous appelerons dans cet article représentation de plus haut poids Λ, $\Lambda \in Rat(M_0)$, une représentation rationnelle de G, définie sur $\mathbb{F}$ dans un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$ de dimension finie, (*non nécessairement irréducible*) possédant un vecteur non nul v_Λ, dit de plus haut poids Λ, de poids Λ et invariant par U_0 et se transformant par Λ sous M_0, et telle que les poids de A_0 dans cette représentation, identifiés à des éléments de $\mathfrak{a}_0^*$ soient égaux à la différence de la forme linéaire correspondant à Λ avec une somme à coefficients entiers positifs, de racines de A_0 dans l'algèbre de Lie de U_0.

Par passage à la clôture algébrique et à l'algèbre de Lie (voir le début du paragraphe) on voit qu'une représentation irréductible de plus haut poids

Λ, si elle existe, est unique à isomorphisme près. De même on voit qu'une représentation rationnelle de dimension finie est irréductible de plus haut poids Λ, si et seulement si elle est engendrée par un vecteur de plus haut poids Λ.

(2.23) *On remarque, par passage à l'algèbre de Lie, que si $\Lambda \in Rat(M_0)$ est le plus haut poids d'une représentation irréductible rationnelle de G et $\Lambda \in \mathfrak{a}_G^*$, alors cette représentation est un caractère rationnel de G.*
Si, de plus, $\Lambda \in \mathfrak{a}_{G,\sigma}^*$, ce caractère, χ_Λ, vérifie $\chi_\Lambda \circ \sigma = \chi_\Lambda^{-1}$.

Soit $\Lambda \in Rat(M_0)$ *tel que* $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$, *i.e. tel qu'il soit nul sur* $\mathfrak{a}_{M_0}^M$.

Pour une représentation irréductible de plus haut poids Λ (si elle existe), (π_Λ, V_Λ), on note

$$e_{\Lambda,H}^* \in (V_\Lambda \otimes V_\Lambda^*)^* \simeq V_\Lambda^* \otimes V_\Lambda \simeq EndV_\Lambda$$

l'élément correspondant à l'identité de V_Λ.

Alors $e_{\Lambda,H}^* = \sum_{i=1}^m e_i^* \otimes e_i$ où (e_i) est une base de V_Λ et (e_i^*) la base duale. On note v_Λ^* un élément de V_Λ^* de poids Λ^{-1} sous M_0 et vérifiant $< v_\Lambda^*, v_\Lambda >= 1$. Celui-ci est unique. La droite $\mathbb{F}v_\Lambda^*$ est invariante par le sous-groupe parabolique opposé à P_0, P_0^{opp}, relativement à A_0.

Alors, d'après (2.23) appliqué à M au lieu de G, on voit que $\mathbb{F}v_\Lambda^*$ est invariante par M, car $\Lambda \in \mathfrak{a}_M^*$. Donc cette droite est aussi invariante par le sous-groupe engendré par M et P_0^{opp}, qui est égal au sous-groupe parabolique opposé à P , relativement à A_0. Mais celui-ci est égal à $\sigma(P)$ puisque P est un σ-sous-groupe parabolique contenant $P_\emptyset$. Alors v_Λ^* est un vecteur de plus haut poids $\Lambda^{-1} \circ \sigma$ pour la représentation irréductible $\pi_\Lambda^* \circ \sigma$. En prenant $e_1 = v_\Lambda$ et les autres e_i dans le noyau de v_Λ^*, on a $e_1^* = v_\Lambda^*$ et on voit que :

$$< e_{\Lambda,H}^*, \tilde{v}_\Lambda >= 1, \ \ avec \ \tilde{v}_\Lambda = v_\Lambda \otimes v_\Lambda^*$$

Par ailleurs $e_{\Lambda,H}^*$ est invariant sous G par $\pi_\Lambda^* \otimes \pi_\Lambda$, donc par H sous $\pi_\Lambda^* \otimes (\pi_\Lambda \circ \sigma)$. On notera :

$$\tilde{\Lambda} := \Lambda(\Lambda^{-1} \circ \sigma), (\pi_{\tilde{\Lambda}}, V_{\tilde{\Lambda}}) := (\pi_\Lambda \otimes (\pi_\Lambda^* \circ \sigma), V_\Lambda \otimes V_\Lambda^*)$$

Une inspection des poids montre que le sous-espace de poids $\tilde{\Lambda}$ de $V_{\tilde{\Lambda}}$ sous M_0 est de dimension 1, et la représentation $\pi_{\tilde{\Lambda}}$,*qui n'est pas nécessairement irréductible*, est de plus haut poids $\tilde{\Lambda}$.

(2.24) *$(\pi_{\tilde{\Lambda}}, V_{\tilde{\Lambda}})$ est une représentation de plus haut poids $\tilde{\Lambda}$, avec un vecteur de plus haut poids $\tilde{\Lambda}$, $v_{\tilde{\Lambda}}$ et un vecteur H-invariant dans $(V_{\tilde{\Lambda}})^*$ pour $(\pi_{\tilde{\Lambda}})^*$, $\tilde{e}_{\Lambda,H}^*$ vérifiant $< \tilde{e}_{\Lambda,H}^*, v_{\tilde{\Lambda}} >= 1$*

Un élément de $\mathfrak{a}_0^*$ antiinvariant par σ est un élément de $\mathfrak{a}_\emptyset{}^*$ par la maximalité de $\mathfrak{a}_\emptyset$.

On note $\Sigma(G, A_0)$ (resp. $\Sigma(P_0, A_0)$ ou $\Sigma(P_0)$) l'ensemble des racines de A_0 dans l'algèbre de Lie de G, (resp. P). On note $\Delta(P_0)$ l'ensemble des racines simples de $\Sigma(P_0)$. Si Θ est une partie de $\Delta(P_0)$, on note $< \Theta >$ le sous-système de $\Sigma(P_0)$ engendré par Θ et $P_{<\Theta>}$ le sous-groupe parabolique de P_0 pour lequel $\Sigma(P_0) \cup < \Theta >$ est l'ensemble des racines de A_0 dans l'algèbre de Lie de P_Θ. On définit $\Theta_\emptyset, \Theta \subset \Delta(P_0)$ par les égalités :

$$P_\emptyset = P_{<\Theta_\emptyset>}, P = P_{<\Theta>}$$

On écrit

$$\Delta(P_0) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \Delta(P_0) \setminus \Theta_\emptyset = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\},$$
$$\Delta(P_0) \setminus \Theta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},$$

de sorte que $k \geqslant l \geqslant m$.

On note $\delta_1, ..., \delta_k \in \mathfrak{a}_0^*$ les poids fondamentaux. Ils sont nuls sur $\mathfrak{a}_G$, et pour $i = 1, \dots, m$, $\delta_i \in \mathfrak{a}_M^*$.

Proposition 2.9. —

(i) *Il existe des entiers $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_i \delta_i$ corresponde à un plus haut poids Λ_i d'une représentation rationnelle (π_i, V_i) de G.*

(ii) *Avec les notations précédentes, on note $\tilde{V}_i$ au lieu de $V_{\tilde{\Lambda}_i}$, $\tilde{\pi}_i$ au lieu de $\pi_{\tilde{\Lambda}_i}$, $i = 1, ..., m$.*

Pour $i = 1, ..., m$, la droite $\mathbb{F}\tilde{v}_i$ est invariante par M et $\tilde{v}_i$ est invariant par M_σ^1.

On notera

$$\tilde{\delta}_i := \delta_i - \delta_i \circ \sigma$$

Démonstration. — La partie (i) de la proposition résulte de la théorie des représentations rationnelles de G (cf. [4], proposition 12.13). Passons à (ii). Soit $i \in \{1, ..., m\}$. Alors $\tilde{v}_i$ engendre une représentation de M de plus haut poids $n_i \tilde{\delta}_i$ qui est un élément de $\mathfrak{a}_M^*$ car $i \in \{1, ..., m\}$ et même de $\mathfrak{a}_{M,\sigma}^*$, auquel on peut appliquer (2.23). □

Remarque 2.10. —

(i) Un argument utilisant les puissances tensorielles montre que les multiples entiers non nuls des n_i vérifient les mêmes propriétés.

(ii) Écrivant $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^\sigma \oplus \mathfrak{a}_\emptyset$, on a $\tilde{\delta}_i \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$ pour $i = 1, ..., l$. De plus écrivant $\mathfrak{a}_\emptyset = (\mathfrak{a}_0^M \cap \mathfrak{a}_\emptyset) \oplus \mathfrak{a}_{M,\sigma}$, on a $\tilde{\delta}_i \in \mathfrak{a}_{M,\sigma}^*$ pour $i = 1, ..., m$ avec $\tilde{\delta}_i$ nul sur $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$. De plus l'ensemble $\{\tilde{\delta}_i | i = 1, ..., m\}$ engendre $(\mathfrak{a}_{M,\sigma}/\mathfrak{a}_{G,\sigma})^*$.

On suppose la numérotation choisie de sorte que $(\tilde{\delta}_1, ..., \tilde{\delta}_{m'})$ forme une base de $\mathfrak{a}^*_{M,\sigma}$ avec $m' \leqslant m$.

Proposition 2.11. —

(i) *Soit $i \in \{m+1, ..., l\}$, i.e. $\alpha_i \in \Theta \setminus \Theta_\emptyset$. Il existe un entier n_i tel que $n_i \delta_i$ (resp $n_i {\delta_i}^M$, qui est l'élément de $\mathfrak{a}^*_0$ égal à $n_i\delta_i$ sur $\mathfrak{a}_0^M$ et nul sur $\mathfrak{a}_M$), corresponde à un plus haut poids Λ_i (resp Λ_i^M) d'une représentation rationnelle de G (resp. de M). Les multiples entiers des n_i vérifient les mêmes propriétés. Noter que δ_i^M est un poids fondamental pour le système de racines $< \Theta >$ et $(\Lambda_i)(\Lambda_i^M)^{-1}$ détermine, grâce à (2.33), un caractère rationnel $\Lambda_{i,M}$ de M, qui correspond à $n_i \delta_{i|\mathfrak{a}_M} \in \mathfrak{a}^*_M$.*

(ii) *Le vecteur v_{Λ_i} engendre sous M une représentation irréductible de plus haut poids Λ_i notée $\overline{V}_i^M$ contenue dans V_i. Alors $\tilde{\overline{V}}_i^M := \overline{V}_i^M \otimes (\overline{V}_i^M)^*$ s'identifie à un sous espace de $\tilde{V}_i$, qui est stable par $\tilde{\pi}_{i|M}$. Cette représentation s'identifie au produit tensoriel du caractère rationnel $\tilde{\Lambda}_{i,M} := \Lambda_{i,M}(\Lambda_{i,M}^{-1} \circ \sigma)$ de M avec la représentation irréductible de M, $\tilde{V}_i^M$, associée à Λ_i^M par la construction (2.24).*

La restriction de $\tilde{e}^*_{i,H}$ à $\tilde{\overline{V}}_i^M$ détermine un vecteur non nul, $H \cap M$-invariant, qui s'identifie au vecteur $1 \otimes \tilde{e}^*_{i,M\cap H}$.

Démonstration. —

(i) résulte de la Proposition et de la Remarque précédentes.

(ii) est immédiat. □

2.8. Propriétés de l'adhérence des (H, P)-doubles classes ouvertes

On choisit les entiers n_i comme dans les Propositions précédentes.
Pour $i = 1, ..., m$, on définit :

$$\varepsilon_i(g) = |< \tilde{\pi}_i(g)\tilde{v}_i, \tilde{e}^*_{i,H} > |_{\mathbb{F}}, g \in G$$

On note $\varepsilon = \prod_{i=1}^{m'} \varepsilon_i$.

Proposition 2.12. —

(i) *L'ouvert de G, HP, est contenu dans $\{g \in G | \, \varepsilon(g) \neq 0\}$.*

(ii) *Soit $\overline{HP}$ l'adhérence de HP dans G. Alors $\overline{HP} \backslash HP$ est contenu dans $\{g \in G | \varepsilon(g) = 0\}$.*

(iii) *Si la suite* $(g_n) = (h_n m_n u_n)$, *avec* $h_n \in H, m_n \in M, u_n \in U$, *converge vers un élément de* $\overline{HP}\backslash HP$ *et* $\nu \in \mathfrak{a}^*_{M,\sigma}$ *est strictement* P*-dominant, alors la suite* $(e^{\nu(H_{M,\sigma}(m_n))})$ *tend vers zéro.*

Démonstration. — Elle est analogue à celle du Lemme 4 de [6]. Nous allons expliquer les modifications nécéssaires.

D'abord si $g = hmu$ avec $h \in H$, $m \in M$, $u \in U$, $\varepsilon(g)$ est égal à :

$$\prod_{i=1}^{m'} | < \tilde{\pi}_i(m)\tilde{v}_i, \tilde{e}^*_{i,H} > |_{\mathbb{F}}$$

qui est non nul d'après la Proposition 2.9 (ii). Ceci achève de prouver (i).

Montrons (ii). On considère une suite (g_n) dans HP convergeant vers $g \in \overline{HP} \setminus HP$. On écrit $g_n = h_n m_n u_n$ avec $h_n \in H, m_n \in M, u_n \in U$. On va montrer que l'image dans $\mathfrak{a}_{M,\sigma}/\mathfrak{a}_{G,\sigma}$ de la suite $(H_{M,\sigma}(m_n))$, par la projection canonique, n'est pas bornée. La projection de $(H_{M,\sigma}(m_n))$ sur $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$ parallèlement à $\mathfrak{a}^G \cap \mathfrak{a}_{M,\sigma}$ est égale à $(H_{G,\sigma}(g_n))$, car $H_{G,\sigma}(h_n) = 0$ et $H_{G,\sigma}(u_n) = H_G(u_n) = 0$. C'est une suite dans un réseau, qui est convergente d'après l'hypothèse sur (g_n). Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que cette suite est constante, ce que l'on fait. Il faut démontrer que $(H_{M,\sigma}(m_n))$ n'est pas bornée.

Supposons $(H_{M,\sigma}(m_n))$ bornée. Comme $H_{M,\sigma}$ prend ses valeurs dans un sous-groupe discret de $\mathfrak{a}_{M,\sigma}$, quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $H_{M,\sigma}(m_n)$ est constant. Quitte à multiplier, à droite, (g_n) par un élément de M convenable, on dispose d'une suite (g_n) convergeant vers $g \in \overline{HP}\backslash HP$ avec $g_n = h_n m_n u_n$ et $H_{M,\sigma}(m_n) = 0$, i.e. $m_n \in M^1_\sigma$.

En utilisant la Proposition 2.9 (ii), on voit que :

$$\tilde{\pi}_i(m_n)\tilde{v}_i = \tilde{v}_i, \quad n \in \mathbb{N}, i = 1, ..., m'$$

Par ailleurs $(\sigma(g_n)^{-1} g_n)$ converge. Donc, posant $\overline{u_n} = \sigma(u_n)^{-1} \in \overline{U}$, où $\overline{U} = \sigma(U)$, on a $(\overline{u_n}(\sigma(m_n^{-1}) m_n u_n)$ qui converge.

On montre un analogue du Lemme 5 de [6] qui permet de voir que $\overline{u_n}$ converge de même que u_n. Il en va donc de même de $\sigma(m_n)^{-1} m_n$.

Notons G^σ (resp. M^σ) le groupe des points fixes de σ dans G (resp. M).

L'application de $M^\sigma\backslash M$ dans M, $M^\sigma m \mapsto \sigma(m)^{-1} m$, est un homéomorphisme de $M^\sigma\backslash M$ sur son image. Ceci résulte du Lemme 3.1 de l' Appendice, appliqué à l'action par conjugaison tordue de M sur $M^{-\sigma} = \{m \in M | \sigma(m) = m^{-1}\}$:

$$m.x = mx\sigma(m)^{-1}, m, x \in M$$

En effet M n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $M^{-\sigma}$ (cf. [22]).

On en déduit que $(M^\sigma m_n)$ converge, ce qui veut dire qu'il existe une suite (m'_n) dans M^σ telle que $(m'_n m_n)$ converge. Mais $M^\sigma/(M\cap H)$ est fini. Donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut trouver (h'_n), suite dans $M\cap H$, telle que $(h'_n m_n)$ converge dans M. On écrit alors $g_n = h_n {h'_n}^{-1} h'_n m_n u_n$ i.e. $g_n = h''_n m''_n u_n$ avec $h''_n = h_n {h'_n}^{-1}$, $m''_n = h'_n m_n$.

Alors (m''_n) converge dans M de même que (u_n) dans U donc aussi (h''_n) dans H. Mais alors on aurait $g \in HP$. Une contradiction qui montre que l'image de $(H_{M,\sigma}(m_n))$ dans $\mathfrak{a}_{M,\sigma}/\mathfrak{a}_{G,\sigma}$ est non bornée. Mais pour $i = 1,...,m'$:

$$\varepsilon_i(g_n) = e^{n_i\tilde{\delta}_i(H_{M,\sigma}(m_n))}$$

et $(\varepsilon_i(g_n))$ converge vers $\varepsilon_i(g)$. Si pour tout $i=1,...,m'$, $(\varepsilon_i(g_n))$ convergeait vers une limite non nulle, on en déduirait que $(H_{M,\sigma}(m_n))$ serait bornée modulo $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$, car $(\tilde{\delta}_1,...,\tilde{\delta}_{m'})$ est une base de $(\mathfrak{a}_{M,\sigma}/\mathfrak{a}_{G,\sigma})^*$. Donc l'un des $\varepsilon_i(g)$ est nul, comme désiré.

(iii) résulte de la preuve de (ii). □

Si $i\in\{1,...,l\}$, on fixe une base de V_i formée de vecteurs poids sous A_0, ce qui permet de définir une norme sur V_i en prenant le maximum des valuations des coordonnées dans cette base. Puis on en déduit une norme sur $\tilde{V}_i^* = EndV_i$, en prenant le maximum des valuations des coefficients de la matrice dans cette base.

On pose, pour $g\in G$:

$$(2.25)\qquad \|gH\|_i = \|\tilde{\pi}_i^*(g)\tilde{e}^*_{i,H}\|,\ i=1,...,l \quad \text{et} \quad \|gH\|_0 = e^{\|H_{G,\sigma}(g)\|}$$

où l'on a muni $\mathfrak{a}_{G,\sigma}$ de la norme provenant du produit scalaire sur $\mathfrak{a}_0$.

On définit :

$$(2.26)\qquad \|gH\| = \prod_{i=o}^{l}\|gH\|_i,\ \ g\in G$$

Remarque 2.13. — On remarque que $\tilde{\pi}_i^*(g)\tilde{e}^*_{i,H}$ est égal à $\pi_i(g^\sigma g^{-1})$ et $\|gH\|_i$ est la norme de l'opérateur $\pi_i(g^\sigma g^{-1})$ associée à la norme introduite ci-dessus sur V_i.

On définit de manière similaire une application $m\to\|m(M\cap H)\|$ pour $m\in M$, en utilisant les représentations rationnelles de M associées aux $n_i\tilde{\delta}_i^M$, $i\in\{m+1,...,l\}$ (cf. Proposition 2.11).

PROPOSITION 2.14. — *Il existe $\nu_0\in\mathfrak{a}^*_{M,\sigma}$, P-dominant, tel que pour toute suite (g_n) dans HP, convergeant vers un élément g de $\overline{HP}\setminus HP$, on ait la propriété suivante :*

Écrivant $g_n = h_n m_n u_n$ avec $h_n\in H, m_n\in M, u_n\in U$, il existe $C>0$ tel que la suite $\|m_n^{-1}(M\cap H)\|$ soit bornée par $Ce^{-\nu_0(H_{M,\sigma}(m_n))}$.

Démonstration. — On choisit $i \in \{m+1, ..., l\}$ i.e. $\alpha_i \in \Theta$ et une base de $\tilde{V}_i^M$, $(\tilde{v}_{i,j})$, construite à partir d'une base de vecteurs poids sous A_0 de V_i^M. On pose :

$$\varepsilon_{i,j}(g) := | < \tilde{\pi}_i(g)\tilde{v}_{i,j}, \tilde{e}^*_{i,H} > |_{\mathbb{F}}, \quad g \in G$$

Alors $((\varepsilon_{i,j})(g_n))$ est bornée car elle converge vers $((\varepsilon_{i,j})(g))$.

De plus, grâce à la Proposition 2.11 (ii), on voit que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,j}(g_n) &= |\tilde{\Lambda}_{i,M}(m_n)|_{\mathbb{F}} \ | < (\tilde{\pi}_i^M)(m_n)\tilde{v}_{ij}, \tilde{e}^*_{i,M\cap H} > |_{\mathbb{F}} \\ &= e^{n_i\tilde{\delta}_i(H_{M,\sigma}(m_n))} | < (\tilde{\pi}_i^M)(m_n)\tilde{v}_{ij}, \tilde{e}^*_{i,M\cap H} > |_{\mathbb{F}} \end{aligned}$$

En passant au sup sur j et en posant $\tilde{\nu}_i = n_i\tilde{\delta}_{i|\mathfrak{a}_{M,\sigma}}$, on trouve :

$$Sup_j \varepsilon_{i,j}(g_n) = e^{\tilde{\nu}_i(H_{M,\sigma}(m_n))} \|m_n^{-1}(M \cap H)\|_i, i = m+1, \dots, l$$

On déduit de ce qui précède que :

(2.27) $\prod_{i=m+1}^l \|m_n^{-1}(M \cap H)\|_i$ *est bornée par un multiple de* $\prod_{i=m+1}^l e^{-\tilde{\nu}_i(H_{M,\sigma}(m_n))}$ *pour* $i = m+1, \dots, l$

Par ailleurs, pour $i = 1, ..., m'$, $(\varepsilon_i(g_n))$ est bornée.

Mais $\varepsilon_i(g_n) = e^{n_i\tilde{\delta}_i(H_{M,\sigma}(m_n))}$, donc, pour $i = 1, ..., m'$, $(n_i\tilde{\delta}_i(H_{M,\sigma}(m_n)))$ est bornée supérieurement de sorte que :

(2.28) *Pour* $i = 1, ..., m'$, $(e^{|n_i\tilde{\delta}_i(H_{M,\sigma}(m_n)|})$ *est bornée par un multiple de* $(e^{-n_i\tilde{\delta}_i(H_{M,\sigma}(m_n)})$.

Revenant à la définition de $\|m(M \cap H)\|_0$, on voit qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\|m(M \cap H)\|_0 \leqslant e^{(c\sum_{i=1,\dots,m'} |n_i\tilde{\delta}_i(H_{M,\sigma}(m))|) + \|H_{G,\sigma}(m)\|}, m \in M$$

On notera $\tilde{\nu}_0 = \sum_{i=1}^{m'} cn_i\delta_i$ et $\nu_0 = \tilde{\nu}_0 + \sum_{i=m+1}^l \tilde{\nu}_i$. Alors d'après (2.28) et (2.27) et le fait que $(H_{G,\sigma}(m_n)) = (H_{G,\sigma}(g_n))$ est bornée, on voit que ν_0, vérifie les propriétés voulues. □

2.9. Une autre présentation des fonctions j

Les racines de A_M dans l'algèbre de Lie de G s'identifie à des éléments de $\mathfrak{a}_M^*$. Soit ρ_P la demi-somme des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de U (ou P), comptées avec les multiplicités.

On note $C(G, P, -2\rho_P)$ l'espace des fonctions continues, $f : G \to \mathbb{C}$, telles que :

$$f(gmu) = e^{-2\rho_P(H_M(m))} f(g), \ \ g \in G, m \in M, u \in U$$

Alors :

(2.29) *Si $f \in C(G,P,-2\rho_P)$, la restriction de f à K est invariante à droite par $K \cap P$ et la forme linéaire sur $C(G,P,-2\rho_P)$: $f \to \int_{K/K\cap P} f(k(K\cap P))d\dot{k}$ est invariante par translation à gauche par les éléments de G.*

Soit $C(G,P,\delta^*,\chi)$ l'espace des fonctions $\psi : G \to V_\delta^*$, où V_δ^* est le dual algébrique de V_δ, qui sont faiblement continues i.e. telles que pour tout $v \in V_\delta$, $g \mapsto < \psi(g), v >$ est continue sur G et telles que

$$\psi(gmu) = e^{-2\rho_P(H_M(m))}\chi(m)\delta^*(m)^{-1}\psi(g) \tag{2.30}$$

Remarque 2.15. — Le facteur 2 dans $2\rho_P$ tient compte du fait que nous avons choisi l'induction non normalisée.

Alors si $\psi \in C(G,P,\delta^*,\chi)$ et $\varphi \in I_\chi = ind_P^G V_{\delta\otimes\chi}$, l'application $g \mapsto < \psi(g), \varphi(g) >$ est continue sur G, car φ est localement constante, et c'est un élément de $C(G,P,-2\rho_P)$.

On pose :

$$< \psi, \varphi >= \int_{K/K\cap P} < \psi(k), \varphi(k) > d\dot{k}$$

Ceci définit un crochet de dualité G-invariant entre $C(G,P,\delta^*,\chi)$ et I_χ qui permet de regarder $C(G,P,\delta^*,\chi)$ comme un sous-espace de I_χ^*.

Théorème 2.16. — *Soit (δ, V_δ) une représentation admissible de type fini de M, $\eta \in V_\delta^{*M\cap H}$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que :*

Pour tout $v \in V_\delta$, il existe $C > 0$ tels que :

$$| < m\eta, v > | \leqslant C\|m(M\cap H)\|^r, \quad m \in M$$

Soit ν_0 comme dans la Proposition 2.14. Soit $\chi \in X(M)_\sigma$ et vérifiant $Re\chi - 2\rho_P - r\nu_0$ strictement P-dominant.

On définit une application $\varepsilon(G,P,\delta,\chi,\eta)$ de G dans V_δ^* par :

$$\varepsilon(G,P,\delta,\chi,\eta)(hmu) = e^{-2\rho_P(H_M(m))}\chi(m)\delta^*(m^{-1})\eta, h \in H, m \in M, u \in U$$

$$\varepsilon(G,P,\delta,\chi,\eta)(g) = 0 \quad si \quad g \notin HP$$

(i) *Alors $\varepsilon(G,P,\delta,\chi,\eta)$ est un élément de $C(G,P,\delta^*,\chi)$, H-invariant à gauche.*

(ii) *Soit $q \in B$ comme dans le Théorème 2.7 (i). On suppose que χ vérifie les hypothèses de (i) et que $q(\chi)$ est non nul.*

L'élément de I_χ^{*H} correspondant à l'élément $\varepsilon(G,P,\delta,\chi,\eta)$ de $C(G,P,\delta^*,\chi)$, est égal à $j(P,\delta,\chi,\eta)$.

Démonstration. — La partie (i) est une conséquence immédiate des propriétés de η, de la Proposition 2.12 (iii) et de la Proposition 2.14.

Prouvons (ii). On a l'analogue de la formule du Lemme 1.3 de [21] pour les groupes p-adiques (c.f. l.c., Théorème 7.1) qui implique :

> *Soit f une fonction continue sur $K/K \cap P$ nulle en dehors de $(HP) \cap K$, alors, pour une normalisation convenable des mesures :*

$$\int_{K/K\cap P} f(k(K \cap P))d\dot{k} = \int_{H/H\cap M} f(k(h)(K \cap P))e^{-2\rho_P(H_M(h))}d\dot{h} \tag{2.31}$$

> *où l'on a écrit $h = k(h)p$ avec $k(h) \in K$ et $p \in P$. La classe de $k(h)$ modulo $K \cap P$ est bien définie. De plus ρ_P étant antiinvariante par σ, $h \mapsto \rho_P(H_M(h))$ est invariante à droite par $H \cap P = H \cap M$.*

Si $f \in C(G, P, -2\rho_P)$, sa restriction à K est $K \cap P$ invariante et on a :

$$f(h) = f(k(h)(K \cap P))e^{-2\rho_P(H_M(h))}, \ h \in H$$

De plus la restriction de f à H est $H \cap M$-invariante.

Alors il résulte de ce qui précède que :

> *Pour $f \in C(G, P, -2\rho_P)$ nulle en dehors de HP, on a :*

$$\int_{K/K\cap P} f(k(K \cap P))d\dot{k} = \int_{H/H\cap M} f(h)d\dot{h} \tag{2.32}$$

Soit $\varphi \in I_\chi$ avec χ comme dans (ii). La définition de $\varepsilon(G, P, \delta, \chi, \eta)$ et son invariance à droite par H, jointe à l'équation précédente montre que :

$$\int_{K/K\cap P} < \varepsilon(G, P, \delta, \chi, \eta)(k(K \cap P)), \varphi(k(K \cap P)) > d\dot{k} = \int_{H/H\cap M} < \eta, \varphi(h) > d\dot{h} \tag{2.33}$$

Ceci implique en particulier que la restriction de l'élément ε_χ de I_χ^{*H} à J_χ, correspondant à $\varepsilon(G, P, \delta, \chi, \eta)$ est égal, avec les notations du Théorème 2.8 (ii), à $\xi(P, \delta, \chi, \eta) \in J_\chi^{*H}$.

Alors, d'après le Théorème 2.8 (iii), cet élément est égal à $j(P, \delta, \chi, \eta)$. □

Remarque 2.17. — Des résultats récents de Nathalie Lagier, montrent que la condition sur η est toujours satisfaite.

3. Appendice : Rappels sur les l-groupes

Lemme 3.1. —

(i) *Soit G un l-groupe, X un l-espace, i.e. un espace topologique avec une base d'ouverts formée d'ensembles compacts. On suppose que X est muni d'une action continue de G, i.e. que l'application $G \times X \to X$ est continue, que G n'a qu'un nombre fini d'orbites dans X et que G est dénombrable à l'infini. Alors :*

(i) *Il existe une orbite ouverte.*

(ii) *Il existe des ouverts G-invariants, $U_0 = \emptyset \subset U_1 \cdots \subset U_n = X$, où pour $i \geqslant 0$, $U_{i+1} \setminus U_i$ est une G-orbite. En particulier les orbites sont localement fermées, donc sont des l-espaces, i.e. admettent une base de voisinages ouverts et compacts.*

(iii) *Si X_1 est une orbite Gx_1 et H est le stabilisateur de x_1, alors H est un sous groupe fermé de G et l'application : $G/H \to X_1$ donnée par $gH \to gx_1$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. — Prouvons (i). Soit $x_1, \ldots, x_p$ des représentants des orbites sous G dans X, en nombre fini par hypothèse. Soit (K_n) un ensemble dénombrable d'ouverts compacts recouvrant G. Si $X = \bigcup_{i,n} K_n x_i$, les $K_n x_i$ sont compacts donc fermés. D'après le théorème de Baire, l'un de ces ensembles, $K_n x_i$, est d'intérieur non vide, donc Gx_i est ouvert dans X.

Prouvons (ii). On construit U_i par récurrence sur i. On prend pour U_i une orbite ouverte et pour U_{i+1} la réunion de U_i et d'une orbite ouverte dans $X \setminus U_i$.

Prouvons (iii). L'application $p\ : G/H \to X_1$ est clairement continue et bijective. Il reste à voir que cette application est ouverte. En utilisant les translations, il suffit pour cela de voir que tout voisinage de eH dans G/H s'envoie sur un voisinage de x_1 dans X_1. Tout voisinage ouvert compact V de eH dans G/H contient l'image par la projection naturelle de G dans G/H, d'un sous groupe ouvert compact K. Montrons que $G = \bigcup_{n \in N} g_n K$ pour une suite (g_n) d'éléments de G. En effet $G = \bigcup_n K_n$ et chaque K_n étant compact, il est recouvert par un nombre fini d'ensembles de la forme gK. Alors les $(g_n K x_1)_{n \in \mathbb{N}}$ sont fermés et recouvrent X_1. Donc, toujours par le théorème de Baire, l'un d'eux, $g_n K x_1$, est d'intérieur non vide. La translation $x \to g_n^{-1} x$ étant un homoméorphisme, on en déduit que Kx_1 est d'intérieur non vide. Quitte à utiliser encore une translation, par un élément de K cette fois, on voit que Kx_1 contient un voisinage de x_1. Ainsi $p(V)$ contient un voisinage de x_1 comme désiré. Ceci achève de prouver (iii). □

Rappelons un résultat de [18] (Corollaire 2) :

(3.1) *Soit G un l-groupe, H un sous-groupe fermé, le fibré principal : $G \to G/H$est trivial, i.e. il existe une section continue s : $G/H \to G$ de p.*

Lemme 3.2. — *L'application linéaire T : $C_c^\infty(G/H) \otimes C_c^\infty(H) \to C_c^\infty(G)$, définie par : $(T(\psi \otimes \eta))(s(x)h) = \psi(x)\eta(h)$, est un entrelacement bijectif entre le produit tensoriel de la représentation triviale de H sur $C_c^\infty(G/H)$ avec la représentation régulière droite sur $C_c^\infty(H)$ et la représentation régulière droite de H sur $C_c^\infty(G)$. De plus l'inverse de T, T^{-1} est donné par : $(T^{-1}\varphi)(x,h) = \varphi(s(x)h)$. On a un résultat analogue pour l'action régulière gauche.*

Démonstration. — D'abord T est bien à valeurs dans $C_c^\infty(G)$, car, pour un l-espace X, un élément de $C_c^\infty(X)$ est exactement une application continue sur X prenant un nombre fini de valeurs et à support compact. De même on voit que si $\varphi \in C_c^\infty(G)$, l'application : $((x,h) \mapsto \varphi(s(x)h)$, est élément de $C_c^\infty(G/H \times H) \cong C_c^\infty(G/H) \otimes C_c^\infty(H)$, que l'on note $T'\varphi$. Clairement T et T' sont des applicatons inverses l'une de l'autre. D'autre part T à la propriété d'entrelacement voulue. D'où le Lemme. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. N. Bernstein & A. V. Zelevinsky, « Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I », *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (1977), p. 441-472, Sér. 4, 10.

[2] P. Blanc, « Projectifs dans la catégorie des G-modules topologiques », *C.R.Acad.Sc.Paris* (1979), p. 161-163, t.289.

[3] P. Blanc & J.-L. Brylinski, « Cyclic homology and the Selberg principle », *J. Funct. Anal.* (1992), p. 289-330, 109.

[4] A. Borel & J. Tits, « Groupes réductifs », *Publications Mathématiques de l'IHES* (1965), p. 55-151, 27.

[5] A. Borel & N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, Second edition.

[6] J. Brylinski & P. Delorme, « Vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs et prolongement méromorphe d'intégrales d'Eisenstein », *Invent. Math.* (1992), p. 619-664, 109.

[7] J. Carmona & P. Delorme, « Base méromorphe de vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs : équation fonctionnelle », *J. Funct. Anal.* (1994), p. 152-221, 122.

[8] H. Cartan & S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[9] W. Casselman, « A new nonunitarity argument for p-adic representations », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* (1982), p. 907-928, 28.

[10] P. Delorme, « Harmonic analysis on real reductive symmetric spaces », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* **II** (2002), p. 545-554, Higher Ed. Press, Beijing.

[11] A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, CEDIC, Paris, 1980.

[12] A. G. Helminck & G. F. Helminck, « A class of parabolic k-subgroups associated with symmetric k-varieties », *Trans. Amer. Math. Soc.* (1998), p. 4669-4691, 350.

[13] A. G. Helminck & S. P. Wang, « On rationality properties of involutions of reductive groups », *Adv. Math.* (1993), p. 26-96, 99.

[14] Y. Hironaka, « Spherical functions and local densities on Hermitian forms », *J. Math Soc. Japan* (1999), p. 553-581, 51.

[15] Y. Hironaka & F. Sato, « Spherical functions and local densities of alternating forms », *Am. J. Math.* (1988), p. 473-512, 110.

[16] J. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, No. 21, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[17] ———, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, 9, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978, Second printing, revised.

[18] E. Michael, « Selected selection theorems », *Amer. Math. Monthly* (1956), p. 223-238, 63.

[19] O. Offen, « Relative spherical functions on $\wp$-adic symmetric spaces (three cases) », *Pacific J. Math.* (2004), n° 1, p. 97-149, 215.

[20] O. Offen & E. Sayag, « On unitary distinguished representations of GL_{2n} distinguished by the symplectic group », preprint.

[21] G. Olafsson, « Fourier and Poisson transformation associated to a semisimple symmetric space », *Invent. Math.* (1987), p. 605-629, 90.

[22] R. Richardson, « Orbits, invariants and representations associated to involutions of reductive groups », *Invent. Math.* (1982), p. 287-312, 66.

[23] J.-L. Waldspurger, « La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra) », *J. Inst. Math. Jussieu* (2003), p. 235-333, 2.

Manuscrit reçu le 9 mai 2006,
accepté le 4 septembre 2006.

Philippe BLANC & Patrick DELORME
Université de la Méditerranée
Institut de Mathématiques de Luminy
UMR 6206 CNRS
163 Avenue de Luminy Case 907
13288 Marseille Cedex 09 (France)
blanc@iml.univ-mrs.fr
delorme@iml.univ-mrs.fr