ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Bernard MALGRANGE

Les premiers travaux d'Yves Colin de Verdière

Tome 57, nº 7 (2007), p. 2091-2094.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_7_2091_0>

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://aif.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://aif.cedram.org/legal/). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
57, 7 (2007) 2091-2094

LES PREMIERS TRAVAUX D'YVES COLIN DE VERDIÈRE

par Bernard MALGRANGE

J'ai fait la connaissance d'Yves en juin 1964. Il était alors candidat à l'École normale supérieure, et j'étais l'un des deux examinateurs de mathématiques, l'autre étant Jacques-Louis Lions. J'ai perdu depuis mes cahiers d'interrogations et je ne me souviens plus des questions que je lui avait posées ; il m'a dit qu'il s'agissait de continuité des racines d'une équation algébrique, et que cela lui avait paru difficile. En tout cas, il fut reçu.

Je crois bien que je n'entendis plus parler de lui pendant assez longtemps ; je me rappelle toutefois avoir demandé à Henri Cartan, qui était alors directeur des études de mathématiques à Normale, ce qu'il pensait des recrues de l'année précédente, celles que j'avais examinées. Il me cita Yves Colin de Verdière parmi les plus prometteuses.

J'en entendis parler à nouveau beaucoup plus tard ; cela devait être en 1972. J'étais alors membre du Comité consultatif des universités. En cette qualité, j'eus à rapporter sur la candidature d'Yves à la liste d'aptitude aux fonctions de maître de conférences (on dit aujourd'hui, je crois "liste de qualification aux fonctions de professeur"). À l'appui de sa demande figurait sa thèse "Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques" qui a fait l'objet des deux articles parus en 1973 à Compositio Mathematica. Inutile de dire que je fus extrêmement impressionné par ce travail, qui est un véritable tour de force.

J'aimerais en parler un peu aujourd'hui au début de ce colloque, en faisant mes excuses à l'auditoire : beaucoup de personnes, ici, sont bien plus compétentes que moi sur ce sujet, et sur les formules de trace en général. Mais il sera certainement beaucoup question de ce sujet dans ce colloque, alors autant commencer dès maintenant.

Les résultats d'Yves sont, je crois, historiquement, les premiers résultats mathématiques de caractère tout à fait général sur le sujet "Spectre du laplacien et spectre des longueurs", lisez longueurs des géodésiques périodiques. Mais cela ne veut pas dire qu'ils tombaient du ciel sans préavis.

Il y a d'abord l'illustre ancêtre, la formule sommatoire de Poisson : $\sum f(n) = \sum \hat{f}(2\pi n), \hat{f}$ la transformée de Fourier $\int f(x)e^{-ixy}dx$. Si l'on considère les "n" du premier membre comme les racines carrées des valeurs propres du laplacien $\frac{d^2}{dx^2}$ sur le cercle $\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}}$ et les "$2\pi n$" du second membre comme les longueurs des courbes fermées sur le même cercle, cette formule peut s'interpréter comme une relation de ce type. Il en va de même pour la formule sommatoire de Poisson sur $\mathbb{R}^n$ muni d'un réseau. Mais j'imagine que, si l'on avait pas eu d'autres exemples, personne n'aurait eu l'idée de cette interprétation de la formule de Poisson, a priori un peu étrange.

Un résultat plus proche de celui d'Yves est donné par la formule des traces de Selberg. À partir de cette formule, Huber avait pu montrer ceci : sur une surface de Riemann compacte de courbure négative constante, le spectre du laplacien détermine les longueurs des géodésiques périodiques. Ce résultat est un cas particulier de ceux que prouvera Yves.

D'autre travaux qu'il faut signaler sont ceux de Balian et Bloch ; dans une série de trois articles, parus en 1970 et 71 aux Annals of Physics, ces auteurs étudient le spectre d'un problème aux limites dans une cavité, par exemple le problème de Dirichlet pour le laplacien. Alors que la densité des valeurs propres était connue depuis longtemps par la formule de Weyl, ils s'intéressent aux oscillations de cette densité. Ils montrent, par des arguments heuristiques fondés sur l'application de la méthode de la phase stationnaire, que ces oscillations sont liées à la longueur des géodésiques fermées après un nombre fini de réflexions sur le bord. D'après Yves, ce sont ces articles qui lui ont inspiré l'idée de la méthode qu'il emploiera.

Pour être plus ou moins complet, je devrais aussi signaler les travaux de Gutzwiller, datant de la même époque, et consacrés aux relations entre le spectre d'un hamiltonien quantique et les longueurs des orbites périodiques classiques correspondants, travaux eux aussi de nature heuristique. Mais, pour autant que je sache, Yves n'en avait pas connaissance à l'époque de sa thèse.

J'en viens maintenant à ses énoncés. Les énoncés généraux qui concernent toutes les variétés riemanniennes compactes (de classe C^∞) sont assez compliqués ; je me contenterai donc ici de donner un énoncé particulier, celui qui figure dans son premier article. Cet énoncé est le suivant :

Soit M une variété riemannienne compacte de dimension 2, de courbure < 0. Soit $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ le spectre de son laplacien. Soit d'autre part $\mathcal{L}$ l'ensemble des classes d'homotopie libre de M ; pour $a \in \mathcal{L}$, soit L_a la longueur de l'unique géodésique périodique de la classe a.
Alors, on a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} e^{\lambda_k/z} = \Big(\frac{z}{4\pi}\Big) vol\ M + \Big(\frac{z}{4\pi}\Big)^{1/2} \sum_{a\in\mathcal{L}\setminus \mathrm{id}} u_a\, e^{-\frac{z}{4}L_a^2} + 0^+(1)$$

où les u_a sont des réels > 0, et $0^t(z)$ est une fonction de z définie et bornée dans les demi-plans $Rez \geqslant \zeta_0 > 0$.

Cette formule est évidemment à rapprocher du cas particulier de la formule de Poisson qu'on obtient en prenant $f = e^{-x^2/z}$; cette formule classique dans la théorie des fonctions thêta, s'écrit

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2/z} = \sqrt{\pi z} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2 z}.$$

Comme le remarque Yves, dans les hypothèses précédentes, le spectre du laplacien détermine donc le spectre des longueurs. Dans le cas général, ceci reste vrai sous des hypothèses de généricité.

La démonstration, qu'il n'est évidemment pas question de donner ici, repose sur une formule de trace. On part d'une "solution fondamentale complexe " de l'équation de la chaleur, $E(x, y, t)$, définie pour $x, y \in M$ et t complexe avec $Ret > 0$, holomorphe en t, et vérifiant $\frac{\partial E}{\partial t} + \Delta E = 0$, plus une condition aux limites convenable pour $t \to 0$. Si $\{\varphi_k\}$ est une base orthonormée des fonctions propres de Δ, on a $E(x, y, z) = \sum \varphi_k(x)\varphi_k(y)e^{-\lambda_k t}$, d'où $\sum e^{-\lambda_k t} = \int_M E(x, x, t)dx$ (dx la forme de volume de M).

Tout le travail consiste à étudier $E(x, y, t)$ et à estimer l'intégrale, ce qui se fait par application de la phase stationnaire. Dans le cas général, le principe est analogue. Comme je l'ai déjà dit, les difficultés techniques sont grandes, et ce travail est un vrai tour de force.

Quelque temps après le travail d'Yves, deux autres articles sont parus sur le même sujet, dus respectivement à Chazarain et à Duistermaat-Guillemin. Si le premier a été directement influencé par Yves, pour le second, je ne connais pas la réponse ; il faudrait demander aux auteurs(1).

Ces articles utilisent, au lieu de l'équation de la chaleur, l'équation des ondes, ou plus exactement l'équation $\frac{\partial}{\partial t} - i\sqrt{\Delta}$; ils utilisent le fait que le propagateur de cette équation est un opérateur intégral de Fourier au sens

(1) D'après Yves, le travail de Duistermaat et Guillemin est effectivement indépendant et motivé par les travaux de Hörmander sur la fonction spectrale d'un opérateur elliptique

de Hörmander, ce qui les conduit au résultat suivant : si comme ci-dessus, λ_k est la suite des valeurs propres du laplacien d'une variété riemannienne compacte M, alors la distribution $T = \sum e^{\pm i\, t\, \sqrt{\lambda_k}}$ a son support singulier contenu dans le spectre des longueurs. De plus, sous certaines hypothèses de régularité, au voisinage d'un point singulier, T est une distribution du type considéré par Hörmander, dont Duistermaat et Guillemin déterminent le symbole principal.

Ici encore la formule de Poisson donne un exemple ; il suffit pour cela de l'écrire sous la forme suivante $\sum e^{int} = 2\pi \sum \delta(t - 2\pi k)$.

Récemment, Yves a esquissé une méthode pour passer de l'une à l'autre de ces formules, qui semblaient a priori n'être qu'analogiques. Je vais essayer d'indiquer rapidement ce que je crois en avoir compris, en espérant qu'il rédigera les détails un jour prochain. Il se place dans le contexte de l'analyse semi-classique des opérateurs de Schrödinger. Cette méthode utilise une variante de la théorie usuelle des opérateurs pseudo-différentiels et des opérateurs intégraux de Fourier, variante avec un petit paramètre h censé représenter la constante de Planck. Dans ce contexte, il s'agit d'étudier la h-transformée de Fourier de la distribution $\sum \delta(E - E_k), E_k$ les valeurs propres (dépendant de h) de l'opérateur considéré. Ici il s'agit de $h^2\Delta$ (dans le cas d'Yves), de $h\sqrt{\Delta}$ dans le cas de Duistermaat-Guillemin. Explicitement, si $\{\lambda_k\}$ est la suite des valeurs propres de Δ, dans le premier cas on aura la distribution $\sum e^{ith\lambda_k}$, dans le second la distribution (indépendante de h) $\sum e^{it\sqrt{\lambda_k}}$.

L'idée est alors la suivante : on passe de l'un à l'autre par la h-transformée de Fourier de l'image directe des distributions $f_\star : \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, avec $f(E) = E^2$; pour cela, on montre que l'opérateur ainsi obtenu est un h-opérateur intégral de Fourier. Je n'en dirai pas plus sur ce sujet[(2)].

Juste une remarque pour terminer : depuis la retraite d'Yves, nous partageons le même bureau. J'ai pu ainsi constater que son activité de recherche ne s'est nullement ralentie. Je lui souhaite qu'il en aille encore de même pendant longtemps.

Bernard MALGRANGE
Université Joseph Fourier
Institut Fourier
100 rue des Maths - BP 74
38402 Saint Martin d'Hères cedex (France)
bernard.malgrange@ujf-grenoble.fr

[(2)] Voir l'article de Yves dans ce volume