



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Benoît KLOECKNER

Sur les remplissages holomorphes équivariants

Tome 57, n° 6 (2007), p. 2041-2061.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_6_2041_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2007, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

SUR LES REMPLISSAGES HOLOMORPHES ÉQUIVARIANTS

par Benoît KLOECKNER

RÉSUMÉ. — On étudie les remplissages d'une variété CR de dimension trois par une surface complexe, sous une hypothèse d'équivariance : on suppose que beaucoup d'automorphismes CR du bord se prolongent en des biholomorphismes de tout le remplissage. On démontre dans le cas strictement pseudoconvexe un résultat d'unicité (à éclatement près).

ABSTRACT. — We study the fillings of a three-dimensional CR manifold by a complex surface, under an equivariance hypothesis. Namely, we assume that many automorphisms of the CR manifold admit a biholomorphic extension to the whole filling. When the CR manifold is strictly pseudoconvex, we prove a uniqueness result (up to a blow-up).

1. Introduction

1.1. Remplissages équivariants

La notion de remplissage d'une structure géométrique est très largement étudiée. Nous nous proposons d'en étudier une version dynamique dans un cadre CR. Rappelons que la géométrie CR, nommée ainsi en référence aux équations de Cauchy–Riemann, décrit le type de structure naturellement portée par une hypersurface réelle d'une variété complexe (voir par exemple [2]). L'aspect dynamique est fourni par une hypothèse d'équivariance.

DÉFINITION 1.1 (remplissage équivariant). — *Soit M une variété CR de dimension $2n - 1$ et F un sous-groupe de $\text{Aut}(M)$. On appelle remplissage*

Mots-clés: remplissages, variétés CR strictement pseudoconvexes, surfaces complexes, action de groupe non compact.

Classification math.: 32V30.

holomorphe (ou simplement remplissage) de M toute variété complexe à bord R de dimension n telle qu'il existe un isomorphisme CR

$$d : M \rightarrow \partial R$$

On parle de remplissage \mathcal{C}^k si R est à bord \mathcal{C}^k et si d est \mathcal{C}^k .

L'action de F sur M donne, en conjugant par d , une action de F sur ∂R . Si elle se prolonge en une action sur R par biholomorphismes, on dit que R est un remplissage de M équivariant relativement à F .

Ici on s'intéressera à des résultats d'unicité; comme on ne précise pas l'isomorphisme d dans un remplissage, ce n'est en fait que la classe de conjugaison de F dans $\text{Aut}(M)$ qui nous importe. Une définition précise de ce que l'on entend par *variété complexe à bord* est donnée à la section 1.4 (en bref, on demande à la structure complexe d'être définie et régulière jusqu'au bord). On considèrera des remplissages de régularité analytique réelle, notée \mathcal{C}^ω .

Dans cet article, on se restreint au cas des variétés strictement pseudoconvexes. Parmi celles-ci, seule la sphère standard admet une dynamique riche comme le montre le théorème suivant; on appelle sphère standard et on note \mathcal{S}^{2n-1} la variété CR abstraite isomorphe à la sphère unité $\{\sum_{i=1}^n |z_i|^2 = |z_0|^2\}$ de l'espace projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, muni de coordonnées homogènes $[z_0 : \dots : z_n]$.

THÉOREME 1.2 (Webster–Schoen [12]). — *Soit M une variété CR compacte et strictement pseudoconvexe de dimension $2n - 1$. Si $\text{Aut}(M)$ est non compact, alors M est CR-équivalente à la sphère standard \mathcal{S}^{2n-1} .*

On se concentre par conséquent sur la sphère standard et les sous-groupes fermés non compacts de son groupe d'automorphismes $\text{PU}(1, n)$. L'existence de remplissages est alors assurée. De plus on se restreint au cas $n = 2$. Enfin on considèrera souvent le revêtement triple $\text{SU}(1, 2)$ de $\text{PU}(1, 2)$, qui agit naturellement sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ en préservant \mathcal{S}^3 .

Comme la sphère standard est strictement pseudoconvexe, ses deux côtés ne jouent pas des rôles symétriques. Un remplissage R est dit *convexe* ou *concave* selon le côté du bord occupé par l'intérieur de R .

Plongée comme sphère unité dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, \mathcal{S}^3 y découpe deux composantes connexes non isomorphes : la boule standard $\mathcal{B} = \{\sum_{i=1}^n |z_i|^2 < |z_0|^2\}$ (c'est un modèle du plan hyperbolique complexe) et son complémentaire $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}$. Ces deux remplissages sont respectivement convexe et concave. Ils sont tous deux équivariants relativement à $\text{PU}(1, 2)$ car l'action de celui-ci sur la sphère se prolonge à tout $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Le cas des remplissages convexes équivariants est assez simple.

PROPOSITION 1.3. — *Soit R un remplissage \mathcal{C}^ω convexe de \mathcal{S}^3 équivariant relativement à un sous-groupe non compact et fermé de $\text{PU}(1, 2)$. Alors R est isomorphe à la boule standard $\bar{\mathcal{B}}$.*

Notons que sans l'hypothèse d'équivariance, on dispose de résultats importants (et beaucoup plus profonds). Citons en particulier une conséquence des remplissages par disques holomorphes.

THÉORÈME 1.4 (Eliashberg [3]). — *Soit M une variété CR de dimension 3 difféomorphe à la sphère et strictement pseudoconvexe. Un remplissage convexe de M est difféomorphe à la boule fermée éventuellement éclatée en quelques points.*

Sous l'hypothèse d'équivariance, le cas concave est un peu plus subtil que le cas convexe. On ne peut plus espérer l'unicité car on construit facilement différents exemples à partir de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}$. Choisissons un élément hyperbolique ou parabolique ϕ de $\text{SU}(1, 2)$ (c'est-à-dire un élément qui engendre un sous-groupe non borné). Alors ϕ agit sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}$ et s'il admet un point fixe p en dehors du bord, on peut éclater $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}$ en p pour obtenir un nouvel exemple. En effet ϕ agit encore sur l'éclaté et engendre un groupe fermé non compact. On peut continuer à éclater des points fixes de l'action de ϕ pour obtenir de nombreux exemples. Ces remplissages concaves de \mathcal{S}^3 sont appelés *éclatements standards* de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}$.

Le résultat principal de cet article est le suivant.

THÉORÈME 1.5. — *Considérons la sphère standard \mathcal{S}^3 et un sous-groupe F de $\text{SU}(1, 2)$. Si F contient un élément parabolique ou hyperbolique, un remplissage \mathcal{C}^ω concave de \mathcal{S}^3 équivariant relativement à F est un éclatement standard de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}$.*

À l'aide du théorème 5.1 démontré en annexe, on peut en déduire la forme suivante.

COROLLAIRE 1.6. — *Considérons la sphère standard \mathcal{S}^3 et un sous-groupe F de $\text{PU}(1, 2)$. Si F est non compact et fermé dans $\text{Aut}(\mathcal{S}^3)$, alors tout remplissage \mathcal{C}^ω concave de \mathcal{S}^3 équivariant relativement à F est un éclatement standard de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{B}$.*

Notons qu'il est vain d'espérer classifier précisément les variétés complexes à bord strictement pseudoconcave sans l'hypothèse d'équivariance. En effet priver n'importe quelle variété d'un domaine strictement pseudoconvexe inclu dans l'une de ses cartes fournit une grande diversité d'exemples.

Pour se convaincre que demander seulement la non-compacité du groupe d'automorphismes holomorphes du remplissage ne rend pas le problème accessible, considérons un exemple édifiant dû à McMullen.

1.2. L'exemple de McMullen

Dans [9], McMullen décrit une surface K3 (et plus récemment dans [10], des surfaces rationnelles) possédant un automorphisme ϕ cumulant les deux propriétés suivantes :

- (1) son entropie topologique est strictement positive ;
- (2) il admet un domaine de Siegel.

Comme ϕ a de l'entropie, il engendre un groupe non compact. Mais le domaine de Siegel est par définition un ouvert de la surface dans lequel ϕ est conjugué à une rotation, donc il contient un ouvert stable biholomorphe à la boule standard. Si on prive la surface de cet ouvert, on obtient une surface à bord strictement pseudoconcave possédant un automorphisme d'entropie positive. L'image du groupe engendré par ϕ dans le groupe d'automorphismes du bord est relativement compacte et l'inclusion ne peut pas être propre : ϕ engendre un groupe non compact et non fermé.

En un sens, on peut dire que la dynamique de la surface ainsi construite reste à l'écart du bord.

1.3. Reformulations

Dans cette section, nous proposons une seconde interprétation du corollaire 1.6.

Remarquons tout d'abord que le groupe des automorphismes d'une variété complexe à bord s'injecte naturellement dans le groupe des automorphismes CR du bord. Toutefois cette injection, comme on l'a vu avec l'exemple de McMullen, n'est pas nécessairement propre.

COROLLAIRE 1.7. — *Soit X une surface complexe à bord \mathcal{C}^ω strictement pseudoconcave. Si*

- (1) *le groupe des automorphismes de X est non compact et*
- (2) *l'inclusion de $\text{Aut}(X)$ dans $\text{Aut}(\partial X)$ est propre*

alors X est un éclaté de $\mathbb{C}P^2 \setminus \mathcal{B}$, obtenu comme dans le théorème 1.5.

Cet énoncé découle du corollaire 1.6 grâce au théorème de Webster–Schoen : nos hypothèses assurent que le groupe d’automorphismes du bord est non compact, donc que le bord est bien la sphère standard.

On peut encore reformuler le résultat en terme de sphère invariante.

COROLLAIRE 1.8. — *Soit X une surface complexe sans bord. Si*

- (1) *X possède une hypersurface analytique réelle, strictement pseudo-convexe H qui la déconnecte et*
- (2) *le groupe des automorphismes de X qui préservent H y induit un groupe fermé non compact d’automorphismes CR*

alors H est une sphère et X est nécessairement un éclaté de $\mathbb{C}P^2$, obtenu comme dans le théorème 1.5.

1.4. Variétés complexes à bord

On peut généraliser de la façon suivante la notion de variété complexe.

DÉFINITION 1.9 (variété complexe à bord). — *Fixons une régularité \mathcal{C}^k où k est entier, ∞ ou ω . Soient X un espace topologique paracompact séparé et n un entier positif. On appelle carte complexe (de dimension n) de X tout quadruplet $\mathcal{U} = (U, \varphi, H, A)$ où*

- (1) *U est un ouvert de X , appelé domaine de la carte ;*
- (2) *A est un ouvert de \mathbb{C}^n et :*
 - *soit H est une hypersurface réelle \mathcal{C}^k de A et $A \setminus H$ a deux composantes connexes D_+ et D_- ,*
 - *soit H est vide et on note $D_+ = A$;*
- (3) *φ est un homéomorphisme de U vers $D_+ \cup H$.*

Deux cartes complexes (U, φ, H, D) et (V, ψ, K, E) sont dites compatibles si le changement de coordonnées

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

se prolonge en un biholomorphisme dans un voisinage de son domaine de définition vers un voisinage de son image. On considère cette condition satisfaite si $U \cap V = \emptyset$. Un atlas complexe (à bord \mathcal{C}^k) est un ensemble de cartes compatibles dont les domaines recouvrent X .

On appelle variété complexe à bord \mathcal{C}^k de dimension n un espace topologique paracompact X muni d’un atlas complexe à bord \mathcal{C}^k .

Enrichir un atlas d'une carte compatible à toutes les précédentes est une opération anodine ; on dit que deux atlas sont équivalents si leur union est encore un atlas et on identifie en fait la structure de variété complexe à bord à la classe d'équivalence de l'atlas choisi.

Une variété complexe à bord est naturellement munie d'une structure de variété différentielle à bord.

L'intérieur $\text{Int}(X)$ d'une variété complexe à bord est muni d'une structure complexe et son bord ∂X porte une structure CR, définie localement par les cartes.

D'après le théorème de Newlander–Nirenberg, une variété réelle X munie d'un opérateur complexe ($J : TX \rightarrow TX$, $J^2 = -\text{Id}$) défini et intégrable jusqu'à un voisinage du bord est une variété complexe à bord.

Un isomorphisme est un biholomorphisme qui se prolonge à un voisinage du bord.

2. Dynamique de $\text{SU}(1, 2)$

Nous aurons besoin de bien comprendre les éléments hyperboliques et paraboliques de $\text{SU}(1, 2)$ pour mener à bien la démonstration du théorème 1.5. En particulier, nous sommes intéressés par leurs bassins d'attraction et de répulsion. Le contenu de cette section ne prétend pas à l'originalité : il s'agit de calculs classiques, la référence la plus ancienne semblant être les travaux de Giraud [4]. Pour tout ce qui concerne l'espace hyperbolique complexe et son groupe d'automorphismes, on peut également consulter l'ouvrage de Goldman [5].

Dans la suite on utilise sur \mathbb{CP}^2 des coordonnées homogènes $[x : y : z]$ et on note Q la forme hermitienne $|x|^2 + |y|^2 - |z|^2$. La boule unité \mathcal{B} s'écrit ainsi $\{Q < 0\}$.

Chaque élément de $\text{SU}(1, 2)$ admet un point fixe dans la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}$; on peut les classer en trois catégories : un élément de $\text{SU}(1, 2)$ est

- *elliptique* s'il fixe un point de \mathcal{B} ;
- *parabolique* s'il ne fixe aucun point de \mathcal{B} mais exactement un point de $\partial\mathcal{B}$;
- *hyperbolique* s'il ne fixe aucun point de \mathcal{B} mais exactement deux points de $\partial\mathcal{B}$,

et tout élément est d'un de ces trois types.

Remarquons qu'un point de \mathbb{CP}^2 fixé par $A \in \text{SU}(1, 2)$ correspond à un vecteur propre de la matrice A .

2.1. Description de l'algèbre de Lie

L'algèbre de Lie contient beaucoup d'information sur le groupe, et se prête souvent mieux aux calculs. Les éléments de $\mathfrak{su}(1, 2)$ sont les matrices 3×3 de la forme

$$(2.1) \quad A = \begin{pmatrix} -i(b_1 + b_2) & \ell_1 & \ell_2 \\ \bar{\ell}_1 & ib_1 & c \\ \bar{\ell}_2 & -\bar{c} & ib_2 \end{pmatrix}$$

où b_1 et b_2 sont des nombres réels tandis que ℓ_1, ℓ_2 et c sont des nombres complexes.

Un élément de $\mathfrak{su}(1, 2)$ est dit elliptique, parabolique ou respectivement hyperbolique si l'adjectif s'applique à son exponentielle.

Nous nous intéressons maintenant aux transformations paraboliques et hyperboliques, qui nous seront utiles par la suite. Ce sont exactement les éléments de $SU(1, 2)$ qui engendrent un sous-groupe non borné.

Notons enfin que l'application exponentielle de $SU(1, 2)$ n'est pas surjective, contrairement à celle de $PU(1, 2)$. Implicitement, on ne considèrera dans la suite que des éléments de $SU(1, 2)$ qui sont dans l'image de l'exponentielle.

2.2. Éléments hyperboliques

Par définition, un élément hyperbolique $A \in SU(1, 2)$ a deux points fixes p_1 et p_2 dans $\partial\mathcal{B}$. Par chacun de ses points, il passe exactement une droite projective tangente à la sphère $\partial\mathcal{B}$, dont la direction est la droite complexe $\xi_{p_i} \subset T_{p_i}\partial\mathcal{B}$ de la distribution de contact sous-jacente à la structure CR. Ces deux droites L_1, L_2 se coupent en un point q de $\mathbb{C}P^2$ et comme elles sont globalement préservées, q est un point fixe pour l'action projective de A . Ces trois points non alignés correspondent à trois vecteurs propres linéairement indépendants, il n'y en a donc pas d'autre.

L'action de $SU(1, 2)$ est deux fois transitive sur $\partial\mathcal{B}$; quitte à conjuguer A on peut donc supposer que les p_i sont les points $[1 : 1 : 0]$ et $[1 : -1 : 0]$. Alors q doit être le point $[0 : 0 : 1]$, intersection des droites $\{x = y\}$ et $\{x = -y\}$. En utilisant (2.1) on peut écrire A sous la forme

$$(2.2) \quad A = \exp \begin{pmatrix} ib & \ell & 0 \\ \ell & ib & 0 \\ 0 & 0 & -2ib \end{pmatrix}$$

où $\ell \neq 0$ et b sont des nombres réels. Quitte à considérer A^{-1} (et à inverser dans ce qui suit « attractif » et « répulsif ») on suppose $\ell > 0$. Les valeurs propres de A sont $\exp(\ell + ib)$, $\exp(-\ell + ib)$, $\exp(-2ib)$ et A est diagonalisable. Un calcul en coordonnées projectives permet de déterminer la nature des trois points fixes. L'un des points fixes du bord, disons p_1 , est attractif avec valeurs propres $\exp(-2\ell)$ et $\exp(-\ell - 3ib)$. L'autre est répulsif avec valeurs propres $\exp(2\ell)$ et $\exp(\ell - 3ib)$. Enfin, q est hyperbolique avec valeurs propres $\exp(-\ell + 3ib)$ et $\exp(\ell + 3ib)$. Sur la figure 2.1, la sphère $\partial\mathcal{B}$ est représentée en dimension 2 au lieu de 3 et les droites complexes sont représentées par des lignes.

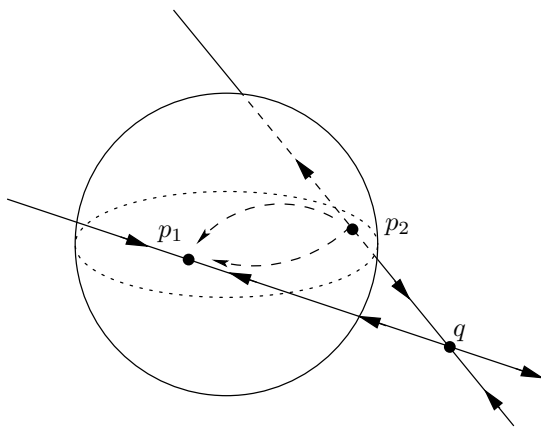


FIG. 2.1. Dynamique d'une transformation hyperbolique

Le bassin d'attraction de p_1 est $\mathbb{CP}^2 \setminus L_2$, le bassin de répulsion de p_2 est $\mathbb{CP}^2 \setminus L_1$. L'union des deux bassins est donc $\mathbb{CP}^2 \setminus \{q\}$.

2.3. Éléments paraboliques

Considérons maintenant un élément parabolique $a \in \mathfrak{su}(1, 2)$ et A son exponentielle. Quitte à conjuguer, on peut supposer que son unique point fixe au bord est $p = [1 : 1 : 0]$.

L'action de A sur la droite projective L passant par p et tangente à $\partial\mathcal{B}$ ne peut être hyperbolique, donc la valeur propre de a associée au vecteur

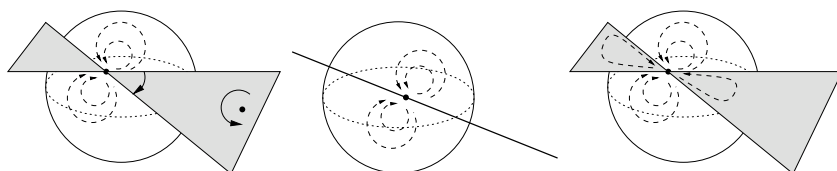


FIG. 2.2. *Dynamiques des transformations paraboliques*

propre $(1, 1, 0)$ est imaginaire pure et on peut écrire

$$(2.3) \quad a = \begin{pmatrix} -i(b_1 + b_2) & i(b_1 + \frac{1}{2}b_2) & c \\ -i(b_1 + \frac{1}{2}b_2) & ib_1 & c \\ \bar{c} & -\bar{c} & ib_2 \end{pmatrix}$$

où b_1 et b_2 sont réels et c est complexe. Les valeurs propres de a sont ib_2 et $-ib_2/2$ avec multiplicité 2. On peut maintenant distinguer trois cas, selon la forme de Jordan de A .

Si $b_2 \neq 0$, p définit l'unique direction propre associée à la valeur propre $-ib_2/2$ donc a n'est pas diagonalisable et la forme de Jordan de A est

$$(2.4) \quad \begin{pmatrix} e^{-i\frac{b_2}{2}} & 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{b_2}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ib_2} \end{pmatrix}$$

L'action de A sur L est alors conjuguée à une rotation de \mathbb{CP}^1 et A admet un deuxième point fixe $q \in L$. Sur la figure 2.2 (à gauche), on a cette fois représenté L par une section plane pour y montrer la rotation.

Dans ce cas le bassin d'attraction de p est constitué de $\mathbb{CP}^2 \setminus L$ et de p lui-même.

Si $b_2 = 0$ et $c = 0$, a est nilpotente d'ordre 2, la forme de Jordan de A est

$$(2.5) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et A fixe chaque point de L (voir la figure 2.2, au centre).

Dans ce cas le bassin d'attraction de p est encore $(\mathbb{CP}^2 \setminus L) \cup \{p\}$.

Enfin si $b_2 = 0$ et $c \neq 0$, a est nilpotente d'ordre 3, la forme de Jordan de A est

$$(2.6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et p est son seul point fixe, à la fois attractif et répulsif (voir la figure 2.2, à droite).

Dans ce cas le bassin d'attraction est tout \mathbb{CP}^2 .

On obtient donc le résultat suivant qui est une des clés du théorème 1.5. Une précision utile : on a appelé bassin d'attraction d'un point fixe p de l'application g l'ensemble des points x tels que $g^n(x) \rightarrow p$ quand $n \rightarrow \infty$. Ce bassin contient donc toujours p , et n'est pas nécessairement ouvert.

LEMME 2.1. — *Soit $g \in \mathrm{SU}(1, 2)$ un élément parabolique ou hyperbolique. Notons p_+ le point fixe attractif de g , p_- son point fixe répulsif s'il est différent et L_+ la droite projective tangente à la sphère unité en p_+ .*

Tout ouvert de \mathbb{CP}^2 contenant l'union du bassin d'attraction de p_+ et du bassin de répulsion de p_- contient :

- (1) un voisinage de la boule unité fermée et
- (2) la famille des droites projectives passant par p_+ , sauf éventuellement L_+ .

3. Remplissages de la sphère

Dans cette dernière section nous donnons une démonstration du théorème 1.5 et du corollaire 1.6. Commençons par en présenter le déroulement.

Notre premier outil est le théorème 5.1 démontré en annexe, qui montre que sous les hypothèses du corollaire 1.6, F contient un élément parabolique ou hyperbolique. Il suffit donc de démontrer le théorème 1.5.

On considère un remplissage \mathcal{C}^ω de la sphère standard, noté R , et d un isomorphisme $\mathcal{S}^3 \rightarrow \partial R$. On suppose R équivariant relativement à un sous-groupe $F \subset \mathrm{SU}(1, 2)$ qui contient une transformation hyperbolique ou parabolique, laquelle agit sur R et sur \mathbb{CP}^2 après conjugaison par d^{-1} : $\partial R \rightarrow \mathcal{S}^3 \subset \mathbb{CP}^2$. On note ϕ l'automorphisme de R et $\tilde{\phi}$ celui de \mathbb{CP}^2 .

On se base alors sur l'étude des bassins d'attraction et de répulsion de $\tilde{\phi}$. Elle permet de montrer de façon très élémentaire que R se complète par l'ajout d'une boule en une surface sans bord X sur laquelle ϕ agit encore. Mieux, elle permet d'exhiber dans X une famille de courbes rationnelles d'auto-intersection 1, homologues entre elles et dont la classe est invariante sous l'action de ϕ . Il découle alors du lemme de Noether que X est une surface rationnelle.

On utilise ensuite le théorème de l'indice de Hodge pour montrer que quitte à l'élever à une certaine puissance, on peut supposer que ϕ préserve globalement chaque courbe exceptionnelle.

L'étape suivante consiste à montrer qu'on peut alors contracter les courbes exceptionnelles sans singulariser ∂R . Il suffit ensuite d'étudier le cas des surfaces rationnelles minimales.

3.1. Prolongement convexe

3.1.1. Prolongement des conjugaisons

On dit de deux automorphismes ψ et $\tilde{\psi}$ de variétés complexes (éventuellement à bord) X et Y qu'ils sont *localement conjugués* s'il existe des ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$ et un biholomorphisme $F : U \rightarrow V$ tel que $F \circ \psi = \tilde{\psi} \circ F$ là où cette expression est définie. On dit que U et V sont les *ouverts de conjugaison*.

On va utiliser notre étude des bassins d'attraction grâce au lemme élémentaire qui suit.

LEMME 3.1 (de prolongement). — Soient ψ et $\tilde{\psi}$ des automorphismes de variétés complexes (éventuellement à bord) X et Y , localement conjugués dans des ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$. On peut alors prolonger la conjugaison à des ouverts stables $U' \supset U$ et $V' \supset V$ où V' contient tous les bassins d'attraction et de répulsion des points fixes de $\tilde{\psi}$ dans V .

Démonstration. — Notons $U_0 = U$, $V_0 = V$ et $F_0 = F$. On définit récursivement

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= \psi^{-1}(U_k) \\ V_{k+1} &= \tilde{\psi}^{-1}(V_k) \\ F_{k+1} &= \tilde{\psi}^{-1} \circ F_k \circ \psi \end{aligned}$$

Ainsi F_k est une conjugaison locale entre les ouverts U_k et V_k . De plus là où deux F_k sont définis simultanément, ils coïncident par équivariance. En passant à l'union, on peut donc construire une conjugaison F_∞ entre les ouverts $U_\infty = \bigcup_k U_k$ et $V_\infty = \bigcup_k V_k$. Ce dernier contient tous les bassins d'attractions des point fixes de $\tilde{\psi}$ contenus dans V . Comme F est également une conjugaison de ψ^{-1} et $\tilde{\psi}^{-1}$ on peut à nouveau la prolonger jusqu'à englober les bassins de répulsion : définissons $U'_0 = U_\infty$, $V'_0 = V_\infty$ et $F'_0 = F_\infty$ puis

$$\begin{aligned} U'_{k+1} &= \psi(U'_k) \\ V'_{k+1} &= \tilde{\psi}(V'_k) \\ F'_{k+1} &= \tilde{\psi} \circ F'_k \circ \psi^{-1} \end{aligned}$$

Le passage à l'union croissante donne naissance à une conjugaison F'_∞ entre les ouverts $U' = \bigcup_k U'_k$ et $V' = \bigcup_k V'_k$, qui contient les bassins d'attraction et de répulsion des points fixes de $\tilde{\psi}$ appartenant à V .

Enfin par construction ces ouverts de conjugaison sont stables sous l'action de ψ et $\tilde{\psi}$ respectivement. \square

3.1.2. Conséquences

Le plongement de S^3 (avec sa structure CR standard) dans une surface est localement unique d'après le résultat suivant.

THÉORÈME 3.2 (Pinchuk [7]). — *Une application CR, \mathcal{C}^1 et non constante entre deux hypersurfaces analytiques réelles et strictement pseudo-convexes de \mathbb{C}^n se prolonge localement biholomorphiquement.*

Ainsi d , qui lue en carte est une application CR entre des ouverts de deux copies de S^3 , se prolonge en un biholomorphisme au voisinage des points fixes de ϕ et $\tilde{\phi}$. Notons que c'est le seul point de la démonstration où l'on a besoin de la régularité analytique.

On applique le principe de prolongement des conjugaisons pour compléter le remplissage R en une variété complexe sans bord : grâce au lemme 2.1 on peut prolonger la conjugaison autour des points fixes à une conjugaison sur la boule fermée en complétant R par \mathcal{B} .

PROPOSITION 3.3. — *Il existe une surface complexe sans bord X et une application $I : R \rightarrow X$ biholorphe sur son image, telles que :*

- (1) $X \setminus I(R)$ est isomorphe à la boule standard ;
- (2) l'automorphisme $I_*\phi$ de $I(R)$ se prolonge en un automorphisme de X , qu'on note encore ϕ ;
- (3) l'action de ϕ sur X est conjuguée, au voisinage de $X \setminus \text{Int}(R)$, à l'action de $\tilde{\phi}$ sur un voisinage de la boule unité fermée de $\mathbb{C}P^2$.

Remarquons que de la même façon on obtient le résultat complètement élémentaire suivant.

PROPOSITION 3.4. — *À isomorphisme près, le seul remplissage \mathcal{C}^ω convexe de la sphère standard équivariant relativement à un groupe fermé non compact est la boule standard fermée.*

Le seul remplissage \mathcal{C}^ω concave de la sphère standard équivariant relativement à $\text{PU}(1, 2)$ est $\mathbb{C}P^2 \setminus \mathcal{B}$.

Démonstration. — On a vu que la conjugaison d se prolonge en un bi-holomorphisme au voisinage des points fixes de ϕ . Dans le cas convexe, on prolonge cette conjugaison à un ouvert contenant l'union des bassins d'attraction et de répulsion. D'après le lemme 2.1, cette union contient la boule fermée.

Dans le cas concave et où l'équivariance est relative au groupe des automorphismes entier, il suffit de choisir pour ϕ un élément parabolique dont le point fixe au bord a $\mathbb{C}P^2$ comme bassin d'attraction. \square

Le lemme 2.1 livre une information cruciale sur X .

LEMME 3.5. — *La surface X contient une courbe lisse, irréductible, rationnelle d'auto-intersection 1 qui appartient à un pinceau préservé par ϕ dont au plus un élément est réductible et dont l'unique point-base est le point fixe attractif de ϕ dans ∂R .*

D'après le lemme de Noether (voir par exemple [6] page 513), comme X contient en particulier une courbe rationnelle d'auto-intersection 1, c'est une surface rationnelle.

On note $|C|$ le pinceau obtenu dans le lemme 3.5 et C une de ses courbes génériques.

3.2. Contraction des courbes exceptionnelles

On cherche maintenant à contracter les courbes exceptionnelles de X pour se ramener au cas des surfaces rationnelles minimales, qu'on comprend bien.

LEMME 3.6. — *Il existe un entier k tel que ϕ^k fixe globalement chacune des courbes exceptionnelles.*

Démonstration. — Les diviseurs de X se plongent naturellement dans l'espace de cohomologie $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ sur lequel la forme d'intersection se prolonge en une forme quadratique symétrique non dégénérée. Le théorème de l'indice de Hodge (voir par exemple [1] page 143) dit que cette forme est de signature lorentzienne. En particulier, puisqu'elle vaut 1 sur la classe de C , elle est définie négative sur l'orthogonal C^{\perp} . Comme ϕ fixe la classe de C , elle préserve C^{\perp} .

Un vecteur de $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ se décompose sous la forme $\lambda C + D$ où $D \in C^{\perp}$, et la forme définie positive donnée par

$$\lambda^2 - D \cdot D$$

est alors préservée par ϕ .

Considérons l'ensemble \mathcal{E} des courbes exceptionnelles de X . C'est une partie discrète de $H_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ et comme ϕ agit par isométrie pour une forme définie positive, il existe un exposant k tel que l'action de ϕ^k sur \mathcal{E} est triviale. Mais une courbe d'auto-intersection négative est la seule représentante complexe de sa classe d'homologie, donc chaque courbe exceptionnelle est globalement fixée par ϕ^k . \square

Quitte à considérer ϕ^k , on suppose désormais que ϕ préserve chacune des courbes exceptionnelles ; on va maintenant chercher à les contracter. Toutefois, la contraction d'une courbe exceptionnelle qui intersecte le bord singulariserait celui-ci. Le lemme suivant nous permet de contourner cette difficulté.

LEMME 3.7. — *Si E est une courbe rationnelle d'auto-intersection -1 qui rencontre ∂R , alors il existe une autre courbe rationnelle d'auto-intersection -1 , qui de plus évite ∂R .*

Démonstration. — On reprend les détails de la démonstration du lemme de Noether pour déceler cette nouvelle courbe (voir [6] page 513).

La courbe E , puisqu'elle est préservée par ϕ , est nécessairement tangente à ∂R en un point fixe de ϕ . De plus la conjugaison à $\mathbb{C}P^2$ doit l'envoyer, au moins au voisinage de ce point, sur la droite tangente à \mathcal{S}^3 en p_+ ou p_- .

Il s'ensuit que le pinceau $|C|$ contient bien une courbe réductible C_0 , dont E est l'une des composantes. Éclatons le point-base $d(p_{\pm})$ de $|C|$ et notons C^{\wedge} , C_0^{\wedge} et E^{\wedge} les transformées propres.

Notons

$$C_0^{\wedge} = \sum_{\nu} a_{\nu} C_{\nu}$$

où les C_{ν} sont irréductibles, l'une d'elles est E^{\wedge} et $a_{\nu} > 0$. Maintenant l'auto-intersection de C^{\wedge} est 0 et les C_{ν} tout comme E^{\wedge} sont disjointes de C^{\wedge} . On en déduit que

$$C_0^{\wedge} \cdot C_{\nu} = C^{\wedge} \cdot C_{\nu} = 0$$

puis que toutes les composantes C_{ν} sont d'auto-intersection négative. La formule d'adjonction donne, en notant K le fibré canonique de X ,

$$(3.1) \quad \frac{C_0^{\wedge} \cdot C_0^{\wedge} + C_0^{\wedge} \cdot K}{2} + 1 = 0$$

et, comme $C_0^{\wedge} \cdot C_0^{\wedge} = 0$, $C_{\nu_0} \cdot K < 0$ pour un certain ν_0 . Il découle du critère fort de contractibilité de Castelnuovo–Enriques que C_{ν_0} peut être contractée. Or l'auto-intersection de E^{\wedge} vaut -2 , donc $C_{\nu_0} \neq E$ et C_{ν_0} doit éviter $(\partial R)^{\wedge}$, en particulier n'est pas affectée par l'éclatement. Avant celui-ci il existait donc bien une courbe contractable évitant ∂R . \square

Si X n'est pas minimale, on peut donc trouver une courbe à contracter. On note avec un \vee en exposant l'image d'un objet par la contraction. Comme la courbe exceptionnelle contractée est globalement préservée par ϕ , on obtient un biholomorphisme ϕ^\vee de X^\vee qui fixe le point image de la courbe contractée. On peut alors continuer car ϕ^\vee préserve encore une sphère standard, ∂R^\vee . Après un nombre fini d'étapes, on arrive à une surface rationnelle minimale.

Il suffit maintenant de montrer un dernier lemme pour obtenir le théorème 1.5.

LEMME 3.8. — *Si X est minimale, $X = \mathbb{C}P^2$.*

Démonstration. — Les surfaces rationnelles minimales sont $\mathbb{C}P^2$ et les surfaces de Hirzebruch Σ_n (c'est-à-dire les fibrations holomorphes régulières en $\mathbb{C}P^1$ sur $\mathbb{C}P^1$, voir par exemple [1]) pour $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$.

Supposons que la surface est une surface de Hirzebruch : $X = \Sigma_n$. Si $n = 0$ (c'est-à-dire $X = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$), on note F et B des courbes rationnelles de la forme $\mathbb{C}P^1 \times \{z\}$ et $\{z\} \times \mathbb{C}P^1$ respectivement. Les classes en homologie $[F]$ et $[B]$ de ces courbes ne dépendent alors pas du choix de z . Si $n \neq 0$, X est l'espace total d'une unique fibration rationnelle. On note F une fibre et $[F]$ sa classe en homologie (qui ne dépend pas du choix de F). Il existe une unique section B dont l'auto-intersection est négative, et on note $[B]$ sa classe en homologie.

Dans tous les cas on a alors :

$$F \cdot F = 0 \quad F \cdot B = 1 \quad B \cdot B = -n$$

et $H^2(\Sigma_n)$ est engendré par $[F]$ et $[B]$.

La classe fondamentale de la courbe C d'auto-intersection 1 doit alors se décomposer en

$$[C] = a[F] + b[B]$$

où a, b sont des entiers, d'où

$$1 = C \cdot C = 2ab - nb^2 = b(2a - nb)$$

On en déduit $b = 1$ et $a = (n + 1)/2$, d'où

$$C \cdot B = a - nb = \frac{1 - n}{2} \geq 0$$

et donc $n = 1$, mais Σ_1 est justement la seule surface de Hirzebruch à ne pas être minimale. □

4. Exemples singuliers

Dans cette dernière section nous proposons de montrer comment, en acceptant les sphères à une singularité, on peut construire des presque-exemples sur Σ_n .

Considérons une transformation parabolique $\phi \in \text{PU}(1, 2)$, choisie de façon à fixer chaque point d'une droite projective L . Celle-ci est donc tangente à la sphère unité. Éclatons deux points de L , loin du bord et notons E_1, E_2 les courbes exceptionnelles obtenues. La transformée propre L^\wedge est alors d'auto-intersection -1 , et on peut la contracter. À travers cette transformation, ϕ passe en un automorphisme de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ qui préserve un domaine biholomorphe à la boule, dont le bord est topologiquement une sphère mais possède un point singulier au point image de la courbe contractée. Ce point est en effet le seul point d'intersection de la sphère avec les transformées propre E_i^\vee , et si elle était différentiable en ce point elle devrait leur être tangente à toutes les deux. Mais ces deux courbes sont chacune une fibre d'un des deux réglages de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ et sont donc transverses.

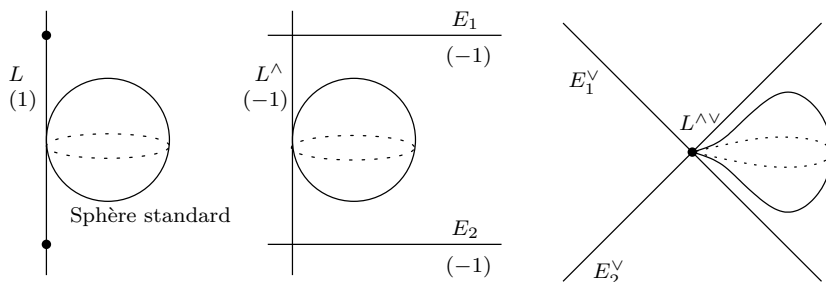


FIG. 4.1. Construction d'un exemple singulier dans Σ_0

Considérons maintenant une transformation ϕ qui possède un point fixe hors de la boule unité fermée et éclatons ce point fixe. Dans la surface Σ_1 obtenue la transformée propre L^\wedge de la droite joignant le point éclaté à l'un quelconque des points fixes de ϕ sur la sphère est d'auto-intersection 0. Le point d'intersection entre L^\wedge et la courbe exceptionnelle créée par l'éclatement est alors fixé par ϕ^\wedge , conjugué de ϕ par l'éclatement. On peut donc éclater Σ_1 en ce point puis contracter la transformée propre de L^\wedge pour obtenir un automorphisme de Σ_2 qui préserve un domaine biholomorphe à la boule, dont le bord est topologiquement une sphère mais possède un point singulier.

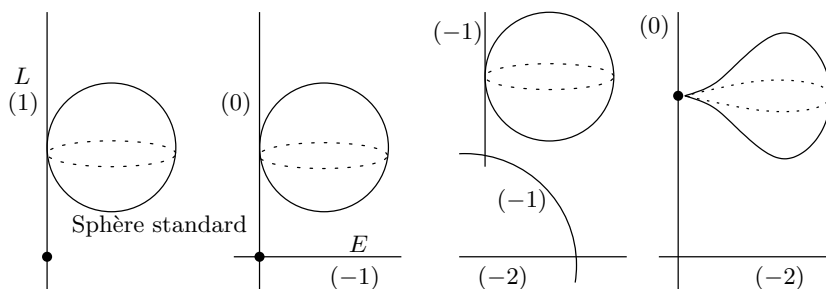


FIG. 4.2. Construction d'un exemple singulier dans Σ_2

Ensuite on peut passer à Σ_n en répétant autant de fois que nécessaire l'éclatement du point d'intersection entre la fibre portant le point singulier et la base et la contraction de la transformée propre de cette fibre.

L'existence de ces exemples, singuliers mais dociles, amène à se poser la question suivante. Peut-on trouver une surface X possédant un automorphisme qui :

- (1) est d'entropie topologique strictement positive et
- (2) préserve une hypersurface réelle H et
- (3) induit sur H un groupe non relativement compact

en supposant par exemple que

- (1) H est singulière en un ou plusieurs points et strictement pseudoconvexe là où elle est lisse ou
- (2) H est lisse partout et strictement pseudoconvexe sauf le long d'une sous-variété?

5. Annexe : sous-groupes purement elliptiques

Dans cette annexe nous nous intéressons à certains sous-groupes de transformations d'espaces symétriques à courbure négative. L'objectif principal est de démontrer le théorème 5.1, utilisé dans la démonstration de 1.6.

Soit M un espace symétrique à courbure négative et G son groupe d'isométries. Un élément de G est dit *elliptique* s'il admet un point fixe dans M . Un sous-groupe F de G est dit *purement elliptique* si tous ses éléments sont elliptiques. On dit que F admet un point fixe s'il est purement elliptique et s'il existe un point de M fixé simultanément par tous les éléments de F .

THÉORÈME 5.1. — *Un sous-groupe fermé purement elliptique d'isométries d'un espace symétrique à courbure négative est compact.*

Dans ce résultat l'hypothèse de fermeture est capitale, comme le montre le résultat surprenant qui suit.

THÉORÈME 5.2 (Waterman [13]). — *Il existe des sous-groupes d'isométries de $\mathbb{R}H^n$ et de \mathbb{R}^{n-1} qui sont purement elliptiques et sans point fixe, dès que $n \geq 5$.*

Dans le théorème 5.1, on peut remplacer « fermé » par d'autres hypothèses (voir par exemple [8]).

On va relier la compacité de F et l'existence de point fixe en utilisant le résultat naturel suivant.

THÉORÈME 5.3 (E. Cartan). — *Un sous-groupe compact de G admet toujours un point fixe.*

On peut facilement exhiber des groupes purement elliptiques et non compacts : il suffit par exemple de considérer le groupe engendré par une rotation irrationnelle. Toutefois ces groupes sont relativement compacts, c'est-à-dire que leur adhérence est compacte. Comme les groupes compacts maximaux de G sont les fixateurs des points de M , on a l'équivalence suivante.

PROPOSITION 5.4. — *Un sous-groupe de G est relativement compact si et seulement s'il admet un point fixe.*

On démontre maintenant le théorème 5.1, en procédant par étapes. Le principe est simple : si F est discret ou connexe, le résultat découle d'un théorème de Schur ou de Montgomery et Zippin. Le cas général se déduit de ses deux cas extrêmes.

THÉORÈME 5.5 (Schur). — *Un sous-groupe de torsion de $GL_n(\mathbb{R})$ est virtuellement abélien.*

Par « virtuellement abélien », on entend qu'il contient un sous-groupe d'indice fini et abélien.

COROLLAIRE 5.6. — *Si F est purement elliptique et discret, il admet un point fixe dans M .*

Merci à Serge Cantat et au rapporteur anonyme dont les remarques ont abouti à cette démonstration plus simple que celle que j'avais initialement proposée.

Démonstration. — Tout élément a de F est d'ordre fini : a est elliptique donc agit comme une rotation sur l'espace tangent de l'un quelconque de ses points fixes, et comme F est discret les angles de cette rotation sont commensurables à π .

D'après le théorème de Schur, F contient un sous-groupe H d'indice fini et abélien donc diagonalisable. Comme H est de torsion, il est inclus dans un tore donc est relativement compact. Mais F est la réunion finie de classes à gauches toutes homéomorphes à H , donc est lui-même relativement compact. □

THÉORÈME 5.7 (Montgomery-Zippin [11]). — *Un groupe de Lie connexe et non compact contient un sous-groupe à un paramètre fermé et non compact.*

COROLLAIRE 5.8. — *Si F est purement elliptique, fermé et connexe, il admet un point fixe dans M .*

Démonstration. — Comme F est purement elliptique, ses sous-groupes fermés à un paramètre sont tous des cercles. D'après le théorème 5.7, F est donc compact. On conclut par le théorème 5.3. □

On peut maintenant démontrer le théorème 5.1. On suppose donc que F est un groupe purement elliptique et fermé de G et on va montrer qu'il admet un point fixe.

Pour $f \in F$, on note $\text{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f .

D'après le corollaire 5.8, la composante neutre F_0 de F est compacte. Alors l'ensemble

$$P_0 = \bigcap_{f \in F_0} \text{Fix}(f)$$

des points fixés par tout F_0 est non vide et c'est une sous-variété complète et totalement géodésique de M . À ce titre, c'est un espace symétrique.

Considérons $g \in F \setminus F_0$. Alors on a

$$\begin{aligned} gP_0 &= \bigcap_{f \in F_0} g\text{Fix}(f) \\ &= \bigcap_{f \in F_0} \text{Fix}(gfg^{-1}) \\ &= P_0 \end{aligned}$$

donc g agit sur P_0 . De plus, n'importe quel autre élément de la composante connexe de g dans F s'écrit gf où $f \in F_0$ donc cette action passe au quotient en une action du groupe discret F/F_0 sur l'espace symétrique P_0 . D'après

le corollaire 5.6, F/F_0 admet un point fixe dans P_0 , qui est alors un point fixe de F .

Remerciements

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans mon directeur de thèse Abdelghani Zeghib, qui m'a proposé cette question et a su m'encourager à y répondre. Il ne serait pas ce qu'il est sans les explications de Serge Cantat, Jean-Claude Sikorav et Jean-Yves Welschinger. Merci à tous.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. P. BARTH, K. HULEK, C. A. M. PETERS & A. VAN DE VEN, *Compact complex surfaces*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xii+436 pages.
- [2] J. P. D'ANGELO, *Several complex variables and the geometry of real hypersurfaces*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993, xiv+272 pages.
- [3] Y. ELIASHBERG, « Filling by holomorphic discs and its applications », in *Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 151, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, p. 45-67.
- [4] G. GIRAUD, « Sur certaines fonctions automorphes de deux variables », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **38** (1921), p. 43-164.
- [5] W. M. GOLDMAN, *Complex hyperbolic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1999, , Oxford Science Publications, xx+316 pages.
- [6] P. GRIFFITHS & J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, Reprint of the 1978 original, xiv+813 pages.
- [7] G. M. KHENKIN (éd.), *Several complex variables. III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1989, Geometric function theory, A translation of Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya, Tom 9, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1986 [MR0860607 (87m :32011)], Translation by J. Peetre, Translation edited by G. M. Khenkin, vi+261 pages.
- [8] R. S. KULKARNI, « Conjugacy classes in $M(n)$ », in *Conformal geometry (Bonn, 1985/1986)*, Aspects Math., E12, Vieweg, Braunschweig, 1988, p. 41-64.
- [9] C. T. McMULLEN, « Dynamics on $K3$ surfaces : Salem numbers and Siegel disks », *J. Reine Angew. Math.* **545** (2002), p. 201-233.
- [10] ———, « Dynamics on blowups of the projective plane », 2006, prépublication.
- [11] D. MONTGOMERY & L. ZIPPIN, « Existence of subgroups isomorphic to the real numbers », *Ann. of Math. (2)* **53** (1951), p. 298-326.
- [12] R. SCHOEN, « On the conformal and CR automorphism groups », *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), n° 2, p. 464-481.

- [13] P. L. WATERMAN, « Purely elliptic Möbius groups », in *Holomorphic functions and moduli, Vol. II (Berkeley, CA, 1986)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 11, Springer, New York, 1988, p. 173-178.

Manuscrit reçu le 26 octobre 2006,
accepté le 30 novembre 2006.

Benoît KLOECKNER
ENS de Lyon
UMPA
46, allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 (France)
Benoit.Kloeckner@ujf-grenoble.fr