ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Gilles LEBEAU

Equations de Fokker-Planck géométriques II : estimations hypoelliptiques maximales

Tome 57, n° 4 (2007), p. 1285-1314.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_4_1285_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
57, 4 (2007) 1285-1314

EQUATIONS DE FOKKER-PLANCK GÉOMÉTRIQUES II : ESTIMATIONS HYPOELLIPTIQUES MAXIMALES

par Gilles LEBEAU

Résumé. — Nous donnons des résultats analytiques sur les propriétés de régularité du laplacien hypoelliptique de Jean-Michel Bismut et plus généralement sur les opérateurs P de type Fokker-Planck géométrique agissant sur le fibré cotangent $\Sigma = T^*X$ d'une variété riemannienne compacte X. En particulier, nous prouvons un résultat d'hypoellipticité maximale pour P, et nous en déduisons des bornes sur la localisation de ses valeurs spectrales.

Abstract. — We study some analytic properties of the hypoelliptic Laplacian of Jean-Michel Bismut, and more generally, of geometric Fokker-Planck operators P acting on the cotangent bundle $\Sigma = T^*X$ of a compact Riemannian manifold X. In particular, we prove a maximal hypoelliptic estimate for P, and we get bounds on the location of the spectrum of P.

1. Introduction et résultats

Soit (X, g) une variété riemannienne compacte, connexe de dimension n, TX et T^*X les fibrés tangent et cotangent à X. Nous noterons $\Sigma = T^*X$, (x,p) les points de Σ, π la projection de Σ sur X, g l'isomorphisme de TX sur T^*X défini par la métrique, $(.|.)$ le produit scalaire sur TX ou T^*X et $< .,. >$ la dualité entre T^*X et TX . Si $(x_1, ..., x_n)$ est un système de coordonnées locales défini sur un ouvert U de X, on notera $(x_1, ..., x_n; p_1, ..., p_n)$ les coordonnées sur $T^*X|_U$ telles que $p_j =< p, \frac{\partial}{\partial x_j} >$. Pour $u = \Sigma u^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in T_xX$ on a alors $|u|^2 = (u|u) = \Sigma g_{i,j}(x)u^i u^j$ et le carré de la longueur du covecteur $p = \Sigma p_j dx^j \in T^*_xX$ au point x est

Mots-clés : Laplacien hypoelliptique, equations de Fokker-Planck, estimations sous-eliptiques.
Classification math. : 35H10, 35H20, 35P15, 58J05, 58J40.

$|p|^2 = (p|p) = \Sigma g^{i,j}(x)p_i p_j$ où $(g^{i,j}) = g^{-1}$. Nous utiliserons les conventions d'Einstein relatives aux sommes sur les indices répétés.

Soient $\triangle_p$ le Laplacien en variable p associé à la métrique à coefficients constants en p, $g^{-1}(x)$, $\mathcal{O}$ l'oscillateur harmonique vertical

$$\triangle_p = g_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}, \quad \mathcal{O} = \frac{1}{2}(-\triangle_p + |p|^2 - n)$$

et $H_{|p|^2/2}$ le champ hamiltonien de la fonction $|p|^2/2$ sur la variété symplectique $\Sigma = T^*X$. Soit $\hbar > 0$ une constante fixée. On note P l'opérateur différentiel sur Σ défini par

$$P = \hbar\mathcal{O} - H_{|p|^2/2}. \tag{1.1}$$

A normalisation près, P est le Laplacien hypoelliptique de J.-M. Bismut agissant sur les fonctions.

Soit $dxdp$ la forme volume canonique sur T^*X et L^2 l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur T^*X. Pour $u, v \in L^2$, on notera $(u,v) = \int_{T^*X} u\bar{v}dxdp$ leur produit scalaire. L'opérateur $\mathcal{O}$ est formellement autoadjoint sur L^2 ; l'opérateur $H_{|p|^2/2}$ est formellement antiadjoint sur L^2.

On considère P comme opérateur non borné sur L^2 avec domaine

$$D(P) = \{u \in L^2; P(u) \in L^2\}.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'espace de Schwartz des fonctions $f(x,p) \in C^\infty(\Sigma)$ à décroissance rapide en p avec toutes leurs derivées (par rapport aux champs de vecteurs $e_i, \hat{e}^j$ introduit ci-après) et $\mathcal{S}'$ l'espace des distributions tempérées en p sur Σ. Dans [3] et [9], il est en particulier démontré que $\mathcal{S}$ est dense dans $D(P)$, que P est à résolvante compacte sur L^2 et que l'adjoint P^* de P est le conjugué de P par la symétrie $(x,p) \to (x,-p)$ de T^*X i.e

$$P^* = \hbar\mathcal{O} + H_{|p|^2/2}.$$

Le spectre $\sigma(P)$ de P est invariant par conjugaison complexe, et les sous espaces caractéristiques E_λ de P associés à la valeur propre λ sont inclus dans $\mathcal{S}$. De plus, on a

$$\begin{aligned} &\sigma(P) \subset \{\lambda \in \mathbb{C},\ Re(\lambda) \geqslant 0\} \\ &i\beta \in \sigma(P) \Rightarrow \beta = 0 \text{ pour } \beta \in \mathbb{R} \\ &KerP = E_0 = \mathbb{C}e^{-|p|^2/2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

En effet, pour $u \in Ker(P - \lambda)$, on a $0 = Re((P-\lambda)u|u) = \hbar(\mathcal{O}u|u) - Re(\lambda)||u||^2$ donc $\sigma(P) \subset \{\lambda \in \mathbb{C},\ Re(\lambda) \geqslant 0\}$, et si $(P - i\beta)u = 0$, avec $\beta \in \mathbb{R}$, on obtient d'abord $u(x,p) = a(x)e^{-|p|^2/2} \in Ker\mathcal{O}$, et le champ

$H_{|p|^2/2}$ envoyant $Ker\mathcal{O}$ dans son orthogonal L^2, $(H_{|p|^2/2} + i\beta)u = 0$ implique alors $\beta = 0$. Le noyau de P est l'espace de dimension 1 engendré par la fonction $e^{-|p|^2/2}$, puisque $Pu = 0$ implique $u(x,p) = a(x)e^{-|p|^2/2}$, puis $H_{|p|^2/2}(a(x)) = 0$ implique $a(x) = Cte$. Comme $P^*(e^{-|p|^2/2}) = 0$, l'équation $Pu = e^{-|p|^2/2}$ n'a pas de solution, donc $KerP = E_0$.

Dans cet article, nous prouvons le résultat de régularité maximale suivant. (On notera que l'analogie formelle avec la terminologie d'estimation maximale de [5] n'est pas complète, notamment à cause des problèmes d'homogénéité.)

Théorème 1.1. — *On a*

$$D(P) = \{u \in L^2; \mathcal{O}(u) \in L^2, \quad H_{|p|^2/2}u \in L^2\}. \tag{1.3}$$

Il existe une constante C telle que pour tout $u \in D(P)$ on ait

$$||\mathcal{O}u||_{L^2} + ||H_{|p|^2/2}u||_{L^2} \leqslant C(||Pu||_{L^2} + ||u||_{L^2}). \tag{1.4}$$

Les résultats d'analyse de P contenus dans [3] et [9] sont d'abord obtenus comme dans [4] et [6] en utilisant la preuve de Kohn du théorème d'hypoellipticité de Hörmander. La méthode de Kohn ne donnant pas des résultats optimaux, nous utilisons ici les techniques sous-elliptiques de [8], chap.XXVII, adaptées à la géométrie particulière des équations de Fokker-Planck géométriques, pour obtenir une analyse directe meilleure de P. Dans [3], les estimations sous-elliptiques ne sont utilisées que partiellement dans la construction d'une paramétrix de P dans l'étude de la limite $\hbar \to \infty$, et font intervenir une perte artificielle pour $|p|$ grand. Il nous a donc semblé utile d'écrire une preuve globale sur T^*X d'estimations maximales pour P, en particulier pour obtenir des informations sur le spectre de P et la croissance de sa résolvante dans le plan complexe. Ces estimations sont énoncées dans le Théorème (1.2). Pour énoncer ce résultat, nous rappelons quelques notations utiles de géométrie riemannienne.

Soit $T\Sigma$ le fibré tangent à l'espace cotangent $\Sigma = T^*X$. La connection de Levi Civita sur TX définit une décomposition canonique de $T\Sigma$

$$T\Sigma = T^H\Sigma \oplus T^V\Sigma \tag{1.5}$$

où l'espace tangent vertical $T^V\Sigma$ est l'espace tangent à la fibration $T^*X \to X$, donc est engendré par les champs de vecteurs

$$\hat{e}^j = \frac{\partial}{\partial p_j}$$

et où l'espace horizontal $T^H\Sigma$ est engendré par les champs de vecteurs

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \Gamma^\alpha_{\beta,i} p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\beta}$$

où les coefficients $\Gamma^\alpha_{\beta,i}$ sont les symboles de Christoffel

$$\Gamma^\alpha_{\beta,i} = \frac{1}{2} g^{\alpha,\mu}[\frac{\partial g_{\mu,\beta}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i,\mu}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{i,\beta}}{\partial x_\mu}]$$

de sorte que la connection de Levi-Civita ∇^{LC} sur TX est

$$\nabla^{LC}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Si $u(x) = \Sigma u^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ est une section du fibré tangent TX, alors $< p, u >= \Sigma u^j p_j$ est une fonction sur Σ, et on a l'identité

$$e_i(< p, u >) =< p, \nabla^{LC}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} u > .$$

Les champs de vecteurs e_i sont tangents aux sous-variétés $|p|^2 = Cte$, et le champ hamiltonien de la fonction $|p|^2/2$ sur la variété symplectique Σ est égal à

$$H_{|p|^2/2} = g^{i,j} p_j e_i \in T^H\Sigma, \tag{1.6}$$

ce qu'on vérifie aisément par calcul en coordonnées locales. On munit $T\Sigma$ de la métrique riemannienne telle que la décomposition (1.5) soit orthogonale, les métriques sur $T^H\Sigma, T^V\Sigma$ étant les métriques canoniques définies par les isomorphismes $T^H_{x,p}\Sigma \simeq T_x X$ et $T^V_{x,p}\Sigma \simeq T^*_x X$.

Pour l'analyse de l'opérateur P, nous utilisons toujours les règles suivantes pour évaluer le degré d'un opérateur dans un système de coordonnées locales

$$\begin{aligned} &\partial_{x_i} \text{ est d'ordre } 1 \\ &p_j,\ \partial_{p_j} \text{ sont d'ordre } 1/2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Cette règle est imposée par le fait que les constructions doivent être invariantes par changement de coordonnées locales $y = \varphi(x)$ sur X. Le changement de coordonnées induit sur Σ est de la forme $(y, q) = (\varphi(x), A(x)p)$, et les dérivées partielles se transforment sous la forme $\partial_x = \varphi'(x)\partial_y + A'A^{-1}(x)q\partial_q$, $\partial_p = {}^tA(x)\partial_q$. Si on souhaite que p et ∂_p aient le même poids, ce qui est naturel au vue de la présence de l'oscillateur harmonique dans (1.1), on observe que la convention de degré des opérateurs est nécessaire, ∂_x et $p\partial_p$ devant être de même degré. Par ailleurs, les propriétés spectrales de P confirment la pertinence de ce choix. Avec ces conventions d'ordre, les champs horizontaux e_i sont d'ordre 1, et on a

$$\begin{aligned} &\mathcal{O} \text{ est autoadjoint sur } L^2 \text{ et d'ordre } 1 \\ &H_{|p|^2/2} \text{ est d'ordre } 3/2 \text{ et est anti-adjoint sur } L^2 . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Soit $\lambda = -\mu + i\beta \in \mathbb{C}, \mu, \beta \in \mathbb{R}$ un paramètre spectral. On définit dans la section 2 une chaîne d'espaces de Sobolev $\mathcal{H}^s_\lambda$ de fonctions sur Σ par dualité et interpolation en posant $\mathcal{H}^0_\lambda = L^2$ et en choisissant comme collection d'opérateurs de degré 1, avec $< p >= \sqrt{1+|p|^2}$

$$< p > \partial_{p_j}, \quad e_i, \quad < p >^2 + |\mu| + \frac{|\beta|}{< p >}. \tag{1.9}$$

Ces espaces ont été introduits dans [9]. On remarquera que (1.9) attribue à $Re(\lambda) = -\mu$ le degré 1 et à $Im(\lambda) = \beta$ le degré 3/2, ce qui est naturel d'après (1.8). Les espaces vectoriels $\mathcal{H}^s_\lambda$ sont indépendants du paramètre spectral λ et on les notera par abus $\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^s_\lambda$. On note $||u||_{\lambda,s}$ la norme sur $\mathcal{H}^s_\lambda$ qui, elle, dépend de λ.

Pour $\delta_0 > 0, \delta_1 > 0$, on note U_δ l'ouvert de $\mathbb{C}$

$$U_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C},\ Re(\lambda) + \delta_0 < \delta_1 |Im(\lambda)|^{1/2}\} \tag{1.10}$$

Le Théorème 1.1 est conséquence du résultat plus précis suivant

Théorème 1.2. — *Il existe $\delta_1 > 0$ tel que*

$$\sigma(P) \subset \{\lambda \in \mathbb{C},\ Re(\lambda) \geqslant \delta_1 |Im(\lambda)|^{1/2}\}. \tag{1.11}$$

Pour tout $\delta_0 > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe C_s, tels que pour tout $\lambda \in U_\delta$, et tout $u \in \mathcal{S}'$, $(P-\lambda)u \in \mathcal{H}^s$ implique $u \in \mathcal{H}^{s+2/3}$, $\mathcal{O}u \in \mathcal{H}^s$, $H_{|p|^2/2}u \in \mathcal{H}^s$ et on a

(1.12)

$$\begin{aligned} &||\hbar\mathcal{O}u||_{\lambda,s} + ||(H_{|p|^2/2} + iIm(\lambda)u||_{\lambda,s} + (|Re(\lambda)| + |Im(\lambda)|^{1/2})||u||_{\lambda,s} \\ &\quad + ||u||_{\lambda,s+2/3} \leqslant C_s ||(P-\lambda)(u)||_{\lambda,s}. \end{aligned}$$

On obtient le Théorème 1.1 comme conséquence du Théorème 1.2 en choisissant $\delta_0 = 1/2$, $\lambda = -1$, et $s = 0$ dans l'inégalité (1.12).

Le papier est organisé comme suit. Dans la section 2, nous prouvons le théorème 1.2. Dans la section 3, nous vérifions que l'exposant 1/2 de la formule (1.10) est (presque) optimal pour la validité des estimations de résolvante (1.12). Enfin, dans la section 4, nous énoncons dans le théoreme 4.3 l'analogue du théorème 1.2 pour les équations de Fokker-Planck géométriques, qui sont associées à des opérateurs agissant sur des fibrés vectoriels sur Σ, de partie principale de la forme (1.1).

Nous remercions N. Lerner et F. Nier pour les discussions que nous avons eues concernant l'hypoellipticité maximale du Laplacien hypoelliptique de J.-M. Bismut.

2. Estimation maximale

Dans toute cette section on suppose $\hbar = 1$ pour simplifier les notations.

2.1. Espaces de Sobolev

Dans cette section, on rappelle la construction de [9] de la chaîne d'espaces de Sobolev $\mathcal{H}^s_\lambda$.
On utilise une décomposition de Littlewood-Paley en variable radiale $|p|$ pour les fonctions sur Σ. Soit $r_0 \in]1,2[$ et $\phi(r) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\phi(r) \equiv 1$ pour $|r| \leqslant \frac{1}{r_0}$ et $\phi(r) \equiv 0$ pour $|r| \geqslant 1$. Soit $\chi(r) = \phi(r/2) - \phi(r)$; alors χ est à support dans $[\frac{1}{r_0}, 2]$. Pour $j \in \mathbb{N}$, soit $\chi_j(r) = \chi(2^{-j}r)$; on a

$$1 = \phi(r) + \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j(r).$$

Comme $< p > \geqslant 1$, pour $u \in \mathcal{S}'$ on a $\phi(< p >)u = 0$ et la décomposition de Littlewood-Paley de $u \in \mathcal{S}'$ s'écrit

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j(u) \qquad (2.1)$$
$$\delta_j(u) = \chi(2^{-j} < p >)u.$$

Pour $j \geqslant 1$ la distribution tempérée $\delta_j(u)$ est à support dans la couronne

$$C_j = \{< p > \in [2^j/r_0\ ,\ 2^{j+1}]\} \qquad (2.2)$$

et $\delta_0(u)$ est à support dans la boule $\{|p|^2 \leqslant 3\}$. On a $C_{j+2} \cap C_j = \phi$.

Définition 2.1. — *Pour $u \in \mathcal{S}'$, on définit $U = \oplus_j U_j$ par la formule*

$$U_j(x,q) = \delta_j(u)(x, 2^j q). \qquad (2.3)$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $U_j \in \mathcal{S}'$, U_0 est à support dans la boule $B = \{|q|^2 \leqslant 3\}$ et pour $j \geqslant 1$, les U_j sont à support dans la couronne fixe $\mathcal{R} = \{|q|^2 \in [\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{4}, 4]\}$, On recalcule u à partir de U par la formule

$$u(x,p) = \sum_{j=0}^{\infty} U_j(x, 2^{-j}p). \qquad (2.4)$$

Soit $B_0 = \{|q|^2 \leqslant 5\}$ de sorte que tous les U_j sont à support dans B_0. Soit Y la compactification projective de T^*X. On note y les points de Y, dy une densité sur Y égale à $dxdq$ sur B_0, et on munit l'espace compact Y d'une métrique riemannienne qui coincide avec la métrique de T^*X au voisinage de B_0. Soit $(.|.)$ le produit scalaire sur l'espace de Hilbert $L^2(Y)$. On note $\mathcal{S}_Y$ l'espace des fonctions C^∞ sur Y.

Définition 2.2. — *Soit D_Y un opérateur autoadjoint elliptique positif du second ordre sur Y. Pour $j \in \mathbb{N}$, soit Λ_j l'opérateur agissant sur les fonctions de y et dépendant du paramètre $\lambda = -\mu + i\beta \in \mathbb{C}$*

$$\Lambda_j = (2^{4j} + |\mu|^2 + 2^{-2j}|\beta|^2 + D_Y)^{1/2}. \tag{2.5}$$

Pour $s \in \mathbb{R}$, et $U(y) \in \mathcal{S}_Y$, on définit la norme sobolev $|U|_{j,\lambda,s}$ par

$$|U|_{j,\lambda,s} = 2^{jn/2}|\Lambda_j^s U|_{L^2(Y)}. \tag{2.6}$$

On a introduit le facteur de normalisation $2^{jn/2}$ de sorte que l'on a

$$|U_j(x,q)|_{j,\lambda,0} = |\delta_j(u)(x,p)|_{L^2(x,p)}.$$

Pour $u(x,p) \in \mathcal{S}$ on définit la norme sobolev $||u||_{\lambda,s}$ par

$$||u||^2_{\lambda,s} = \sum_{j=0}^{\infty} |U_j|^2_{j,\lambda,s}. \tag{2.7}$$

On note $\mathcal{H}^s_\lambda$ le complété de $\mathcal{S}$ pour la norme $||.||_{\lambda,s}$. Remarquons que $|U|_{j,\lambda,s}$ dépend du choix de l'opérateur D_Y, mais $|U|_{D^1_Y,j,\lambda,s}$ et $|U|_{D^2_Y,j,\lambda,s}$ sont uniformément en j,λ équivalent. En particulier, les espaces de Hilbert $\mathcal{H}^s_\lambda$ sont indépendants de D_Y. Remarquons aussi que, en tant qu'espaces vectoriels, les $\mathcal{H}^s_\lambda$ sont indépendants de λ, et que les normes $||u||_{\lambda,s}$ sont uniformément équivalentes à s fixé, et pour λ dans un compact fixe de $\mathbb{C}$.

Remarque 2.3. — On a $\mathcal{H}^0_\lambda = \mathcal{H} = L^2$ et $u \in \mathcal{H}^1_\lambda$ ssi on a $u, \nabla_{e_i}u, < p > \nabla_{p_i}u$ et $(< p >^2 + |\mu| + \frac{|\beta|}{<p>})u \in \mathcal{H}$. Remarquons aussi que les $\mathcal{H}^s_\lambda$ sont les espaces de Sobolev usuels pour p et $|\lambda|$ bornés, et que pour tout λ fixé, l'injection de $\mathcal{H}^{s'}_\lambda$ dans $\mathcal{H}^s_\lambda$ est compacte pour $s' > s$.

On note $\tau \in]0,1]$ le paramètre relié à j par la relation $\tau = 2^{-j}$. Nous utiliserons les opérateurs pseudodifférentiels classiques avec poids Λ sur Y, le paramètre spectral λ variant dans un sous ensemble V de $\mathbb{C}$. Un symbole de degré d est une fonction $a(y,\eta,\tau,\lambda)$, lisse en $(y,\eta) \in T^*Y$ dépendant des paramètres τ,λ, telle que pour tout α,γ, il existe $C_{\alpha,\gamma}$ (indépendant de τ,λ) tel que pour tout (y,η) et tout $\tau \in]0,1], \lambda \in V$ on ait

$$|\partial_y^\alpha \partial_\eta^\gamma a(y,\eta,\tau,\lambda)| \leqslant C_{\alpha,\gamma}(\tau^{-4} + |\mu|^2 + \tau^2|\beta|^2 + |\eta|^2)^{\frac{d-|\gamma|}{2}}.$$

On note S^d l'espace des symboles de degré d. Un opérateur régularisant sur Y est une famille d'opérateurs $B(\tau,\lambda)$ dépendant des paramètres τ,λ, telle que pour tout s,t il existe $C_{s,t}$ indépendant de τ,λ tel que

$$|B(\tau,\lambda)U|_s \leqslant C_{s,t}|U|_t$$

$$|U|_t = |(\tau^{-4}+|\mu|^2+\tau^2|\beta|^2+D_Y)^{t/2}U|_{L^2(Y)}.$$

On associe à un symbole a en coordonnées locales un opérateur $A(\tau,\lambda) = Op(a)$ par la formule usuelle

$$A(y,\frac{1}{i}\partial_y,\tau,\lambda)U(y) = (2\pi)^{-2n}\int e^{iy\eta}a(y,\eta,\tau,\lambda)\hat{U}(\eta)\ d\eta.$$

On note $\mathcal{E}^d$ la classe associée d'opd (opérateur pseudodifférentiel) de degré d sur Y. On a $A\in\mathcal{E}^d$ ssi pour tout compact K de Y contenu dans un ouvert de carte, toute fonction troncature $\theta(y)$ près de K, il existe une troncature θ' égale à 1 près du support de θ, et $a\in S^d$ tels que en coordonnées locales on ait $A(\tau,\lambda)\theta = \theta' OP(a)\theta + B(\tau,\lambda)$ avec B régularisant. Pour $A\in\mathcal{E}^d$, on note $\sigma(A)$ le symbole principal de A. Si $A = Op(a)$, $\sigma(A)$ est la classe de a dans l'espace quotient S^d/S^{d-1}.

Pour $E_d\in\mathcal{E}^d$ et $E_{d'}\in\mathcal{E}^{d'}$ on a $E_dE_{d'}\in\mathcal{E}^{d+d'}$, $\sigma(E_dE_{d'}) = \sigma(E_d)\sigma(E_{d'})$. De plus, si $E_d = Op(e), E_{d'} = Op(e')$, on a $[E_d,E_{d'}] - OP(\frac{1}{i}\{e,e'\})\in\mathcal{E}^{d-2}$, où $\{e,e'\}\in S^{d-1}$ est le crochet de Poisson. Les opérateurs de $\mathcal{E}^0$ sont uniformément en τ,λ bornés sur L^2. On a de manière évidente

$$\Lambda = (\tau^{-4}+|\mu|^2+\tau^2|\beta|^2+D_Y)^{1/2}, \mu, \tau^{-2}, \tau\beta \quad \in\mathcal{E}^1$$

et si $A(y,\partial_y)$ est un opérateur différentiel sur Y de degré d, à coefficients indépendants de τ,λ, alors $A(y,\partial_y)\in\mathcal{E}^d$ puisque toutes les dérivées en η d'ordre $|\gamma|>d$ de son symbole sont identiquement nulles.
On notera V_{δ_0} l'ouvert de $\mathbb{C}$

$$V_{\delta_0} = \{Re(\lambda) < -\delta_0\}. \tag{2.8}$$

2.2. Estimation sous-elliptique

Nous supposons dans ce paragraphe que le paramètre spectral λ vérifie $\lambda = -\mu + i\beta\in V_{\delta_0}$ avec $\delta_0>0$.
Soit P_τ l'opérateur déduit de P par le changement de variable

$$(x,p)\rightarrow(x,q=\tau p)$$

$$P_\tau[U(x,q)] = P[U(x,\tau p)](x,q/\tau).$$

On a

$$
\begin{aligned}
&P_\tau = \mathcal{O}_\tau - \tau^{-1} H_{|q|^2/2} \\
&\mathcal{O}_\tau = \frac{1}{2}[-\tau^2 \triangle_q + \tau^{-2}|q|^2 - n].
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Soit $\theta_0(x,q,j)$ une fonction C^∞ réelle, à support compact dans B_0, égale à 1 dans un voisinage de : la boule B si $j=0$, la couronne $\mathcal{R}$ si $j \geqslant 1$, nulle près de $q=0$ si $j \geqslant 1$, et indépendante de $j \geqslant 1$. Soit $R_{\lambda,\tau} = R$ l'opérateur sur Y

$$R = \theta_0(P_\tau - \lambda)\theta_0.$$

La décomposition de R en sa composante autoadjointe R' et sa composante antiadjointe R'' est

$$
\begin{aligned}
&R = R' + R'' \\
&R' = \theta_0[\mathcal{O}_\tau + \mu]\theta_0 \\
&R'' = -\tau^{-1}\theta_0[H_{|q|^2/2} + i\tau\beta]\theta_0.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

On a $\tau^{-2}, \mu, \tau\beta, H_{|q|^2/2} \in \mathcal{E}^1$, et pour $E_d \in \mathcal{E}^d$ on a $[H_{|q|^2/2}, E_d]|_{B_0} \in \mathcal{E}^d$. De (2.9), (2.10), on déduit

$$
\begin{aligned}
&[R', E_d] \in \tau^2 \mathcal{E}^d \nabla_q + \mathcal{E}^d \\
&[R'', E_d] \in \tau^{-1}\mathcal{E}^d \\
&\tau R'' \in \mathcal{E}^1.
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

On notera C (resp. C_s) des constantes indépendantes de $\tau \in]0,1], \lambda \in V, s$ (resp. $\tau \in]0,1], \lambda \in V$). On note Λ l'opérateur autoadjoint positif

$$\Lambda = (\tau^{-4} + |\mu|^2 + \tau^2|\beta|^2 + D_Y)^{1/2}$$

et

$$|U|_t = ||\Lambda^t U||_{L^2}, \quad |U| = |U|_0.$$

Pour $\tau = 2^{-j}$, B_τ désignera la boule B pour $j=0$, et la couronne $\mathcal{R}$ pour $j \geqslant 1$.

Observons que pour $\delta_0 > 0$, on a les estimations de continuité et de coercivité suivantes

Lemme 2.4. — *Soit $\delta_0 > 0$. Il existe C indépendant de $\tau, \lambda \in V_{\delta_0}$ tel que pour tout $U \in \mathcal{S}_Y$ à support dans B_τ on ait*

$$
\begin{aligned}
&|(R'U|U)| \leqslant C(|\tau\nabla_q U|^2 + (\tau^{-2} + \mu)|U|^2) \\
&|\tau\nabla_q U|^2 + (\tau^{-2} + \mu)|U|^2 \leqslant C(R'U|U) \leqslant C|RU||U|.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Démonstration. — On a $\theta_0 U = U$ et

$$Re(RU|U) = (R'U|U) = ((\mathcal{O}_\tau + \mu)U|U)$$

d'où on déduit la première inégalité de (2.12) par intégration par parties. En utilisant les propriétés spectrales de l'oscillateur harmonique, il existe pour tout $\varepsilon > 0$, une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$((\mathcal{O}_\tau + \varepsilon)U|U) \geqslant C_\varepsilon(|\tau\nabla_q U|^2 + \tau^{-2}|qU|^2 + |U|^2)$$

et on obtient la deuxième inégalité de (2.12) en utilisant $\mu \geqslant \frac{1}{2}(\mu + \delta_0)$ pour $\lambda \in V_{\delta_0}$, et le fait que pour $\tau \neq 1$, on a $|q| \geqslant c_0 > 0$ sur le support de U. □

Le résultat suivant est le point clé pour la preuve du théorème 1.2 d'estimation maximale pour l'opérateur P

THÉORÈME 2.5. — *Soit $\delta_0 > 0$. Il existe C indépendant de $\tau, \lambda \in V_{\delta_0}$ tel que pour tout $U \in \mathcal{S}_Y$ à support dans B_τ et tout $\tau \in]0,1], \lambda \in V_{\delta_0}$, on ait*

(2.13)
$$|(\tau^{-2} + \mu)U| + |\nabla_q U| + |\tau^2 \triangle_q U| + |(\tau^{-1} H_{|q|^2/2} + i\beta)U| + |U|_{2/3} \leqslant C|RU|.$$

Démonstration. — D'après (2.12), on a

$$\begin{aligned}(\tau^{-2} + \mu)|U| &\leqslant C|RU| \\ |\nabla_q U| &\leqslant C|RU|.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Posons

$$\begin{aligned}L &= A + i\tau^{-1}B \\ A &= -\frac{\tau^2}{2}\triangle_q, \quad -iB = H_{|q|^2/2} + i\tau\beta.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Alors d'après (2.14), (2.13) sera une conséquence du fait qu'il existe C tel que, pour tout $U \in \mathcal{S}_Y$ à support dans B_0 et tout $\tau \in]0,1], \lambda \in V_{\delta_0}$, on a

$$|AU| + |U|_{2/3} \leqslant C(|LU| + (\tau^{-2} + \mu)|U| + |\nabla_q U|). \tag{2.16}$$

Afin de se ramener à un calcul pseudo-différentiel usuel, on considère $\tau\beta$ comme la variable duale de $y_{2n+1} \in \mathbb{R}$, et on pose

$$(\overline{y}; \overline{\eta}) = (y, y_{2n+1}; \eta, \eta_{2n+1}) \in T^*(B_0 \times \mathbb{R}) \quad \eta_{2n+1} = \tau\beta.$$

Si $f(y)$ est une fonction à support dans B_0, on l'identifie à la fonction $J(f)$ définie sur $B_0 \times \mathbb{R}$

$$J(f)(\overline{y}) = f(y)e^{i\tau\beta y_{2n+1}}.$$

On a d'après (2.15)

$$J(-iBf) = (H_{|q|^2/2} + \frac{\partial}{\partial y_{2n+1}})J(f) \tag{2.17}$$
$$J(\triangle_q f) = \triangle_q J(f).$$

On identifie les opérateurs à leurs transformés par J. On note Λ_0 l'opérateur autoadjoint positif sur $Y \times \mathbb{R}$

$$\Lambda_0 = (1 + D_Y - (\frac{\partial}{\partial y_{2n+1}})^2)^{1/2}$$

et $||v||_s$ la norme sobolev usuelle sur $Y \times \mathbb{R}$

$$||v||_s = ||\Lambda_0^s v||_{L^2}.$$

Soit $\theta(y_{2n+1}) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, égal à 1 près de 0. Comme on a pour $U \in \mathcal{S}_Y$ à support dans B_0

$$|U|_{2/3} = |\Lambda^{2/3}U| \leqslant C(||\theta J(U)||_{2/3} + (\tau^{-2} + \mu)^{2/3}|U|)$$

en utilisant (2.14), on obtient que (2.16) sera une conséquence du fait que pour K compact de $B_0 \times \mathbb{R}$, il existe C, tel que pour tout $v \in C^\infty$ à support dans K et tout $\tau \in]0,1]$ on ait, en notant $||v||$ la norme L^2,

$$||Av|| + ||v||_{2/3} \leqslant C(||Lv|| + \tau^{-1}||v|| + ||\nabla_q v||). \tag{2.18}$$

On remarquera que dans (2.18), le facteur $\tau^{-1}||v||$ à droite de l'inégalité est plus précis que le facteur $\tau^{-2}||v||$ qui serait suffisant pour entrainer (2.16). On notera $\mathcal{P}^d$ l'espace des opérateurs pseudodifférentiels classiques en $(\overline{y}, D_{\overline{y}})$ de degré d et on considérera $\tau \in]0,1]$ comme un paramètre auxiliaire. Le paramètre μ ne joue plus aucun rôle dans la suite de la preuve.

Comme pour $E_0 \in \mathcal{P}^0$, on a près de K, $[A, E_0], [L, E_0] \in \tau^2\mathcal{P}^0\nabla_q + \tau^{-1}\mathcal{P}^0$, il suffit de vérifier que pour tout $\rho_0 = (\overline{y}_0, \overline{\eta}_0) \in T^*K \setminus 0$, il existe $E_0 \in \mathcal{P}^0$ elliptique en ρ_0 et $C > 0$ indépendant de $\tau \in]0,1]$, tels que pour tout $v \in C_K^\infty$ on ait

$$||AE_0v|| + ||E_0v||_{2/3} \leqslant C(||LE_0v|| + \tau^{-1}||v|| + ||\nabla_q v||). \tag{2.19}$$

En utilisant les formules

$$\triangle_q = g_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}, \quad H_{|q|^2/2} = g^{i,j}q_j e_i$$

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \Gamma_{\beta,i}^\alpha q_\alpha \frac{\partial}{\partial q_\beta}$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
(2.20)\qquad & [\triangle_q, e_l] = -\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_l}\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} + \Gamma^{\alpha}_{\beta,l} g_{i,j}[\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}, q_\alpha \frac{\partial}{\partial q_\beta}] = \\
& (-\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_l} + \Gamma^{\beta}_{i,l} g_{\beta,j} + \Gamma^{\beta}_{j,l} g_{i,\beta})\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j}
\end{aligned}
$$

et de

$$\Gamma^{\beta}_{i,l} g_{\beta,j} + \Gamma^{\beta}_{j,l} g_{i,\beta} = \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_l}$$

on déduit

$$(2.21)\qquad [\triangle_q, e_l] = 0$$

donc

$$
\begin{aligned}
(2.22)\qquad & [\triangle_q, B] = i[\triangle_q, H_{|q|^2/2}] = [g_{\mu,\nu}\frac{\partial^2}{\partial q_\mu \partial q_\nu}, g^{i,j} q_i e_j] = 2i\frac{\partial}{\partial q_l} e_l \\
& [\triangle_q, [\triangle_q, B]] = 0.
\end{aligned}
$$

Nous allons faire usage des relations de commutation exactes (2.22) dans la suite. On notera toutefois que les champs e_l ne commutent pas entre eux, leurs commutateurs étant directement reliés au tenseur de courbure de Riemann.

Posons $v_0 = E_0 v$. Soit $\eta^V = \eta|_{T^V\Sigma}$ la composante verticale de η. Commençons par vérifier que (2.19) est vrai pour $\eta_V \neq 0$. Pour $\eta^V \neq 0$, il existe j tel que ∂_{q_j} soit elliptique de degré 1 en ρ_0, donc pour E_0 à support essentiel (i.e le support conique de la classe du symbole modulo les restes négligeables) proche de ρ_0

$$(2.23)\qquad ||E_0 v||_{2/3} \leqslant ||E_0 v||_1 \leqslant C(||\nabla_q v|| + ||v||).$$

Par ailleurs, on a

$$(2.24)\qquad ||Lv_0||^2 = ||Av_0||^2 + \tau^{-2}||Bv_0||^2 + i\tau^{-1}([A,B]v_0|v_0)$$

et $[A,B] \in \tau^2\mathcal{P}^2$, donc

$$|\tau^{-1}([A,B]v_0|v_0)| \leqslant C\tau||v_0||_1^2 \leqslant C\tau(||v|| + ||\nabla_q v||)^2$$

d'où par (2.24),

$$(2.25)\qquad ||Av_0|| \leqslant C(||Lv_0|| + ||v|| + ||\nabla_q v||)$$

donc (2.19) est satisfait d'après (2.23) et (2.25).

Dans la suite, on supposera donc $\eta_0^V = 0$. Soit $y_0 = (x_0, q_0)$ et $\eta_0^H \in T^*_{x_0}X$ la composante horizontale de η_0. Si $(q_0|\eta_0^H) + \eta_{2n+1} \neq 0$, alors $B \in \mathcal{P}^1$ est elliptique en ρ_0, donc pour E_0 à support essentiel proche de ρ_0, en utilisant 2.22 et $\eta_0^V = 0$, on obtient

$$|\tau^{-1}([A,B]v_0|v_0)| = \tau/2|([\triangle_q, B]v_0|v_0)| \leqslant \frac{1}{2}||Bv_0||^2 + C||v||^2 \tag{2.26}$$

donc par (2.24) et $\tau \leqslant 1$

$$||Av_0||^2 + \tau^{-2}||Bv_0||^2 \leqslant 2||Lv_0||^2 + C||v||^2 \tag{2.27}$$

et aussi par ellipticité de B en ρ_0 et en utilisant (2.27)

$$||E_0 v||_{2/3} \leqslant ||E_0 v||_1 \leqslant C(||Bv_0|| + ||v||) \leqslant C(||Lv_0|| + ||v||) \tag{2.28}$$

donc (2.19) est satisfait. On peut donc supposer que ρ_0 appartient à la fois à la variété caractéristique du Laplacien vertical $\triangle_q$ et du champ de vecteur B, c'est à dire est tel qu'on ait

$$\eta_0^V = 0, \;\; (q_0|\eta_0^H) + \eta_{2n+1} = 0 \tag{2.29}$$

On a donc $\eta_0^H \neq 0$ en ρ_0, et on posera

$$\triangle^H = e_i^* g^{i,j} e_j. \tag{2.30}$$

L'opérateur $\triangle^H$ est elliptique d'ordre 2 en ρ_0, et comme 2.21 entraîne $[\triangle_q, e_i^*] = 0$, on a $[\triangle_q, \triangle^H] = 0$.

On a $e_j \in \mathcal{P}^1$, et on notera $\sigma^1(e_j) = i\varepsilon_j$ son symbole principal. Comme on a $\eta_0^H \neq 0$, au moins une des fonctions réelles ε_j est non nulle en ρ_0. On a $B \in \mathcal{P}^1$, et son symbole principal est

$$-\sigma^1(B) = g^{l,j} q_j \varepsilon_l + \eta_{2n+1}.$$

On a $[\triangle_q, B] \in \mathcal{P}^2$, et son symbole principal est d'après (2.22)

$$\sigma^2([\triangle_q, B]) = -2i\Sigma\eta_l^V \varepsilon_l. \tag{2.31}$$

On a donc d'après (2.29) et $\eta_0^H \neq 0$

$$\begin{aligned} &\sigma^1(B)(\rho_0) = 0, \quad \sigma^2(\triangle_q)(\rho_0) = 0, \quad \sigma^2([\triangle_q, B])(\rho_0) = 0 \\ &d\sigma^1(B)(\rho_0), \; d\sigma^2([\triangle_q, B])(\rho_0), \; \overline{\eta} d\overline{y}(\rho_0) \;\; \text{indépendants.} \end{aligned} \tag{2.32}$$

De plus, on a d'après (2.22) et $[e_j, \frac{\partial}{\partial q_l}] \in \mathcal{P}^0 \nabla_q$

$$[B, [\triangle_q, B]] = [iH_{|q|^2/2}, 2i\frac{\partial}{\partial q_l} e_l] \in -2\triangle^H + \mathcal{P}^1\nabla_q + \mathcal{P}^1 \tag{2.33}$$

d'où il résulte

$$\{\sigma^1(B), \sigma^2([\triangle_q, B])\}(\rho_0) \neq 0. \tag{2.34}$$

Posons microlocalement près de ρ_0

$$Z_1 = (\triangle^H)^{-1/2}[\triangle_q, iB](\triangle^H)^{-1/2} \tag{2.35}$$

On a alors $Z_1 \in \mathcal{P}^0, Z_1^* = Z_1$, et $[\triangle_q, (\triangle^H)^{-1/2}] = 0$, donc par (2.22)

$$[\triangle_q, Z_1] = 0. \tag{2.36}$$

De plus, le symbole principal z_1 de Z_1 est réel et vérifie que $dz_1(\rho_0)$ et $\overline{\eta}d\overline{y}(\rho_0)$ sont indépendants d'après (2.32). On a aussi d'après (2.34), $\{\sigma^1(B), \sigma^0(Z_1)\}(\rho_0) \neq 0$. On peut donc choisir d'après (2.32), 2.34), un système de coordonnées symplectiques homogène près de ρ_0,

$$(z,\zeta),\ z = (z_1, z'), \zeta = (\zeta_1, \zeta')$$

avec $z(\rho_0) = 0, \zeta_1(\rho_0) = 0, \zeta'(\rho_0) \neq 0$, tel qu'on ait

$$\zeta_1 = 0 \Longleftrightarrow \sigma^1(B) = 0$$

et une transformation canonique quantifiée I de degré 0 associée, bornée de $L^2(Y \times \mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R}^{2n+1})$

$$I(u)(z) = \int e^{i\Phi(\overline{y},z,\theta)}\sigma(\overline{y}, z, \theta)u(\overline{y})d\overline{y}d\theta$$

avec

$$\partial_\theta\Phi(\overline{y}_0, 0, \theta_0)) = 0, \quad \partial_z\Phi(\overline{y}_0, 0, \theta_0)) = \zeta_0 = \zeta(\rho_0), \quad -\partial_{\overline{y}}\Phi(\overline{y}_0, 0, \theta_0)) = \overline{\eta}_0$$

où le symbole $\sigma(\overline{y}, z, \theta)$ est à support dans un petit voisinage conique en θ de $(\overline{y}_0, 0, \theta_0)$ et est elliptique en $(\overline{y}_0, 0, \theta_0)$, telle que près de ρ_0 on ait modulo opérateurs régularisants

$$\begin{aligned} &I \circ Z_1 = z_1 \circ I \\ &I \circ \frac{1}{2}\triangle_q = -A^{(2)}(z_1, z', D_{z'}) \circ I, \quad A^{(2)}(z_1, z', D_{z'}) \in \mathcal{P}^2 \\ &I \circ iB = (A^{(0)*}\frac{\partial}{\partial z_1}A^{(0)} + \mathcal{P}^0) \circ I, \quad A^{(0)}(z, D_z) \in \mathcal{P}^0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

avec $A^{(0)}$ elliptique en ρ_0. On peut de plus supposer que I est unitaire près de ρ_0. On introduit aussi les transformés des opérateurs $g_{j,k}, \frac{\partial}{\partial q_j}$ par I

$$\begin{aligned} &I \circ g_{j,k} = G_{j,k} \circ I, \quad G_{j,k}(z, D_z) \in \mathcal{P}^0 \\ &I \circ \frac{\partial}{\partial q_j} = iQ^j \circ I, \quad Q^j(z, D_z) \in \mathcal{P}^1. \end{aligned} \tag{2.38}$$

On notera $\mathcal{P}_0^d$ l'espace des opérateurs pseudodifférentiels tangentiels $A(z_1, z', D_{z'})$ de degré d définis au voisinage de $\rho_0' = (z = 0, \zeta' = \zeta_0')$. En particulier, on a $A^{(2)} \in \mathcal{P}_0^2$. On notera $A_0^{(0)}, G_{j,k,0} \in \mathcal{P}_0^0, Q_0^j \in \mathcal{P}_0^1$ les opérateurs dont le symbole total est la restriction à $\zeta_1 = 0$ des symboles totaux de $A^{(0)}, G_{j,k}, Q^j \in \mathcal{P}$. On pose

$$\begin{aligned} iB_0 &= A_0^{(0)*} \frac{\partial}{\partial z_1} A_0^{(0)} \\ L_0 &= \tau^2 A^{(2)} + \tau^{-1} iB_0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

On vérifie d'abord que l'on a l'identité algébrique près de ρ_0' dans l'algèbre $\mathcal{P}_0$

$$A^{(2)} \in \frac{1}{2} Q_0^{j,*} G_{j,k,0} Q_0^k + \Sigma \mathcal{P}_0^0 Q_0^j + \mathcal{P}_0^0. \tag{2.40}$$

En effet, on a $A^{(2)} = \frac{1}{2} Q^{j*} G_{j,k} Q^k$, et $Q^{j*} = Q^j$, donc le symbole total de $2A^{(2)}$ vérifie modulo un symbole d'ordre 0

$$\begin{aligned} 2A^{(2)}(z,\zeta') \equiv Q^j G_{j,k} Q^k(z,\zeta) &- i\partial_\zeta Q^j \partial_z (G_{j,k} Q^k)(z,\zeta) \\ &- iQ^j (\partial_\zeta G_{j,k} \partial_z Q^k)(z,\zeta). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Comme $Q_0^{j*} - Q_0^j \in \mathcal{P}_0^0$, en prenant la restriction du membre de droite de (2.41) à $\zeta_1 = 0$, on voit que (2.40) est conséquence de, avec $C_k(z,\zeta)$ de degré -1,

$$\partial_{\zeta_1} Q^j(z,\zeta) \equiv \Sigma C_k(z,\zeta) Q^k(z,\zeta) \text{ modulo ordre } -1. \tag{2.42}$$

Or $\partial_{\zeta_1} Q^j = i[Q^j, z_1]$, donc (2.42) est conséquence de (2.31) puisque la sous-variété $\eta^V = 0$ est involutive.

Les opérateurs tangentiels précédents sont définis près de ρ_0'. On prolonge les opérateurs $Q_0^k, G_{j,k,0}$ dans $\mathcal{P}_0$ de sorte que leurs supports essentiels soient contenus dans un petit voisinage conique W_0' de ρ_0', et de sorte que la matrice des symboles principaux des $G_{j,k,0}$ soit définie positive au voisinage du support essentiel des Q_0^k. On étend alors $A^{(2)}$ par la formule (2.40) ; on prolonge $A_0^{(0)}$ en opérateur elliptique près de $z = 0$ dans $\mathcal{P}_0^0$, et on étend L_0, B_0 par la formule (2.39). On notera C, c des constantes indépendantes de τ, et $|.|$ la norme L^2. Soit $u(z)$ une fonction C_0^∞ à support près de $z = 0$. On notera

$$|Q_0 u|^2 = \Sigma |Q_0^k(z, D_{z'}) u|^2$$

Comme B_0 est autoadjoint sur L^2, on a $Re(L_0 u|u) = Re(A^{(2)} u|u)$, donc d'après (2.40) avec $c_0 > 0, c_1 > 0$

$$Re(L_0 u|u) \geqslant c_0 |Q_0 u|^2 - c_1 |u|^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &|Q_0 u|^2 \leqslant C(|L_0 u||u| + |u|^2) \\ &c_0 |Q_0 u|^2 - c_1 |u|^2 \leqslant |(A^{(2)} u|u)| \leqslant C(|Q_0 u|^2 + |u|^2). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Soit $\varphi(z_1) \in C^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs réelles. Comme $[A^{(2)}, \varphi(z_1)] = 0, [Q_0^k, \varphi(z_1)] = 0$, on a par (2.43)

$$\begin{aligned} |Re(A^{(2)}u|\varphi^2(z_1)u)| &= |Re(A^{(2)}\varphi(z_1)u|\varphi(z_1)u)| \\ &\leqslant C||\varphi||_\infty^2(|Q_0u|^2 + |u|^2) \leqslant C||\varphi||_\infty^2(|L_0u||u| + |u|^2). \end{aligned} \tag{2.44}$$

On a aussi $[A_0^{(0)}, \varphi(z_1)] = 0$ et comme $\frac{\partial}{\partial z_1}$ est antiadjoint, on obtient

$$\begin{aligned} Re(iB_0u|\varphi^2u) &= Re(\varphi\frac{\partial}{\partial z_1}A_0^{(0)}(u)|\varphi A_0^{(0)}(u)) \\ &= -Re(\varphi'\varphi(z_1)A_0^{(0)}(u)|A_0^{(0)}(u)). \end{aligned}$$

On applique maintenant comme dans [10] la méthode d'estimation d'énergie : en utilisant (2.43), (2.44), en calculant $Re(L_0u|\varphi^2u)$ et en faisant tendre φ^2 vers la fonction caractéristique de l'intervalle $[z_1, \infty[$, on obtient l'estimation d'énergie

$$sup_{z_1}||A_0^{(0)}(z_1, z', D_{z'})u||_{L^2(z')}^2 \leqslant C\tau(|L_0u| + |u|)|u|. \tag{2.45}$$

On utilise à présent une décomposition tangentielle de type Littlewood-Paley de u

$$u = \Sigma u_j$$

de sorte que les u_j sont à support dans un petit voisinage fixe de $z = 0$ au voisinage duquel $A_0^{(0)}$ est elliptique, et spectralement concentrés dans la couronne tronquée

$$\{(z, \zeta') \in W_0; \quad |\zeta'| \in [2^j/2, 2^{j+2}]\}$$

où $W_0 \subset W_0'$ est un petit voisinage conique de ρ_0'. En particulier, pour $A \in \mathcal{P}_0$ dont le support essentiel ne rencontre pas W_0, on a

$$|Au_j| \leqslant \mathcal{O}(2^{-j\infty}|u_j|).$$

Comme par (2.31) on a $\sigma^1(\nabla_q) = 0 \Rightarrow z_1 = 0$, on obtient près de ρ_0

$$z_1 \in \Sigma\mathcal{P}^{-1}Q^j + \mathcal{P}^{-1}$$

donc près de ρ_0'

$$z_1 \in \Sigma D_j(z, D_{z'})Q_0^j + \mathcal{P}_0^{-1}, \quad D_j \in \mathcal{P}_0^{-1}. \tag{2.46}$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(]-1,1[)$ égale à 1 près de 0 ; on décompose u_j en $u_j = u_j^1 + u_j^2$ avec $u_j^1 = \varphi(\tau z_1 2^{2j/3})u_j$. En utilisant (2.45) on obtient

$$\begin{aligned} |A_0^{(0)}u_j^1|^2 &\leqslant \int_{|z_1|\leqslant\tau^{-1}2^{-2j/3}} |A_0^{(0)}u_j(z_1, z')|^2 dz_1 dz' \\ &\leqslant C2^{-2j/3}(|L_0u_j| + |u_j|)|u_j|. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Comme on a $(1-\varphi)(x) = \psi(x)x$ avec $\psi \in L^\infty$, on a d'après (2.46)

$$(1-\varphi)(\tau z_1 2^{2j/3}) = \psi(\tau z_1 2^{2j/3})(\Sigma_l\, 2^{2j/3} D_l(z,\zeta')\tau Q_0^l + \tau 2^{2j/3}\mathcal{P}_0^{-1}) \tag{2.48}$$

donc en utilisant $[A_0^{(0)}, \psi] = 0$, $A_0^{(0)} \in \mathcal{P}_0^0$, $D_l \in \mathcal{P}_0^{-1}$ et (2.43)

$$|A_0^{(0)} u_j^2|^2 \leqslant C 2^{-2j/3}\tau^2(|Q_0 u_j|^2 + |u_j|^2) \leqslant C 2^{-2j/3}\tau^2(|L_0 u_j| + |u_j|)|u_j|. \tag{2.49}$$

Comme $A_0^{(0)}$ est elliptique de degré 0 au voisinage du support des u_j , on a

$$|u_j| \leqslant C(|A_0^{(0)} u_j| + \mathcal{O}(2^{-j\infty}|u_j|)$$

donc par (2.47) et (2.49) et $\tau \leqslant 1$ on obtient

$$|u_j| \leqslant C 2^{-2j/3}(|L_0 u_j| + |u_j|) \tag{2.50}$$

donc aussi par (2.43)

$$|Q_0 u_j| \leqslant C 2^{-j/3}(|L_0 u_j| + |u_j|). \tag{2.51}$$

On réutilise à présent

$$|L_0 u_j|^2 = |\tau^2 A^{(2)} u_j|^2 + |\tau^{-1} B_0 u_j|^2 - i\tau([A^{(2)}, B_0]u_j|u_j). \tag{2.52}$$

Comme le symbole $\sigma^0(A_0^{(0)} - A^{(0)})$ s'annule sur $\zeta_1 = 0$, on a près de ρ_0 dans l'algèbre $\mathcal{P}$ d'après (2.37)

$$I \circ B \circ I^{-1} - B_0 \in (\frac{\partial}{\partial z_1})^2 \mathcal{P}^{-1} + \mathcal{P}^0. \tag{2.53}$$

De plus, d'après (2.35), (2.37) on a,

$$\begin{aligned} &[A^{(2)}, I \circ B \circ I^{-1}] \in z_1 \mathcal{P}^2 + \mathcal{P}^1 \\ &[A^{(2)}, (\frac{\partial}{\partial z_1})^2 \mathcal{P}^{-1}] \in \Sigma_l\; Q^{l,*}\mathcal{P}^0 \frac{\partial}{\partial_{z_1}} + \mathcal{P}^1 = \Sigma_l Q^{l,*}\mathcal{P}^0 B_0 + \mathcal{P}^1. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Il en résulte

$$[A^{(2)}, B_0] \in z_1 \mathcal{P}^2 + \Sigma_l Q^{l,*}\mathcal{P}^0 B_0 + \mathcal{P}^1. \tag{2.55}$$

Le symbole principal c de $[A^{(2)}, B_0]$ vérifie donc

$$\begin{aligned} &z_1 = 0 \Longrightarrow c(\zeta_1 = 0) = 0 \\ &\sigma^1(Q^l) = 0 \Longrightarrow \partial_{\zeta_1} c(\zeta_1 = 0) = 0. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Comme $[A^{(2)}, B_0] \in \mathcal{P}_0^1 B_0 + \mathcal{P}_0^2$, il résulte de (2.56)

$$[A^{(2)}, B_0] \in z_1 C^2 + (\Sigma_l Q^{l,*} \mathcal{P}_0^0 + \mathcal{P}_0^0) B_0 + \mathcal{P}_0^1 \tag{2.57}$$

où $C^{(2)} \in \mathcal{P}_0^2$. Il en résulte

(2.58)
$$|\tau([A^{(2)}, B_0]u_j|u_j)| \leqslant \tau|(z_1 C^{(2)} u_j|u_j)| + C\tau|B_0 u_j|(|Q_0 u_j| + |u_j|) + C\tau 2^j |u_j|^2$$

d'où par (2.50) et (2.51)

$$\begin{aligned} &|\tau([A^{(2)}, B_0]u_j|u_j)| \leqslant \tau|(z_1 C^{(2)} u_j|u_j)| \\ &+ C\tau(|B_0 u_j| + 2^{-j/3}(|L_0 u_j| + |u_j|))(|L_0 u_j| + |u_j|). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Soit M une grande constante positive ; on décompose à nouveau u_j en $u_j = u_j^1 + u_j^2$ avec cette fois $u_j^1 = \varphi(\tau z_1 2^{2j/3}/M) u_j$. En utilisant (2.50) et $||\tau z_1 \varphi(\tau z_1 2^{2j/3}/M)||_{L^\infty} \leqslant CM 2^{-2j/3}$ on obtient

$$\begin{aligned} &\tau|(z_1 C^{(2)} u_j|u_j^1)| \leqslant |C^{(2)} u_j||\tau z_1 u_j^1| \leqslant \\ &C 2^{2j}|u_j| M 2^{-2j/3}|u_j| \leqslant CM(|L_0 u_j|^2 + |u_j|^2). \end{aligned} \tag{2.60}$$

Par ailleurs, on a

$$\tau z_1(1 - \varphi(\tau z_1 2^{2j/3}/M)) = \tau^2 z_1^2 \psi(\tau z_1 2^{2j/3}/M) 2^{2j/3}/M$$

donc d'après (2.46)

$$\begin{aligned} &\tau C^{(2)*} z_1(1 - \varphi(\tau z_1 2^{2j/3}/M)) = 2^{2j/3}\ D\ /M \\ &D = \tau^2 \psi(\tau z_1 2^{2j/3}/M)(\Sigma E_{j,k} Q_0^j Q_0^k + \Sigma E_j Q_0^j + E_0) \end{aligned} \tag{2.61}$$

avec $E_* \in \mathcal{P}_0^0$. En particulier, on a d'après (2.43) et en utilisant (2.50) et $[\mathcal{P}_0, \psi] = 0$

(2.62)
$$\begin{aligned} &\tau|(z_1 C^{(2)} u_j|u_j^2)| = |(u_j|\tau C^{(2)*} z_1(1-\varphi)u_j)| = |(2^{2j/3}/M u_j|D u_j)| \leqslant \\ &C 2^{2j/3}/M(|\tau^2 Q_0 u_j|^2 + \tau^2|u_j|^2) \leqslant C 2^{2j/3}/M((\tau^2 A^{(2)} u_j|u_j) + \tau^2|u_j|^2) \\ &\leqslant C/M(|\tau^2 A^{(2)} u_j| + \tau^2|u_j|)|2^{2j/3} u_j| \\ &\leqslant C/M(|L_0 u_j|^2 + |u_j|^2 + |\tau^2 A^{(2)} u_j|^2). \end{aligned}$$

Par (2.60) et (2.62), on obtient

$$\tau|(z_1 C^{(2)} u_j|u_j)| \leqslant CM(|L_0 u_j|^2 + |u_j|^2) + C/M|\tau^2 A^{(2)} u_j|^2. \tag{2.63}$$

De (2.59) et (2.63) on obtient

(2.64)
$$|\tau([A^{(2)},B_0]u_j|u_j)| \leqslant CM(|L_0u_j|^2+|u_j|^2)+C/M(|\tau^2A^{(2)}u_j|^2+|\tau B_0u_j|^2).$$

En choisissant M grand et en utilisant (2.52), (2.64), et (2.50) on obtient

$$|\tau^2A^{(2)}u_j|^2+|\tau^{-1}B_0u_j|^2+2^{4j/3}|u_j|^2 \leqslant C|L_0u_j|^2+C|u_j|^2. \tag{2.65}$$

En recollant les estimations (2.65) avec $u=\Sigma u_j$, et en utilisant $[L_0,\mathcal{P}^0] \in \tau^2\mathcal{P}^0\nabla_q+\tau^{-1}\mathcal{P}^0$, et (2.43) on obtient

$$|\tau^2A^{(2)}u|+\tau^{-1}|B_0u|+|u|_{2/3} \leqslant C|L_0u|+C\tau^{-1}|u|. \tag{2.66}$$

Comme ζ_1 est nul en ρ_0, et

$$\tau^{-1}(I\circ B\circ I^{-1}-B_0) \in \tau^{-1}(\mathcal{P}^{-1}\frac{\partial}{\partial z_1})B_0+\tau^{-1}\mathcal{P}^0$$

on obtient que pour tout $\varepsilon>0$, on peut choisir le support essentiel de $E_0 \in \mathcal{P}^0$ assez proche de ρ_0 pour avoir

$$\begin{aligned} &|\tau^{-1}(I\circ B\circ I^{-1}-B_0)E_0u| \leqslant \varepsilon|\tau^{-1}B_0u|+C_\varepsilon\tau^{-1}|u| \\ &|(I\circ L\circ I^{-1}-L_0)E_0u| \leqslant \varepsilon|\tau^{-1}B_0u|+C_\varepsilon\tau^{-1}|u| \end{aligned} \tag{2.67}$$

et donc (2.66) implique

$$|\tau^2\triangle_qE_0u|+|E_0u|_{2/3} \leqslant C|LE_0u|+C\tau^{-1}|u|+C|\nabla_qu| \tag{2.68}$$

et donc (2.19) est satisfait près de ρ_0, ce qui achève la preuve du théorème 2.5. □

2.3. Preuve du théorème 1.2

On déduit aisément du théorème 2.5 la proposition suivante.

Proposition 2.6. — *Soit $\delta_0>0$. Il existe C, et pour tout s, il existe une constante C_s, avec C,C_s indépendants de $\tau,\lambda \in V_{\delta_0}$ telle que pour tout $U \in \mathcal{S}_Y$ à support dans B_τ et tout $\tau,\lambda \in V_{\delta_0}$, on ait*

(2.69)
$$\begin{aligned} &|(\tau^{-2}+\mu)U|_s+|\nabla_qU|_s+|\tau^2\triangle_qU|_s+|(\tau^{-1}H_{|q|^2/2}+i\beta)U|_s+|U|_{s+2/3} \\ &\leqslant C(|RU|_s+C_s|U|_s). \end{aligned}$$

De plus, l'inégalité précédente reste valable pour toute distribution $U \in \mathcal{D}'_Y$ à support dans B_τ vérifiant $\Lambda^sU \in L^2$ et $\Lambda^sRU \in L^2$.

Démonstration. — Soit $\theta(x,q,j)$ une fonction C^∞ vérifiant les mêmes hypothèses que $\theta_0(x,q,j)$. Le support essentiel de $[\theta,\Lambda^s]$ ne rencontrant pas le support de U, pour tout s,σ, il existe $C_{s,\sigma}$ tel que

$$|[\theta,\Lambda^s]U|_\sigma \leqslant C_{s,\sigma}|U|_s.$$

Comme on a $\theta U = U$ et $(\tau^{-2}+\mu)\in\mathcal{E}^1$, il en résulte pour tout s

$$\begin{aligned}&|(\tau^{-2}+\mu)U|_s = |\Lambda_s(\tau^{-2}+\mu)U| \leqslant |(\tau^{-2}+\mu)\theta\Lambda^s U| + C_s|U|_s\\ &|U|_{s+2/3} = |\Lambda^{2/3}\Lambda^s\theta U| \leqslant |\Lambda^{2/3}\theta\Lambda^s U| + C_s|U|_s.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Si A désigne un des opérateurs $\nabla_q, \tau^2\triangle_q, \tau^{-1}H_{|q|^2/2}, R$, on a la formule de commutation

$$A\theta\Lambda^s U = \Lambda^s A\theta U + A[\theta,\Lambda^s]U + [A,\Lambda^s]\theta U.$$

On a au voisinage de B_0, $[\nabla_q,\Lambda^s]\in\mathcal{E}^{s-1}$, $[\tau^2\triangle_q,\Lambda^s]\in\tau^2(\mathcal{E}^s\nabla_q+\mathcal{E}^s)$, $[\tau^{-1}H_{|q|^2/2},\Lambda^s]|\in\tau^{-1}\mathcal{E}^s$, et $[R,\Lambda^s]\in\tau^2\mathcal{E}^s\nabla_q+\tau^{-1}\mathcal{E}^s$. Il en résulte que pour tout s, il existe C_s tel que

$$\begin{aligned}&|\nabla_q U|_s \leqslant |\nabla_q\theta\Lambda^s U| + C_s|U|_{s-1}\\ &|\tau^2\triangle_q U|_s \leqslant |\tau^2\triangle_q\theta\Lambda^s U| + C_s\tau^2(|\nabla_q U|_s + |U|_s)\\ &|\tau^{-1}(H_{|q|^2/2}+i\tau\beta)U|_s \leqslant |\tau^{-1}(H_{|q|^2/2}+i\tau\beta)\theta\Lambda^s U| + C_s\tau^{-1}|U|_s\\ &|RU|_s \leqslant |R\theta\Lambda^s U| + C_s(\tau^2|\nabla_q U|_s + \tau^{-1}|U|_s).\end{aligned}\tag{2.71}$$

En appliquant l'inégalité (2.13) à $\theta\Lambda^s U$, et en utilisant (2.70) et (2.71) on obtient donc

(2.72)
$$|(\tau^{-2}+\mu)U|_s + |\nabla_q U|_s + |\tau^2\triangle_q U|_s + |(\tau^{-1}H_{|q|^2/2}+i\beta)U|_s + |U|_{s+2/3} \leqslant C(|RU|_s + C_s(\tau^2|\nabla_q U|_s + \tau^{-1}|U|_s)).$$

Enfin, pour tout s et $\varepsilon>0$, il existe $C_{\varepsilon,s}$ indépendant de $\tau,\lambda\in V_{\delta_0}$ tel que

(2.73)
$$\tau^2|\nabla_q U|_s + \tau^{-1}|U|_s \leqslant \varepsilon(|(\tau^{-2}+\mu)U|_s + |\nabla_q U|_s + |\tau^2\triangle_q U|_s) + C_{\varepsilon,s}|U|_s.$$

L'inégalité (2.69) pour $U\in\mathcal{S}_Y$ résulte clairement de (2.72) et (2.73). Le cas $\Lambda^s U\in L^2$ et $\Lambda^s RU\in L^2$ se traite comme d'habitude par régularisation. Soit K un compact de B_τ contenant le support de U. Soit $\Psi_\varepsilon\in\mathcal{E}^{-\infty}$ une famille bornée dans $\mathcal{E}^0$, convergeant vers l'identité, telle que pour tout $U\in\mathcal{D}'_Y$ à support dans K, $\Psi_\varepsilon(U)$ soit à support dans B_τ. On a $[R,\Psi_\varepsilon] = \tau^2 A_\varepsilon\nabla_q + \tau^{-1}B_\varepsilon$ où $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ sont bornés dans $\mathcal{E}^0$. En appliquant (2.69) à

$U_\varepsilon = \Psi_\varepsilon(U)$ et en passant à la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$|(\tau^{-2}+\mu)U|_s + |\nabla_q U|_s + |\tau^2\triangle_q U|_s + |(\tau^{-1}H_{|q|^2/2}+i\beta)U|_s + |U|_{s+2/3}$$
$$\leqslant C(|RU|_s + C_s(\tau^{-1}|U|_s + \tau^2|\nabla_q U|_s))$$

et on conclut en utilisant (2.73). □

Rappelons la décomposition (2.1) de u

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j(u)\ ,\ \delta_j(u) = \chi(2^{-j} < p >)u.$$

Soit $u \in \mathcal{S}'$, $v = (P-\lambda)u$, et U_j, V_j les fonctions associées à u, v par (2.3). L'opérateur $\chi_j = \chi(2^{-j} < p >)$ commutant à $H_{|p|^2/2}$, on a

$$[P-\lambda, \chi_j] = [\hbar\mathcal{O}, \chi_j] = M_0\phi(2^{-j} < p >)2^{-j}\nabla_p + 2^{-2j}\phi(2^{-j} < p >)M_0$$

où on a noté $M_0(x,p)$ des symboles de degré 0 en p, et $\phi(r)$ des fonctions C^∞ à support compact dans $[\frac{1}{r_0}, 2]$. Pour $u \in \mathcal{S}'$ on a donc

$$\begin{aligned} &RU_j = V_j + W_j \\ &W_j = 2^{-2j}\Sigma_{|j-k|\leqslant 1}(A_{j,k}U_k + B_{j,k}\nabla_q U_k) \end{aligned} \tag{2.74}$$

où les opérateurs $A_{.,k}, B_{.,k}$ appartiennent à $\mathcal{E}^0$.
Pour $t \in \mathbb{R}, \lambda = -\mu + i\beta \in \mathbb{C}, j \in \mathbb{N}$, posons

$$\begin{aligned} 2^{-jn/2}\alpha_{t,\lambda,j}(u) &= |U_j|_t \\ 2^{-jn/2}\beta_{t,\lambda,j}(u) &= (2^{2j}+|\mu|)|U_j|_t + |\nabla_q U_j|_t + |2^{-2j}\triangle_q U_j|_t \\ &\qquad + |(2^j H_{|q|^2/2}+i\beta)U_j|_t + |U_j|_{t+2/3}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Par définition, on a $\mathcal{H}^s_\lambda = \{u; \alpha_{s,\lambda,j}(u) \in l^2_j\}$. Soit W^s_λ l'espace de Hilbert

$$\mathcal{W}^s_\lambda = \{u; \beta_{s,\lambda,j}(u) \in l^2_j\},\ ||u||_{\mathcal{W}^s_\lambda} = ||\beta_{s,\lambda,j}(u)||_{l^2}. \tag{2.76}$$

La norme $||u||_{\mathcal{W}^s_\lambda}$ est uniformément en λ équivalente à la norme

$$||(< p >^2 + |\mu|)u||_{\lambda,s} + || < p > \nabla_p u||_{\lambda,s} + ||\triangle_p u||_{\lambda,s} + ||(H_{|p|^2/2}+i\beta)u||_{\lambda,s}$$
$$+ ||u||_{\lambda,s+2/3}.$$

On a par construction $\mathcal{W}^t_\lambda \subset \mathcal{H}^{t+2/3}_\lambda$ et

$$||u||_{\lambda,t+2/3} \leqslant ||u||_{\mathcal{W}^t_\lambda}. \tag{2.77}$$

Comme on a $(\tau|\beta|)^{2/3}|U_j|_t \leqslant |U_j|_{t+2/3}$ et pour $\tau \in]0,1]$, $\tau^{-2} + (\tau|\beta|)^{2/3} \geqslant c_0|\beta|^{1/2}$ avec $c_0 > 0$, on a aussi d'après (2.75)

$$|\beta|^{1/2}||u||_{\lambda,t} \leqslant C||u||_{\mathcal{W}^t_\lambda}. \tag{2.78}$$

Comme on a $2a\Lambda^{1/3} \leqslant a^2 + \Lambda^{2/3}$, pour $u \in \mathcal{W}_\lambda^t$ on déduit de (2.75) $\nabla_p u \in \mathcal{H}_\lambda^{t+1/3}$ et

$$||\nabla_p u||_{\lambda,t+1/3} \leqslant C||u||_{\mathcal{W}_\lambda^t}. \tag{2.79}$$

Lemme 2.7. — *Soit $\delta_0 > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $u \in \mathcal{S}'$ tel que $Pu \in \mathcal{H}^t$ on a $u \in \mathcal{W}_\lambda^t$, et pour tout $\lambda \in V_{\delta_0}$ on a*

$$||u||_{\mathcal{W}_\lambda^t} \leqslant C||(P-\lambda)u||_{\lambda,t} + C_t||u||_{\lambda,t} \tag{2.80}$$

où les constantes C et C_t sont indépendantes de $\lambda \in V_{\delta_0}$.

Démonstration. — Soit $u \in \mathcal{S}'$ tel que $Pu = v \in \mathcal{H}^t$. Soit

$$J = \{s;\ u \in \mathcal{H}^s,\ \nabla_p u \in \mathcal{H}^s\}.$$

Alors J est non vide, et d'après la proposition 2.6, et (2.74) on a pour $s \in J$, $s \leqslant t$

(2.81)

$$\beta_{s,\lambda,j}(u) \leqslant C\ 2^{jn/2}(|RU_j|_s + C_s|U_j|_s) \leqslant$$
$$C(\alpha_{s,\lambda,j}(v) + C_s(\alpha_{s,\lambda,j}(u) + \Sigma_{|j-k|\leqslant 1}(2^{-2j}\alpha_{s,\lambda,k}(u) + 2^{-j}\alpha_{s,\lambda,k}(\nabla_p u)))$$

d'où on déduit que pour $s \leqslant t, s \in J$, on a $u \in \mathcal{W}_\lambda^s$ et

$$||u||_{\mathcal{W}_\lambda^s} \leqslant C(||(P-\lambda)u||_{\lambda,s} + C_s(||u||_{\lambda,s} + ||\nabla_p u||_{\lambda,s}). \tag{2.82}$$

On a donc d'après (2.77) et (2.79), $s + 1/3 \in J$, donc $t \in J$ et $u \in \mathcal{W}_\lambda^t$. Comme pour tout t et $\varepsilon > 0$, il existe $C_{\varepsilon,t}$ indépendant de $\lambda \in V_{\delta_0}$ tel que

$$||\nabla_p u||_{\lambda,t} \leqslant \varepsilon||u||_{\mathcal{W}_\lambda^t} + C_{\varepsilon,t}||u||_{\lambda,t} \tag{2.83}$$

on obtient (2.80) comme conséquence de (2.82) et (2.83). □

Rappelons que l'ouvert $\mathcal{U}_\delta$ de $\mathbb{C}$ est défini en (1.10). Nous pouvons à présent achever la preuve du Théorème 1.2 par une meilleure description de l'ensemble résolvant combinant les estimations précédentes et l'accrétivité de l'opérateur P. Soit δ_0 fixé et C la constante intervenant dans (2.80). D'après (2.78), on peut choisir $\delta_1 > 0$ petit, tel qu'on ait pour tout $\lambda = -\mu + i\beta \in V_{\delta_0}$, tout t et tout $u \in \mathcal{W}_\lambda^t$

$$C\delta_1|\beta|^{1/2}||u||_{\lambda,t} \leqslant \frac{1}{2}||u||_{\mathcal{W}_\lambda^t}. \tag{2.84}$$

La constante δ_1 étant ainsi choisie, pour $\lambda_1 \in \mathcal{U}_\delta$, on écrit λ_1 sous la forme

$$\lambda_1 = \lambda + \nu,\ \lambda \in V_{\delta_0},\quad 0 \leqslant \nu \leqslant \delta_1|Im(\lambda)|^{1/2}. \tag{2.85}$$

On a en particulier

$$Im(\lambda_1) = Im(\lambda),\quad |Re(\lambda_1) - Re(\lambda)| \leqslant \delta_1|Im(\lambda)|^{1/2}. \tag{2.86}$$

Soit $u \in \mathcal{S}'$ tel que $(P-\lambda_1)u \in \mathcal{H}^s$, et $J = \{t, u \in \mathcal{H}^t\}$; pour $t \in J$ avec $t \leqslant s$, on a $Pu \in \mathcal{H}^t$, donc par le lemme 2.7 $u \in \mathcal{W}^t_\lambda \subset \mathcal{H}^{t+2/3}$, donc $s \in J$, $u \in \mathcal{W}^s_\lambda$ et d'après (2.80), (2.84), et (2.85)

$$||u||_{\mathcal{W}^s_\lambda} \leqslant 2C||(P-\lambda_1)u||_{\lambda,s} + C_s||u||_{\lambda,s}. \tag{2.87}$$

Pour $s=0$, on a $u \in \mathcal{W}^0_\lambda$, donc les intégrations par parties étant licites, on obtient

$$Re((P-\lambda)u|u) \geqslant \delta_0||u||^2_{L^2}$$

donc

$$||u||_{\mathcal{W}^0_\lambda} \leqslant C||(P-\lambda)u||_{L^2} + C_0||u||_{\lambda,0} \leqslant (C+\frac{C_0}{\delta_0})||(P-\lambda)u||_{L^2}. \tag{2.88}$$

Comme on a

$$||(P-\lambda)u||_{L^2} \leqslant ||(P-\lambda_1)u||_{L^2} + \delta_1|\beta|^{1/2}||u||_{L^2}$$

en réutilisant (2.78) et en diminuant δ_1, on déduit de (2.88)

$$||u||_{\mathcal{W}^0_\lambda} \leqslant C'||(P-\lambda_1)u||_{L^2} \tag{2.89}$$

d'où la localisation (1.11) du spectre de P, puisque $i\beta \in \sigma(P) \Rightarrow \beta = 0$. On a pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $s \geqslant 0$

$$||u||_{\lambda,s} \leqslant \varepsilon||u||_{\lambda,s+2/3} + C_{t,\varepsilon}||u||_{L^2}.$$

On déduit donc de (2.77), (2.87), et (2.89) pour $s \geqslant 0$ et $\lambda_1 \in \mathcal{U}_\delta$

$$||u||_{\mathcal{W}^s_\lambda} \leqslant 2C||(P-\lambda_1)u||_{\lambda,s} + C_s||u||_{L^2} \leqslant C_s||(P-\lambda_1)u||_{\lambda,s}. \tag{2.90}$$

En particulier, on a pour $s \geqslant 0$

$$||u||_{\lambda,s} \leqslant C_s||(P-\lambda_1)u||_{\lambda,s} \tag{2.91}$$

et comme les inégalités précédentes s'appliquent à l'adjoint P^* de P, on obtient par dualité, que (2.91) est valable pour $s \leqslant 0$, et donc en utilisant (2.87), on obtient pour tout s et tout $\lambda_1 \in \mathcal{U}_\delta$

$$||u||_{\mathcal{W}^s_\lambda} \leqslant C_s||(P-\lambda_1)u||_{\lambda,s}. \tag{2.92}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que (2.92) implique pour $\lambda_1 \in \mathcal{U}_\delta$

(2.93)

$$||\hbar\mathcal{O}u||_{\lambda_1,s} + ||(H_{|p|^2/2} + iIm(\lambda_1)u||_{\lambda_1,s} + (|Re(\lambda_1)| + |Im(\lambda_1)|^{1/2})||u||_{\lambda_1,s}$$
$$+ ||u||_{\lambda_1,s+2/3} \leqslant C_s||(P-\lambda_1)(u)||_{\lambda_1,s}.$$

Or on a pour $\tau \in]0,1], \beta \in \mathbb{R}$

$$|\beta|^{1/2} \leqslant C(\tau^{-2} + \tau|\beta|)$$

d'où les équivalences de norme

$$1/C_s||v||_{\lambda_1,s} \leqslant ||v||_{\lambda,s} \leqslant C_s||v||_{\lambda_1,s} \tag{2.94}$$

donc d'après (2.78)

$$|Im(\lambda_1)|^{1/2}||u||_{\lambda_1,s} \leqslant C_s|\beta|^{1/2}||u||_{\lambda,s} \leqslant C_s||u||_{\mathcal{W}^s_\lambda}. \tag{2.95}$$

Donc (2.93) est conséquence de (2.86), (2.92), (2.94), et (2.95). Ceci achève la preuve du Théorème 1.2.

3. Optimalité des estimations

Dans cette section, nous vérifions que l'exposant 1/2 de la formule (1.10) est (presque) optimal pour la validité des estimations de résolvante (1.12). Plus précisement, la proposition 3.1 implique qu'on ne peut pas remplacer 1/2 par $c > 1/2$ dans la définition (1.10) de l'ouvert $\mathcal{U}_\delta$ sur lequel on a l'estimation de résolvante (1.12) pour $|\lambda|$ grand. L'étude précise du spectre de P est à notre connaissance un problème ouvert. Par contre, les estimations de croissance de la résolvante dans le plan complexe est un problème plus simple, pour lequel on peut se contenter de l'étude du pseudo-spectre de P. On renvoie à [7] pour une étude du pseudo-spectre de P pour la métrique plate sur $\mathbb{R}^n$, mais dans un régime semi-classique avec potentiel.
Dans cette section, on suppose $\hbar = 1$ pour simplifier les notations. Soit $x_0 \in X$ et $\varphi(x)$ une fonction à valeurs réelles définie dans un voisinage W de x_0 et solution dans W de l'équation

$$|d\varphi| = 1. \tag{3.1}$$

Soit $\delta \in]0, 1/6[$. Pour $k \in [1,\infty[$ soit $\beta'_k \in [-1,1]$. On pose

$$\lambda_k = k^{2/3+\delta} + i\beta'_k k^{4/3}. \tag{3.2}$$

Proposition 3.1. — *Pour tout k assez grand, il existe une fonction $f_k(x,p) \in C_0^\infty(T^*X)$ à support contenu dans $x \in W$, $|p + k^{1/3}\beta'_k d\varphi(x)| \leqslant Ck^{\delta-1/3}$, vérifiant $||f_k||_{L^2} = 1$ et telle que*

$$||(P-\lambda_k)(e^{ik\varphi}f_k)||_{L^2} = \mathcal{O}(k^{-\infty}). \tag{3.3}$$

Démonstration. — Effectuons le changement de variable sur $T^*X|_W$

$$\begin{aligned} x &= y \\ p &= k^{-1/3}q - \beta'_k k^{1/3} d\varphi(y). \end{aligned} \tag{3.4}$$

On obtient

$$e^{-ik\varphi}(P-\lambda_k)(e^{ik\varphi}f) = Q(f) \tag{3.5}$$

où Q est l'opérateur différentiel dépendant de k, avec $\sigma_i(y) = \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}$
(3.6)

$$\begin{aligned} Q &= k^{4/3} i\beta'_k[-1 + g^{l,j}\sigma_l\sigma_j] \\ &+ kg^{l,j}\beta'_k\sigma_l\beta'_k[\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial y_j} - \Gamma^\alpha_{\beta,j}\sigma_\alpha]\frac{\partial}{\partial q_\beta} \\ &+ k^{2/3}[-\frac{1}{2}\triangle_q - k^\delta + \frac{(\beta'_k|\sigma|)^2}{2} - ig^{l,j}q_l\sigma_j] \\ &+ k^{1/3}[-g^{l,j}q_l\beta'_k(\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial y_j} - \Gamma^\alpha_{\beta,j}\sigma_\alpha)\frac{\partial}{\partial q_\beta} + g^{l,j}\beta'_k\sigma_l(\frac{\partial}{\partial y_j} + \Gamma^\alpha_{\beta,j}q_\alpha\frac{\partial}{\partial q_\beta})] \\ &- [g^{l,j}\beta'_k q_l\sigma_j + \frac{n}{2}] \\ &- k^{-1/3}g^{l,j}q_l[\frac{\partial}{\partial y_j} + \Gamma^\alpha_{\beta,j}q_\alpha\frac{\partial}{\partial q_\beta}] \\ &+ k^{-2/3}\frac{|q|^2}{2}. \end{aligned}$$

Comme φ vérifie (3.1), on a $|\sigma| = 1$ donc la première ligne de (3.6) est nulle. La deuxième ligne de (3.6) est aussi nulle : en effet, $1 = g^{i,j}\sigma_i\sigma_j$ entraîne pour tout β

$$\frac{\partial g^{i,j}}{\partial x_\beta}\sigma_i\sigma_j + 2g^{i,j}\sigma_i\frac{\partial\sigma_j}{\partial x_\beta} = 0. \tag{3.7}$$

Comme $\frac{\partial\sigma_j}{\partial x_\beta} = \frac{\partial\sigma_\beta}{\partial x_j}$, et la matrice $\frac{\partial g^{i,j}}{\partial x_\beta} + 2g^{i,\alpha}\Gamma^j_{\beta,\alpha}$ étant antisymétrique en i, j, on a pour tout β

$$g^{i,j}\sigma_i[\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial y_j} - \Gamma^\alpha_{\beta,j}\sigma_\alpha] = 0. \tag{3.8}$$

Posons $\Lambda = k^\delta - \frac{(\beta'_k)^2}{2} \gg 1$, et introduisons le petit paramètre $h = \Lambda^{-3/2}$. Effectuons maintenant le changement de variable $q = \Lambda z$. Alors Q s'écrit dans les variables (y, z)

$$\begin{aligned} k^{-2/3}\Lambda^{-1}Q = R &= [-\frac{h^2}{2}\triangle_z - 1 - ig^{l,j}z_l\sigma_j] \\ &+ k^{-1/3}\Lambda^{1/2}\mathcal{O}(hz\partial_z + h\partial_y) \\ &+ k^{-2/3}\mathcal{O}(1) \\ &+ k^{-1}\Lambda^{3/2}\mathcal{O}(zh\partial_y + hz^2\partial_z) \\ &+ k^{-4/3}\Lambda\mathcal{O}(z^2) \end{aligned} \tag{3.9}$$

où les $\mathcal{O}$ sont des coéfficients C^∞ en (y, z) près de $(0, 0)$, uniformément par rapport à k. Comme $\delta < 1/6$, on a $k \gg h^{-4}$, $k^{-1/3}\Lambda^{1/2} \ll h$, $k^{-2/3} \ll h^{8/3}$, $k^{-1}\Lambda^{3/2} \ll h^3$, $k^{-4/3}\Lambda \ll h^{14/3}$, et on peut considérer R comme un opérateur h-pseudodifférentiel, de symbole $r = r_1 + ir_2 = |\zeta|^2/2 - 1 - ig^{l,j}z_l\sigma_j + o(h) = r_1^0 + ir_2^0 + o(h)$. Soit ζ^0 tel que $|\zeta^0|^2/2 = 1$ et $g^{l,j}(x_0)\zeta_l^0\sigma_j(x_0) > 0$; alors en $(x_0, 0; \xi = 0, \zeta^0)$, on a $r_1^0 = r_2^0 = 0$, $\{r_1^0, r_2^0\} < 0$. Il existe donc une fonction $G(y, z; k)$ à support près de $(y, z) = (x_0, 0)$, de norme 1 dans L^2, dont le h-front d'onde est concentré microlocalement près de $(x_0, 0; \xi = 0, \zeta^0)$, et telle que

$$||R(G)||_{L^2} \in \mathcal{O}(h^\infty). \tag{3.10}$$

Alors $f_k(x,p) = (k^{-1/3}\Lambda)^{n/2}G(x, k^{1/3}\Lambda^{-1}(p + \beta_k' k^{1/3}d\varphi(x)))$ vérifie (3.3).

□

4. Application aux équations de Fokker-Planck géométriques

Nous commençons par rappeler ce qu'est un opérateur de Fokker-Planck géométrique. Nous nous placerons ici dans un cadre un peu plus général que celui de [9].

Soit $F \to X$ un fibré hermitien sur X et ∇^F une connection sur F. Soit $\mathcal{F}$ le fibré hermitien sur $\Sigma = T^*X$

$$\mathcal{F} = \Sigma \times_X F. \tag{4.1}$$

On munit $\mathcal{F}$ de la connection ∇ suivante :

Soit Y un champ de vecteurs sur Σ, $Y^H \in T^H\Sigma \simeq TX$ sa composante horizontale dans la décomposition (1.5) et $(f^i(x))_i$ une base locale de F ; on pose

$$\nabla_Y(\Sigma a_i(x,p)f^i(x)) = \Sigma Y(a_i)f^i + \Sigma a_i \nabla^F_{Y^H}(f^i). \tag{4.2}$$

En particulier, on a $\nabla_{\hat{e}^j}(f_i(x)) = 0$ et on notera toujours $\frac{\partial}{\partial p_j}$ l'opérateur $\nabla_{\hat{e}^j}$, ainsi que $\mathcal{O}$ l'oscillateur harmonique vertical $\mathcal{O} = \frac{1}{2}[-\triangle_p + |p|^2 - n]$ avec $\triangle_p = \Sigma g_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}$. Soit $dxdp$ la forme volume canonique sur Σ. On définit l'espace L^2 de sections de $\mathcal{F}$ comme l'espace des $\omega(x,p)$ tels que

$$||\omega||^2 = \int |\omega|^2(x,p)\ dxdp < \infty. \tag{4.3}$$

Soit $< p >$ la fonction sur Σ, $< p >= (1 + |p|^2)^{1/2}$. Soit $M(x,p)$ une section C^∞ de $End(\mathcal{F})$, et $d \in \mathbb{R}$. On dira que $M(x,p)$ est un symbole de degré d si pour tout α, β, il existe $C_{\alpha,\beta}$ tel que

$$||\nabla^\alpha_{e_i}\nabla^\beta_{\hat{e}^j}M|| \leqslant C_{\alpha,\beta} < p >^{d-|\beta|}. \tag{4.4}$$

Soit $M^j_{0,1}(x,p), M(x,p) \in End(\mathcal{F})$, des symboles de degré 0 et $\hbar > 0$ une constante réelle.

DÉFINITION 4.1. — *Un opérateur de Fokker-Planck géométrique (GFK) est un opérateur A agissant sur les sections de $\mathcal{F}$ de la forme*

$$\begin{aligned} A &= \hbar\mathcal{O} + \nabla_{H_{|p|^2/2}} + \mathcal{M} \\ \mathcal{M} &= \Sigma\partial_{p_j} M_0^j + \Sigma p_j M_1^j + M. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Exemple 4.2. — L'exemple fondamental d'opérateur de Fokker-Planck géométrique est le Laplacien hypoelliptique de J-M.Bismut ([2]), et nous renvoyons à [1] pour une introduction à ce sujet.
Soit $F = T^*X \oplus TX$ muni de la connection de Levi-Civita. Alors la décomposition (1.5) identifie $\mathcal{F} = \Sigma \times_X F$ au fibré des 1-formes sur Σ, et l'agèbre extérieure $\Lambda^\cdot(\mathcal{F})$ s'identifie au fibré des formes différentielles sur $\Sigma = T^*X$. Soit $\mathcal{L}ie(Y)(\omega)$ la dérivée de Lie de la forme différentielle ω dans la direction du champ de vecteur Y sur Σ

$$\mathcal{L}ie(Y)(\omega) = \frac{d}{ds} exp(sY)^*(\omega)|_{s=0}.$$

Soit $e^i, \hat{e}_j$ la base duale de $e_i, \hat{e}^j$

$$e^i = dx_i, \quad \hat{e}_j = dp_j - \Gamma^\alpha_{j,k} p_\alpha dx_k.$$

Soit ω une section de $\Lambda^\cdot(\mathcal{F})$. On écrit en coordonnées locales

$$\omega = \Sigma\omega_I^J e^I \hat{e}_J$$

où les $\omega_I^J(x,p)$ sont des fonctions C^∞ sur Σ. On définit l'opérateur de nombre vertical N_V par

$$N_V(\Sigma\omega_I^J e^I \hat{e}_J) = \Sigma\omega_I^J \; |J| \; e^I \hat{e}_J. \tag{4.6}$$

Soit R le tenseur de courbure de Riemann et $s > 0$ un paramètre réel. Le Laplacien hypoelliptique de J.-M. Bismut est l'opérateur agissant sur les formes différentielles sur $\Sigma = T^*X$
(4.7)

$$B_s = \frac{s}{2}[-\triangle_p + |p|^2 + (2N_V - n) - \frac{1}{2} < R(e_i, e_j)e_k, e_l > e^i e^j i_{\hat{e}^k} i_{\hat{e}^l}] - \sqrt{s}\mathcal{L}_{H_{|p|^2/2}}.$$

Cet opérateur n'est pas exactement de la forme (4.5), la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{H_{|p|^2/2}}$ n'ayant pas la bonne homogénéité en p. On s'y ramène par conjugaison sur l'algèbre extérieure comme suit.

Soit h une fonction sur Σ, et $Z = H_h$ le champ hamiltonien de h. L'action de la dérivée de Lie $\mathcal{L}ie(H_h)$ sur les 1-formes est donnée par la formule

$$
(4.8)\qquad
\begin{aligned}
&\mathcal{L}ie(H_h)(\alpha_j dx_j + \beta_j dp_j) = \alpha'_j dx_j + \beta'_j dp_j\\
&\alpha'_j = \{h, \alpha_j\} + \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial p_k}\alpha_k - \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k}\beta_k\\
&\beta'_j = \{h, \beta_j\} + \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial p_k}\alpha_k - \frac{\partial^2 h}{\partial p_j \partial x_k}\beta_k.
\end{aligned}
$$

La matrice

$$
\mathcal{N}_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial p} & -\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial p \partial p} & -\frac{\partial^2 h}{\partial p \partial x} \end{pmatrix}
$$

est anti-adjointe pour la structure symplectique. Avec le choix $h = |p|^2/2$ et notre choix de base $e^i = dx_i, \hat{e}_j = dp_j - \Gamma^{\alpha}_{j,k}\ p_\alpha\ dx_k$, qui préserve le fait que e^i est homogène de degré 0 en p, et $\hat{e}_j$ homogène de degré 1, on obtient que $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{|p|^2/2}$ possède l'homogénéité suivante en p

$$
(4.9)\qquad
\begin{aligned}
&\mathcal{N}(e^i) = \mathcal{N}^{i,\alpha}_{1,l}(x) p_\alpha e^l + \mathcal{N}^{i}_{2,l}(x)\hat{e}_l\\
&\mathcal{N}(\hat{e}_i) = \mathcal{N}^{i,\alpha,\beta}_{3,l}(x) p_\alpha p_\beta e^l + \mathcal{N}^{i,\alpha}_{4,l}(x) p_\alpha \hat{e}_l.
\end{aligned}
$$

Soit ρ l'application linéaire définie par , avec $N_V(\omega_j) = j\omega_j$,

$$
\rho(\Sigma_{0\leqslant j\leqslant n}\omega_j(x,p)) = \Sigma_{0\leqslant j\leqslant n}\omega_j(x,p) < p >^j .
$$

Alors l'opérateur conjugué

$$
\rho^{-1} B_s \rho = A
$$

est de la forme, avec $\hbar = \sqrt{s}$

$$
(4.10)\qquad
\begin{aligned}
&A = \sqrt{s}[\hbar\mathcal{O} - \nabla_{\{|p|^2/2,.\}} + \mathcal{M}]\\
&\mathcal{M} = \Sigma\partial_{p_j} M^j_0 + \Sigma p_j M^j_1 + M
\end{aligned}
$$

où les matrices $M^j_{0,1}(x,p), M(x,p)$ sont des symboles de degré 0. Donc au changement $p \to -p$ près, $\frac{1}{\sqrt{s}}\rho^{-1}B_s\rho$ est un opérateur de type GFK.

Un opérateur GFK A est un opérateur différentiel du second ordre, partiellement elliptique en p, ne faisant intervenir que des dérivées du premier ordre en x. Comme les dérivées verticales ∂_{p_j} et les commutateurs $[\partial_{p_k}, \{|p|^2/2, .\}]$ engendrent l'espace tangent à Σ, par le théorème de Hörmander, un opérateur GFK A est toujours hypoelliptique, et il en est de même de l'équation de la chaleur associée $\partial_t + A$.

Soit $\lambda = -\mu + i\beta \in \mathbb{C}, \mu, \beta \in \mathbb{R}$ un paramètre spectral. Comme dans le cas scalaire, on définit une chaîne d'espaces de Sobolev $\mathcal{H}^s_\lambda$ de sections de

$\mathcal{F}$ par dualité et interpolation en posant $\mathcal{H}^0_\lambda = L^2$ et en choisissant comme collection d'opérateurs de degré 1, avec $< p >= \sqrt{1+|p|^2}$

$$< p > \partial_{p_j}, \quad \nabla_{e_i}, \quad < p >^2 + |\mu| + \frac{|\beta|}{< p >}. \tag{4.11}$$

Théorème 4.3. — *Soit A un opérateur GFK considéré comme opérateur non borné sur L^2 avec domaine $D(A) = \{\omega \in L^2; A(\omega) \in L^2\}$. Alors*

$$D(A) = \{\omega \in L^2; \ \ \mathcal{O}(\omega) \in L^2, \ \ \nabla_{H_{|p|^2/2}}\omega \in L^2\} \tag{4.12}$$

et l'adjoint A^* de A est egal à son adjoint formel, avec domaine $D(A^*) = D(A)$.
L'opérateur A est à résolvante compacte, et il existe $\delta_0 > 0, \delta_1 > 0$ tels que le spectre $\sigma(A)$ vérifie

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \ Re(\lambda) + \delta_0 \geqslant \delta_1 |Im(\lambda)|^{1/2}\} = \mathbb{C} \setminus \mathcal{U}. \tag{4.13}$$

De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}$ il existe C_s, tels que pour tout $\lambda \in \mathcal{U}$, et tout $\omega \in \mathcal{S}'$, $(A-\lambda)\omega \in \mathcal{H}^s$ implique $\omega \in \mathcal{H}^{s+2/3}$, $\mathcal{O}\omega \in \mathcal{H}^s$, $\nabla_{\{|p|^2/2,.\}}\omega \in \mathcal{H}^s$ et on a

$$\begin{aligned} &||\hbar\mathcal{O}\omega||_{\lambda,s} + ||(\nabla_{\{|p|^2/2,\}} + iIm(\lambda)\omega||_{\lambda,s} + (|Re(\lambda)| + |Im(\lambda)|^{1/2})||\omega||_{\lambda,s} \\ &+ ||\omega||_{\lambda,s+2/3} \leqslant C_s||(A-\lambda)(\omega)||_{\lambda,s}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Démonstration. — C'est un corollaire simple du théorème 1.2. Si $\omega \in \mathcal{S}'$ est à support dans un ouvert de carte de X où le fibré F est trivialisé, et $(A-\lambda)\omega \in \mathcal{H}^s$, le théorème 1.2 entraîne

$$\begin{aligned} &||\hbar\mathcal{O}\omega||_{\lambda,s} + ||(\nabla_{\{|p|^2/2,\}} + iIm(\lambda)\omega||_{\lambda,s} + (|Re(\lambda)| + |Im(\lambda)|^{1/2})||\omega||_{\lambda,s} \\ &+ ||\omega||_{\lambda,s+2/3} \leqslant C_s(||(A-\lambda)(\omega)||_{\lambda,s} + || < p > (\omega)||_{\lambda,s} + ||\nabla_p(\omega)||_{\lambda,s}) \end{aligned} \tag{4.15}$$

pour $\lambda \in \mathcal{U}$ dès que $\delta_0 > 0$. Comme on a

$$|| < p > (\omega)||_{\lambda,s} + ||\nabla_p(\omega)||_{\lambda,s} \leqslant \varepsilon||\hbar\mathcal{O}\omega||_{\lambda,s} + C_{s,\varepsilon}||\omega||_{\lambda,s}$$

on en déduit que (4.14) est vrai pour tout $s \in [-s_0, s_0]$ pour δ_0 assez grand. Comme pour $\varphi \in C^\infty(X)$, on a $[A, \varphi] = (p|d\varphi)$, on obtient que (4.14) est vrai pour tout $s \in [-s_0, s_0]$ pour δ_0 assez grand, sans condition de petitesse sur le support de ω. En particulier, avec $s = 0$, on obtient (4.12), le fait que A est à résolvante compacte et la localisation (4.13) du spectre. Finalement en réutilisant les arguments de commutation de la preuve de la proposition 2.6 et du lemme 2.7, on obtient aisément que $\mathcal{S}$ est dense dans $D(A)$, donc A^* est égal à l'adjoint formel de A, ainsi que la validité de (4.14) pour tout s pour un δ_0 indépendant de s. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-M. Bismut, « Le Laplacien hypoelliptique », in *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 2003–2004*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau, 2004, p. Exp. No. XXII, 15.

[2] ———, « Le Laplacien hypoelliptique sur le fibré cotangent », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. I* **338** (2004), p. 555-559.

[3] J.-M. Bismut & G. Lebeau, « The hypoelliptic Laplacian and Ray-Singer metrics », to appear, 2006.

[4] B. Helffer & F. Nier, *Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1862, Springer-Verlag, 2005, x+209 pages.

[5] B. Helffer & J. Nourrigat, *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, Progress in Mathematics, vol. 58, Birkhäuser Boston Inc., 1985, x+278 pages.

[6] F. Hérau & F. Nier, « Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for Fokker-Planck equations with high degree potential », *Arch. Ration. Mecha. Anal.* **171** (2004), n° 2, p. 151-218.

[7] F. Hérau, J. Sjostrand & C. Stolk, « Semiclasical analysis for the Kramers-Fokker-Planck equation », *CPDE* **30** (2005), p. 689-760.

[8] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. III*, Grundl. Math. Wiss. Band 274, Springer-Verlag, Berlin, 1985, Pseudodifferential operators, viii+525 pages.

[9] G. Lebeau, « Geometric Fokker-Planck equations », *Portugaliae Mathematica. Nova Série* **62** (2005), n° 4, p. 469-530.

[10] N. Lerner, « Energy methods via coherent states and advanced pseudo-differential calculus », in *Multidimensional complex analysis and partial differential equations (São Carlos, 1995)*, Contemp. Math., vol. 205, Amer. Math. Soc., 1997, p. 177-201.

Manuscrit reçu le 20 avril 2006,
accepté le 6 juin 2006.

Gilles LEBEAU
Université de Nice Sophia-Antipolis
Département de Mathématiques
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 02 (France)
lebeau@unice.fr