



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Henry de THÉLIN

Sur la construction de mesures selles

Tome 56, n° 2 (2006), p. 337-372.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2006__56_2_337_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

SUR LA CONSTRUCTION DE MESURES SELLES

par Henry de THÉLIN

RÉSUMÉ. — Nous construisons des mesures selles (dans un sens faible) pour les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

ABSTRACT. — We build saddle measures (in a weak sense) for holomorphic endomorphisms of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Introduction

À partir d'un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, f , de degré $d \geq 2$, J.E. Fornæss et N. Sibony ont défini le courant de Green T associé à f (voir [15] et [14]), dont le support est l'ensemble de Julia de f . Ce courant possède un potentiel continu : on peut donc définir son auto-intersection $\mu = T \wedge T$ (voir [15]). La mesure μ ainsi obtenue est l'unique mesure d'entropie maximale $2 \log(d)$ (voir [6]) et elle a ses exposants de Lyapunov minorés par $\frac{\log(d)}{2}$ (voir [5]).

L'objet de cet article est de décrire la dynamique de f en dehors du support de μ . L'entropie topologique de f hors de ce support étant majorée par $\log(d)$ (voir [23]), il s'agira d'une part de construire des mesures d'entropie $\log(d)$ et d'autre part, d'évaluer leurs exposants de Lyapunov.

Quand f est un endomorphisme holomorphe hyperbolique (dans un sens fort), cela a été réalisé par J.E. Fornæss et N. Sibony dans [17]. En effet, soient L une droite projective de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et S une valeur d'adhérence de $S_m = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{[f^i(L)]}{d^i}$. Le courant S vérifie $f_* S = dS$ et en le tranchant avec T , on obtient une mesure $\nu = T \wedge S$ invariante par f . Alors, dans

Mots-clés : dynamique holomorphe, entropie, exposants de Lyapunov.

Classification math. : 32H50, 37FXX.

[17], J.E. Fornæss et N. Sibony ont démontré entre autres que ces mesures étaient selles (*i.e.*, qu'elles ont un exposant de Lyapunov strictement positif et un strictement négatif).

Quand f est un endomorphisme holomorphe quelconque de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, nous pouvons construire comme précédemment des mesures $\nu = T \wedge S$ invariantes par f . L'objectif de cet article est de voir que ces mesures permettent de décrire la dynamique de f en dehors du support de μ . Plus précisément, nous aurons tout d'abord (comme dans [1]) le

THÉORÈME 1. — *L'entropie métrique de ν est minorée par $\log(d)$.*

En particulier, quand le support de la mesure ν est disjoint de celui de la mesure μ , la mesure ν est d'entropie maximale dans le complémentaire du support de μ (voir [23]).

Les mesures ν ne sont pas ergodiques en général (par exemple si $f([z : w : t]) = [z^2 : w^2 : t^2]$, elles ont en général au moins deux composantes ergodiques). En particulier, le théorème précédent associé à l'inégalité de Ruelle (voir [21] ou le paragraphe 2) ne permet pas d'obtenir que le plus grand exposant de Lyapunov de ν est supérieur à 0 en presque tout point. Cependant, nous atteindrons ce résultat en adaptant les arguments de R. Dujardin (voir [11]) à notre situation. Nous aurons donc le

THÉORÈME 2. — *Pour ν presque tout point x , le plus grand exposant de Lyapunov en x est supérieur ou égal à $\frac{\log(d)}{2}$.*

Pour décrire la dynamique de f hors du support de μ , il nous reste à estimer le plus petit exposant de Lyapunov de ν hors de ce support. C'est l'objet du

THÉORÈME 3. — *Supposons que ν ne charge pas les courbes algébriques.*

Alors, pour ν presque tout point x hors du support de μ , le plus petit exposant de Lyapunov $\chi_1(x)$ est négatif ou nul.

Les mesures ν sont donc faiblement selles en dehors du support de μ .

Par ailleurs, dans le paragraphe 6, nous donnerons un exemple de mesure ν qui ne charge aucune courbe algébrique pour laquelle le plus petit exposant de Lyapunov est nul.

Remarquons que si $\nu = T \wedge S$ charge une courbe algébrique alors celle-ci est nécessairement prépériodique. En effet, d'une part ν est invariante et d'autre part, comme T est à potentiel höldérien, ν ne charge aucun point. En particulier, nous avons le

COROLLAIRE. — *Si f ne possède aucune courbe périodique alors toutes les mesures $\nu = T \wedge S$ construites précédemment ont leur plus petit exposant de Lyapunov négatif ou nul pour presque tout point hors du support de μ .*

Voici maintenant le plan de ce texte : dans le premier paragraphe, nous minorerons l'entropie de la mesure ν par $\log(d)$. La seconde et la troisième partie de cet article seront consacrées à des rappels d'une part sur la théorie de Pesin et d'autre part sur les courants tissés (ou géométriques) introduits dans [10]. Ensuite, le quatrième paragraphe démontrera la minoration du plus grand exposant de Lyapunov de ν , tandis que le cinquième traitera de la majoration du plus petit. Enfin, dans la sixième partie, nous donnerons l'exemple de mesure ν qui rend le théorème 3 optimal.

Remerciements. — Je tiens à remercier T.-C. Dinh et R. Dujardin pour leurs remarques sur le fond et la forme de cet article.

1. Entropie métrique de la mesure ν

Dans ce paragraphe, on considère L une droite projective et S une valeur d'adhérence de $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{[f^i(L)]}{d^i}$. Le courant S vérifie $f_* S = dS$. Par ailleurs, en tranchant ce courant avec T , on obtient une mesure $\nu = T \wedge S$ qui est invariante par f .

L'objectif de ce paragraphe est alors de démontrer le

THÉORÈME. — *L'entropie métrique de ν est minorée par $\log(d)$.*

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, nous allons faire quelques rappels sur l'entropie.

1.1. Entropie métrique

Notons $d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{d(f^i(x), f^i(y))\}$ et $B_n(x, \varepsilon)$ la boule de centre x et de rayon ε pour cette métrique.

À partir du théorème de Brin-Katok (voir [7]) nous pouvons définir l'entropie métrique $h_\nu(f)$ de ν par :

$$h_\nu(f) = \int \sup_{\varepsilon > 0} \liminf_n -\frac{1}{n} \log(\nu(B_n(x, \varepsilon))) d\nu(x).$$

Cette quantité décrit donc la décroissance moyenne de la masse d'une boule dynamique $B_n(x, \varepsilon)$ pour ν .

Dans [1], E. Bedford et J. Smillie ont donné une méthode pour minorer l'entropie métrique de certaines mesures. Elle s'appuie sur la démonstration du principe variationnel (voir [25]) et plus précisément sur la

PROPOSITION. — Fixons $\varepsilon > 0$. Soient σ_n une suite de probabilités et $\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i \sigma_n$. Si ν_{n_j} converge vers ν et $\sigma_{n_j}(B_{n_j}(x, \varepsilon)) \leq c_{n_j}$ pour toute boule dynamique $B_{n_j}(x, \varepsilon)$ alors :

$$h_\nu(f) \geq \limsup -\frac{1}{n_j} \log c_{n_j}.$$

1.2. Minoration de l'entropie de ν

La démonstration du théorème 1 va se faire en deux étapes. Dans la première, on va utiliser la proposition précédente avec $\sigma_n = \frac{f^{n*} \omega}{d^n} \wedge [L]$ (où ω est la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$). Celle-ci nous donnera alors, exactement comme dans [1], une mesure ν' d'entropie minorée par $\log(d)$. Il restera alors à voir que ν et ν' sont égales.

1.2.1. Construction d'une mesure d'entropie minorée par $\log(d)$

Quitte à extraire une sous-suite, nous supposons que

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{[f^i(L)]}{d^i}$$

converge vers S . La preuve étant la même que celle de E. Bedford et J. Smillie, nous passerons vite sur certains points.

Appliquons la proposition précédente à $\sigma_n = \frac{f^{n*} \omega}{d^n} \wedge [L]$. Nous avons

$$\sigma_n(B_n(x, \varepsilon)) = \frac{1}{d^n} \int_{B_n(x, \varepsilon)} f^{n*} \omega \wedge [L] \leq \frac{1}{d^n} v^0(f, n, \varepsilon)$$

où $v^0(f, n, \varepsilon)$ est le suprémum sur toutes les boules dynamiques $B_n(x, \varepsilon)$ du volume de $f^n(B_n(x, \varepsilon) \cap L)$ compté avec multiplicité. Si ν'_n désigne la mesure $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i \sigma_n$ et ν'_{n_j} une sous-suite de ν'_n qui converge vers ν' , on a :

$$h_{\nu'}(f) \geq \limsup \left(-\frac{1}{n_j} \log \left(\frac{1}{d^{n_j}} v^0(f, n_j, \varepsilon) \right) \right).$$

En utilisant le théorème de Yomdin (voir [26]) on obtient alors la minoration cherchée.

Il reste à voir que ν et ν' sont égales. C'est l'objet du paragraphe suivant.

1.2.2. Minoration de l'entropie de ν

Commençons par rappeler brièvement la construction de T (voir [15] et [14]).

Comme la forme $f^*\omega$ est cohomologue à $d\omega$, on a :

$$\frac{f^*\omega}{d} = \omega + dd^c u,$$

où u est une fonction lisse de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

En itérant cette relation, on obtient que :

$$\frac{f^{i*}\omega}{d^i} = \omega + dd^c G_i,$$

avec $G_i = \sum_{l=0}^{i-1} \frac{u \circ f^l}{d^l}$.

Autrement dit, en passant à la limite, on a $T = \omega + dd^c G$ où G est une fonction continue qui vérifie :

$$\max_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} |G_i - G| \leq \frac{C}{d^i}.$$

Maintenant

$$\nu'_{n_j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j-1} f_*^i \left(\frac{f^{n_j*}\omega}{d^{n_j}} \wedge [L] \right) = \frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{f^{n_j-i*}\omega}{d^{n_j-i}} \wedge \frac{f_*^i([L])}{d^i}$$

qui est égal à

$$\frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j-1} \left(\frac{f^{n_j-i*}\omega}{d^{n_j-i}} - T \right) \wedge \frac{f_*^i([L])}{d^i} + \frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j-1} T \wedge \frac{f_*^i([L])}{d^i}.$$

Le dernier terme est $T \wedge S_{n_j}$ et converge donc vers ν car T est à potentiel continu.

Par ailleurs, en appliquant au premier terme une fonction test Φ et en utilisant la construction de T on obtient :

$$\int \frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j-1} (G_{n_j-i} - G) dd^c \Phi \wedge \frac{f_*^i([L])}{d^i}$$

qui en valeur absolue est majoré par $|\Phi|_{C^2} \frac{1}{n_j} \sum_{i=0}^{n_j-1} \frac{C}{d^{n_j-i}}$ qui tend bien vers 0 quand j croît vers l'infini.

Cela montre bien que ν et ν' sont égales.

2. Un peu de théorie de Pesin

Dans tout cet article, $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sera muni d'une famille de cartes holomorphes $\tau_x : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avec $\tau_x(0) = x$ et $(x, z) \mapsto \tau_x(z)$ localement C^∞ .

Soient f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et ν une mesure de probabilité invariante.

Pour faire de la théorie de Pesin associée à f , nous allons définir l'extension naturelle $\widehat{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}$ de $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), f, \nu)$: c'est l'ensemble

$$\widehat{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} = \{\widehat{x} = (\dots, x_{-n}, \dots, x_0) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^{\mathbb{Z}^-}, f(x_{-n}) = x_{-n+1}\},$$

des préhistoires des points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Dans cet espace f induit une application \widehat{f} qui est le décalage à droite et si on note π la projection canonique $\pi(\widehat{x}) = x_0$, alors ν se relève par π en une unique mesure de probabilité $\widehat{\nu}$ invariante par \widehat{f} qui vérifie $\pi_*\widehat{\nu} = \nu$.

Maintenant, à partir de $f_x = \tau_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \tau_x$, on peut définir une application $D\widehat{f}(\widehat{x})$ de $\widehat{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}$ à valeur dans $\text{Mat}(2, \mathbb{C})$ en posant : $D\widehat{f}(\widehat{x}) = Df_x(0)$ (où $\pi(\widehat{x}) = x$).

C'est à $D\widehat{f}$ que l'on va appliquer une extension du théorème d'Oseledec (qui est valable dans un cadre non intégrable) et la théorie de Pesin.

THÉORÈME (Voir [20] p.35). — *Il existe un borélien invariant $\widehat{X} \subset \widehat{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}$ avec $\widehat{\nu}(\widehat{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} - \widehat{X}) = 0$ tel que pour tout \widehat{x} dans \widehat{X} on ait :*

1) *Une décomposition mesurable de \mathbb{C}^2 en espaces complexes de la forme :*

$$\mathbb{C}^2 = \bigoplus_{i=1}^{k(\widehat{x})} E_i(\widehat{x})$$

qui vérifie $D\widehat{f}(\widehat{x})E_i(\widehat{x}) = E_i(\widehat{f}(\widehat{x}))$.

2) *L'existence de fonctions invariantes par \widehat{f} (qui peuvent valoir $-\infty$) :*

$$\chi_1(\widehat{x}) < \dots < \chi_{k(\widehat{x})}(\widehat{x}),$$

avec

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \log \|A(\widehat{x}, m)v\| = \chi_i(\widehat{x})$$

pour tout $v \in E_i(\widehat{x}) \setminus \{0\}$.

Ici les $A(\widehat{x}, m)$ sont définis par les relations :

$$A(\widehat{x}, m) = D\widehat{f}(\widehat{f}^{m-1}(\widehat{x})) \circ \dots \circ D\widehat{f}(\widehat{x}) \text{ pour } m > 0.$$

3) *Si $k(\widehat{x}) = 2$ alors :*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \sin(\angle(E_1(\widehat{f}^m(\widehat{x})), E_2(\widehat{f}^m(\widehat{x})))) = 0.$$

Les réels $\chi_i(\hat{x})$ sont les exposants de Lyapunov de \hat{f} . Par ailleurs, si on a $\pi(\hat{x}) = \pi(\hat{y}) = x$ avec \hat{x} et \hat{y} dans \hat{X} , on a $k(\hat{x}) = k(\hat{y})$ et $\chi_i(\hat{x}) = \chi_i(\hat{y})$. Cela permet donc de définir les exposants de Lyapunov pour ν -presque tout point x .

Dans la suite, nous nous plaçons sur \hat{X}' qui est l'ensemble des points de \hat{X} pour lesquels $k(\hat{x}) = 2$ (c'est-à-dire $\hat{\nu}$ a deux exposants de Lyapunov distincts) et $\chi_1(\hat{x}) > 0$. C'est un borélien invariant par \hat{f} . En particulier, si on considère la mesure $\hat{\nu}'$ définie par $\hat{\nu}'(A) = \hat{\nu}(A \cap \hat{X}')$, on obtient une mesure invariante par \hat{f} pour laquelle $\log^+ \|(D\hat{f})^{-1}\|$ est intégrable (voir l'appendice A.1 de [19]).

Nous pouvons donc lui appliquer le théorème de γ -réduction de Pesin (voir [18]) et ainsi obtenir :

THÉORÈME (γ -réduction de Pesin (voir [18])). — *Pour tout $\gamma > 0$, il existe une application $C_\gamma: \hat{X}' \mapsto GL(2, \mathbb{C})$ et un borélien invariant $\hat{Y}' \subset \hat{X}'$ avec $\hat{\nu}(\hat{X}' - \hat{Y}') = 0$ tel que pour tout $\hat{x} \in \hat{Y}'$ on ait :*

1)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log \|C_\gamma^{\pm 1}(\hat{f}^m(\hat{x}))\| = 0$$

(on parle de fonction tempérée).

2) La matrice $A_\gamma(\hat{x}) = C_\gamma^{-1}(\hat{f}(\hat{x}))D\hat{f}(\hat{x})C_\gamma(\hat{x})$ est égale à $\begin{pmatrix} \mu_1(\hat{x}) & 0 \\ 0 & \mu_2(\hat{x}) \end{pmatrix}$ avec

$$e^{\chi_1(\hat{x})-\gamma} \leq |\mu_i(\hat{x})| \leq e^{\chi_1(\hat{x})+\gamma}.$$

3) Enfin, $C_\gamma(\hat{x})$ envoie la décomposition standard de \mathbb{C}^2 sur $E_1(\hat{x}) \oplus E_2(\hat{x})$.

Maintenant, si on note $g_{\hat{x}}$ la lecture de f_x dans ces cartes (i.e., $g_{\hat{x}} = C_\gamma^{-1}(\hat{f}(\hat{x})) \circ f_x \circ C_\gamma(\hat{x})$ où $\pi(\hat{x}) = x$), on en déduit la proposition suivante (voir [18] p. 673) :

PROPOSITION. — *Pour tout $\hat{x} \in \hat{Y}'$ les $g_{\hat{x}}$ sont définies sur des boules $B(\delta(\hat{x}))$ où $\delta(\hat{x})$ sont des fonctions tempérées.*

Par ailleurs, on a $g_{\hat{x}}(0) = 0$ et $Dg_{\hat{x}}(0) = \begin{pmatrix} \mu_1(\hat{x}) & 0 \\ 0 & \mu_2(\hat{x}) \end{pmatrix}$. Enfin si $g_{\hat{x}}(w) = Dg_{\hat{x}}(0)w + h(w)$ alors $\|D_w h\| \leq \frac{\|w\|^\gamma}{\delta(\hat{x})}$ pour $w \in B(\delta(\hat{x}))$.

Remarque. — Comme $\delta(\hat{x})$ est tempérée, nous pouvons supposer dans la proposition précédente que $e^{-\gamma} < \frac{\delta(\hat{f}(\hat{x}))}{\delta(\hat{x})} < e^\gamma$ (voir [18] p. 668).

Signalons enfin que les exposants de Lyapunov sont reliés à l'entropie par le

THÉORÈME. — *Inégalité de Ruelle, cas complexe (voir [21]).*

Soient f un endomorphisme holomorphe de \mathbb{P}^2 et ν une mesure invariante par f . On a alors :

$$\frac{h_\nu(f)}{2} \leq \int \chi^+(x) d\nu(x)$$

où $\chi^+(x) = \sum_{i, \chi_i(x) > 0} \chi_i(x)$.

3. Courants géométriques

Dans [10], T.-C. Dinh a démontré que le courant S est tissé. Cela signifie que son support contient beaucoup de disques analytiques.

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord rappeler la notion de courant tissé (que nous appellerons courant géométrique), puis nous étudierons l'intersection de S avec T , en suivant de près l'article de R. Dujardin (voir [13]).

3.1. Courants géométriques

Considérons un ouvert Ω de \mathbb{C}^2 et T un $(1, 1)$ courant positif.

DÉFINITION 1. — *Le courant T est uniformément géométrique dans Ω si pour tout $x \in \text{Supp}(T) \cap \Omega$, il existe un bidisque B , un ouvert U de B contenant x et une constante $c(B)$ tels que :*

$$T|_U = \int_{\Gamma \in \mathcal{G}} [\Gamma \cap U] d\lambda(\Gamma).$$

Ici \mathcal{G} est l'ensemble des sous-ensembles analytiques de B de masse inférieure à $c(B)$ et λ est une mesure sur cet espace compact.

Remarquons que les Γ ne sont pas supposés disjoints.

De façon analogue aux courants laminaires (voir par exemple [8], [22], [10] et [12]), on peut définir :

DÉFINITION 2. — *Un courant T est géométrique dans Ω s'il existe une suite d'ouverts $\Omega_i \subset \Omega$ avec $\|T\|(\partial\Omega_i) = 0$ et une suite croissante $(T_i)_{i \geq 0}$, T_i uniformément géométrique dans Ω_i tels que $\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = T$.*

3.2. Caractère géométrique de S

Dans notre contexte, S est un courant géométrique (voir [10]). Cependant, nous allons voir que de façon analogue à R. Dujardin pour le cas laminaire, nous pouvons raffiner la suite de courants uniformément géométriques S_k qui croît vers S de sorte que $T \wedge S_k$ croisse aussi vers $T \wedge S$.

On commence par fixer un ouvert Ω et deux projections linéaires génériques π_1 et π_2 . On peut alors recouvrir $\bar{\Omega}$ par une subdivision en 4-cubes affines :

$$\mathcal{Q} = \left\{ \pi_1^{-1}(s_1) \times \pi_2^{-1}(s_2), (s_1, s_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \right\}$$

où \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 sont des découpages de \mathbb{C} en carrés de taille r . En remplaçant les courants laminaires par les courants géométriques dans la preuve de R. Dujardin (voir Proposition 4.4 dans [13]), on obtient la

PROPOSITION 4. — *Il existe un courant $S_{\mathcal{Q}} \leq S$ uniformément géométrique dans les $Q \in \mathcal{Q}$ tel que $M_{\Omega}(S - S_{\mathcal{Q}}) \leq Cr^2$ (où C est une constante universelle et M_{Ω} est la masse dans Ω).*

Nous allons expliquer brièvement la construction de R. Dujardin car nous en aurons besoin par la suite. On notera $S_m = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{[f^i(L)]}{d^i}$ et quitte à extraire une sous-suite on pourra supposer que S_m converge vers S .

Dans les composantes connexes de $f^i(L)$ au-dessus d'un carré s_j de \mathcal{S}_j (i.e., dans $\pi_j^{-1}(s_j) \cap f^i(L)$), on a un certain nombre de disques qui sont des graphes au-dessus de s_j (qui peuvent éventuellement s'intersecter entre eux). En moyennant les courants d'intégration sur les graphes qui ont une aire inférieure à $\frac{1}{2}$, on obtient ainsi deux courants S_{m, \mathcal{Q}_j} inférieurs à S_m et qui vérifient :

$$\langle S_m - S_{m, \mathcal{Q}_j}, \pi_j^* \omega \rangle \leq Cr^2.$$

Cette inégalité résulte de la formule de Riemann-Hurwitz et du fait que le genre de $f^i(L)$ vaut 0.

Par ailleurs, S_{m, \mathcal{Q}_j} s'écrit $\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{[C_{\mathcal{Q}_j}^i]}{d^i}$ où les $C_{\mathcal{Q}_j}^i$ sont des courbes à bord dans $\pi_j^{-1}(\partial \mathcal{S}_j)$.

On réunit maintenant ces deux courants en posant :

$$S_{m, \mathcal{Q}} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{[C_{\mathcal{Q}_1}^i \cup C_{\mathcal{Q}_2}^i]}{d^i}.$$

C'est un courant uniformément géométrique dans les cubes de \mathcal{Q} car les courbes $C_{\mathcal{Q}_1}^i \cup C_{\mathcal{Q}_2}^i$ qui composent $S_{m, \mathcal{Q}}$ sont à bord dans $\partial \mathcal{Q}$. De plus, la suite $S_{m, \mathcal{Q}}$ vérifie :

$$\langle S_m - S_{m, \mathcal{Q}}, \pi_1^* \omega + \pi_2^* \omega \rangle \leq Cr^2.$$

Pour les valeurs d'adhérences $S_{\mathcal{Q}}$ de $S_{m, \mathcal{Q}}$ on a donc bien :

$$M_{\Omega}(S - S_{\mathcal{Q}}) \leq Cr^2.$$

Enfin, il est assez facile de voir que le courant $S_{\mathcal{Q}}$ est uniformément géométrique dans les $Q \in \mathcal{Q}$.

La proposition ci-dessus est le point clé pour construire une suite S_k qui croît vers S telle que $T \wedge S_k$ croisse vers $T \wedge S$. En effet, si on reprend les arguments de R. Dujardin (voir [13]), on constate que pour un quadrillage \mathcal{Q} de taille r bien choisi (*i.e.*, bien positionné), on a :

$$M_{\Omega}(T \wedge S - T \wedge S_{\mathcal{Q}}) \leq \varepsilon(r).$$

Ici $S_{\mathcal{Q}}$ est le courant construit précédemment et $\varepsilon(r) = C\omega(G, r)^{1/3}$, où $\omega(G, r)$ est le module de continuité du potentiel de T de rayon r et C est une constante universelle. En particulier $\varepsilon(r)$ est une suite qui tend vers 0 quand r décroît vers 0.

En itérant le procédé, on obtient donc le

THÉORÈME 5. — *Il existe une suite de subdivisions \mathcal{Q}_k de $\bar{\Omega}$ et une suite S_k de courants uniformément géométriques dans les cubes de la subdivision telles que :*

- i) *la suite de courants S_k croît vers S ;*
- ii) *celle des mesures $T \wedge S_k$ croît vers $T \wedge S$.*

4. Minoration du plus grand exposant de Lyapunov de ν

Nous avons vu au début de cet article que l'entropie de ν est minorée par $\log(d)$. En utilisant la formule de Ruelle (voir le paragraphe 2), on obtient alors

$$\int \chi^+(x) d\nu(x) \geq \frac{\log(d)}{2}$$

où $\chi^+(x) = \sum_{i, \chi_i(x) > 0} \chi_i(x)$.

Nous allons maintenant raffiner ce résultat. Plus précisément, en adaptant les arguments de R. Dujardin (voir [11]) à notre cas qui est non inversible nous allons montrer le :

THÉORÈME. — *Pour ν presque tout point x , le plus grand exposant de Lyapunov en x est supérieur ou égal à $\frac{\log(d)}{2}$.*

Quitte à extraire une sous-suite, nous supposons dans la suite que $S_m = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{[f^i(L)]}{d^i}$ converge vers S . De plus, quitte à changer la suite $\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{[f^i(L)]}{d^i}$ en une suite $\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{[f^i(L_i)]}{d^i}$ qui converge aussi vers S , nous pourrions supposer que $f^i(L)$ n'a pas de multiplicité.

Avant de donner l'idée de la preuve, remarquons que le théorème revient à démontrer que l'ensemble $\{x, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n\| < \frac{\log(d)}{2}\}$ est de mesure nulle pour ν (la limite existe par le théorème sous-additif de Kingman). Autrement dit, il suffit de montrer que l'ensemble

$$B_{\alpha, n_0} := \left\{ x, \forall n \geq n_0, \frac{1}{n} \log \|D_x f^n\| < (1 - \alpha) \frac{\log(d)}{2} \right\}$$

est de mesure nulle pour ν pourvu que α soit petit et n_0 grand.

Enfin, quitte à considérer un recouvrement fini de \mathbb{P}^2 par des ouverts Ω et à prendre un m grand, il suffira donc de majorer $T \wedge S_m(\Omega_n)$ par ε où

$$\Omega_n := \left\{ x \in \Omega, \frac{1}{n} \log \|D_x f^n\| < (1 - \alpha) \frac{\log(d)}{2} \right\}.$$

Voici maintenant l'idée de la preuve.

Admettons que l'on puisse construire environ d^{i+n} disques consistants dans $f^{i+n}(L)$. Alors, si on n'a pas de problèmes liés à l'ensemble critique, on obtient d^{i+n} préimages de ces disques dans $f^i(L)$. La plupart d'entre eux ont donc une aire inférieure à Kd^{-n} (car l'aire de $f^i(L)$ vaut d^i) et on a créé ainsi beaucoup de points qui ne sont pas dans Ω_n .

Le plan de la preuve du théorème sera donc le suivant : dans un premier paragraphe, nous allons construire ces disques dans $\frac{f^n S_m}{d^n}$. Ensuite, on prendra les préimages de ces disques par f^n et nous utiliserons un argument longueur-aire. Enfin, la dernière partie sera consacrée à la démonstration du théorème.

4.1. Construction des disques

Quitte à considérer un recouvrement fini de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par des ouverts U , nous pouvons supposer que $f^n(\Omega_n) \subset U$.

On considère maintenant un découpage \mathcal{Q} d'un voisinage de \bar{U} en 4-cubes affines de taille $\frac{1}{k}$. Dans toute la suite le quadrillage sera considéré bien choisi par rapport à la mesure ν . En particulier ν charge peu un petit voisinage du bord de \mathcal{Q} (voir le lemme 4.5 dans [13]). Notons $\mathcal{Q}_\lambda = \cup Q_\lambda$ où les Q_λ sont les homothétiques des $Q \in \mathcal{Q}$ de rapport λ . Quitte à remplacer Ω_n par l'ouvert $\Omega_n \cap f^{-n}(\mathcal{Q}_\lambda)$, nous pourrions donc supposer dans la suite que $f^n(\Omega_n) \subset \mathcal{Q}_\lambda$ (cela fait changer éventuellement m en un m' plus grand).

Maintenant, à partir du courant $\frac{f_*^n S_m}{d^n} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{[f^{i+n}(L)]}{d^{i+n}}$, on peut construire un courant $R_{m, \mathcal{Q}}$ uniformément géométrique dans les cubes du quadrillage de \mathcal{Q} et qui vérifie (voir le paragraphe 3.2)

$$\left(T \wedge \frac{f_*^n S_m}{d^n} - T \wedge R_{m, \mathcal{Q}} \right) (U) \leq \varepsilon(k).$$

Ici $\varepsilon(k)$ ne dépend pas de m et n . En effet d'une part on a

$$M_U \left(\frac{f_*^n S_m}{d^n} - R_{m, \mathcal{Q}} \right) \leq \frac{C}{k^2}$$

où C est indépendante de m et n et d'autre part comme le quadrillage \mathcal{Q} est supposé bien choisi par rapport à ν , il l'est pour $T \wedge \frac{f_*^n S_m}{d^n}$ pour des m grands (voir le lemme 4.5 de [13]).

Dans la suite, on posera $R_{m, \mathcal{Q}} = \int [\Gamma] d\nu_{m, \mathcal{Q}}(\Gamma)$. Dans cette expression les Γ sont des disques inclus dans les cubes de \mathcal{Q} . Ce sont ces disques de $R_{m, \mathcal{Q}}$ que l'on va tirer en arrière par f^n .

4.2. Tiré en arrière des disques

Dans la suite, nous allons jeter un certain nombre de disques de $R_{m, \mathcal{Q}}$ de sorte à pouvoir effectuer l'argument longueur-aire et ainsi créer beaucoup de points qui ne seront pas dans Ω_n . A chaque fois que nous enlèverons un disque Γ , nous donnerons la perte $\int_{\Gamma} T$ ainsi enregistrée.

Fixons i compris entre 0 et $m-1$.

On ne considérera que les Γ qui sont dans $f^{i+n}(L) \cap Q_{\lambda}$. En particulier, comme Γ est un graphe, $f^n(\Omega_n) \cap \Gamma$ est inclus dans un disque $\Gamma' \Subset \Gamma$ et le module de l'anneau $\Gamma \setminus \Gamma'$ est minoré par une constante indépendante de Γ (qui ne dépend que de k et de ε).

Comme la courbe $f^{i+n}(L)$ n'a pas de multiplicité, on peut tirer en arrière par f^n les disques Γ . On notera $(\Gamma)_j^{-n}$ et $(\Gamma')_j^{-n}$ les préimages de Γ et Γ' qui sont dans $f^i(L)$. Le nombre de disques Γ pour lesquels $(\Gamma)_j^{-n}$ est d'aire supérieure à Kd^{-n} est majoré par $\frac{d^{i+n}}{K}$ (car $f^i(L)$ est d'aire d^i). Si on désigne par $\mathcal{D}(i)$ l'ensemble de ces disques et qu'on les retire à $R_{m, \mathcal{Q}}$, on enregistre une perte $\int_{\mathcal{D}(i) \cap Q_{\lambda}} T \leq C(k) \frac{d^{i+n}}{K}$.

Enfin, si on considère un disque Γ que l'on n'a pas enlevé, on a

$$\text{Diamètre}((\Gamma')_j^{-n}) \leq C(k, \varepsilon) \sqrt{K} d^{-n/2}$$

grâce à un argument longueur-aire (voir l'appendice de [6]).

Alors, quitte à considérer un disque intermédiaire entre Γ' et Γ , on obtient grâce aux inégalités de Cauchy (comme dans [11]) :

$$\|Df_j^{-n}(p)v(p)\| \leq C(k, K, \varepsilon)d^{-n/2}$$

pour $p \in \Gamma'$ et un certain vecteur unitaire $v(p)$. Ici f_j^{-n} désigne la branche inverse de f^n qui envoie Γ sur $(\Gamma)_j^{-n}$.

Ces points $f_j^{-n}(p)$ vérifient $\|Df^n(f_j^{-n}(p))\| \geq \frac{d^{n/2}}{C(k, K, \varepsilon)}$ et ils ne peuvent donc pas appartenir à Ω_n (si n est suffisamment grand).

4.3. Démonstration du théorème

Rappelons que nous devons voir que

$$T \wedge S_m(\Omega_n) \leq \varepsilon.$$

Si p est un point de Ω_n , alors $f^n(p)$ est soit dans un des disques que l'on a enlevés à $R_{m, \mathcal{Q}}$, soit dans la partie de $\frac{f_*^n S_m}{d^n}$ où il n'y a pas de disque de $R_{m, \mathcal{Q}}$. Autrement dit, en utilisant la relation $f_*^n(T \wedge S_m) = T \wedge \frac{f_*^n S_m}{d^n}$ et l'estimée de perte que l'on avait obtenue, on a :

$$T \wedge S_m(\Omega_n) \leq T \wedge \frac{f_*^n S_m}{d^n}(f^n(\Omega_n)) \leq \frac{C(k)}{K} + \varepsilon(k) \leq \varepsilon$$

pour k puis K bien choisies.

5. Majoration du plus petit exposant de Lyapunov de ν

Dans ce paragraphe ν désigne toujours la mesure $T \wedge S$.

Nous voulons ici montrer le

THÉORÈME. — *Supposons que ν ne charge pas les courbes algébriques.*

Alors, pour ν presque tout point x hors du support de μ , le plus petit exposant de Lyapunov $\chi_1(x)$ est négatif ou nul.

Voici le plan de la démonstration. Dans un premier paragraphe, nous allons montrer que la mesure de $\{x \notin \text{Support}(\mu), \chi_2(x) = \chi_1(x) > 0\}$ est nulle. Les exposants étant égaux, nous pourrons en particulier utiliser les travaux de F. Berteloot et C. Dupont (voir [2]) sur les linéarisations le long d'orbites négatives. Dans le second paragraphe on verra que la mesure de $\{x \notin \text{Support}(\mu), \chi_2(x) > \chi_1(x) > 0\}$ vaut 0. Cette fois-ci les exposants étant disjoints, nous aurons une direction stable (donnée par le plus petit exposant) et une direction instable. Dans ce contexte, nous pourrons en particulier utiliser la transformée de graphe.

5.1. Majoration de la mesure

$\text{de } \{x \notin \text{Support}(\mu), \chi_2(x) = \chi_1(x) > 0\}$

Avant de passer à l'estimation de cette mesure, nous allons faire quelques rappels sur le procédé de branches inverses de J.-Y. Briend et J. Duval (voir [5]) ainsi que sur la linéarisation de F. Berteloot et C. Dupont (voir [2]).

5.1.1. Rappels

On reprend les notations du paragraphe 2. En particulier τ_x désigne une bonne famille de cartes holomorphes de \mathbb{P}^2 et $f_x = \tau_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \tau_x$. Dans la suite nous noterons aussi :

$$f_x^n = \tau_{f^n(x)}^{-1} \circ f^n \circ \tau_x = f_{f^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ \widehat{f}_x$$

et pour \widehat{x} dans l'extension naturelle $\widehat{\mathbb{P}^2}(\mathbb{C})$,

$$f_{\widehat{x}}^{-n} = f_{x_{-n}}^{-1} \circ \cdots \circ f_{x_{-1}}^{-1}$$

(quand cette expression est bien définie). On notera aussi \widehat{X} l'ensemble des bons points de Pesin pour $\widehat{\nu}$ (voir le paragraphe 2).

Le borélien $\widehat{X}' = \{\widehat{x} \in \widehat{X}, \chi_1(\widehat{x}) = \chi_2(\widehat{x}), \chi_1(\widehat{x}) > 0\}$ est invariant par \widehat{f} . En particulier, si on considère la mesure $\widehat{\nu}'$ définie par $\widehat{\nu}'(A) = \widehat{\nu}(A \cap \widehat{X}')$, on obtient une mesure invariante pour laquelle $\log^+ \|(D\widehat{f})^{-1}\|$ est intégrable (voir l'appendice A.1 de [19]).

En particulier nous pouvons utiliser d'une part les résultats de J.-Y. Briend et J. Duval (voir [5] et [4]) et d'autre part le procédé de linéarisation de F. Berteloot et C. Dupont (voir [2]) pour la mesure $\widehat{\nu}'$ et ainsi obtenir le

THÉORÈME. — [5] et [2].

Soient γ et R suffisamment petits. Il existe un borélien $\widehat{Y}' \subset \widehat{X}'$ avec $\widehat{\nu}(\widehat{X}' - \widehat{Y}') = 0$ et des fonctions mesurables $\eta: \widehat{Y}' \rightarrow]0, R]$, $F: \widehat{Y}' \rightarrow]0, +\infty[$, $C: \widehat{Y}' \rightarrow [1, +\infty[$ et $S: \widehat{Y}' \rightarrow]0, R]$ tels que pour tout $\widehat{x} \in \widehat{Y}'$ et tout n dans \mathbb{N} on ait :

- 1) $f_{\widehat{x}}^{-n}$ est définie sur $B(0, \eta(\widehat{x}))$;
- 2) $\text{Lip } f_{\widehat{x}}^{-n} \leq C(\widehat{x})e^{-n(\chi_1(\widehat{x}) - \gamma/2)}$;
- 3) $\|D_0 f_{x_{-n}}^n\| \leq F(\widehat{x})e^{n(\chi_2(\widehat{x}) + \gamma)}$;
- 4) $S \leq \eta$ et $D_0 f_{\widehat{x}}^{-n}(B(0, S(\widehat{x}))) \subset f_{\widehat{x}}^{-n}B(0, \eta(\widehat{x}))$.

Remarque. — Les deux premiers points proviennent du fait que $\chi_1(\widehat{x}) > 0$ (voir [5] et [4]). Le troisième est une conséquence directe de la théorie de Pesin. Enfin le dernier point est le seul qui utilise que $\chi_1(\widehat{x}) = \chi_2(\widehat{x})$ (voir [2]).

5.1.2. Majoration de la mesure
de $\{x \notin \text{Support}(\mu), \chi_2(x) = \chi_1(x) > 0\}$

Voici le plan de cette majoration.

Après un premier paragraphe consacré à des préliminaires, nous verrons dans le second que montrer que la mesure de $E_1 = \{x \notin \text{Support}(\mu), \chi_2(x) = \chi_1(x) > 0\}$ est nulle revient à calculer la mesure pour ν de pré-images $f_i^{-n}(B)$. Enfin dans le troisième paragraphe nous effectuerons ce calcul.

1) Préliminaires

Commençons par ramener la majoration de E_1 à celle d'un borélien $\widehat{E}_1(n)$ qui aura de bonnes propriétés de récurrence et d'uniformité.

Remarquons tout d'abord qu'il nous suffit de voir que $\nu(\{x \in E_1, \chi_1(x) \geq \beta > 0\})$ est nul (avec β petit). On notera toujours E_1 cet ensemble. Par ailleurs,

$$\nu(E_1) = \widehat{\nu}(\pi^{-1}(E_1)) = \widehat{\nu}(\pi^{-1}(E_1) \cap \widehat{X})$$

où π est la projection de $\widehat{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et \widehat{X} est l'ensemble des bons points de Pesin (voir le paragraphe 2).

Ce dernier ensemble $\pi^{-1}(E_1) \cap \widehat{X}$ est inclus dans

$$\widehat{E}_1 = \{\widehat{x} \in \widehat{X}, \pi(\widehat{x}) \notin \text{Support}(\mu), \chi_2(\widehat{x}) = \chi_1(\widehat{x}) \geq \beta\}$$

(car la définition des exposants de Lyapunov ne dépend que des trajectoires positives).

La majoration de $\nu(E_1)$ se ramène donc à celle de $\widehat{\nu}(\widehat{E}_1)$.

Ensuite, si on reprend les notations du théorème précédent, on constate que quitte à remplacer \widehat{E}_1 par

$$\begin{aligned} \widehat{E}_{1,p} &= \{\widehat{x} \in \widehat{E}_1 \cap \widehat{Y}', d(\pi(\widehat{x}), \text{Support}(\mu)) \geq \frac{1}{p}, \\ &S(\widehat{x}) \geq \frac{1}{p}, C(\widehat{x}) \leq p, F(\widehat{x}) \leq p\} \end{aligned}$$

pour p grand, on pourra supposer dans la suite que nous avons ces contrôles.

Enfin, l'ensemble \widehat{E}_1 aura de bonnes propriétés de récurrence en utilisant le

LEMME 5.1.

$$(\widehat{\nu}(\widehat{E}_1))^2 \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \widehat{\nu}(\widehat{f}^n(\widehat{E}_1) \cap \widehat{E}_1).$$

Démonstration. — Il suffit d'utiliser d'une part la décomposition de $\widehat{\nu}$ en mesures ergodiques $\widehat{\nu}_\alpha$ et d'autre part le fait qu'une mesure ergodique $\widehat{\nu}_\alpha$ vérifie

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \widehat{\nu}_\alpha(\widehat{f}^n(\widehat{E}_1) \cap \widehat{E}_1) = (\widehat{\nu}_\alpha(\widehat{E}_1))^2.$$

□

En effet, grâce à ce lemme, pour démontrer que $\widehat{\nu}(\widehat{E}_1)$ (et donc $\nu(E_1)$) est de mesure nulle, il nous suffira de montrer que $\widehat{\nu}(\widehat{E}_1(n))$ est petit pour n assez grand (avec $\widehat{E}_1(n) = \widehat{f}^n(\widehat{E}_1) \cap \widehat{E}_1$). $\widehat{E}_1(n)$ est le bon borélien que l'on cherchait.

Maintenant, grâce au procédé de linéarisation (point 4 du théorème précédent), nous avons la

PROPOSITION. — Il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall \widehat{x} \in \widehat{E}_1$$

on a :

$$\text{Diamètre intérieur de } f_{x_{-n}}^n(D_0 f_{\widehat{x}}^{-n}(B(0, \frac{1}{4p}))) \geq \rho.$$

Démonstration. — Faisons un raisonnement par l'absurde.

Si la proposition est fautive, on obtient des suites n_l et $\widehat{x}_l \in \widehat{E}_1$ telles que le diamètre intérieur de $f_{(x_l)_{-n_l}}^{n_l}(D_0 f_{\widehat{x}_l}^{-n_l}(B(0, \frac{1}{4p})))$ soit majoré par $\frac{1}{l}$.

Par ailleurs la fonction $g_{n_l}(u) = f_{(x_l)_{-n_l}}^{n_l} D_0 f_{\widehat{x}_l}^{-n_l}(u)$ est définie sur $B(0, \frac{1}{p})$ et son image est incluse dans $B(0, R)$ (voir le point 4 du théorème précédent). Quitte à extraire une sous-suite, g_{n_l} converge donc vers une fonction holomorphe $g : B(0, \frac{1}{p}) \mapsto \overline{B(0, R)}$.

Maintenant, on a d'une part $D_0 g$ qui est égal à I et d'autre part le diamètre intérieur de $g(B(0, \frac{1}{4p}))$ qui vaut 0. On obtient alors une contradiction par le théorème d'inversion locale. □

2) Branches inverses

Commençons par recouvrir \mathbb{P}^2 par des boules B telles que $\tau_x^{-1}(B) \subset B(0, \rho)$ pour tout x de B (ρ est une constante petite qui vérifie les conclusions de la proposition précédente).

Ensuite nous appellerons bonne composante de $f^{-n}(B)$ un ouvert de la forme $\tau_{y_{-n}} \circ f_{\widehat{y}}^{-n} \circ \tau_{y_0}^{-1}(B)$ avec $y_0 \in B$ et $\widehat{y} \in \widehat{E}_1(n)$.

Nous avons alors (comme dans [5]) :

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}(\widehat{E}_1(n) \cap \pi^{-1}(B)) &= \widehat{\nu}(\widehat{f}^{-n}(\widehat{E}_1(n) \cap \pi^{-1}(B))) \\ &\leq \nu(\pi(\widehat{f}^{-n}(\widehat{E}_1(n) \cap \pi^{-1}(B)))) \end{aligned}$$

car $\pi_*\widehat{\nu} = \nu$.

Mais $\pi(\widehat{f}^{-n}(\widehat{E}_1(n) \cap \pi^{-1}(B)))$ est inclus dans l'union des bonnes composantes de $f^{-n}(B)$ (que nous noterons $\cup BC$) c'est-à-dire

$$\widehat{\nu}(\widehat{E}_1(n) \cap \pi^{-1}(B)) \leq \nu(\cup BC).$$

Par ailleurs, remarquons qu'une bonne composante ci-dessus évite un $\frac{1}{2p}$ -voisinage du support de μ (car d'une part les bonnes composantes contiennent un point qui est hors d'un $\frac{1}{p}$ -voisinage du support de μ par définition de $\widehat{E}_1(n)$ et d'autre part les bonnes composantes sont de diamètre exponentiellement petit par le point 2 du théorème du paragraphe 5.1.1).

3) Calcul de $\nu(\cup BC)$

Cette opération va se dérouler en trois étapes.

Dans la première, nous allons faire des simplifications géométriques : nous remplacerons ν par $T \wedge S_{\mathcal{Q}}$ où $S_{\mathcal{Q}}$ est un courant uniformément géométrique et on verra que grâce à la linéarisation, les bonnes composantes seront presque des ellipsoïdes.

Après cette opération, nous aurons à démontrer trois faits. Le premier est que $T \wedge [\Gamma](BC) \leq Cd^{-n}$ pour un disque Γ de $S_{\mathcal{Q}}$ et BC une bonne composante. Le second est que la mesure des graphes (pour la mesure sur les graphes de $S_{\mathcal{Q}}$) qui coupent une bonne composante tend vers 0 quand n croît vers l'infini. Enfin, nous verrons que le nombre de bonnes composantes de $f^{-n}(B)$ qui évitent le petit voisinage du support de μ est majoré par Cd^n .

Après avoir démontré ces trois faits, nous aurons que $T \wedge S_{\mathcal{Q}}(\cup BC)$ sera majoré par $Cd^n T \wedge S_{\mathcal{Q}}(BC) \leq Cd^n Cd^{-n} \varepsilon(n)$ qui est la majoration cherchée.

i) Simplifications géométriques.

Quitte à considérer un recouvrement fini de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par des ouverts Ω , nous pouvons supposer que $\cup BC$ est inclus dans Ω . On peut construire un découpage d'un voisinage de $\overline{\Omega}$ en 4-cubes affines et un courant $S_{\mathcal{Q}} = \int [\Gamma] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ uniformément géométrique dans les cubes de ce quadrillage tels que la différence $(T \wedge S - T \wedge S_{\mathcal{Q}})(\Omega)$ soit aussi petite que l'on veut (voir le paragraphe 3). Nous pouvons supposer de plus que ν charge très peu un petit voisinage du bord de \mathcal{Q} et alors notre majoration de $\nu(\cup BC)$ se ramène à celle de $T \wedge S_{\mathcal{Q}}(\cup BC)$ pour les bonnes composantes qui évitent un petit voisinage du bord de \mathcal{Q} . Comme précédemment, nous noterons toujours $\cup BC$ l'union de ces bonnes composantes.

Expliquons maintenant pourquoi les bonnes composantes ressemblent à des ellipsoïdes. Notons ici $B_i^{-n} = \tau_{y-n} \circ f_{\hat{y}}^{-n} \circ \tau_{y_0}^{-1}(B)$ une des bonnes composantes de $f^{-n}(B)$.

D'après la proposition précédente, nous savons que

$$\tau_{y_0}^{-1}(B) \subset B(0, \rho) \subset f_{y-n}^n D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{4p}).$$

On en déduit donc que $B_i^{-n} \subset \tau_{y-n} D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{4p})$ et $D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{4p})$ est bien un ellipsoïde.

ii) *Démonstration des trois faits :*

α) Calcul de $T \wedge [\Gamma](\tau_{y-n} D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{4p}))$.

Par construction Γ est un graphe (i.e., de la forme $(z, \phi(z))$) et le diamètre de $D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{4p})$ est majoré par $e^{-\chi_1(\hat{y})n+\gamma n}$.

Par ailleurs, nous avons des contrôles uniformes d'une part sur les τ_{y-n}^{-1} et d'autre part sur les dérivées de ϕ (via le théorème de Cauchy car $\tau_{y-n} D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{4p})$ est un peu loin du bord de \mathcal{Q}). La partie Γ_0 de $\tau_{y-n}^{-1}(\Gamma)$ susceptible de rencontrer $D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{4p})$ se met donc sous la forme d'un graphe $(z, \psi(z))$ où z est dans un disque D_0 de taille $e^{-\chi_1(\hat{y})n+\gamma n}$ et $|\psi'(z)| \leq e^{-\chi_1(\hat{y})n+\gamma n}$ sur D_0 (on s'est placé dans un repère où l'axe des abscisses est tangent à Γ_0 en un point de $D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{4p})$).

Maintenant le calcul de $\int_{\tau_{y-n} D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{4p})} T \wedge [\Gamma] = \int_{D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{4p})} \tau_{y-n}^* T \wedge [\Gamma_0]$ va se faire par un argument de capacité.

En effet, notons $\mathcal{E}_i = D_0 f_{\hat{y}}^{-n} B(0, \frac{1}{ip})$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $D' = \pi(\Gamma_0 \cap \mathcal{E}_4)$ et $D = \pi(\Gamma_0 \cap \mathcal{E}_1)$ (où π est la projection du graphe Γ_0 sur l'axe des abscisses).

Alors, si on a une fonction G psh dans $\tau_{y-n}(\mathcal{E}_1)$ avec $0 \leq G \leq Cd^{-n}$ dans cet ensemble et $dd^c G = T$, on aura :

$$\int_{\mathcal{E}_4} \tau_{y-n}^* T \wedge [\Gamma_0] = \int \tau_{y-n}^* T \wedge [\pi^* D'] = \int_{D'} dd^c G \circ \tau_{y-n} \circ \pi^{-1}$$

(on considère π comme un biholomorphisme de $\Gamma_0 \cap \mathcal{E}_4$ sur D').

Enfin comme $0 \leq G \leq Cd^{-n}$ sur $\tau_{y-n}(\mathcal{E}_1)$ on a $0 \leq G \circ \tau_{y-n} \circ \pi^{-1} \leq Cd^{-n}$ sur D et alors

$$\int_{\tau_{y-n}(\mathcal{E}_4)} T \wedge [\Gamma] \leq \text{Cap}(D', D) Cd^{-n}.$$

Pour obtenir la majoration de $\int_{\tau_{y-n}(\mathcal{E}_4)} T \wedge [\Gamma]$ par Cd^{-n} il reste donc d'une part à voir que $\text{Cap}(D', D)$ est bornée par une constante uniforme et d'autre part à construire la fonction psh G qui est comprise entre 0 et Cd^{-n} sur $\tau_{y-n}(\mathcal{E}_1)$ et qui vérifie $dd^c G = T$.

Majoration de $\text{Cap}(D', D)$.

Notons Δ l'axe des abscisses qui est tangent à Γ_0 . On a d'une part $D' \subset \Delta \cap \mathcal{E}_3$ et d'autre part $\Delta \cap \mathcal{E}_2 \subset D$ (car $|\psi'| \leq e^{-\chi_1(\hat{y})n+\gamma n}$, $\|D_0 f_{y-n}^n\| \leq p e^{\chi_2(\hat{y})n+\gamma n}$ et $2\chi_1(\hat{y}) > \chi_2(\hat{y})$).

Cela implique donc que $\text{Cap}(D', D) \leq \text{Cap}(\Delta \cap \mathcal{E}_3, \Delta \cap \mathcal{E}_2)$ et il est clair que cette dernière quantité est majorée par une constante uniforme.

Construction de G .

Notons π_0 la projection de \mathbb{C}^3 sur \mathbb{P}^2 et $G_0 \circ \sigma$ la fonction de Green de f définie sur une boule $\tau_{y_0} B(0, \eta(\hat{y}))$ qui contient B (ici σ est une section locale de π_0).

$G_0 \circ \sigma$ vérifie $dd^c(G_0 \circ \sigma) = T$ et $|G_0 \circ \sigma| \leq \frac{C}{2}$ (voir [14]). Par ailleurs on notera f_i^{-n} la branche inverse de f^n telle que $\tau_{y-n} \mathcal{E}_1 \subset f_i^{-n}(\tau_{y_0} B(0, \eta(\hat{y})))$ (voir le point 4 du théorème de la section 5.1.1).

Maintenant, en utilisant le lemme 2.3 de Ueda (voir [24]), on peut construire une section σ_n de π_0 telle que $F^n \circ \sigma_n = \sigma \circ f^n$ sur $f_i^{-n}(\tau_{y_0} B(0, \eta(\hat{y})))$ (ici F est un relevé polynomial de f par π_0). La fonction $G = G_0 \circ \sigma_n + \frac{C}{2d^n}$ vérifie alors les conditions que l'on voulait.

β) Majoration de la mesure des graphes de $S_{\mathcal{Q}}$ qui coupent $\tau_{y-n}(\mathcal{E}_4)$.

Il s'agit ici de voir que $\nu_{\mathcal{Q}}(\{\Gamma \text{ qui coupent } \tau_{y-n}(\mathcal{E}_4)\}) \leq \alpha$ pour n grand.

Remarquons tout d'abord que nous pouvons enlever les bonnes composantes qui sont dans un petit voisinage de $\{\nu(S, x) \geq \alpha\}$ (où $\nu(S, x)$ est le nombre de Lelong de S en x). En effet, ν ne chargeant pas $\{\nu(S, x) \geq \alpha\}$, ce voisinage V est de mesure aussi petite que l'on veut. Il s'agira alors dans la suite de majorer $T \wedge S_{\mathcal{Q}}(\cup BC)$ où $\cup BC$ désigne les bonnes composantes qui évitent V .

Maintenant, si on considère un point x hors de V , on a l'existence d'un $r_0(x)$ pour lequel $S \wedge \omega(B(x, r)) < \alpha r^2$ si $r \leq r_0(x)$ (nous supposons de plus que $r_0(x)$ est très petit devant le diamètre intérieur de V et la distance minimale entre une bonne composante et le bord de \mathcal{Q}).

En utilisant un argument de compacité sur $\mathbb{P}^2 \setminus V$, on en déduit que toute bonne composante est incluse dans une boule $B(x, \frac{r_0(x)}{2})$ pourvu que n soit grand. On a donc bien $\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma \text{ qui coupent } \tau_{y-n}(\mathcal{E}_4)) < \frac{4\alpha}{\pi}$ car dans le cas contraire $S_{\mathcal{Q}} \wedge \omega(B(x, r_0(x))) \geq \frac{4\alpha}{\pi} \frac{r_0(x)^2}{4} \pi = r_0(x)^2 \alpha$ par le théorème de Lelong.

γ) Majoration du nombre de bonnes composantes.

Si on fixe une boule $B \subset \tau_x(B(0, \rho))$ ($x \in B$), on veut majorer le nombre N de bonnes composantes de $f^{-n}(B)$ hors d'un $\frac{1}{2p}$ -voisinage du support de μ par Cd^n .

Remarquons que tout point a de B a au moins N antécédents hors du $\frac{1}{2^p}$ -voisinage du support de μ .

Nous allons maintenant majorer ce nombre d'antécédents en utilisant un résultat de J.E. Fornæss et N. Sibony (voir [16]).

Si Φ est une fonction C^∞ à support compact, comprise entre 0 et 1, et qui vaut 1 sur un $\frac{1}{3^p}$ -voisinage du support de μ et 0 hors d'un $\frac{1}{2^p}$ -voisinage, on a (voir le lemme 6.4 de [16])

$$\text{Cap} \left(\left\{ a, \left| \lambda_n(a, \Phi) - \int \Phi d\mu \right| \geq s \right\} \cap B(0, \frac{1}{2}), B(0, 1) \right) \leq \frac{M|\Phi|_2}{sd^n}.$$

Ici $B(0, \frac{1}{2})$ et $B(0, 1)$ sont centrées en x et $\lambda_n(a, \Phi) = \frac{1}{d^{2n}} \sum_{f^n(a_i)=a} \Phi(a_i)$.

En particulier, si a est un point de B on a $\lambda_n(a, \Phi) \leq \frac{1}{d^{2n}}(d^{2n} - N)$ d'où

$$\left| \lambda_n(a, \Phi) - \int \Phi d\mu \right| = \left| \lambda_n(a, \Phi) - 1 \right| \geq \frac{N}{d^{2n}}.$$

En conclusion, nous obtenons (si le rayon de B est supérieur à $\frac{\rho}{C}$) :

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n} M|\Phi|_2}{Nd^n} &\geq \text{Cap} \left(\left\{ a, \left| \lambda_n(a, \Phi) - \int \Phi d\mu \right| \geq \frac{N}{d^{2n}} \right\} \cap B(0, \frac{1}{2}), B(0, 1) \right) \\ &\geq \text{Cap}(B, B(0, 1)), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d^{2n} M|\Phi|_2}{Nd^n} \geq \left(\frac{1}{\log(\rho/C)} \right)^2,$$

qui conduit à la majoration de N par la quantité souhaitée.

iii) *Majoration de la mesure de E_1 .*

Il s'agit ici de majorer $T \wedge S_{\mathcal{Q}}(\cup BC)$.

Mais :

$$T \wedge S_{\mathcal{Q}}(\cup BC) \leq Cd^n \max_{BC} T \wedge S_{\mathcal{Q}}(BC),$$

car le nombre de bonnes composantes est majoré par Cd^n , d'où

$$T \wedge S_{\mathcal{Q}}(\cup BC) \leq Cd^n Cd^{-n} \max_{BC} (\nu_{\mathcal{Q}}(\{\Gamma \text{ qui coupent } BC\})),$$

car $T \wedge [\Gamma](BC) \leq Cd^{-n}$, ce qui implique bien que

$$T \wedge S_{\mathcal{Q}}(\cup BC) \leq \varepsilon$$

dès que n est grand puisque $\max_{BC} (\nu_{\mathcal{Q}}(\{\Gamma \text{ qui coupent } BC\}))$ est aussi petit que l'on veut.

5.2. Majoration de la mesure

de $\{x \notin \text{Support}(\mu), \chi_2(x) > \chi_1(x) > 0\}$

Avant de démontrer que la mesure de cet ensemble est nulle, nous allons commencer par quelques préliminaires.

5.2.1. Préliminaires

Le but de ce paragraphe est de ramener la majoration de la mesure de $E_2 = \{x \notin \text{Support}(\mu), \chi_2(x) > \chi_1(x) > 0\}$ à celle de $E_2(i, j)$ où $E_2(i, j)$ est un ensemble qui aura de bonnes propriétés d'uniformité et de récurrence.

Remarquons tout d'abord qu'il nous suffit de voir que $\nu(\{x \in E_2, \chi_1(x) \geq \beta > 0, \chi_2(x) - \chi_1(x) \geq \beta\})$ est nul (avec β petit). On notera toujours E_2 cet ensemble. Par ailleurs,

$$\nu(E_2) = \widehat{\nu}(\pi^{-1}(E_2)) = \widehat{\nu}(\pi^{-1}(E_2) \cap \widehat{X})$$

où π est la projection de $\widehat{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et \widehat{X} est l'ensemble des bons points de Pesin (i.e., les points qui vérifient les conclusions du premier théorème du paragraphe 2).

Ce dernier ensemble $\pi^{-1}(E_2) \cap \widehat{X}$ est inclus dans

$$\widehat{E}_2 = \{\widehat{x} \in \widehat{X}, \pi(\widehat{x}) \notin \text{Support}(\mu), \chi_1(\widehat{x}) \geq \beta > 0, \chi_2(\widehat{x}) - \chi_1(\widehat{x}) \geq \beta\}$$

(car la définition des exposants de Lyapunov ne dépend que des trajectoires positives).

La majoration de $\nu(E_2)$ se ramène donc à celle de $\widehat{\nu}(\widehat{E}_2)$.

Ensuite, puisque sur \widehat{E}_2 les exposants sont strictement positifs, on peut construire \widehat{Y}' avec $\widehat{\nu}(\widehat{E}_2 - \widehat{Y}') = 0$ pour lequel tous les points $\widehat{x} \in \widehat{Y}'$ vérifient les points 1 et 2 du théorème du paragraphe 5.1.1 ainsi que les conclusions du deuxième théorème du paragraphe 2.

En reprenant alors les notations de ce théorème ainsi que celles du paragraphe 2, on constate que quitte à remplacer \widehat{E}_2 par

$$\begin{aligned} \widehat{E}_{2,p} &= \{\widehat{x} \in \widehat{E}_2 \cap \widehat{Y}', d(\pi(\widehat{x}), \text{Support}(\mu)) \geq \frac{1}{p}, \\ C(\widehat{x}) &\leq p, \eta(\widehat{x}) \geq \frac{1}{p}, \delta(\widehat{x}) \text{ et } \|C_\gamma^{\pm 1}(\widehat{x})\| \in [\frac{1}{p}, p]\} \end{aligned}$$

pour p grand, on pourra supposer dans la suite que nous avons ces contrôles.

Nous allons maintenant donner des propriétés de récurrence à \widehat{E}_2 .

En utilisant le lemme 5.1 de la partie précédente en temps négatif au lieu du temps positif, on en déduit que montrer que $\widehat{\nu}(\widehat{E}_2)$ est nul découle du fait que $\widehat{\nu}(\widehat{f}^{-i}(\widehat{E}_2) \cap \widehat{E}_2)$ est petit pour i assez grand. De même, si on

note $\widehat{E}_2(i) = \widehat{f}^{-i}(\widehat{E}_2) \cap \widehat{E}_2$ et que l'on utilise à nouveau ce lemme en temps négatif, nous sommes ramenés à montrer que $\widehat{\nu}(\widehat{f}^{-j}(\widehat{E}_2(i)) \cap \widehat{E}_2(i))$ est petit avec i, j assez grands, pour démontrer que $\nu(E_2)$ est nul.

Enfin, si on projette sur \mathbb{P}^2 on obtient :

$$\widehat{\nu}(\widehat{f}^{-j}(\widehat{E}_2(i)) \cap \widehat{E}_2(i)) \leq \nu(\pi(\widehat{f}^{-j}(\widehat{E}_2(i)) \cap \widehat{E}_2(i))) = \nu(E_2(i, j))$$

où

$$E_2(i, j) = \{x_0, \exists \widehat{x} \in \widehat{f}^{-j}(\widehat{E}_2(i)) \cap \widehat{E}_2(i) \text{ avec } \pi(\widehat{x}) = x_0\}.$$

Remarque. — Si on veut éviter les problèmes de mesurabilité de $E_2(i, j)$, on pourra remplacer dans la suite $E_2(i, j)$ par son adhérence.

L'ensemble $E_2(i, j)$ est celui que l'on cherchait et par ce que l'on a fait, montrer que $\nu(E_2)$ est nul découle du fait que $\nu(E_2(i, j))$ est petit.

Avant de passer à la majoration de $\nu(E_2(i, j))$ faisons une dernière modification.

Si x est un point de $\pi(\widehat{E}_2)$, on notera $E_S(x)$ l'image de $E_1(\widehat{x})$ par $D_0\tau_x$ (ici $\widehat{x} \in \widehat{E}_2$ et $\pi(\widehat{x}) = x$). L'espace $E_S(x)$ est la direction stable en x . Par ailleurs cet espace est bien défini car si $x = \pi(\widehat{x}) = \pi(\widehat{y})$ avec $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{E}_2$, alors $E_1(\widehat{x}) = E_1(\widehat{y})$ (en effet en \widehat{x} et \widehat{y} , les deux exposants de Lyapunov sont distincts).

Par le théorème de Lusin, il existe un compact K de mesure presque pleine pour ν sur lequel $x \mapsto E_S(x)$ est continue. Alors dans la suite, on cherchera à majorer la mesure de $E_2(i, j) \cap f^{-j}(K)$ pour ν . Nous noterons toujours $E_2(i, j)$ cet ensemble.

5.2.2. Majoration de $\nu(E_2(i, j))$

Avant de donner l'idée de la preuve, nous allons faire la réduction géométrique habituelle. Quitte à considérer un recouvrement fini de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ par des ouverts Ω , on peut supposer que $E_2(i, j) \subset \Omega$. Maintenant, on peut construire un découpage \mathcal{Q} d'un voisinage de $\overline{\Omega}$ en 4-cubes affines et un courant $S_{\mathcal{Q}}$ uniformément géométrique dans les cubes de \mathcal{Q} tels que la différence $(T \wedge S - T \wedge S_{\mathcal{Q}})(\Omega)$ soit aussi petite que l'on veut. Par ailleurs, si \mathcal{Q} est bien choisi, ν charge peu un petit voisinage du bord de \mathcal{Q} . Autrement dit, si on note Q un cube de \mathcal{Q} et Q_λ son homothétique de rapport λ , il

suffira de majorer dans la suite

$$\begin{aligned} T \wedge S_{\mathcal{Q}}(E_2(i, j) \cap Q_\lambda) &= \int \int_{E_2(i, j) \cap Q_\lambda} T \wedge [\Gamma] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma) \\ &= \int \int_{E_2(i, j) \cap Q_\lambda} \frac{f^{j*}T}{d^j} \wedge [\Gamma] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma) \\ &= \frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i, j) \cap Q_\lambda \cap \Gamma)} T \wedge [f^j(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma). \end{aligned}$$

Remarque. — La dernière écriture est un peu abusive car on pourrait avoir de la multiplicité. Cependant, comme celle-ci ne joue aucun rôle, on fera cet abus : les courbes $f^j(\Gamma)$ seront supposées sans multiplicité dans toute la suite de la démonstration.

Voici maintenant le plan de la preuve.

Dans un premier paragraphe, nous allons construire des disques dans les courbes $f^j(\Gamma)$. Ainsi, nous pourrons approcher le courant $\frac{[f^j(\Gamma)]}{d^j}$ par un courant $\frac{1}{d^j} \sum [D_\alpha(\Gamma)]$ uniformément géométrique dans un quadrillage que l'on précisera. La majoration de

$$\frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i, j) \cap Q_\lambda \cap \Gamma)} T \wedge [f^j(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$$

se ramènera ainsi à celle de

$$\frac{1}{d^j} \int \sum \int_{f^j(E_2(i, j) \cap Q_\lambda \cap \Gamma)} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma).$$

Ensuite les disques $D_\alpha(\Gamma)$ seront séparés en deux catégories : ceux qui sont proches de la direction stable et les autres. La majoration de

$$\frac{1}{d^j} \int \sum \int_{f^j(E_2(i, j) \cap Q_\lambda \cap \Gamma)} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$$

où la somme sera prise sur chacune des catégories sera alors effectuée dans le deuxième et le troisième paragraphe.

1) Approximation de $\int \frac{[f^j(\Gamma)]}{d^j} d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$

Voici le plan de ce paragraphe : dans un premier temps on va faire un découpage du but, c'est-à-dire on va quadriller un ouvert U qui contient essentiellement $f^j(\Gamma)$ en 4-cubes affines. Puis on complètera les courbes $f^j(\Gamma)$ de sorte à enlever les problèmes liés au bord et enfin on construira un courant uniformément géométrique qui approximera bien $\int \frac{[f^j(\Gamma)]}{d^j} d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$.

i) Découpage du but.

Quitte à considérer un recouvrement fini de \mathbb{P}^2 par des ouverts U , on pourra supposer que $f^j(E_2(i, j)) \subset U$.

On considère maintenant un découpage \mathcal{Q}' d'un voisinage de \bar{U} en 4-cubes affines de taille $\frac{1}{7}$. Rappelons que \mathcal{Q}' est de la forme

$$\mathcal{Q}' = \{\pi_1^{-1}(s'_1) \times \pi_2^{-1}(s'_2), (s'_1, s'_2) \in \mathcal{S}'_1 \times \mathcal{S}'_2\}$$

où \mathcal{S}'_1 et \mathcal{S}'_2 sont des quadrillages de \mathbb{C} de taille $\frac{1}{7}$. Dans la suite ce quadrillage sera supposé bien choisi par rapport au courant $\int \frac{[f^j(\Gamma)]}{d^j} d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ et à la mesure ν . Cela signifie que $T \wedge \int \frac{[f^j(\Gamma)]}{d^j} d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ et ν chargent peu un petit voisinage du bord de \mathcal{Q}' (voir le lemme 4.5 de [13]). La position du quadrillage \mathcal{Q}' dépend donc de j mais sa taille (i.e., $\frac{1}{7}$) sera toujours indépendante de j . Si on note $\mathcal{Q}'_{\lambda'} = \cup Q'_{\lambda'}$, où les $Q'_{\lambda'}$ sont les homothétiques des $Q' \in \mathcal{Q}'$ de rapport λ' , on pourra supposer que $f^j(E_2(i, j)) \subset \mathcal{Q}'_{\lambda'}$, quitte à remplacer $E_2(i, j)$ par $E_2(i, j) \cap f^{-j}(\mathcal{Q}'_{\lambda'})$. Ici λ' ne dépend que de ν .

ii) *Complétion de $f^j(\Gamma)$.*

Il s'agit ici d'enlever le problème que crée le bord de $f^j(\Gamma)$ dans la construction des disques dans cette courbe.

Remarquons tout d'abord que l'on peut enlever les Γ du support de $\nu_{\mathcal{Q}}$ pour lesquels $\text{Aire}(f^j(\Gamma))$ est supérieure à Kd^j . En effet, si \mathcal{G} désigne l'ensemble de ces Γ , on a :

$$Kd^j \nu_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}) \leq \int \int [f^j(\Gamma)] \wedge \omega d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma) \leq \int f^j_* S_{\mathcal{Q}} \wedge \omega \leq \int f^j_* S \wedge \omega = d^j.$$

Autrement dit, $\nu_{\mathcal{Q}}(\mathcal{G}) \leq \frac{1}{K}$ et le fait d'enlever ces graphes Γ à $T \wedge S_{\mathcal{Q}}$ modifie peu cette mesure.

Ensuite, quitte à changer Q en un cube un peu plus petit, nous pouvons supposer que la longueur de $\partial f^j(\Gamma)$ est majorée par $Kd^{j/2}$ (en utilisant un argument longueur-aire).

Expliquons maintenant comment on complète les courbes $f^j(\Gamma)$.

Considérons un carré s'_1 de \mathcal{S}'_1 et un graphe Δ' d'une fonction holomorphe au-dessus de celui-ci d'aire inférieure à $\frac{1}{2}$. Supposons que l'intersection entre Δ' et $f^j(\Gamma)$ contienne un ouvert de Δ' . En utilisant une inégalité isopérimétrique, on constate que Δ' vérifie un des cas suivants :

- soit $\text{Longueur}(\pi_1(\partial f^j(\Gamma) \cap \Delta')) \geq \frac{(1-\lambda')\delta'}{l}$. Ici δ' est une constante petite qui sera précisée plus loin ;
- soit cette longueur est plus petite que $\frac{(1-\lambda')\delta'}{7}$ mais l'aire de $\pi_1(f^j(\Gamma) \cap \Delta')$ est supérieure à $\frac{1}{2} - \frac{(1-\lambda')^2 \delta'^2}{l^2}$;
- soit $f^j(\Gamma) \cap \Delta'$ est confinée près du bord de \mathcal{Q}' (i.e., $f^j(\Gamma) \cap \Delta' \subset (\mathcal{Q}'_{\lambda''})^c$ avec $1 > \lambda'' > \lambda'$) ;

– soit $f^j(\Gamma) \Subset \Delta'$ n'est pas confinée près du bord et alors la masse pour T de $f^j(\Gamma)$ est négligeable (si δ' est petit). Quitte à enlever ces Γ à $T \wedge S_{\mathcal{Q}}$ (ce qui ne change presque pas cette mesure), on pourra supposer qu'aucun Γ ne vérifie ce dernier cas.

Ce sont les composantes Δ' des deux premières catégories que l'on ajoute à $f^j(\Gamma)$.

En faisant la même chose avec les autres carrés s'_1 de \mathcal{S}'_1 puis avec \mathcal{S}'_2 , on obtient ainsi un prolongement $\widetilde{f^j(\Gamma)}$ de $f^j(\Gamma)$.

Remarque. — À ce stade de la démonstration $\widetilde{f^j(\Gamma)}$ peut être égal à $f^j(\Gamma)$. En effet rien ne dit que l'on peut effectivement compléter $f^j(\Gamma)$.

Dans la suite nous verrons que les graphes Δ' que nous arriverons à ajouter à $f^j(\Gamma)$ seront des limites de graphes contenus dans des courbes du type $f^p(L)$.

iii) *Construction du courant uniformément géométrique.*

La construction est la même que celle décrite après la proposition 4 du paragraphe 3.2.

Dans les composantes connexes de $\widetilde{f^j(\Gamma)}$ au-dessus d'un carré s'_i de \mathcal{S}'_i (i.e., dans $\pi_i^{-1}(s'_i) \cap \widetilde{f^j(\Gamma)}$), on a un certain nombre de disques qui sont des graphes au-dessus de s'_i (qui peuvent éventuellement s'intersecter entre eux). En sommant les courants d'intégration sur les graphes qui ont une aire inférieure à $\frac{1}{2}$, on obtient ainsi deux courants inférieurs à $\widetilde{f^j(\Gamma)}$: $[C'_{\mathcal{Q}'_1}]$ et $[C'_{\mathcal{Q}'_2}]$ où les $C'_{\mathcal{Q}'_i}$ sont des courbes à bord dans $\pi_i^{-1}(\partial s'_i)$. En réunissant maintenant ces deux courbes, on obtient :

$$[C'_{\mathcal{Q}'_1} \cup C'_{\mathcal{Q}'_2}] = \sum [D_{\alpha}(\Gamma)],$$

où les $D_{\alpha}(\Gamma)$ sont des disques dans les cubes Q' de \mathcal{Q}' . Le courant $R_j = \frac{1}{d^j} \int \sum [D_{\alpha}(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ ainsi construit est uniformément géométrique dans les cubes Q' de \mathcal{Q}' et il vérifie :

LEMME 5.2.

$$\left\langle \frac{1}{d^j} \int [f^j(\Gamma) \cap Q'_{\lambda'}] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma) - R_{j|Q'_{\lambda'}}, \pi_1^* \omega + \pi_2^* \omega \right\rangle \leq \frac{C}{l^2}$$

Ici C est indépendante de j .

Démonstration. — Considérons les courants $S_{m,\mathcal{Q}} = \int [\Gamma] d\nu_{m,\mathcal{Q}}(\Gamma)$ qui approximent le courant S (voir le paragraphe 3.2).

L'inégalité ci-dessus est alors vraie en remplaçant $\nu_{\mathcal{Q}}$ par $\nu_{m,\mathcal{Q}}$ et R_j par $R_{j,m}$ (où $R_{j,m}$ est construit de façon analogue à R_j à partir des courants

$\frac{f_*^j S_{m, \mathcal{Q}}}{d^j}$). Cela provient, exactement comme dans la proposition 4, de la formule de Riemann-Hurwitz et du fait que le genre d'une courbe $f^p(L)$ ($p \in \mathbb{N}$) vaut 0. Par ailleurs dans cette nouvelle inégalité le C est indépendant de m et de j .

Maintenant, l'application $F(\Gamma) = \langle [f^j(\Gamma) \cap \mathcal{Q}'_{\lambda'}] - \sum [D_\alpha(\Gamma) \cap \mathcal{Q}'_{\lambda'}], \pi_1^* \omega + \pi_2^* \omega \rangle$ est semi-continue inférieurement.

On obtient donc le lemme en passant à la limite sur les mesures $\nu_{m, \mathcal{Q}}$. \square

Maintenant, si on applique T , on obtient que la différence

$$\frac{1}{d^j} \int \int_{\mathcal{Q}'_{\lambda'}} T \wedge [f^j(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma) - \int_{\mathcal{Q}'_{\lambda'}} T \wedge R_j$$

est majorée par $\varepsilon(l)$ qui est une suite qui tend vers 0 quand l croît vers l'infini (voir le paragraphe 3). Cela résulte d'une part du lemme précédent et d'autre part qu'étant donné que le quadrillage \mathcal{Q}' est supposé bien choisi par rapport à $T \wedge \int \frac{[f^j(\Gamma)]}{d^j} d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$ il l'est pour

$$\frac{1}{d^j} \int T \wedge [f^j(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma) - \int T \wedge R_j$$

(voir le lemme 4.5 de [13]).

Par ailleurs, comme nous l'avons dit dans le paragraphe 3.2, la suite $\varepsilon(l)$ est indépendante de j .

Pour majorer la mesure de E_2 , nous sommes donc ramenés à majorer

$$\frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i, j) \cap \Gamma \cap \mathcal{Q}_\lambda)} \sum T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$$

par ε .

Ce sont maintenant les disques $D_\alpha(\Gamma)$ que nous allons séparer en deux catégories. Par ailleurs, comme $f^j(E_2(i, j)) \subset \mathcal{Q}'_{\lambda'}$, on ne considérera dans la suite que les disques $D_\alpha(\Gamma)$ qui entrent dans $\mathcal{Q}'_{\lambda'}$.

Fixons $\delta > 0$ et Q' un cube de \mathcal{Q}' . Nous pouvons supposer que la variation de la pente de $D_\alpha(\Gamma)$ dans $Q'_{\lambda'}$ est inférieure à $\frac{\delta}{4}$ (quitte à redécouper les disques $D_\alpha(\Gamma)$ via un sous-quadrillage de \mathcal{Q}'). De plus, la fonction $x \mapsto E_S(x)$ étant continue sur $f^j(E_2(i, j))$, nous pouvons aussi supposer que sur les $Q'_{\lambda'}$, la variation de cette fonction est inférieure à $\frac{\delta}{4}$.

Maintenant, si $D_\alpha(\Gamma)$ est un disque de $f^j(\Gamma)$ tel que $\int_{f^j(E_2(i, j) \cap \Gamma \cap \mathcal{Q}_\lambda)} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] > 0$ alors nécessairement $D_\alpha(\Gamma)$ contient des points de $\pi(\hat{E}_2)$. La séparation des disques $D_\alpha(\Gamma)$ se fait de la façon suivante. Nous noterons \mathcal{D}_1 l'ensemble des disques qui contiennent un point x de $\pi(\hat{E}_2)$ avec l'angle entre la tangente à $D_\alpha(\Gamma)$ en x et $E_S(x)$ supérieur à δ . Les autres disques

$D_\alpha(\Gamma)$ (qui sont donc proches de la direction stable) constituent l'ensemble \mathcal{D}_2 . Dans la suite, nous aurons donc deux majorations à effectuer : celle de

$$\frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda)} \sum_{\mathcal{D}_1} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$$

et celle de

$$\frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda)} \sum_{\mathcal{D}_2} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$$

par ε .

Ces majorations vont être effectuées dans les deux paragraphes suivants.

2) Majoration de $\frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda)} \sum_{\mathcal{D}_1} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$

Nous savons que le nombre de disques $D_\alpha(\Gamma)$ dans $\widehat{f^j(\Gamma)}$ est majoré par $C(l)d^j$. En effet les disques que l'on a ajoutés à $f^j(\Gamma)$ pour obtenir $\widehat{f^j(\Gamma)}$ contiennent soit un morceau consistant du bord de $f^j(\Gamma)$ (i.e., de longueur supérieure à $\frac{(1-\lambda')\delta'}{l}$), soit une aire minorée par $\frac{1}{l^2} - \frac{(1-\lambda')^2\delta'^2}{l^2}$. Afin de simplifier les expressions, nous supposons dans la suite que $C(l) \leq 1$. De la même façon, la mesure $\nu_{\mathcal{Q}}$ sera considérée de masse 1.

Nous allons maintenant faire la majoration de

$$\frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda)} \sum_{\mathcal{D}_1} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma),$$

en admettant certains points que nous démontrerons ensuite.

On découpe \mathbb{P}^2 en ouverts disjoints simplement connexes B tels que $\tau_x^{-1}(B) \subset B(0, \frac{1}{4p^4})$ pour tout x de B . Ensuite, nous noterons $\cup BC$ l'union des bonnes composantes dans les $f^{-i}(B)$ (i.e., des ouverts de la forme $\tau_{y_{-i}} \circ f_{\hat{y}}^{-i} \circ \tau_{y_0}^{-1}(B)$ avec \hat{y} et $\hat{f}^{-i}(\hat{y})$ dans \widehat{E}_2 et y_0 dans B).

Remarquons que par définition de $E_2(i, j)$, nous pouvons recouvrir $f^j(E_2(i, j))$ par des bonnes composantes $\tau_{y_{-i}} \circ f_{\hat{y}}^{-i} \circ \tau_{y_0}^{-1}(B)$ avec $y_{-i} \in f^j(E_2(i, j))$. Par ailleurs, si i est assez grand, celles-ci évitent un petit voisinage du support de μ . En effet, d'une part $d(\pi(\hat{x}), \text{Support}(\mu)) \geq \frac{1}{p}$ si \hat{x} est dans \widehat{E}_2 (voir le paragraphe 5.2.1) et d'autre part, les bonnes composantes sont de diamètre exponentiellement petit (voir le point 2 du théorème du paragraphe 5.1.1). Le nombre des bonnes composantes qui recouvrent $f^j(E_2(i, j))$ est donc majoré par Nd^i (voir le paragraphe γ de la section 5.1.2).

Nous verrons que si BC est une de ces bonnes composantes alors $\int_{BC} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] \leq Cd^{-i}$. Cela viendra du fait que $D_\alpha(\Gamma)$ n'est pas proche de la direction stable. Maintenant, si $\frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda)} \sum_{\mathcal{D}_1} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$

est supérieur à ε , alors il existe un disque $D_\alpha(\Gamma)$ avec $\int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda)} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] \geq \varepsilon$. Par ce qui précède, ce disque coupe au moins $\frac{\varepsilon}{C} d^i$ bonnes composantes (car celles-ci sont disjointes). De plus, ces bonnes composantes sont incluses dans un $(e^{-\beta i + \gamma i})$ -voisinage V de ce disque (par le point 2 du théorème de la section 5.1.1). Nous verrons que la mesure $\varepsilon(i)$ pour ν de ce voisinage tend vers 0 quand i croît vers l'infini et ceci uniformément sur les disques $D_\alpha(\Gamma)$.

Quitte à remplacer $E_2(i, j)$ par $E_2(i, j) \setminus f^{-j}(V)$ nous sommes ramenés à majorer

$$\frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda)} \sum_{\mathcal{D}_1} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$$

par $\varepsilon - \varepsilon(i)$ avec $f^j(E_2(i, j))$ qui évite V .

Comme précédemment, si ce n'est pas la cas, on obtient un disque $D_\alpha(\Gamma)$ avec

$$\int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda)} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] \geq \varepsilon - \varepsilon(i).$$

Ce disque coupe donc au moins $\frac{\varepsilon - \varepsilon(i)}{C} d^i$ bonnes composantes qui sont disjointes des précédentes.

On a donc construit $\left(\frac{\varepsilon}{C} + \frac{\varepsilon - \varepsilon(i)}{C}\right) d^i$ bonnes composantes hors d'un petit voisinage du support de μ .

En itérant maintenant le procédé et en utilisant le fait qu'il y a au plus Nd^i bonnes composantes hors de ce voisinage du support de μ , on obtient l'existence d'un $k \leq \frac{2CN}{\varepsilon}$ pour lequel $\int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda)} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] \leq \varepsilon - k\varepsilon(i)$ (avec i grand). Ici $E_2(i, j)$ est le $E_2(i, j)$ initial auquel on a enlevé k voisinages du même type que V .

Nous avons donc la majoration que nous voulions.

Il reste maintenant à montrer les points que nous avons admis : le fait que $\int_{BC} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] \leq Cd^{-i}$ où BC est une bonne composante de $f^{-i}(B)$ et la majoration de la mesure pour ν d'un $(e^{-\beta i + \gamma i})$ -voisinage de $D_\alpha(\Gamma)$ par $\varepsilon(i)$.

i) Majoration de $\int_{BC} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)]$ par Cd^{-i} .

Rappelons d'une part que l'on considère ici une bonne composante

$$BC = \tau_{y_{-i}} \circ f_{\hat{y}}^{-i} \circ \tau_{y_0}^{-1}(B)$$

(avec \hat{y} et $\hat{f}^{-i}(\hat{y})$ dans \hat{E}_2 , y_0 dans B et $y_{-i} \in f^j(E_2(i, j))$), et d'autre part que $\tau_{y_0}^{-1}(B) \subset B(0, \frac{1}{4p^4})$ et $\frac{1}{p} \leq \|C_\gamma^{\pm 1}(\hat{f}^{-i}(\hat{y}))\| \leq p$.

Comme dans la majoration de la mesure de E_1 , si on note $D_\alpha^0(\Gamma)$ la partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-i}(\hat{y})) \circ \tau_{y_{-i}}^{-1}(D_\alpha(\Gamma))$ susceptible de rencontrer $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-i}(\hat{y})) \circ$

$f_{\hat{y}}^{-i} B(0, \frac{1}{p})$, alors $D_{\alpha}^0(\Gamma)$ se met sous la forme d'un graphe $(z, \psi(z))$ où z est dans un disque D_0 de taille $e^{-\chi_1(\hat{y})i+\gamma i}$ et $|\psi'(z)| \leq e^{-\chi_1(\hat{y})i+\gamma i}$ sur D_0 (on s'est placé dans un repère orthonormé où l'axe des abscisses est parallèle à une tangente à $D_{\alpha}^0(\Gamma)$ en un point x de $C_{\gamma}^{-1}(\hat{f}^{-i}(\hat{y})) \circ f_{\hat{y}}^{-i} \circ \tau_{y_0}^{-1}(B)$).

Maintenant, comme l'angle entre $D_{\alpha}(\Gamma)$ et

$$E_S(\hat{f}^{-i}(\hat{y})) = D_0 \tau_{y_{-i}} E_1(\hat{f}^{-i}(\hat{y}))$$

est supérieur à $\frac{\delta}{2}$, la partie $\Delta_{\alpha}^0(\Gamma)$ de $D_{\alpha}^0(\Gamma)$ susceptible de rencontrer $C_{\gamma}^{-1}(\hat{f}^{-i}(\hat{y})) \circ f_{\hat{y}}^{-i} B(0, \frac{1}{p})$ se met aussi sous la forme d'un graphe $(z, \phi(z))$ dans le repère orthonormé

$$(C_{\gamma}^{-1}(\hat{f}^{-i}(\hat{y}))E_2(\hat{f}^{-i}(\hat{y})), C_{\gamma}^{-1}(\hat{f}^{-i}(\hat{y}))E_1(\hat{f}^{-i}(\hat{y}))).$$

Ici z est dans un disque D de taille essentiellement $e^{-\chi_1(\hat{y})i+\gamma i}$ et $|\phi'(z)| \leq C(\delta)$ pour $z \in D$.

Nous pouvons maintenant utiliser la transformée de graphe. Plus précisément, si on note comme dans le paragraphe 2, $g_{\hat{x}} = C_{\gamma}^{-1}(\hat{f}(\hat{x})) \circ f_x \circ C_{\gamma}(\hat{x})$ (où $\pi(\hat{x}) = x$) on a la

PROPOSITION 6. — *Soit $\gamma_0 > 0$. Si i est assez grand, l'image de $\Delta_{\alpha}^0(\Gamma) \cap C_{\gamma}^{-1}(\hat{f}^{-i}(\hat{y})) \circ f_{\hat{y}}^{-i} B(0, \frac{1}{p})$ par $g_{\hat{f}^{-i}(\hat{y})} \circ \dots \circ g_{\hat{f}^{-i}(\hat{y})} = C_{\gamma}^{-1}(\hat{y}) \circ \tau_{y_0}^{-1} \circ f^i \circ \tau_{y_{-i}} \circ C_{\gamma}(\hat{f}^{-i}(\hat{y}))$ est un graphe $(z, \psi(z))$ au-dessus d'une partie D_i de $C_{\gamma}^{-1}(\hat{y})E_2(\hat{y})$ qui vérifie $|\psi(z_1) - \psi(z_2)| \leq \gamma_0|z_1 - z_2|$ si z_1 et z_2 sont dans D_i .*

Démonstration. — La démonstration va utiliser la généralisation de la transformée de graphe qui se trouve dans l'appendice.

Les fonctions $g_{\hat{f}^{-l}(\hat{y})}$ ont les propriétés suivantes (voir le paragraphe 2) :

$$- D_0 g_{\hat{f}^{-l}(\hat{y})} = \begin{pmatrix} \mu_1(\hat{f}^{-l}(\hat{y})) & 0 \\ 0 & \mu_2(\hat{f}^{-l}(\hat{y})) \end{pmatrix} \text{ avec pour } i = 1, 2$$

$$e^{\chi_i(\hat{y})-\gamma} \leq |\mu_i(\hat{f}^{-l}(\hat{y}))| \leq e^{\chi_i(\hat{y})+\gamma} ;$$

- sur $B(0, \delta(\hat{f}^{-l}(\hat{y})))$, on a

$$g_{\hat{f}^{-l}(\hat{y})}(w) = D_0 g_{\hat{f}^{-l}(\hat{y})} w + h(w)$$

$$\text{avec } \|D_w h\| \leq \frac{\gamma \|w\|}{\delta(\hat{f}^{-l}(\hat{y}))}.$$

Autrement dit, dans le repère

$$(C_{\gamma}^{-1}(\hat{f}^{-l}(\hat{y}))E_1(\hat{f}^{-l}(\hat{y})), C_{\gamma}^{-1}(\hat{f}^{-l}(\hat{y}))E_2(\hat{f}^{-l}(\hat{y}))),$$

$g_{\hat{f}^{-l}(\hat{y})}$ s'écrit :

$$g_{\hat{f}^{-l}(\hat{y})} = (\mu_1(\hat{f}^{-l}(\hat{y}))x + \alpha(x, y), \mu_2(\hat{f}^{-l}(\hat{y}))y + \beta(x, y))$$

où $|\alpha|_{C^1}, |\beta|_{C^1} \leq (e^{-\chi_1(\hat{y})l+3\gamma l}) \frac{\gamma}{p}$ sur $B(0, \frac{e^{-\chi_1(\hat{y})l+2\gamma l}}{p^2})$ (en effet $\delta(\hat{f}^{-l}(\hat{y})) \geq \frac{e^{-\gamma l}}{p}$ puisque δ est une fonction tempérée et $\delta(\hat{y}) \geq \frac{1}{p}$).

Nous considérons $|\alpha|_{C^1}$ et $|\beta|_{C^1}$ sur $B(0, \frac{e^{-\chi_1(\hat{y})l+2\gamma l}}{p^2})$ car cette boule contient $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-l}(\hat{y})) \circ f_{\hat{y}}^{-l}B(0, \frac{1}{p^4})$ (voir le point 2 du théorème section 5.1.1).

Commençons maintenant par regarder l'image de $\Delta_\alpha^0(\Gamma) \cap C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-i}(\hat{y})) \circ f_{\hat{y}}^{-i}B(0, \frac{1}{p^4})$ par $g_{\hat{f}^{-i}(\hat{y})}$. Par l'appendice cette image est un graphe au-dessus d'un certain ouvert de

$$C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-i+1}(\hat{y}))E_2(\hat{f}^{-i+1}(\hat{y})).$$

Il s'écrit donc, dans le repère

$$(C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-i+1}(\hat{y}))E_1(\hat{f}^{-i+1}(\hat{y})), C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-i+1}(\hat{y}))E_2(\hat{f}^{-i+1}(\hat{y}))),$$

$(\phi_1(z), z)$ avec $z \in D_1$. Par ailleurs, toujours grâce à l'appendice, on a pour z_1 et z_2 dans D_1 ,

$$|\phi_1(z_1) - \phi_1(z_2)| \leq \frac{\mu_1(\hat{f}^{-i}(\hat{y}))C(\delta) + \max(|\alpha|_{C^1}, |\beta|_{C^1})(1 + C(\delta))}{\mu_2(\hat{f}^{-i}(\hat{y})) - \max(|\alpha|_{C^1}, |\beta|_{C^1})(1 + C(\delta))} |z_1 - z_2|$$

c'est-à-dire

$$|\phi_1(z_1) - \phi_1(z_2)| \leq \left(\frac{\mu_1(\hat{f}^{-i}(\hat{y}))}{\mu_2(\hat{f}^{-i}(\hat{y}))} + \gamma \right) C(\delta) |z_1 - z_2| \leq tC(\delta) |z_1 - z_2|$$

avec $0 < t < 1$ le tout si i est grand.

Enfin, on peut remarquer que le graphe que l'on vient de construire est dans $C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-i+1}(\hat{y})) \circ f_{\hat{y}}^{-i+1}B(0, \frac{1}{p^4})$.

Si i est grand, on peut donc recommencer ce que l'on vient de faire i_0 fois et on obtient ainsi un graphe $(\phi_{i_0}(z), z)$ au-dessus de

$$D_{i_0} \subset C_\gamma^{-1}(\hat{f}^{-i+i_0}(\hat{y}))E_2(\hat{f}^{-i+i_0}(\hat{y}))$$

qui vérifie :

$$|\phi_{i_0}(z_1) - \phi_{i_0}(z_2)| \leq t^{i_0}C(\delta) |z_1 - z_2| \leq \gamma_0 |z_1 - z_2|,$$

si z_1 et z_2 sont dans D_{i_0} .

Ensuite, toujours grâce à la transformée de graphe (voir l'appendice) et à la majoration des termes d'ordre deux de $g_{\hat{f}^{-l}(\hat{y})}$ (i.e., $|\alpha|_{C^1}$ et $|\beta|_{C^1}$) par $(e^{-\chi_1(\hat{y})l+3\gamma l}) \frac{\gamma}{p}$ sur $B(0, \frac{e^{-\chi_1(\hat{y})l+2\gamma l}}{p^2})$, quand on continue à pousser en avant

le graphe $(\phi_{i_0}(z), z)$, on obtient toujours des graphes ϕ_l au-dessus d'une région D_l de $C_\gamma^{-1}(\widehat{f}^{-i+l}(\widehat{y}))E_2(\widehat{f}^{-i+l}(\widehat{y}))$. De plus, ces graphes vérifient :

$$|\phi_l(z_1) - \phi_l(z_2)| \leq \gamma_0 |z_1 - z_2|,$$

pour z_1 et z_2 dans D_l et l compris entre $i_0 + 1$ et i .

Le cran i donne alors ce que l'on voulait démontrer. □

Notons g le graphe obtenu par la proposition.

Il nous reste à calculer

$$\begin{aligned} \int_{BC} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] &= \frac{1}{d^i} \int_B T \wedge [\tau_{y_0} \circ C_\gamma(\widehat{y})(g)] \\ &\leq \frac{1}{d^i} \int_{C_\gamma^{-1}(\widehat{y})B(0, \frac{1}{4p^4})} C_\gamma^*(\widehat{y})\tau_{y_0}^* T \wedge [g]. \end{aligned}$$

Comme dans le paragraphe précédent, nous allons utiliser un argument de capacité.

En effet, si on note $\mathcal{B}_l = C_\gamma^{-1}(\widehat{y})B(0, \frac{1}{l p^4})$ ($l = 1, 2, 3, 4$), Δ une direction complexe parallèle à $C_\gamma^{-1}(\widehat{y})E_2(\widehat{y})$ qui coupe g en un point de \mathcal{B}_4 et π la projection orthogonale sur Δ , on a d'une part $\pi(g \cap \mathcal{B}_4) \subset \Delta \cap \mathcal{B}_3$ et d'autre part $\Delta \cap \mathcal{B}_2 \subset \pi(g \cap \mathcal{B}_1)$.

Autrement dit, comme dans le paragraphe précédent,

$$\int_{BC} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] \leq \frac{C}{d^i} \text{Cap}(\Delta \cap \mathcal{B}_3, \Delta \cap \mathcal{B}_2) \leq \frac{C}{d^i}.$$

Il nous reste maintenant à majorer la mesure pour ν d'un $(e^{-\beta i + \gamma i})$ -voisinage d'un disque $D_\alpha(\Gamma)$ par une suite $\varepsilon(i)$ qui tend vers 0 uniformément sur les $D_\alpha(\Gamma)$.

ii) Majoration de $\nu((e^{-\beta i + \gamma i})$ -voisinage d'un disque $D_\alpha(\Gamma)$).

Il s'agit ici de voir que

$$\forall \alpha, \exists i_0, \forall i \geq i_0, \forall D_\alpha(\Gamma), \nu((e^{-\beta i + \gamma i})\text{-voisinage d'un disque } D_\alpha(\Gamma)) \leq \alpha.$$

Faisons un raisonnement par l'absurde. Si ce qui précède est faux, on obtient une suite de disques D_n (d'aire inférieure à $\frac{1}{2}$) et une suite i_n telles que $\nu((e^{-\beta i_n + \gamma i_n})$ -voisinage de $D_n) \geq \alpha$.

Quitte à extraire une sous-suite, D_n converge vers un disque D et on a nécessairement $\nu(D) \geq \frac{\alpha}{2}$.

Pour obtenir une contradiction, nous allons montrer que D est inclus dans $\{x, \nu(S, x) > 0\}$, ce qui contredira le fait que ν ne charge pas les ensembles algébriques.

Le disque D vit dans un cube Q' de \mathcal{Q}' . On peut construire un quadrillage \mathcal{Q}'' d'un voisinage V de $\overline{Q'}$ en 4-cubes affines et un courant $S_{\mathcal{Q}''}$ uniformément géométrique dans ces cubes tels que la différence $(T \wedge S - T \wedge S_{\mathcal{Q}''})(V)$ soit très petite devant α .

Quitte à supposer que ν ne charge pas $\partial Q'$ ainsi que le bord de \mathcal{Q}'' , on peut trouver $Q'' \in \mathcal{Q}''$ avec $Q'' \Subset Q'$ tel que :

$$\int \int_{D \cap Q''_{\lambda''}} T \wedge [\Gamma] d\nu_{\mathcal{Q}''}(\Gamma) \geq \varepsilon(\alpha) > 0$$

où $Q''_{\lambda''}$ est l'homothétique de Q'' de rapport λ'' et $S_{\mathcal{Q}''} = \int [\Gamma] d\nu_{\mathcal{Q}''}(\Gamma)$.

Maintenant, si Γ est un disque de $S_{\mathcal{Q}''}$ dans Q'' , on a deux possibilités : soit $D \cap \Gamma \cap Q''_{\lambda''}$ contient un ouvert de D , soit $\int_{D \cap Q''_{\lambda''}} T \wedge [\Gamma] = 0$ (car si l'intersection entre D et Γ dans $Q''_{\lambda''}$ contient une infinité de points, on est dans le premier cas).

Autrement dit, comme il y a un nombre fini de Γ pour lesquels $D \cap \Gamma \cap Q''_{\lambda''}$ contient un ouvert de D (car l'aire de D est majorée par $\frac{1}{2}$), il en existe un avec $\nu_{\mathcal{Q}''}(\Gamma) \geq \varepsilon'(\alpha)$. Mais alors $S_{\mathcal{Q}''}$ (et donc S) a des nombres de Lelong strictement positifs sur $D \cap \Gamma$ (par le théorème de Lelong) donc $D \subset \{x, \nu(S, x) > 0\}$ et on obtient ainsi une contradiction.

3) Majoration de $\frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda)} \sum_{\mathcal{D}_2} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] d\nu_{\mathcal{Q}}(\Gamma)$

Pour simplifier, nous supposons toujours que le nombre de disques $D_\alpha(\Gamma)$ dans $f^j(\Gamma)$ est majoré par d^j et que $\nu_{\mathcal{Q}}$ est de masse 1. Rappelons que $f^j(E_2(i, j)) \subset \mathcal{Q}'_{\lambda'}$.

Si la quantité ci-dessus est minorée par ε , on peut trouver un cube Q' de \mathcal{Q}' et un Γ pour lesquels on a :

$$\frac{1}{d^j} \int \int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda) \cap Q'_{\lambda'}} \sum_{\mathcal{D}_2} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] \geq \frac{\varepsilon}{C(l)}$$

où $C(l)$ est le nombre de cubes de \mathcal{Q}' .

Maintenant, on peut construire un cube C et un polydisque P qui ont les propriétés suivantes :

- $C \subset P \Subset Q'_{\lambda''}$ (avec $1 > \lambda'' > \lambda'$) ;
- C et P ont leur base parallèle à $E_s(x)$ où x est un point de $f^j(E_2(i, j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda) \cap C$;
- l'ensemble \mathcal{D} des disques $D_\alpha(\Gamma)$ dans \mathcal{D}_2 qui passent par C est constitué de graphes au-dessus de $E_s(x)$ dans P ;
- $\frac{1}{d^j} \int \sum_{\mathcal{D}} \int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda) \cap C} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] \geq \frac{\varepsilon}{C(l)C(\delta, \lambda')}$ (dans la suite nous remplacerons $\frac{\varepsilon}{C(l)C(\delta, \lambda')}$ par ε).

Cela implique qu'il y a au moins $\frac{\varepsilon}{C(l)}d^j$ disques $D_\alpha(\Gamma)$ tels que

$$\int_{f^j(E_2(i,j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda) \cap C} T \wedge [D_\alpha(\Gamma)] > 0$$

(car $\int_{D_\alpha(\Gamma) \cap Q'_\lambda} T \leq C(l)$). On notera toujours \mathcal{D} l'ensemble de ces disques.

Si D est l'intersection avec P d'un de ces disques de \mathcal{D} , il contient une infinité de points de $f^j(E_2(i, j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda) \cap C$. On peut donc construire une branche inverse $\tau_{x_0} \circ f_{\hat{f}^j(\hat{x})}^{-j} \circ \tau_{x_j}^{-1}$ qui envoie D dans Γ (ici $\hat{f}^j(\hat{x}) \in \hat{E}_2$, $\pi \hat{f}^j(\hat{x}) = x_j \in f^j(E_2(i, j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda) \cap D \cap C$ et $x_0 \in E_2(i, j) \cap \Gamma \cap Q_\lambda$).

Maintenant, si on utilise la transformée de graphe en temps négatif, on constate que $\tau_{x_0} \circ f_{\hat{f}^j(\hat{x})}^{-j} \circ \tau_{x_j}^{-1}(D_1)$ (où D_1 est un disque $D_\alpha(\Gamma)$ de \mathcal{D} intersecté avec P) est un graphe au-dessus du disque $D(x_0, e^{-\chi_1(\hat{x})j-\gamma j})$ dans $E_S(x_0) = D_0 \tau_{x_0} E_1(\hat{x})$ et que par ailleurs ce graphe est exponentiellement plat (si δ et P sont suffisamment petits).

Si D_1 est différent de D , on en déduit donc que la préimage de D_1 par $\tau_{x_0} \circ f_{\hat{f}^j(\hat{x})}^{-j} \circ \tau_{x_j}^{-1}$ ne peut pas être dans Γ (sinon cela contredirait le fait que Γ est un graphe pour j grand).

Autrement dit, il existe au moins $\frac{\varepsilon}{C(l)}d^j$ bonnes composantes distinctes de la forme $\tau_{x_0} \circ f_{\hat{f}^j(\hat{x})}^{-j} \circ \tau_{x_j}^{-1}(Q'_\lambda)$ qui coupent Γ .

Maintenant, comme au paragraphe précédent, on enlève un $(e^{-\beta j + \gamma j})$ -voisinage V de Γ à $E_2(i, j)$ (ce voisinage est de masse $\varepsilon(j)$ pour ν) et on recommence ce que l'on vient de faire en remplaçant $E_2(i, j)$ par $E_2(i, j) \setminus V$, puis on itère le procédé.

Comme le nombre de bonnes composantes dans les préimages $f^{-j}(Q'_\lambda)$ est borné par Nd^j , le procédé finit par s'arrêter et on obtient la majoration voulue.

6. Un exemple

Il s'agit ici de donner un exemple de mesure $\nu = T \wedge S$, qui ne charge pas d'ensemble algébrique et pour laquelle le plus petit exposant $\chi_1(x)$ est nul pour presque tout point x .

Cette mesure va être construite à partir d'une application holomorphe qui a un disque de Siegel. Plus précisément, soit $R(z) = \lambda z + z^2$ avec $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ où θ est irrationnel et diophantien (voir [9] p.43 et p.55). R a donc un disque de Siegel qui contient 0 (voir [3] p.33). En particulier R est conjuguée à la rotation $z \mapsto \lambda z$ au voisinage de 0. C'est-à-dire, il existe

une fonction holomorphe Φ localement inversible au voisinage de 0, pour laquelle $\Phi \circ R(z) = \lambda\Phi(z)$.

Si on considère un point a de la courbe de Jordan $|\Phi| = \varepsilon$ (avec ε petit), alors $\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \delta_{R^i(a)}$ converge vers la mesure de Lebesgue α de $|\Phi| = \varepsilon$. Cela provient du fait qu'une rotation d'angle irrationnel sur le cercle unité est uniquement ergodique (voir [18] p. 146). Maintenant, soit f est l'endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ défini par :

$$f([z : w : t]) = [\lambda zt + z^2 : \lambda wt + w^2 : t^2].$$

Dans la suite, on se place dans la carte $t = 1$.

L'image de la droite $z = a$ par f^i est la droite $z = R^i(a)$ (parcourue 2^i fois). Autrement dit, si S est une valeur d'adhérence de $\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{[f^i(L)]}{2^i}$, alors $S = \int [N] d\alpha(N)$ où α est la mesure de Lebesgue précédente et N est une droite qui passe par le point $[0 : 1 : 0]$ et par un point de $|\Phi| = \varepsilon$.

En particulier, comme α et $T \wedge [N]$ ne chargent aucun point, $T \wedge S$ ne charge aucune courbe algébrique.

Enfin, comme D est un disque de Siegel, il est assez facile de voir que pour tout point x du support de ν on a $\chi_1(x) = 0$.

7. Appendice : la transformée de graphe

Dans cet appendice nous allons présenter une petite généralisation de la transformée de graphe (voir [18]).

Le cadre de ce paragraphe est \mathbb{C}^2 . Nous noterons g l'application

$$g(x, y) = (\lambda x + \alpha(x, y), \mu y + \beta(x, y))$$

avec α, β vérifiant $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, $|\alpha|_{\mathbb{C}^1}, |\beta|_{\mathbb{C}^1} \leq \delta$ dans une boule $B = B(0, r) \subset \mathbb{C}^2$ et $0 < |\mu| < |\lambda|$. Soit maintenant $\{(x, \phi(x)), x \in D\}$ un graphe inclus dans B au-dessus de D qui vérifie $|\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq \gamma|x_1 - x_2|$.

Le théorème de la transformée de graphe que nous allons énoncer donne des conditions sur δ, γ, λ et μ pour que l'image du graphe précédent par g soit encore un graphe.

THÉORÈME. — *Si $\delta(1 + \gamma) < |\lambda|$ alors l'image par g du graphe précédent est un graphe au-dessus de $\pi(g(\text{graphe de } \phi))$ (où π est la projection sur l'axe des abscisses).*

Par ailleurs, si $(x, \psi(x))$ désigne ce nouveau graphe, nous avons :

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq \frac{|\mu|\gamma + \delta(1 + \gamma)}{|\lambda| - \delta(1 + \gamma)} |x_1 - x_2|.$$

Démonstration. — La seule différence avec la démonstration qui se trouve dans [18] p. 250, c'est que nous ne sommes pas dans une situation globale. Cependant, comme cela ne change rien à la preuve, nous ne démontrerons que le premier point du théorème.

Soit $G : D \mapsto \mathbb{C}$ la fonction définie par $G(x) = \lambda x + \alpha(x, \phi(x))$. C'est l'abscisse du point $g(x, \phi(x))$. Pour voir que $g(\text{graphe de } \phi)$ est un graphe au-dessus de $\pi(g(\text{graphe de } \phi))$, il suffit de voir que G est une bijection de D sur $G(D)$. Autrement dit, si $x_0 \in G(D)$, il faut démontrer que $G(x) = x_0$ (avec $x \in D$) a une unique solution.

Soit $F(x) = \lambda^{-1}x_0 - \lambda^{-1}\alpha(x, \phi(x))$. L'équation $G(x) = x_0$ équivaut à $F(x) = x$. Par ailleurs, si $x_1, x_2 \in D$, on a :

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= |\lambda^{-1}\alpha(x_1, \phi(x_1)) - \lambda^{-1}\alpha(x_2, \phi(x_2))| \\ &\leq |\lambda|^{-1}|\alpha|_{C^1}d((x_1, \phi(x_1)), (x_2, \phi(x_2))) \end{aligned}$$

car $(x_i, \phi(x_i)) \in B$ pour $i = 1, 2$.

On obtient donc

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq |\lambda|^{-1}\delta(1 + \gamma)|x_1 - x_2|.$$

Maintenant si $\delta(1 + \gamma) < |\lambda|$ alors $|F(x_1) - F(x_2)| \leq t|x_1 - x_2|$ avec $t < 1$ et l'équation $F(x) = x$ a donc bien une unique solution dans D . \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. BEDFORD & J. SMILLIE, « Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . iii. ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure », *Math. Ann.* **294** (1992), p. 395-420.
- [2] F. BERTELOOT & C. DUPONT, « Une caractérisation des endomorphismes de lattès par leur mesure de green », *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), p. 433-454.
- [3] F. BERTELOOT & V. MAYER, *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours spécialisés, vol. 7, Société Mathématique de France, Paris, 2001.
- [4] J.-Y. BRIEND, « Exposants de liapounoff et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ », Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1997.
- [5] J.-Y. BRIEND & J. DUVAL, « Exposants de liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ », *Acta Math.* **182** (1999), p. 143-157.
- [6] ———, « Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ », *IHES, Publ. Math.* **93** (2001), p. 145-159.
- [7] M. BRIN & A. KATOK, *On local entropy*, Geometric dynamics, vol. 1007, Lect. Notes in Math., Springer Verlag, 1983, 30-38 pages.
- [8] S. CANTAT, « Dynamique des automorphismes des surfaces $k3$ », *Acta Math.* **187** (2001), p. 1-57.
- [9] L. CARLESON & T. GAMELIN, « Complex dynamics », *Universitext : Tracts in Mathematics* (1993).

- [10] T.-C. DINH, « Suites d'applications méromorphes multivaluées et courants laminaires », *J. Geom. Anal.* **15** (2005), p. 207-227.
- [11] R. DUJARDIN, « Laminar currents and birational dynamics », à paraître dans *Duke Math. Journal*.
- [12] ———, « Laminar currents in \mathbb{P}^2 », *Math. Ann.* **325** (2003), p. 745-765.
- [13] ———, « Sur l'intersection des courants laminaire », *Publ. Mat.* **48** (2004), p. 107-125.
- [14] J. FORNÆSS & N. SIBONY, « Complex dynamics in higher dimension i », *Astérisque* **222** (1994), p. 201-231.
- [15] ———, « Complex dynamics in higher dimensions », *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* **439** (1994), p. 131-186.
- [16] ———, « Complex dynamics in higher dimension ii », *Ann. Math. Studies* **137** (1995), p. 135-182.
- [17] ———, « Hyperbolic maps on \mathbb{P}^2 », *Math. Ann.* **311** (1998), p. 305-333.
- [18] A. KATOK & B. HASSELBLATT, « Introduction to the modern theory of dynamical systems », *Encycl. of Math. and its Appl.* **54** (1995).
- [19] O. KOZLOVSKI, « An integral formula for topological entropy of c^∞ maps », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **18** (1998), p. 405-424.
- [20] C. PUGH & M. SHUB, « Ergodic attractors », *Trans. Amer. Math. Soc.* **312** (1989), p. 1-54.
- [21] D. RUELLE, « An inequality for the entropy of differentiable maps », *Bol. Soc. Brasil Mat.* **9** (1978), p. 83-87.
- [22] H. DE THÉLIN, « Sur la laminarité de certains courants », *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **37** (2004), p. 304-311.
- [23] ———, « Un phénomène de concentration de genre », *Math. Ann.* **332** (2005), p. 483-498.
- [24] T. UEDA, « Critical orbits of holomorphic maps on projective spaces », *J. Geom. Anal.* **8** (1998), p. 319-334.
- [25] P. WALTERS, « An introduction to ergodic theory », *Berlin Heidelberg New York : Springer* (1982).
- [26] Y. YOMDIN, « Volume growth and entropy », *Israel J. Math.* **57** (1987), p. 285-300.

Manuscrit reçu le 21 juin 2005,
 accepté le 17 octobre 2005.

Henry de THÉLIN
 Université Paris-Sud (Paris 11)
 Mathématique, Bât. 425
 91405 Orsay (France)
 Henry.De-Thelin@math.u-psud.fr