ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Luc PIRIO & Jean-Marie TRÉPREAU

Tissus plans exceptionnels et fonctions thêta

Tome 55, nº 7 (2005), p. 2209-2237.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2005__55_7_2209_0>

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://aif.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://aif.cedram.org/legal/). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
55, 7 (2005), 2209–2237

TISSUS PLANS EXCEPTIONNELS ET FONCTIONS THÊTA

par Luc PIRIO & Jean-Marie TRÉPREAU

1. Introduction.

1.1. Tissus plans, relations abéliennes.

Pour fixer les idées, nous nous plaçons dans une situation locale, dans la catégorie analytique. On note (x, y) le point courant de $\mathbb{C}^2$. Étant donné un point de base (x_0, y_0), fonction voudra dire germe de fonction analytique en (x_0, y_0), etc.

Si u est une fonction et $du(x_0, y_0) \neq 0$, on note $\mathcal{F}(u)$ le feuilletage dont les feuilles sont les courbes de niveau $\{u(x, y) = \text{cste}\}$. On dit que u définit le feuilletage $\mathcal{F}(u)$. Si f est définie au voisinage de $u(x_0, y_0)$ et si $f'(u(x_0, y_0)) \neq 0$, alors $f \circ u$ (qu'on notera aussi $f(u)$) définit le même feuilletage que u.

Soit $d \geqslant 3$ un entier. Un d-tissu en (x_0, y_0) est une famille non ordonnée de d feuilletages $\mathcal{F}(u_1), \ldots, \mathcal{F}(u_d)$ deux à deux transverses, *i.e.* tels que, pour $j \neq k$:

$$du_j(x_0, y_0) \wedge du_k(x_0, y_0) \neq 0.$$

On notera :

$$\mathcal{T}(u_1, \ldots, u_d) := \{\mathcal{F}(u_1), \ldots, \mathcal{F}(u_d)\}. \tag{1}$$

Mots-clés : tissus, relation abélienne, rangs, tissu exceptionnel.
Classification math. : 53A60.

Deux tissus, $\mathcal{T}_0$ en (x_0, y_0) et $\mathcal{T}_1$ en (x_1, y_1), sont *équivalents* s'il existe un difféomorphisme local ϕ, avec $\phi(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$, qui envoie $\mathcal{T}_0$ sur $\mathcal{T}_1$.

Dans la suite, les fonctions $u_1, \dots, u_d$ seront souvent définies sur un ouvert de $\mathbb{C}^2$ et ne vérifieront les conditions $du_j \neq 0$ ou $du_j \wedge du_k \neq 0$ pour $k \neq j$ qu'au point générique. On parlera encore du tissu $\mathcal{T}(u_1, \dots, u_d)$. Quoiqu'il en soit, nos résultats sont de nature locale, au voisinage des points où ces conditions sont vérifiées.

La théorie des tissus est née à la fin des années 1920. Le livre [3] de Blaschke et Bol dresse le bilan des résultats fondamentaux obtenus entre 1927 et 1938. Les résultats que nous allons rappeler sont tous présentés dans [3], sauf la découverte récente de nouveaux tissus plans exceptionnels et certains travaux oubliés des années 1937–1939 que nous évoquons à la fin de cette introduction. Après la guerre et surtout après 1970, de nouveaux résultats ont été obtenus, en particulier en dimension ou en codimension plus grandes. À titre d'exemples, citons les articles de Chern et Griffiths [9], d'Akivis et Goldberg [1] et de Hénaut [13], dont on pourra consulter les bibliographies.

Une *relation abélienne* du tissu (1) est une relation fonctionnelle de la forme :

$$\sum_{j=1}^{d} \phi_j(u_j)\, du_j = 0,$$

où pour $j = 1, \dots, d$, ϕ_j est une fonction définie au voisinage de $u_j(x_0, y_0)$. On identifie une telle relation au d-uplet $(\phi_1(u_1), \dots, \phi_d(u_d))$. Les relations abéliennes forment un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ dont la dimension ρ est un invariant du tissu, appelé son *rang*. Il vérifie *l'inégalité de Bol* $\rho \leqslant \rho(d)$, où :

$$\rho(d) := \frac{1}{2}(d-1)(d-2). \tag{2}$$

Définition 1.1. — *Un d-tissu de rang $\rho(d)$ est dit de rang maximal.*

On écrira plutôt une relation abélienne sous la forme intégrée :

$$\sum_{j=1}^{d} f_j(u_j) = \text{cste},$$

où f_j est une fonction définie au voisinage de $u_j(x_0, y_0)$. En faisant cela, on introduit des relations triviales, les constantes $f = (f_1, \dots, f_d) \in \mathbb{C}^d$; le rang du tissu est la dimension de l'espace des d-uplets $(f_1'(u_1), \dots, f_d'(u_d))$.

Par exemple, considérons $d \geqslant 3$ formes linéaires $l_1, \ldots, l_d$ sur $\mathbb{C}^2$, deux à deux linéairement indépendantes. Le tissu $\mathcal{T}(l_1, \ldots, l_d)$ est composé de d faisceaux différents de droites parallèles. Il est de rang maximal. On peut le voir en remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le système $(l_1^n, \ldots, l_d^n)$ est de rang $\min(n+1, d)$ dans l'espace des polynômes homogènes de degré n en (x, y), qui est de dimension $n+1$. Si $1 \leqslant n \leqslant d-2$, il existe donc $d-n-1$ relations linéaires indépendantes entre $l_1^n, \ldots, l_d^n$. En sommant par rapport à n, on obtient $(d-2)+(d-3)+\cdots+1 = \rho(d)$ relations abéliennes.

C'est déjà un exercice plus difficile de montrer directement qu'un tissu composé de d faisceaux de droites non nécessairement parallèles est de rang maximal. C'est un cas très particulier d'un résultat fondamental que nous rappelons maintenant.

1.2. Tissus algébriques, tissus exceptionnels.

On note $\check{\mathbb{P}}^2$ le plan dual du plan projectif complexe $\mathbb{P}^2$. Soit $C \subset \check{\mathbb{P}}^2$ une courbe algébrique réduite de degré $d \geqslant 3$. On associe à C un d-tissu avec singularités sur $\mathbb{P}^2$ de la façon suivante. Si $z \in \mathbb{P}^2$, le faisceau des droites de sommet z définit une droite de $\check{\mathbb{P}}^2$ qui, génériquement, rencontre la courbe C en d points distincts : les feuilles du tissu issues de z sont les d droites de $\mathbb{P}^2$ définies par ces points. On parle encore du d-tissu sur $\mathbb{P}^2$ défini par la courbe C.

Définition 1.2. — *On appelle tissu algébrique sur $\mathbb{P}^2$ tout tissu (avec singularités) sur $\mathbb{P}^2$ ainsi associé à une courbe algébrique réduite de $\check{\mathbb{P}}^2$ de degré $d \geqslant 3$.*

Il s'agit d'une notion globale de tissu avec singularités. Au voisinage d'un point générique de $\mathbb{P}^2$, on obtient un tissu au sens du paragraphe précédent. En général, le tissu obtenu s'interprète comme le tissu des tangentes à la courbe duale de C. Lorsque C est la réunion de d droites distinctes, il est constitué de d faisceaux de droites.

Le premier résultat fondamental de la théorie, voir [3], est le suivant :

Théorème 1.3. — *Tout tissu algébrique est de rang maximal.*

C'est en fait une interprétation, due à Blaschke, du théorème d'addition d'Abel en termes de tissus. Dans cette interprétation, le rang

$\rho(d) = (d-1)(d-2)/2$ apparaît comme étant le genre arithmétique de la courbe algébrique réduite $C \subset \check{\mathbb{P}}^2$. Le second résultat fondamental, dû à Blaschke et Howe, voir [3], est souvent cité comme "le théorème d'Abel inverse" :

Théorème 1.4. — *Un tissu en droites (i.e. dont les feuilles sont des morceaux de droites) admettant une relation abélienne non triviale qui n'est pas une relation d'un sous-tissu, est algébrique.*

On déduit de ce théorème qu'un tissu en droites de rang maximal est algébrique, ce qui constitue une réciproque au Théorème 1.3.

Mais dès le début des années 1930, la question de la réciproque a été posée sous la forme plus générale suivante :

À équivalence près, les tissus algébriques sont-ils les seuls tissus de rang maximal ?

Autrement dit, tout germe de tissu de rang maximal peut-il être envoyé par un difféomorphisme local sur un germe de tissu algébrique ?

Par exemple, tout 3-tissu $\mathcal{T}(u_1, u_2, u_3)$ de rang $\rho(3) = 1$ est équivalent à un tissu algébrique. En effet, si $f_1(u_1) + f_2(u_2) + f_3(u_3) = \text{cste}$ est une relation abélienne non triviale du tissu, on vérifie que $f_j'(u_j(x_0, y_0)) \neq 0$ pour $j = 1, 2, 3$. On peut donc prendre $f_1(u_1), f_2(u_2)$ et $-f_3(u_3)$ comme fonctions de définition des feuilletages. En changeant de notation, la relation abélienne s'écrit $u_3 = u_1 + u_2$ et, en prenant (u_1, u_2) comme coordonnées locales, on voit que le tissu est équivalent au tissu $\mathcal{T}(x, y, x+y)$.

Il est aussi vrai que tout 4-tissu de rang maximal $\rho(4) = 3$ est équivalent à un tissu algébrique. C'est un résultat qui, sous une forme différente, est dû à Lie.

En 1936, Bol apportait une réponse négative à la question posée ci-dessus, en introduisant le 5-tissu suivant, qui porte maintenant son nom :

$$\mathcal{B} = \mathcal{T}\Big(x, y, \frac{x}{y}, \frac{1-y}{1-x}, \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\Big). \tag{3}$$

À équivalence projective près, le tissu $\mathcal{B}$ est caractérisé par la propriété suivante : il est composé de quatre faisceaux de droites dont les sommets sont en position générale dans $\mathbb{P}^2$ et du faisceau des coniques qui passent par ces quatre sommets. Bol montre que le tissu $\mathcal{B}$ est de rang maximal $\rho(5) = 6$ et qu'il n'est pas équivalent à un tissu algébrique, même localement. La terminologie suivante est usuelle :

Définition 1.5. — *Un (germe de) tissu de rang maximal est algébrisable s'il est équivalent à un (germe de) tissu algébrique. Il est exceptionnel dans le cas contraire.*

Remarque 1.6. — Il est difficile d'échapper complètement à une certaine ambiguïté entre les notions de tissu et de germe de tissu. Par exemple, " le" tissu de Bol $\mathcal{B}$ induit, en un sens qu'on pourrait préciser, un ensemble de dimension 2 de germes de tissus exceptionnels, deux à deux non équivalents. On peut en effet vérifier que les germes du tissu $\mathcal{B}$ en deux points (non singuliers) sont équivalents si et seulement si l'on passe de l'un à l'autre par par un élément du groupe des transformations birationnelles qui conservent le tissu $\mathcal{B}$, et que ce groupe est un groupe fini.

L'exemple de Bol est resté longtemps isolé. En 1985, Chern [8] pose la question, qu'il juge importante, de savoir si le tissu de Bol est le seul 5-tissu exceptionnel.

L'une des relations abéliennes du tissu de Bol fait intervenir le dilogarithme. En 1996, Hénaut [12] propose, comme "un bon candidat" au titre de tissu exceptionnel, le 9-tissu associé à l'équation fonctionnelle de Spence-Kummer du trilogarithme. En 2002, Robert [17] et le premier auteur [14] montrent, indépendamment, qu'il a droit au titre, ainsi d'ailleurs que certains des 6- et des 7-tissus qu'on peut en extraire. Après ces découvertes, Griffiths [10] repose la question de la nature des tissus exceptionnels, sous une forme modifiée : ont-ils toujours à voir avec les polylogarithmes ?

En 2003, le premier auteur [15] apporte une réponse négative à la question de Chern et peut-être à la question plus vague de Griffiths, en donnant trois exemples très simples de 5-tissus exceptionnels. Il s'agit des tissus $\mathcal{T}(x, y, x+y, x-y, u(x,y))$, où $u(x,y)$ est l'une des trois fonctions suivantes :

$$e^x + e^y, \qquad x^2 - y^2, \qquad x^2 + y^2.$$

1.3. Résumé de nos résultats et plan de l'article.

Dans cet article, nous présentons une famille à un paramètre de 5-tissus exceptionnels, ainsi que cinq autres 5-tissus exceptionnels non équivalents (dont les trois dont on vient de parler) qui apparaissent comme des cas limites des tissus de cette famille. De façon informelle (voir la

Remarque 1.6), ce résultat montre en particulier que *l'ensemble des classes de germes de* 5*-tissus exceptionnels est de dimension au moins* 3.

Considérons d'abord le 4-tissu

$$\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}(x, y, x+y, x-y). \tag{4}$$

Il est composé de quatre faisceaux de droites parallèles, dont les sommets dans $\mathbb{P}^2$ forment une division harmonique de la droite à l'infini. Les symétries qui en découlent jouent un rôle crucial dans la suite.

Étant donné une fonction $u(x, y)$, vérifiant au voisinage d'un point la condition

$$u_x u_y (u_x - u_y)(u_x + u_y) \neq 0, \tag{5}$$

(où u_x et u_y désignent les dérivées partielles de u), on notera

$$\mathcal{T}[u] := \mathcal{T}(x, y, x+y, x-y, u(x, y)) \tag{6}$$

le 5-tissu obtenu en adjoignant à $\mathcal{T}_0$ le feuilletage $\mathcal{F}(u)$.

Rappelons que sn_k est une notation classique pour l'une des fonctions elliptiques de Jacobi de module $k \in \mathbb{C}\backslash\{-1, 0, 1\}$. L'énoncé suivant résume nos résultats.

Théorème 1.7. — *Les tissus suivants sont exceptionnnels :*

$$\mathcal{T}[\mathrm{sn}_k\, x\, \mathrm{sn}_k\, y], \qquad k \in \mathbb{C}\backslash\{-1, 0, 1\}\ ; \tag{7}$$

$$\mathcal{T}[\tanh x\ \tanh y],\ \ \mathcal{T}[\sin x\ \sin y],\ \ \mathcal{T}[e^x + e^y],\ \ \mathcal{T}[x^2 - y^2],\ \ \mathcal{T}[x^2 + y^2]. \tag{8}$$

D'autre part, soit u un germe de fonction qui vérifie (5), tel que le tissu $\mathcal{T}(x, y, u(x, y))$ est de rang maximal. Le tissu $\mathcal{T}[u]$ est de rang maximal si et seulement si le tissu $\mathcal{T}(x+y, x-y, u(x, y))$ est de rang maximal. Si c'est le cas, ou bien $\mathcal{F}(u)$ est un faisceau de droites, ou bien $\mathcal{T}[u]$ est équivalent à l'un des tissus de (7) ou (8).

À partir des tissus (7), on obtient $\mathcal{T}[\tanh x\ \tanh y]$ et $\mathcal{T}[\sin x\ \sin y]$ en faisant tendre k vers 1 et vers 0, respectivement.

Les passages à la limite qui donnent les trois autres tissus sont plus singuliers. Pour simplifier, on part du tissu $\mathcal{T}[\cos x + \cos y]$, qui est équivalent au tissu $\mathcal{T}[\sin x\ \sin y]$ par une transformation affine. Si l'on note $u(x, y) := \cos x + \cos y$, on a :

$$\begin{aligned} e^x + e^y &= 2 \lim_{t \to +\infty} u(ix + it, iy + it)/e^t, \\ x^2 - y^2 &= 2 \lim_{\epsilon \to 0} u(\epsilon x + \pi, \epsilon y)/\epsilon^2, \\ x^2 + y^2 &= 2 \lim_{\epsilon \to 0} (2 - u(\epsilon x, \epsilon y))/\epsilon^2. \end{aligned}$$

Notons que le tissu $\mathcal{T}_0$ est invariant par le groupe des dilatations de $\mathbb{C}^2$. D'une certaine façon, les formules précédentes montrent que les tissus $\mathcal{T}[x^2+y^2]$, $\mathcal{T}[x^2-y^2]$ et $\mathcal{T}[e^x+e^y]$ sont obtenus à partir du tissu $\mathcal{T}[\cos x+\cos y]$ par renormalisation au voisinage d'un point singulier. On pourra relier ceci avec le fait qu'ils possèdent chacun un groupe de symétries à un paramètre : le premier est invariant par les translations $(x,y)\mapsto(x+t,y+t)$, les deux autres par les homothéties $(x,y)\mapsto(\kappa x,\kappa y)$.

Dans la Section 2, nous donnons deux critères simples, l'un pour qu'un tissu de la forme $\mathcal{T}[u]$ soit algébrisable, l'autre pour que deux tissus de cette forme soient équivalents.

La Section 3 est le cœur de l'article. Nous montrons directement que les tissus (7) et (8) sont de rang maximal en exhibant pour chacun d'eux une base de relations abéliennes à 6 éléments. Les critères établis dans la Section 2 permettent d'affirmer qu'ils sont exceptionnels et de les classer modulo équivalence.

Dans la Section 4, nous démontrons la deuxième partie du Théorème 1.7. Nous écrivons d'abord le système différentiel que doit vérifier la fonction u pour que $\mathcal{T}[u]$ soit de rang maximal. Sous l'hypothèse que $\mathcal{T}(x,y,u(x,y))$ est aussi de rang maximal, le système se simplifie, il y a séparation des variables, et on le résout. On retrouve en particulier le fait que les tissus (7) et (8) sont de rang maximal, mais cette méthode ne donne pas leurs relations abéliennes.

1.4. Remarque historique.

En fait, les tissus dont nous avons parlé sont déjà apparus dans la littérature, sans que leur caractère exceptionnel ait été reconnu.

Avant que Bol obtienne son contre-exemple, Blaschke [2] a cherché à montrer que tout 5-tissu de rang 6 est algébrisable. La méthode qu'il proposait généralise une méthode de Poincaré, qui permet de démontrer assez facilement le résultat de Lie, que tout 4-tissu de rang 3 est algébrisable. Cet article de Blaschke et le contre-exemple de Bol ont suscité plusieurs travaux : en 1937, un article de Bompiani et Bortolotti [4] et un autre de Terracini [18]; en 1939, deux articles de Buzano [5] [6].

Ces auteurs s'intéressent à la question des 5-tissus exceptionnels en relation avec un problème de géométrie différentielle projective. Il s'agit de

trouver les surfaces (S) de l'espace $\mathbb{RP}^5$ qui admettent cinq systèmes de courbes (= un 5-tissu) tels que (S) soit tangente le long de chaque courbe à un hyperplan de $\mathbb{RP}^5$. Terracini trouve plusieurs solutions à ce problème. Elles correspondent au tissu $\mathcal{T}[x^2-y^2]$ et aux deux suivants :

$$\mathcal{T}\Big(x,y,x{+}y,\frac{x}{y},\frac{xy}{x+y}\Big),\ \mathcal{T}\Big(x,y,\frac{(x+y)^2}{1+y^2},\frac{y(x^2y-2x-y)}{1+y^2},\frac{x^2y-2x{-}y}{x^2+2xy{-}1}\Big).$$

On sait maintenant que ces tissus sont exceptionnels (voir [16], chapitre 8).

L'article [6] de Buzano est écrit en termes de tissus et tous les tissus (7) (8) y apparaissent, au moins implicitement. L'auteur distingue ces tissus pour certaines propriétés de leurs sous-tissus, mais il ne voit pas qu'ils sont de rang maximal; essentiellement, il manque à chaque fois *une relation* pour que leur nature exceptionnelle soit révélée. Bien que nous n'ayons eu connaissance de [6] qu'après avoir obtenu nos résultats, il y a coïncidence entre certains calculs de la Section 4 et ceux de [6].

Quoiqu'il en soit, Blaschke et Bol connaissaient ces travaux. L'appendice au § 30 de [3], page 261, contient un commentaire sur les articles [4] et [18]; au sujet des trois 5-tissus de Terracini que l'on vient d'évoquer, ils écrivent :

" ... ist noch nicht festgestellt, ob die hierzu gehörigen Kurvengewebe wirklich den Rang sechs haben, das wäre aber leicht nachzuprüfen."

("...pas encore établi si les tissus ci-dessus sont effectivement de rang six; ce serait toutefois facile à vérifier.")

Il ne semble pas que cette "vérification facile" ait été faite à cette époque. Plus tard, Bol écrit les résumés des deux articles de Buzano pour le *Zentralblatt* sans commentaire qui aille au-delà de ce que l'auteur dit démontrer.

2. Remarques sur les tissus $\mathcal{T}[u]=\mathcal{T}(x,y,x+y,x-y,u(x,y))$.

Après avoir déterminé les symétries du tissu $\mathcal{T}_0$, nous montrons comment reconnaître qu'un tissu de la forme $\mathcal{T}[u]$ est algébrisable ou que deux tissus de cette forme sont équivalents. Ces critères seront utiles dans la Section 3.

2.1. Symétries du tissu $\mathcal{T}_0$.

Le tissu $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}(x, y, x+y, x-y)$ est composé de quatre faisceaux de droites parallèles. Dans $\mathbb{P}^2$, ces faisceaux ont pour sommets les points $p_1 = [0:1:0]$, $p_2 = [1:0:0]$, $p_3 = [1:-1:0]$ et $p_4 = [1:1:0]$ de la droite à l'infini. Rappelons qu'à tout 4-uplet de points distincts d'une droite projective est associé un invariant projectif, son birapport. Par exemple, le birapport des quatre points $q_k = [x_k : y_k : 0]$, $k = 1, 2, 3, 4$, est donné par

$$b(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{t_1 - t_3}{t_1 - t_4} : \frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_4},$$

où $t_k := x_k/y_k \in \mathbb{C} \cup \infty$. Dans le cas qui nous intéresse, on calcule :

$$b(p_1, p_2, p_3, p_4) = -1 \ ;$$

les points p_1, p_2, p_3, p_4 forment donc une *division harmonique* de la droite à l'infini. Si l'on permute p_1, p_2, p_3, p_4, le birapport ci-dessus reste égal à -1 si et seulement si la permutation conserve ou échange les deux parties $\{p_1, p_2\}$ et $\{p_3, p_4\}$.

Le tissu $\mathcal{T}_0$ est invariant par le groupe $\mathrm{Dil}(\mathbb{C}^2)$ des *dilatations* de $\mathbb{C}^2$

$$(x, y) \mapsto (\kappa x + x_0, \kappa y + y_0), \qquad \kappa \neq 0,$$

et par les symétries orthogonales

$$\alpha(x, y) = (-x, y), \quad \beta(x, y) = (y, x), \quad \gamma(x, y) = \Big(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big). \tag{9}$$

Notons que les dilatations de $\mathbb{C}^2$ conservent les quatre éléments de $\mathcal{T}_0$, que α et β conservent les paires non-ordonnées de feuilletages $\{\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)\}$ et $\{\mathcal{F}(x+y), \mathcal{F}(x-y)\}$, tandis que γ les échange. Les symétries α, β et γ engendrent un groupe à seize éléments, isomorphe au groupe diédral $\mathbb{D}_8$. C'est aussi, dans le plan réel $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ le groupe des isométries de l'octogone régulier dont les sommets sont les intersections des quatre droites de $\mathcal{T}_0$ issues de l'origine avec le cercle unité.

Notation 2.1. — On note $\mathrm{G}^+(\mathcal{T}_0)$ le groupe engendré par α, β et le groupe des dilatations $\mathrm{Dil}(\mathbb{C}^2)$. On note $\mathrm{G}(\mathcal{T}_0)$ le groupe engendré par γ et $\mathrm{G}^+(\mathcal{T}_0)$.

Lemme 2.2. — *Un difféomorphisme local ϕ conserve le tissu $\mathcal{T}_0$ si et seulement si $\phi \in \mathrm{G}(\mathcal{T}_0)$. Il conserve les paires $\{\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)\}$ et $\{\mathcal{F}(x+y), \mathcal{F}(x-y)\}$ si et seulement si $\phi \in \mathrm{G}^+(\mathcal{T}_0)$.*

Démonstration. — La deuxième partie de l'énoncé résulte de la première et des remarques précédentes. Soit ϕ un difféomorphisme local qui conserve $\mathcal{T}_0$. On suppose d'abord ϕ projective. Alors ϕ est affine (ϕ conserve la droite à l'infini) et permute les points p_1, p_2, p_3, p_4 en conservant le birapport $b(p_1, p_2, p_3, p_4) = -1$. Il existe $\psi \in \mathrm{G}(\mathcal{T}_0)$ qui induit la même permutation de p_1, p_2, p_3, p_4. La transformation projective $\psi^{-1} \circ \phi$ induit l'identité sur la droite à l'infini ; c'est donc une dilatation et $\phi \in \mathrm{G}(\mathcal{T}_0)$. On avait supposé ϕ projective, mais c'est bien le cas, compte tenu du lemme suivant.

Lemme 2.3. — *Soit ϕ un germe de difféomorphisme de $\mathbb{C}^2$. Si ϕ conserve localement trois des faisceaux de $\mathcal{T}_0$, ϕ est une dilatation. Si ϕ transforme localement les quatre faisceaux de $\mathcal{T}_0$ en faisceaux de droites, ϕ est une tranformation projective.*

Démonstration. — Pour la première propriété, en conjuguant ϕ avec une transformation affine, on se ramène au cas où

$$\phi(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(x), \qquad \phi(\mathcal{F}(y)) = \mathcal{F}(y), \qquad \phi(\mathcal{F}(x+y)) = \mathcal{F}(x+y).$$

On en déduit que ϕ^{-1} est de la forme $\phi^{-1}(x, y) = (X(x), Y(y))$ avec

$$(\partial/\partial x - \partial/\partial y)(X(x) + Y(y)) = X'(x) - Y'(y) = 0,$$

donc que ϕ est une dilatation.

Pour la deuxième propriété, en composant ϕ avec une transformation projective, on peut supposer que $\phi(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{F}(x)$, $\phi(\mathcal{F}(y)) = \mathcal{F}(y)$ et que

$$\phi(\mathcal{F}(x+y)) = \mathcal{F}(x+y) \ \text{ ou } \ \phi(\mathcal{F}(x+y)) = \mathcal{F}(x/y),$$

selon que $\phi(\mathcal{F}(x+y))$ est ou non un faisceau de droites parallèles. Si $\phi(\mathcal{F}(x+y)) = \mathcal{F}(x+y)$, ϕ est une transformation projective d'après la première propriété.

Supposons $\phi(\mathcal{F}(x+y)) = \mathcal{F}(x/y)$. Si $\phi_0(x, y) := (\log x, -\log y)$, on note que $\phi_0^{-1} \circ \phi$ conserve localement les feuilletages $\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)$ et $\mathcal{F}(x+y)$: c'est une dilatation. Comme $\phi_0(\mathcal{F}(x-y)) = \mathcal{F}(xy)$ n'est pas un faisceau de droites, ϕ ne transforme pas tous les éléments de $\mathcal{T}_0$ en faisceaux de droites. Ce cas est donc exclu. □

2.2. Deux lemmes sur les tissus $\mathcal{T}[u]$.

On a les deux lemmes suivants.

Lemme 2.4. — *Soit u et v deux germes de fonctions qui vérifient (5). Si un difféomorphisme local ϕ envoie $\mathcal{T}[u]$ sur $\mathcal{T}[v]$, ϕ est une transformation projective. Si de plus $\mathcal{F}(u)$ n'est pas un faisceau de droites parallèles, $\phi \in \mathrm{G}(\mathcal{T}_0)$.*

Démonstration. — Si ϕ est comme dans l'énoncé, ϕ envoie au moins trois des éléments de $\mathcal{T}_0$ sur des éléments de $\mathcal{T}_0$. Il existe donc une transformation affine ψ telle $\psi \circ \phi$ conserve trois éléments de $\mathcal{T}_0$. D'après le Lemme 2.2, ϕ est une transformation affine.

Si $\mathcal{F}(u)$ n'est pas un faisceau de droites parallèles, ϕ conserve nécessairement le sous-tissu $\mathcal{T}_0$; le Lemme 2.2 s'applique.

Lemme 2.5. — *Soit u un germe de fonction vérifiant (5). Si $\mathcal{T}[u]$ est de rang maximal, ou bien $\mathcal{F}[u]$ est un faisceau de droites, ou bien $\mathcal{T}[u]$ est un tissu exceptionnel.*

La démonstration utilise le fait qu'un sous-tissu de rang maximal d'un tissu algébrique est algébrique. C'est par exemple une conséquence du Théorème 1.4 d'Abel inverse.

Démonstration. — On suppose que le germe de tissu $\mathcal{T}[u]$ est algébrisable. Soit ϕ un difféomorphisme local qui envoie $\mathcal{T}[u]$ sur un germe de tissu algébrique $\mathcal{T}'$, associé à une courbe réduite $C_5 \subset \check{\mathbb{P}}^2$, de degré 5.

Le sous-tissu $\phi(\mathcal{T}_0)$ de $\mathcal{T}'$ est de rang maximal donc algébrique, associé à une courbe $C_4 \subset C_5$, de degré 4. On en déduit que C_5 est la réunion de C_4 et d'une droite. En appliquant le même argument aux 3-tissus extraits de $\mathcal{T}_0$, qui sont de rang maximal, on obtient que C_5 est la réunion de cinq droites. Il en résulte que $\mathcal{T}'$ est formé de cinq faisceaux de droites. D'après le Lemme 2.3, ϕ est une transformation projective et donc $\mathcal{T}[u]$ est aussi formé de cinq faisceaux de droites. □

3. Fonctions thêta et tissus exceptionnels.

Dans cette section, nous démontrons la première partie du Théorème 1.7 en donnant, pour chaque tissu, une base explicite de six relations abéliennes. Ensuite, nous classons les tissus (7) modulo équivalence.

Rappelons que les tissus considérés sont de la forme

$$\mathcal{T}[u] = \mathcal{T}(x, y, x + y, x - y, u(x, y)),$$

au voisinage d'un point où u est définie et vérifie la condition (5). Ils possèdent bien sûr les relations abéliennes du tissu $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}(x, y, x+y, x-y)$, dont voici une base :

$$\begin{aligned} x + y - (x + y) &= 0, \\ x - y - (x - y) &= 0, \\ 2x^2 + 2y^2 - (x + y)^2 - (x - y)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Le tissu $\mathcal{T}[u]$ est de rang maximal $\rho(5) = 6$ si et seulement s'il possède trois relations abéliennes supplémentaires, indépendantes modulo les relations précédentes et les constantes, autrement dit trois relations de la forme :

$$f_k(u(x, y)) = g_k(x) + h_k(y) + j_k(x + y) + l_k(x - y), \qquad k = 1, 2, 3,$$

où f_1, f_2 et f_3 ont des dérivées linéairement indépendantes. La fonction u sera de la forme :

$$u(x, y) = v(x) + w(y). \tag{10}$$

C'est une relation abélienne du tissu et même du sous-tissu $\mathcal{T}(x, y, u(x, y))$, qui est donc de rang maximal par construction. Il restera à exhiber deux relations abéliennes indépendantes.

Remarque 3.1. — Souvent, pour faire l'économie d'un logarithme, on écrira certaines relations abéliennes sous forme multiplicative. En particulier, on pourra choisir une fonction de définition de la forme :

$$u(x, y) = v(x)w(y). \tag{11}$$

3.1. Une famille de tissus exceptionnels.

Si les tissus (7) sont définis en termes des fonctions elliptiques de Jacobi, l'une de leurs relations abéliennes fait intervenir les fonctions thêta, semble-t-il de façon essentielle. La présentation de ces tissus et de leurs relations est plus simple en termes des seules fonctions thêta.

On note $\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im}\tau > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. À $\tau \in \mathcal{H}$, on associe les quatre fonctions thêta $\theta_{(\mu,\nu)}$ de paramètre τ, avec pour $\mu, \nu \in \{0, 1\}$:

$$\theta_{(\mu,\nu)}(x, \tau) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n\nu} \exp\left(i\pi\left((2n + \mu)x + \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2 \tau\right)\right). \tag{12}$$

C'est la notation d'Hermite. Nous emploierons aussi celle de Jacobi, plus courante :

$$\theta_1 := -i\theta_{(1,1)}, \qquad \theta_2 := \theta_{(1,0)}, \qquad \theta_3 := \theta_{(0,0)}, \qquad \theta_4 := \theta_{(0,1)}.$$

Pour un paramètre τ donné, les quatre fonctions thêta sont des fonctions entières de $x \in \mathbb{C}$. Nous rappelons maintenant quelques propriétés de ces fonctions. Sauf pour la localisation des zéros, qui demande un peu d'analyse, elles découlent de la définition (12) par un calcul simple; voir par exemple [7] ou [11].

– Pour $\mu, \nu \in \{0, 1\}$, on a les formules "aux multiplicateurs" :

$$\begin{aligned}\theta_{(\mu,\nu)}(x+1,\tau) &= (-1)^{\mu}\theta_{(\mu,\nu)}(x,\tau),\\ \theta_{(\mu,\nu)}(x+\tau,\tau) &= (-1)^{\nu}e^{-i\pi(2x+\tau)}\theta_{(\mu,\nu)}(x,\tau).\end{aligned}$$

L'important pour nous en est la conséquence suivante : pour un paramètre τ donné et si $j \neq k$, *les fonctions θ_j/θ_k sont des fonctions elliptiques*, c'est-à-dire des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ qui ont deux périodes indépendantes sur $\mathbb{R}$, ici 2 et 2τ.

– Les fonctions θ_1, θ_2, θ_3 et θ_4 n'ont que des zéros simples. Leurs ensembles de zéros sont respectivement

$$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau, \qquad \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau+\frac{1}{2}, \qquad \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau+\frac{1+\tau}{2}, \qquad \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau+\frac{\tau}{2}. \tag{13}$$

– La fonction θ_1 est impaire, les fonctions θ_2, θ_3 et θ_4 sont paires.

– Les fonctions θ_1, θ_2 et θ_4 vérifient la relation

$$\begin{aligned}\theta_3(x,\tau)\,\theta_4(y,\tau) = \theta_4(x+y,2\tau)\,\theta_4(x-y,2\tau)\\ - \theta_1(x+y,2\tau)\,\theta_1(x-y,2\tau).\end{aligned} \tag{14}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.2. — *Pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, le tissu $\mathcal{T}[u_\tau]$ associé à la fonction*

$$u_\tau(x,y) := \frac{\theta_1(x,\tau)}{\theta_4(x,\tau)}\,\frac{\theta_1(y,\tau)}{\theta_4(y,\tau)} \tag{15}$$

est exceptionnel.

Plus précisément, la fonction u_τ définit un germe de tissu $\mathcal{T}[u_\tau]$ exceptionnel en tout point où elle vérifie (5).

Démonstration. — Les trois relations seront données sous forme multiplicative. La première est la relation (15). On obtient les deux autres

à partir de la formule (14). Un changement de variable simple la met sous la forme

$$\theta_3((x+y)/2,\tau/2)\,\theta_4((x-y)/2,\tau/2) = \theta_4(x,\tau)\,\theta_4(y,\tau) - \theta_1(x,\tau)\,\theta_1(y,\tau).$$

En divisant les deux membres par $\theta_4(x,\tau)\,\theta_4(y,\tau)$, on obtient :

$$1 - u_\tau(x,y) = \frac{\theta_3((x+y)/2,\tau/2)\,\theta_4((x-y)/2,\tau/2)}{\theta_4(x,\tau)\,\theta_4(y,\tau)}.$$

Vu les parités des fonctions thêta, en substituant $(x,-y)$ à (x,y), on a également :

$$1 + u_\tau(x,y) = \frac{\theta_3((x-y)/2,\tau/2)\,\theta_4((x+y)/2,\tau/2)}{\theta_4(x,\tau)\,\theta_4(y,\tau)}.$$

On vérifie sans difficulté que ces tois relations, avec les relations de $\mathcal{T}_0$, montrent que $\mathcal{T}[u_\tau]$ est de rang maximal. On vérifie aussi que $\mathcal{F}(u_\tau)$ n'est pas un faisceau de droites. Compte tenu du Lemme 2.5, le tissu $\mathcal{T}[u_\tau]$ est exceptionnel.

En divisant membre à membre les deux relations précédentes, on obtient :

$$\frac{1-u_\tau(x,y)}{1+u_\tau(x,y)} = \frac{\theta_3((x+y)/2,\tau/2)}{\theta_4((x+y)/2,\tau/2)}\,\frac{\theta_4((x-y)/2,\tau/2)}{\theta_3((x-y)/2,\tau/2)}. \tag{16}$$

C'est une relation abélienne du sous-tissu $\mathcal{T}(x+y, x-y, u_\tau(x,y))$. Elle joue un rôle important dans la classification des tissus $\mathcal{T}[u_\tau]$ à la fin de cette section.

Si l'on traduit le Théorème 3.2 en termes des fonctions elliptiques de Jacobi, on obtient bien la famille (7) de l'introduction, à une dilatation près. Il suffit de rappeler la définition des fonctions sn_k de Jacobi.

Au paramètre $\tau \in \mathcal{H}$, on associe le "module"

$$k(\tau) := \theta_2(0,\tau)^2/\theta_3(0,\tau)^2 \in \mathbb{C}.$$

La fonction elliptique sn_k de paramètre τ ou de module $k := k(\tau)$ peut être définie par la formule

$$x \in \mathbb{C}, \qquad \mathrm{sn}_k x := \frac{\theta_3(0,\tau)}{\theta_2(0,\tau)}\,\frac{\theta_1(x/\omega_1,\tau)}{\theta_4(x/\omega_1,\tau))},$$

où $\omega_1 = \pi\theta_3(0,\tau)$. Elle ne dépend en fait que du carré k^2. Celui-ci prend toutes les valeurs complexes sauf 0 et 1, quand τ décrit $\mathcal{H}$.

La fonction $\mathrm{sn_k}$ a la propriété fondamentale de vérifier l'équation différentielle

$$z'(x)^2 = (1-z(x)^2)(1-k^2 z(x)^2).$$

On la retrouvera à ce titre dans la Section 4.

Remarque 3.3. — Soit $\tau \in \mathcal{H}$ et $k = k(\tau)$. Considérons le tissu

$$\mathcal{T}(x, y, u_+(x, y), u_-(x, y), xy),$$

où $u_+(x, y)$ et $u_-(x, y)$ sont les racines de l'équation du second degré en t

$$(1 - k^2xy)^2t^2 - 2(x(1 - y)(1 - k^2y) + y(1 - x)(1 - k^2x))t + (x - y)^2 = 0.$$

Les feuilles de ce tissu sont des droites, des coniques ou des quartiques. On peut montrer que ce tissu est équivalent au tissu $\mathcal{T}[u_\tau]$, en prenant $(\mathrm{sn}_k x)^2$ et $(\mathrm{sn}_k y)^2$ comme variables et en utilisant les formules d'addition que vérifient les fonctions elliptiques de Jacobi (voir [7], chapitre 7).

3.2. Cinq autres tissus exceptionnels.

Les relations abéliennes des tissus "limites" (8) ne font intervenir que des fonctions élémentaires.

THÉORÈME 3.4. — *Les tissus $\mathcal{T}[u]$ définis par les fonctions $u(x, y)$ suivantes*

(17) 1) $\tanh x \tanh y$, 2) $\sin x \sin y$, 3) $e^x + e^y$, 4) $x^2 - y^2$, 5) $x^2 + y^2$,

sont exceptionnnels. Ils sont deux à deux non-équivalents.

Nous montrons d'abord que ces tissus sont exceptionnels, en exhibant dans chaque cas trois relations abéliennes (souvent sous forme multilicative) indépendantes modulo les relations de $\mathcal{T}_0$ et les constantes. La vérification de cette indépendance est facile et laissée au lecteur. Le Lemme 2.5 donne alors le résultat. Nous donnons aussi, le cas échéant, un tissu équivalent au tissu $\mathcal{T}[u]$ dont les feuilletages sont des faisceaux de droites, de coniques ou de quartiques.

1.– Le tissu $\mathcal{T}[\tanh x \tanh y]$ possède les relations abéliennes :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \tanh x \tanh y, \\ 1 + u(x, y) &= \frac{\cosh(x + y)}{\cosh x \cosh y}, \\ 1 - u(x, y) &= \frac{\cosh(x - y)}{\cosh x \cosh y}. \end{aligned}$$

On obtient le tissu équivalent

$$\mathcal{T}\Big(x, y, xy, \frac{x}{y}, \frac{(x - 1)(y - 1)}{(x + 1)(y + 1)}\Big),$$

en prenant e^{2x} et e^{2y} comme nouvelles variables.

2. – Le tissu $\mathcal{T}[\sin x \sin y]$ possède les relations abéliennes :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sin x \sin y, \\ 2u(x,y) &= \cos(x-y) - \cos(x+y), \\ 4u(x,y)^2 &= \cos^2(x-y) + \cos^2(x+y) - \cos 2x - \cos 2y. \end{aligned}$$

On obtient le tissu équivalent

$$\mathcal{T}\Big(x, y, xy, \frac{x}{y}, \frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy}\Big),$$

en prenant e^{ix} et e^{iy} comme nouvelles variables.

3. – Le tissu $\mathcal{T}[e^x + e^y]$ possède les relations abéliennes :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^x + e^y, \\ u(x,y) &= 2e^{(x+y)/2} \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ u(x,y)^2 &= e^{2x} + e^{2y} + 2e^{(x+y)}. \end{aligned}$$

On obtient le tissu équivalent

$$\mathcal{T}\Big(x, y, xy, \frac{x}{y}, x+y\Big),$$

en prenant e^x et e^y comme nouvelles variables.

4. – Le tissu $\mathcal{T}[x^2 - y^2]$ possède les relations abéliennes :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 - y^2, \\ u(x,y) &= (x+y)(x-y), \\ 6u(x,y)^2 &= 8x^4 + 8y^4 - (x+y)^4 - (x-y)^4. \end{aligned}$$

5. – Le tissu $\mathcal{T}[x^2 + y^2]$ possède les relations abéliennes :

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 + y^2, \\ 6u(x,y)^2 &= 4x^4 + 4y^4 + (x+y)^4 + (x-y)^4, \\ 10u(x,y)^3 &= 8x^6 + 8y^6 + (x+y)^6 + (x-y)^6. \end{aligned}$$

Par construction, les cinq tissus précédents ont la propriété que leur sous-tissu $\mathcal{T}(x, y, u(x,y))$ est de rang maximal. Il se trouve que le sous-tissu $\mathcal{T}(x+y, x-y, u(x,y))$ l'est aussi dans tous les cas. Dans le cas 1), il possède la relation :

$$\frac{1+u(x,y)}{1-u(x,y)} = \frac{\cosh(x+y)}{\cosh(x-y)},$$

et dans le cas 5) la relation $2u(x,y) = (x+y)^2 + (x-y)^2$. Dans les autres cas, la deuxième relation qu'on a donnée est une relation de $\mathcal{T}(x+y, x-y, u(x,y))$. On en déduit (voir la Notation 2.1) :

Lemme 3.5. — *Si $u(x,y)$ est l'une des fonctions (17), le tissu $\gamma(\mathcal{T}[u])$ est équivalent modulo $G^+(\mathcal{T}_0)$ au tissu $\mathcal{T}[u_\star]$, où $u_\star(x,y)$ désigne respectivement la fonction :*

(18) 1) $\cosh x/\cosh y$, 2) $\cos x + \cos y$, 3) $e^x \cosh y$, 4) xy, 5) x^2+y^2.

Ce lemme est utile pour démontrer la deuxième partie du Théorème 3.4. On pourrait à la place comparer les symétries des cinq tissus ou la structure de leurs relations abéliennes.

Fin de la démonstration du Théorème 3.4. — Il s'agit de montrer que deux éléments distincts u et v de la liste (17) ne définissent pas des germes de tissus équivalents. Compte tenu du Lemme 2.4 et du lemme pécédent, il suffit de montrer que $\mathcal{T}[v]$ n'est équivalent ni à $\mathcal{T}[u]$ ni à $\mathcal{T}[u_\star]$ modulo $\mathrm{G}^+(\mathcal{T}_0)$. Quitte à prendre leurs logarithmes, les fonctions de définition $u(x,y)$, $u_\star(x,y)$ et $v(x,y)$ sont de la forme $g(x)+h(y)$. Cette forme est conservée quand on les compose à droite avec un élément du groupe $\mathrm{G}^+(\mathcal{T}_0)$. La fin de la démonstration n'est plus qu'une question de vérification, compte tenu de la remarque suivante.

Remarque 3.6. — Si $u_j(x,y) = g_j(x)+h_j(y)$, $j=1,2$, vérifient (5) et définissent le même feuilletage, il existe $\kappa \in \mathbb{C}^*$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que $u_2 = \kappa\, u_1 + c$. En effet, on peut considérer les relations $u_j(x,y) = h_j(x)+g_j(y)$, $j=1,2$, comme des relations abéliennes du même 3-tissu $\mathcal{T}(x,y,u_1(x,y))$.

3.3. Classification des tissus $\mathcal{T}[u_\tau]$.

Nous voulons maintenant classer les tissus $\mathcal{T}[u_\tau]$ du Théorème 3.2 modulo équivalence. Nous ne déterminerons pas leurs symétries mais la même méthode permettrait de le faire.

On note $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{H})$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{H}$. L'application qui à une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ associe l'homographie $\tau \mapsto (a\tau+b)/(c\tau+d)$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{I}\} \to \mathrm{Aut}\,(\mathcal{H}).$$

Le groupe modulaire Γ est l'image de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}\}$ par cet isomorphisme. On montre qu'il est engendré par les deux homographies

$$\eta(\tau) := \tau + 1, \qquad j(\tau) := -1/\tau. \tag{19}$$

Soit $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments $\{0,1\}$. La réduction modulo 2 des coefficients d'une matrice à coefficients entiers induit un morphisme surjectif :

$$\pi : \Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2). \tag{20}$$

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ a pour éléments les six matrices (modulo 2) suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a en particulier :

$$J := \pi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N := \pi(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$NJN = \pi(\eta \circ j \circ \eta^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On montre, voir [7], que le noyau de π est le sous-groupe d'indice 6 du groupe Γ engendré par les homographies η^2 et $j \circ \eta^2 \circ j$. Le sous-groupe d'indice 3

$$\Gamma_0 := \pi^{-1}(\{\mathrm{I}, \mathrm{NJN}\}) \tag{21}$$

du groupe modulaire est donc engendré par η^2, $j \circ \eta^2 \circ j$ et $\eta \circ j \circ \eta^{-1}$. C'est l'ensemble des homographies représentables par une matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, avec b pair.

Lemme 3.7. — *Le groupe Δ engendré par le groupe Γ_0 et l'involution $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$, définie par $\rho(\tau) := -2/\tau$, est une extension d'indice 2 de Γ_0.*

Démonstration. — En effet, soit $\phi \in \Gamma_0$ de matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$; $b = 2b'$ est pair. On calcule :

$$(\rho \circ \phi \circ \rho^{-1})(\tau) = \frac{-d\tau + 2c}{b'\tau - a},$$

ce qui montre que $\rho \circ \phi \circ \rho^{-1} \in \Gamma_0$ et le résultat. □

À toute $\mathbb{R}$-base (ω_1, ω_2) de $\mathbb{C}$ telle que $\omega_1/\omega_2 \in \mathcal{H}$, on associe le réseau $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Deux telles bases (ω_1, ω_2) et (ω_1', ω_2') définissent le même réseau si et seulement si $\left(\begin{smallmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{smallmatrix}\right)$ est dans l'orbite de $\left(\begin{smallmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{smallmatrix}\right)$ sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Le lemme suivant est bien connu :

Lemme 3.8. — *Soit $\tau, \tau' \in \mathcal{H}$. Il existe une dilatation de $\mathbb{C}$ qui envoie le réseau $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ sur le réseau $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau'$ si et seulement si τ' appartient à l'orbite $\Gamma \cdot \tau$ de τ sous l'action de Γ.*

Démonstration. — Soit $\kappa \in \mathbb{C}^*$. Remarquons que $\kappa(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)+x_0 = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau'$ pour un $x_0 \in \mathbb{C}$ si et seulement si $\kappa(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau) = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau'$. C'est le cas si et seulement si les paires $(\kappa\tau, \kappa)$ et $(\tau', 1)$ définissent le même réseau. Les rappels faits avant l'énoncé donnent le résultat. □

On aura besoin de la variante suivante :

Lemme 3.9. — *Soit $\tau, \tau' \in \mathcal{H}$. Il existe une dilatation δ de $\mathbb{C}$ telle que*

$$\delta(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau) = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau' \quad \text{et} \quad \delta(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau+\tau/2) = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau'+\tau'/2 \tag{22}$$

si et seulement si τ' appartient à l'orbite $\Gamma_0 \cdot \tau$ de τ sous l'action de Γ_0.

Démonstration. — On vérifie que η^2 et $j \circ \eta^2 \circ j$ conservent $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ et $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau+\tau/2$, tandis que, si $\tau' = (\eta \circ j \circ \eta^{-1})(\tau)$, alors

$$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau' = \frac{1}{\tau-1}(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau), \qquad \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau'+\tau'/2 = \frac{1}{\tau-1}(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau+\tau/2).$$

Dans l'énoncé, la condition $\tau' \in \Gamma_0 \cdot \tau$ est donc suffisante.

Réciproquement, soit $\tau \in \mathcal{H}$. L'ensemble des $\phi \in \Gamma$ tels que $\tau' = \phi(\tau)$ vérifie (22) pour une dilatation convenable est un sous-groupe de Γ qui contient le sous-groupe (d'indice 3) Γ_0 : c'est soit Γ_0 soit Γ. Reste à montrer que, si c'est Γ, alors $\Gamma \cdot \tau = \Gamma_0 \cdot \tau$.

On se place sous cette hypothèse et on choisit $\tau' = \eta(\tau) = \tau+1$. Comme $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau' = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$, on obtient l'existence de $\kappa \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$\kappa\,\mathbb{Z}+\kappa\,\mathbb{Z}\tau = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau, \qquad \kappa\,\mathbb{Z}+\kappa\,\mathbb{Z}\tau+\kappa\,\tau/2 = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau+(\tau+1)/2,$$

On déduit de la première égalité que

$$\begin{pmatrix}\kappa\tau\\ \kappa\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

En particulier, τ est un point fixe de l'homographie ϕ de matrice $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$. La deuxième égalité donne $\kappa\,\tau/2 \equiv (\tau+1)/2$ modulo $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$. On a donc $a\tau+b \equiv \tau+1$ modulo $2\mathbb{Z}+2\mathbb{Z}\tau$: b est impair. Ainsi $\phi \notin \Gamma_0$ et donc Γ est engendré par Γ_0 et ϕ. Comme $\phi(\tau) = \tau$, on a bien $\Gamma \cdot \tau = \Gamma_0 \cdot \tau$. □

Nous pouvons maintenant énoncer (voir aussi le Lemme 3.7) :

Théorème 3.10. — *Soit $\tau, \tau' \in \mathcal{H}$. Les tissus $\mathcal{T}[u_\tau]$ et $\mathcal{T}[u_{\tau'}]$ sont équivalents si et seulement si τ' appartient à l'orbite de τ sous l'action du groupe Δ engendré par le groupe Γ_0 et l'involution $\tau \mapsto \rho(\tau) = -2/\tau$.*

Remarque 3.11. — En termes des fonctions sn_k, ce résultat s'exprime de la manière suivantes : *pour $k, l \in \mathbb{C}\backslash\{-1, 0, 1\}$, les tissus $\mathcal{T}[\mathrm{sn}_k x\, \mathrm{sn}_k y]$ et $\mathcal{T}[\mathrm{sn}_l x\, \mathrm{sn}_l y]$ sont équivalents si et seulement si l ou $-l$ est égal à l'un des nombres k, $1/k$, $(1-k)/(1+k)$ ou $(1+k)/(1-k)$.* On obtient cette traduction sans difficulté, en utilisant des propriétés classiques de la fonction modulaire $\tau \mapsto k(\tau)^2$, qu'on trouvera par exemple dans le Chapitre 7 du livre [7].

Démonstration du Théorème 3.10. — On utilisera à plusieurs reprises (13) et la conséquence bien connue du théorème de Liouville : deux fonctions elliptiques qui ont les mêmes zéros et les mêmes pôles, y compris pour les multiplicités, sont proportionnelles, *i.e.* diffèrent d'une constante multiplicative. On notera :

$$v_\tau(x) := \theta_1(x, \tau)/\theta_4(x, \tau).$$

C'est une fonction elliptique avec des zéros et des pôles simples, respectivement aux points de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ et de $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau + \tau/2$, voir (13).

Supposons d'abord $\tau' \in \Gamma_0 \cdot \tau$. D'après le Lemme 3.9, il existe une dilatation δ de $\mathbb{C}$ qui envoie $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ et $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau + \tau/2$ sur $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$ et $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau + \tau/2$ sur $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau' + \tau'/2$. Les fonctions $v_\tau(x)$ et $v_{\tau'}(\delta(x))$ sont donc proportionnelles; les fonctions $u_\tau(x, y)$ et $u_{\tau'}(\delta(x), \delta(y))$ le sont aussi. Les tissus $\mathcal{T}[u_\tau]$ et $\mathcal{T}[u_{\tau'}]$ sont équivalents modulo $\mathrm{Dil}(\mathbb{C}^2)$.

Soit maintenant $\tau' = \rho(\tau)$. On part de la relation abélienne (16), dans laquelle on substitue $\gamma(x, y)$ à (x, y) :

$$\frac{1 - u_\tau(\gamma(x, y))}{1 + u_\tau(\gamma(x, y))} = \frac{\theta_3(x/\sqrt{2}, \tau/2)}{\theta_4(x/\sqrt{2}, \tau/2)} : \frac{\theta_3(y/\sqrt{2}, \tau/2)}{\theta_4(y/\sqrt{2}, \tau/2)}.$$

Cette égalité montre que le tissu $\mathcal{T}[u_\tau]$ est équivalent au tissu $\mathcal{T}[w(x)/w(y)]$ où

$$w(x) \ := \theta_3(x, \tau/2)/\theta_4(x, \tau/2).$$

Comme la translation $x \mapsto x + 1/2$ échange les zéros de θ_3 et de θ_4 (voir (13)) les fonctions $1/w(y)$ et $w(y + 1/2)$ sont proportionnelles. Le tissu $\mathcal{T}[w(x)/w(y)]$ est donc un translaté de $\mathcal{T}[w(x)w(y)]$. La fonction elliptique w admet respectivement

$$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\frac{\tau}{2}+\frac{\tau/2+1}{2} = \frac{\tau}{2}\Big(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\,\tau'+\frac{\tau'+1}{2}\Big), \ \ \mathbb{Z}+\mathbb{Z}\frac{\tau}{2}+\frac{\tau/2}{2} = \frac{\tau}{2}\Big(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau'+\frac{1}{2}\Big)$$

comme ensembles de zéros et de pôles (simples). Ce sont les images par la dilatation $x \mapsto (\tau/2)(x + (\tau' + 1)/2$ des ensembles de zéros et de pôles (simples) de la fonction elliptique $v_{\tau'}$. On en déduit que le tissu $\mathcal{T}[u_{\tau'}]$ est équivalent au tissu $\mathcal{T}[w(x)w(y)]$ et donc au tissu $\mathcal{T}[u_\tau]$.

Comme le groupe Δ est engendré par ρ et le groupe Γ_0, on a montré que la condition $\tau' \in \Delta \cdot \tau$ de l'énoncé est une condition suffisante.

Soit maintenant $\tau, \tau' \in \mathcal{H}$. On suppose que u_τ et $u_{\tau'}$ définissent des germes de tissus équivalents (en des points où (5) est vérifié). Il s'agit de montrer que $\tau' \in \Delta\cdot\tau$. Le Lemme 2.4 permet de supposer que les deux tissus sont équivalents modulo $\mathrm{G}(\mathcal{T}_0)$, la première partie de la démonstration qu'ils sont équivalents modulo $\mathrm{G}^+(\mathcal{T}_0)$ et donc modulo $\mathrm{Dil}(\mathbb{C}^2)$, puisque les symétries α et β les conservent.

On suppose donc qu'il existe une dilatation $\delta : (x, y) \mapsto (\kappa x + x_0, \kappa y + y_0)$ de $\mathbb{C}^2$ qui envoie $\mathcal{T}[u_\tau]$ sur $\mathcal{T}[u_{\tau'}]$. Comme les feuilletages $\mathcal{F}(u_\tau)$ sur $\mathcal{F}(u_{\tau'})$ sont les seuls éléments de ces tissus qui ne sont pas des faisceaux de droites, on a $\delta(\mathcal{F}(u_\tau)) = \mathcal{F}(u_{\tau'})$. En introduisant une détermination locale du logarithme, on obtient que les fonctions

$$f(x, y) := \log v_\tau(x) + \log v_\tau(y) \text{ et } g(x, y) := \log v_{\tau'}(\kappa x + x_0) + \log v_{\tau'}(\kappa y + y_0)$$

définissent le même feuilletage. Elles vérifient nécessairement une identité de la forme $f(x, y) = cg(x, y) + \mathrm{cste}$ avec $c \in \mathbb{C}^*$. En la dérivant par rapport à x, on obtient une identité entre fonctions méromorphes :

$$\frac{a'(x)}{a(x)} = c\frac{b'(x)}{b(x)},$$

où $a(x) := v_\tau(x)$ et $b(x) := v_{\tau'}(\kappa x + x_0)$. Comme les fonctions a et b n'ont que des zéros et des pôles simples, c vaut 1 ou -1 d'après le théorème des résidus; on peut donc écrire pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^*$:

$$v_\tau(x) = \lambda v_{\tau'}(\kappa x + x_0) \quad \text{ou bien} \quad v_\tau(x) = \lambda / v_{\tau'}(\kappa x + x_0).$$

Le deuxième cas se ramène au premier car la translation $x \mapsto x + \tau'/2$ échange les zéros et les pôles de $v_{\tau'}$. On peut donc appliquer le Lemme 3.9, qui donne $\tau' \in \Gamma_0 \cdot \tau$ et le résultat. □

4. Une caractérisation des tissus de la Section 3.

Nous allons démontrer une version précisée de la deuxième partie du Théorème 1.7 :

Théorème 4.1. — *Si un germe de fonction $u(x,y)$ vérifie (5) et définit un 3-tissu $\mathcal{T}(x,y,u(x,y))$ de rang maximal, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *le tissu $\mathcal{T}[u]$ est de rang maximal;*

b) *le sous-tissu $\mathcal{T}(x+y,x-y,u(x,y))$ est de rang maximal;*

c) *$\mathcal{F}(u)$ est un faisceau de droites ou $\mathcal{T}[u]$ est équivalent modulo $\mathrm{G}(\mathcal{T}_0)$ à l'un des tissus de (7) ou (8).*

On a montré dans la Section 3 que les tissus (7) et (8) sont de rang maximal *ex abrupto*, en exhibant leurs relations abéliennes. La démonstration qui suit est indépendante. Nous retrouvons le fait que ces tissus sont de rang maximal par une autre méthode. Toutefois, celle-ci ne permet pas de deviner leurs relations abéliennes.

4.1. Un résultat préliminaire.

On considère un $(p+1)$-tissu de la forme

$$\mathcal{T}(\,l_1,\,\ldots,\,l_p,\,u\,), \tag{23}$$

où $l_1,\ldots,l_p$ sont des formes linéaires deux à deux linéairement indépendantes. On va voir que le fait qu'un tel tissu est de rang maximal donne lieu à un système différentiel en u facile à écrire.

Les feuilletages qui constituent le tissu (23) sont aussi définis par les champs de vecteurs

$$X_k = \frac{\partial l_k}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial l_k}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y},\quad k=1,\ldots,p\,; \qquad X_u = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Les champs $X_1,\ldots,X_p$ sont constants. Le p-tissu $\mathcal{T}(l_1,\ldots,l_p)$, formé de p faisceaux de droites parallèles, est de rang maximal $\rho(p)=(p-1)(p-2)/2$. En raisonnant comme au début de la Section 3, on voit que le $(p+1)$-tissu (23) est de rang maximal $\rho(p+1)=\rho(p)+p-1$ si et seulement si l'espace des fonctions $f'(u)$ telles que $f(u)$ vérifie une relation de la forme

$$f(u)=\sum_{k=1}^{p} f_k(l_k)$$

est de dimension $p-1$. C'est le cas si et seulement si l'espace des fonctions $f(u)$ de cette forme est de dimension p. On a le lemme élémentaire :

Lemme 4.2. — *Une fonction h est de la forme $h = \sum_{k=1}^{p} f_k(l_k)$ si et seulement si*

$$X_1 \dots X_p\,(h) = 0.$$

Démonstration. — Ce qui, à la rigueur, demande une démonstration, est le fait que la condition $X_1 \dots X_p\,(h) = 0$ est suffisante. C'est vrai si $p = 1$. On suppose que c'est vrai à l'ordre $p-1$. À l'ordre p, si $X_1 \dots X_{p-1} X_p\,(h) = 0$, l'hypothèse de récurrence premet d'écrire $X_p\,(h)$ sous la forme $X_p\,(h) = \sum_{k=1}^{p-1} g_k(l_k)$. Soit h_k une primitive de g_k et $f_k(l_k) := g_k(l_k)/X_p(l_k)$ ($X_p(l_k)$ est une constante non nulle car l_p et l_k sont indépendantes). On a $X_p(h - \sum_{k=1}^{p-1} f_k(l_k)) = 0$, donc (c'est le cas $p = 1$) il existe f_p tel que $h = \sum_{k=1}^{p-1} f_k(l_k) + f_p(l_p)$. □

On en déduit le critère suivant :

Proposition 4.3. — *Étant donné une fonction $u(x, y)$ définissant un tissu $\mathcal{T}(l_1, \dots, l_p, u)$ et l'identité*

$$X_1 \dots X_p\,\big(f(u)\big) \equiv \sum_{k=1}^{p} a_k(x, y) f^{(k)}(u),$$

obtenue en calculant formellement le premier membre, le tissu $\mathcal{T}(l_1, \dots, l_p, u)$ est de rang maximal si et seulement si les équations suivantes sont vérifiées

$$X_u\,(a_k/a_p) \equiv 0, \qquad k = 1, \dots, p-1. \tag{24}$$

On peut calculer facilement les coefficients a_k en termes de u et de ses dérivées, mais on n'utilisera que les cas $p = 2$ et $p = 4$. Notons seulement que $a_p = (X_1 u) \dots (X_p u)$ ne s'annule pas; c'est la condition de transversalité des feuilletages.

Démonstration. — Notons $b_k := a_k/a_p$ pour $k = 1, \dots, p-1$. Compte tenu de la discussion qui précède l'énoncé, le tissu est de rang maximal si et seulement si l'équation

$$f^{(p)}(u(x, y)) + \sum_{k=1}^{p-1} b_k(x, y) f^{(k)}(u(x, y)) = 0$$

a un espace de solutions de dimension p. Dans un système de coordonnées (u, v) dont u fait partie, c'est une équation différentielle ordinaire, avec u comme variable et v comme paramètre. Elle a p solutions indépendantes si et et seulement si le premier membre ne dépend pas explicitement de v. D'où la proposition. □

4.2. Application aux tissus $\mathcal{T}(x,y,x+y,x-y,u(x,y))$.

Dans le cas qui nous intéresse, le système (24) se simplifie remarquablement (la forme très symétrique du tissu $\mathcal{T}(x,y,x+y,x-y)$ joue un rôle crucial). On note :

$$X_1=\partial/\partial y\,,\quad X_2=\partial/\partial x\,,\quad X_3=\partial/\partial x-\partial/\partial y\quad\text{et}\quad X_4=\partial/\partial x+\partial/\partial y.$$

On suppose que $\mathcal{T}(x,y,u(x,y))$ est de rang maximal. On peut donc choisir la fonction de définition $u(x,y)$ de la forme

$$u(x,y)=v(x)+w(y).$$

Elle vérifie la condition de transversalité (5) qui s'écrit :

$$(X_1u)(X_2u)(X_3u)(X_4u)=v_xw_y(v_x-w_y)(v_x+w_y)\neq 0 \tag{25}$$

(où, par exemple, v_x, v_{xx}... désignent les dérivées successives de v, etc.). On a :

$$\begin{aligned} X_1X_2\big(f(u)\big)&=(f(u))_{xy}=f''(u)v_xw_y,\\ X_1X_2X_3X_4\big(f(u)\big)&=(f''(u)v_xw_y)_{xx}-(f''(u)v_xw_y)_{yy}, \end{aligned}$$

avec par exemple :

$$\begin{aligned} (f''(u)v_xw_y)_{xx}&=w_y(f'''(u)v_x^2+f''(u)v_{xx})_x\\ &=w_y(f''''(u)v_x^3+3f'''(u)v_xv_{xx}+f''(u)v_{xxx}). \end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient :

$$\begin{aligned} X_1X_2X_3X_4\big(f(u)\big)&=f''''(u)v_xw_y(v_x^2-w_y^2)\\ &\quad+3f'''(u)v_xw_y(v_{xx}-w_{yy})+f''(u)(w_yv_{xxx}-v_xw_{yyy}). \end{aligned}$$

La Proposition 4.3 s'applique :

Lemme 4.4. — *Soit $u(x,y)=v(x)+w(y)$ vérifiant (25). Le tissu $\mathcal{T}[u]$ est de rang maximal si et seulement si u vérifie le système suivant (avec $X_u=w_y\partial_x-v_x\partial_y$) :*

$$X_u\Big(\frac{v_{xx}-w_{yy}}{v_x^2-w_y^2}\Big)=0, \tag{26}$$

$$X_u\Big(\frac{w_yv_{xxx}-v_xw_{yyy}}{v_xw_y(v_x^2-w_y^2)}\Big)=0. \tag{27}$$

Le lemme suivant est *a priori* surprenant :

Lemme 4.5. — *Soit $u(x,y)=v(x)+w(y)$ vérifiant (25). L'équation (26) est satisfaite si et seulement si $\mathcal{T}(x+y,x-y,u(x,y))$ est de rang maximal.*

Démonstration. — Avec les notations pécédentes, on calcule :

$$X_3X_4\big(f(u)\big) = f(u)_{xx} - f(u)_{yy} = f''(u)(v_x^2 - w_y^2) + f'(u)(v_{xx} - w_{yy}).$$

La Proposition 4.3 et la comparaison avec (26) donne le résultat. □

4.3. Simplification de l'équation (26).

Soit $u(x,y) = v(x) + w(y)$ vérifiant (25) et l'équation (26). Celle-ci s'écrit :

$$v_x\left(\frac{v_{xx} - w_{yy}}{v_x^2 - w_y^2}\right)_y = w_y\left(\frac{v_{xx} - w_{yy}}{v_x^2 - w_y^2}\right)_x. \tag{28}$$

On est amené à traiter à part les cas où l'une des fonctions v_{xx} ou w_{yy} s'annule identiquement.

a) Si $v_{xx} \equiv 0$ et $w_{yy} \equiv 0$, u est une fonction affine.

b) Si $v_{xx} \equiv 0$ et $w_{yy} \not\equiv 0$, on obtient $v_x \equiv c$ et $w_{yy} = k(c^2 - w_y^2)$, avec $c, k \in \mathbb{C}^*$.

c) On suppose maintenant $v_{xx} \not\equiv 0$ et $w_{yy} \not\equiv 0$. On développe (28) sous la forme :

$$\left(\frac{v_{xxx}}{v_x} + \frac{w_{yyy}}{w_y}\right)(v_x^2 - w_y^2) = 2\big(v_{xx}^2 - w_{yy}^2\big). \tag{29}$$

Il en résulte que la fonction

$$h := v_x^2\frac{w_{yyy}}{w_y} - w_y^2\frac{v_{xxx}}{v_x}$$

est la somme d'une fonction de x et d'une fonction de y. Donc $h_{xy} = 0$, ce qui donne :

$$v_xv_{xx}\left(\frac{w_{yyy}}{w_y}\right)_y = w_yw_{yy}\left(\frac{v_{xxx}}{v_x}\right)_x,$$

ou mieux :

$$\frac{1}{w_yw_{yy}}\left(\frac{w_{yyy}}{w_y}\right)_y = \frac{1}{v_xv_{xx}}\left(\frac{v_{xxx}}{v_x}\right)_x.$$

Comme les deux membres ne dépendent respectivement que de y et que de x, ils sont constants. On note $4p \in \mathbb{C}$ leur valeur. On a obtenu que les fonctions d'une variables v_x et w_y sont des solutions non constantes de la même équation différentielle :

$$\left(\frac{z''}{z}\right)' = 4pzz'.$$

Si z est solution de cette équation, alors $z'' = 2pz^3 + qz$ pour un $q \in \mathbb{C}$. On en déduit $z''z' = 2pz^3z' + qzz'$ puis $(z')^2 = pz^4 + qz^2 + r$ avec $q, r \in \mathbb{C}$. Les constantes q et r sont les mêmes pour v_x et w_y. En effet, si $v_{xx}^2 = pv_x^4 + qv_x^2 + r$ et $w_{yy}^2 = pw_y^4 + q'w_y^2 + r'$,

$$\frac{v_{xxx}}{v_x} = 2pv_x^2 + q\,; \quad \frac{w_{yyy}}{w_y} = 2pw_y^2 + q'.$$

L'équation (29) est vérifiée si et seulement si :

$$((2pv_x^2+q)+(2pw_y^2+q'))(v_x^2-w_y^2) = 2((pv_x^4+qv_x^2+r)-(pw_y^4+q'w_y^2+r')).$$

Après simplification, on obtient $q = q'$ et $r = r'$. En résumé :

Lemme 4.6. — *Soit $u(x,y) = v(x)+w(y)$ vérifiant (25). L'équation (26) est vérifiée si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. *v_x et w_y sont constantes;*

2. *$v_x = c$ et $w_{yy} = k(c^2 - w_y^2)$, ou $w_y = c$ et $v_{xx} = k(c^2 - v_x^2)$, avec $c, k \in \mathbb{C}^*$;*

3. *il existe $p, q, r \in \mathbb{C}$, non tous nuls, tels que v_x et w_y sont des solutions non constantes de l'équation différentielle*

$$(z')^2 = pz^4 + qz^2 + r. \tag{30}$$

(Il est nécessaire d'être minutieux : en général, si v_x est une solution constante et w_y une solution non constante de l'équation différentielle (30), $u(x,y)$ n'est pas solution de l'équation (26)). Le lemme suivant est lui aussi surprenant :

Lemme 4.7. — *Si le germe de fonction $u(x,y)$ vérifie la condition de transversalité (25) et l'équation (26), il vérifie aussi l'équation (27).*

Démonstration. — Une des propriétés du Lemme 4.6 est vérifiée. On traite le cas où c'est la troisième; les autres sont encore plus simples. Si z est une solution *non constante* de (30), en dérivant et en divisant les deux membres par z', on obtient $z''/z = 2pz^2 + q$. Dans la situation du Lemme 4.6, on obtient :

$$\frac{v_{xxx}}{v_x} - \frac{w_{yyy}}{w_y} = 2p(v_x^2 - w_y^2).$$

Dans le premier membre de (27), X_u est donc appliqué à une fonction constante. □

4.4. Fin de la démonstration du Théorème 4.1.

L'équivalence entre les propriétés a) et b) de l'énoncé est donnée par les Lemmes 4.5 et 4.7. Il reste à montrer que les fonctions $u(x,y) = v(x)+w(y)$ décrites dans le Lemme 4.6 définissent chacune, soit un faisceau de droites, soit un tissu $\mathcal{T}[u]$ équivalent modulo $G(\mathcal{T}_0)$ au tissu associé à l'une des fonctions :

$$\text{(31)}\quad \mathrm{sn}_k x\,\mathrm{sn}_k y\ ,\ \ \tanh x \tanh y\ ,\ \ \sin x\,\sin y\ ,\ \ e^x+e^y\ ,\ \ x^2+y^2\ ,\ \ x^2-y^2.$$

Soit donc $u(x,y)$ comme dans le Lemme 4.6. Si v_x et w_y sont constants, u est une fonction affine et $\mathcal{F}(u)$ est un faisceau de droites parallèles. Si par exemple $v_x = c$ et $w_{yy} = k(c^2 - w_y^2)$ avec $c, k \in \mathbb{C}^*$, on obtient un dilaté du tissu $\mathcal{T}[x+\log\cosh y]$ qui, d'après le Lemme 3.5, est équivalent au tissu $\mathcal{T}[e^x + e^y]$.

On passe au cas le plus général : v_x et w_y sont solutions de l'équation différentielle (30). Notons d'abord que si la fonction $z(t)$ vérifie (30) et $c, l \in \mathbb{C}^*$, la fonction $cz(lt)$ vérifie une équation analogue, où (p,q,r) est remplacé par $(pl^2/c^2, ql^2, rl^2c^2)$. Comme effectuer une telle transformation revient à transformer le tissu $\mathcal{T}[u]$ par homothétie, on se ramène, par des choix convenables de c et l, à ne considérer que les formes normales suivantes de (30). En général, on obtient une forme normale du type

$$(z')^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2), \qquad k^2 \neq 0, 1,$$

dont l'intégration fait intervenir les fonctions sn_k. Les autres formes normales sont :

$$(z')^2 = (1-z^2)^2\,;\ \ (z')^2 = (1-z^2)\,;\ \ (z')^2 = z^4\,;\ \ (z')^2 = z^2\,;$$
$$(z')^2 = z^4 + z^2\,;\ \ (z')^2 = 1.$$

On vérifie que les solutions générales (non constantes) de ces sept équations différentielle sont les fonctions $t \mapsto z(\pm t + t_0)$ avec respectivement :

$$z(t) = \mathrm{sn}_k t\,;\ \ z(t) = \tanh t\,;\ \ z(t) = \sin t\,;\ \ z(t) = \frac{1}{t}\,;\ \ z(t) = e^t\,;$$
$$z(t) = \frac{1}{\sinh t}\,;\ \ z(t) = t.$$

Modulo les translations en t, ces fonctions admettent respectivement les primitives suivantes :

$$\text{(32)}\quad \frac{1}{k}\log(\mathrm{sn}_\ell\,\nu t)\ ;\ \ \log(\cosh t)\ ;\ \ \cos t\ ;\ \ \log t\ ;\ \ e^t\ ;\ \ \log(\tanh\frac{t}{2})\ ;\ \ \frac{t^2}{2}\ ;$$

où $\ell^2 \neq 0, 1$ et $\nu \in \mathbb{C}^*$ sont liés à k par les relations $\ell = (1+k)/(1-k)$ et $\nu = i(1-k)/2$.

En résumé, on obtient les tissus équivalents par dilatation aux tissus de la forme $\mathcal{T}[\phi(\epsilon x) \pm \phi(\epsilon' y)]$, où ϕ est dans la liste (32) et $\epsilon, \epsilon' \in \{-1, 1\}$. Les symétries $(x, y) \mapsto (-x, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, -y)$ de $\mathcal{T}_0$ permettent de se restreindre aux tissus

$$\mathcal{T}[\phi(x) \pm \phi(y)].$$

Selon la fonction ϕ, les tissus $\mathcal{T}[\phi(x)+\phi(y)]$ et $\mathcal{T}[\phi(x)-\phi(y)]$ sont ou ne sont pas équivalents par translation. Après élimination des redondances modulo les translations, on obtient les tissus $\mathcal{T}[u]$, où $u(x, y)$ est dans la liste suivante :

$$\mathrm{sn}_l x\, \mathrm{sn}_l y,\ \cosh x \cosh y,\ \frac{\cosh x}{\cosh y},\ \cos x + \cos y,\ xy,\ \frac{x}{y},\ e^x + e^y,$$
$$\tanh \frac{x}{2} \tanh \frac{y}{2},\ x^2 \pm y^2.$$

Le feuilletage $\mathcal{F}(x/y)$ est un faisceau de droites et compte tenu de l'action de la symétrie $\gamma \in G(\mathcal{T}_0)$ sur ces tissus (cf. le Lemme 3.5), on se ramène bien à la liste (31).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.A. Akivis, V.V. Goldberg, Differential geometry of webs, Handbook of differential geometry, Vol. I, 1–152, North-Holland, Amsterdam, 2000.

[2] W. Blaschke, Über die Tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse, Abh. Math. Semin. Hamb. Univ., 19 (1933), 313–317.

[3] W. Blaschke, G. Bol, Geometrie der Gewebe, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 49, J. Springer, Berlin, 1938.

[4] E. Bompiani, E. Bortolotti, Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese, Math. Z., 42 (1937), 411–429.

[5] P. Buzano, Determinazione e studio di superficie di S_5 le cui linee principali presentano una notevole particolarità, Ann. Mat. Pura Appl., 18 (1939), 51–76.

[6] P. Buzano, Tipi notevoli di 5-tessuti di curve piane, Boll. Un. Mat. Ital. (2), 1 (1939), 7–11.

[7] K. Chandrasekharan, Elliptic functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 281, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[8] S.S. Chern, Wilhelm Blaschke and Web Geometry, in Wilhelm Blaschke, Gesammelte Werke, Band 5, Thales Verlag, (1985), 25–27.

[9] S.S. Chern, P. Griffiths, Abel's theorem and webs, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., 80, n° 1-2, (1978), 13-110; Corrections and addenda to our paper : "Abel's theorem and webs", Jahresber. Deutsch. Math.-Verein., 83, n° 2, (1981), 78–83.

[10] P. Griffiths, The Legacy of Abel in Algebraic Geometry, in The Legacy of Niels Henrik Abel, The Abel Bicentennial, Oslo 2002, Springer, 179–205.

[11] Y. Hellegouarch, Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles, Masson, 1997.

[12] A. Hénaut, Analytic web geometry, in Web geometry and related topics, World Scientific, Singapore, (2001), 6–47.

[13] A. Hénaut, On planar web geometry through abelian relations and connections, Ann. of Math., (2) 159, n° 1, (2004) 425–445.

[14] L. Pirio, Abelian functional equations, planar web geometry and polylogarithms, Selecta Math. (NS), à paraître.

[15] L. Pirio, Sur les tissus plans de rang maximal et le problème de Chern, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 339 (2004), 131–136.

[16] L. Pirio, Équations fonctionnelles abéliennes et géométrie des tissus, Thèse de doctorat de l'Université Paris 6, soutenue le 15 décembre 2004.

[17] G. Robert, Relations fonctionnelles polylogarithmiques et tissus plans, Prépublication n° 146, Université Bordeaux 1, (2002).

[18] A. Terracini, Su una possibile particolarità delle linee principali di una superficie I, II, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. Ser., 26 (1937), 84–91 et 153–158.

Manuscrit reçu le 19 août 2004,
révisé le 19 avril 2005,
accepté le 23 mai 2005.

Luc PIRIO & Jean-Marie TRÉPREAU,
UMR 7586
175 rue du Chevaleret
75013 Paris (France)
pirio@math.jussieu.fr
trepreau@math.jussieu.fr