



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Laurent BRUASSE

Filtration de Harder-Narasimhan pour des fibrés complexes ou des faisceaux sans torsion

Tome 53, n° 2 (2003), p. 541-564.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_2_541_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

FILTRATION DE HARDER-NARASIMHAN POUR DES FIBRÉS COMPLEXES OU DES FAISCEAUX SANS TORSION

par Laurent BRUASSE

Introduction.

La notion de stabilité introduite par D. Mumford et F. Takemoto pour étudier l'espace de modules des fibrés vectoriels holomorphes joue depuis lors un rôle central en géométrie complexe. En effet, la stabilité a été par la suite étendue aux variétés kähleriennes puis, après les travaux de P. Gauduchon, à n'importe quelle variété compacte complexe. Cette notion *a priori* très algébrique est reliée à des problèmes de géométrie différentielle comme l'ont démontré M. Narasimhan, C. Seshadri (pour les courbes algébriques), S. Donaldson (pour une variété algébrique) et K. Uhlenbeck et S.T. Yau (en toute généralité) : la stabilité est équivalente à l'existence de connexions de Hermite-Einstein sur le fibré considéré. Ce résultat connu sous le nom de correspondance de Kobayashi-Hitchin a introduit des outils de géométrie différentielle en géométrie complexe et algébrique ce qui a conduit à une meilleure compréhension de l'espace de modules des fibrés stables.

Par ailleurs, Harder et Narasimhan ont démontré en 1975 ([6]) l'existence pour un fibré vectoriel holomorphe instable sur une courbe algébrique d'une filtration par des sous-faisceaux. Ils ont obtenu, par là-même, l'existence pour un tel fibré d'un unique déstabilisant maximal.

Mots-clés : Variété presque complexe – Degré – Stabilité – Filtration de Harder-Narasimhan – Déformation.

Classification math. : 32L05 – 32G05 – 53C15.

Leur travail a ensuite été étendu pour des variétés algébriques de dimension quelconque par Shatz ([10]) et Maruyama ([9]). Dans un précédent article ([2]), l'auteur démontre l'existence d'une filtration de Harder-Narasimhan (en abrégé FHN) pour un fibré vectoriel holomorphe au-dessus d'une variété holomorphe compacte. L'étape essentielle de la démonstration est l'existence d'un sous-faisceau déstabilisant maximal : on borne tout d'abord le degré des sous-faisceaux à l'aide d'une formule de type Chern-Weil, puis, pour ce qui est de l'existence du sous-faisceau de pente maximale, il s'est avéré que la bonne approche est celle qui consiste à voir les sous-faisceaux comme des *sous-fibrés holomorphes faibles*. La correspondance a été introduite par Uhlenbeck et Yau (voir [11] et [12]) et nous montrons dans [2] qu'elle permet de munir d'une bonne topologie l'ensemble des sous-faisceaux d'un fibré donné.

L'étude de la stabilité et des outils qui lui sont associés a été plus récemment généralisée à d'autres objets :

- P. De Bartolomeis et G. Tian ([4]) ont défini une notion de stabilité pour des fibrés complexes au-dessus de variétés presque complexes compactes et étendu la correspondance de Kobayashi-Hitchin dans ce cadre plus général.
- S. Bando et Y.-T. Siu ([1]) ont pour leur part démontré l'existence de métriques de Hermite-Einstein "généralisées" sur des faisceaux cohérents sans torsion stables au-dessus de variétés holomorphes.

Il est donc naturel d'étudier dans ces deux situations la notion d'instabilité et de donner sens à la filtration de Harder-Narasimhan dans ces cadres très généraux.

Nous montrons dans le deuxième paragraphe que tout fibré vectoriel complexe instable au-dessus d'une variété presque complexe admet un unique "sous-faisceau généralisé" maximal, puis une unique filtration par de tels sous-faisceaux. Nous montrons ensuite dans la troisième section un théorème d'ouverture de la stabilité en déformation par une méthode directe n'utilisant pas la correspondance de Kobayashi-Hitchin.

Dans les paragraphes quatre et cinq, nous étudions le cas des faisceaux cohérents sans torsion sur une variété holomorphe compacte. En l'absence de fibré vectoriel global ambiant, on localise le problème à l'aide de résolutions du faisceau considéré. La principale difficulté réside dans la nécessité d'utiliser des métriques sur la partie localement libre du faisceau et donc dans des problèmes de convergence liés à la non compacité de

la base. Le résultat d'ouverture de la stabilité en déformation reste alors valable pour une famille plate de faisceaux sans torsion.

1. Structure presque complexe et stabilité.

Soit (M, J_M, g) une variété compacte presque complexe hermitienne de dimension n et ω_g la forme de Kähler associée à la métrique g

DÉFINITION 1.1. — On dit que g est de Gauduchon si sa forme de Kähler vérifie $\partial_M \bar{\partial}_M \omega_g^{n-1} = 0$.

Une telle métrique existe toujours d'après le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2 ([5] I.20). — Soit (M, J_M) une variété presque complexe compacte. Il existe dans la classe conforme de toute métrique hermitienne une unique métrique de Gauduchon (à constante multiplicative près).

Soit (E, \hat{J}, h) un fibré vectoriel hermitien (complexe) de rang r au-dessus de M , c'est-à-dire un fibré vectoriel réel de dimension paire $2r$ muni d'une section \hat{J} de $\text{End}(E)$ vérifiant $\hat{J}^2 = -\text{id}_E$.

On notera $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble de toutes les semi-connexions sur E , c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs différentiels linéaires $\bar{\partial}_E : \wedge^{p,q}(E) \rightarrow \wedge^{p,q+1}(E)$, qui vérifient la règle de Leibnitz suivante :

$$\text{pour tout } f \in A^0(M), \alpha \in \wedge^{p,q}(E),$$

$$\bar{\partial}_E f \alpha = \bar{\partial}_M f \wedge \alpha + (-1)^{p+q} f \bar{\partial}_E \alpha.$$

Les éléments de $\mathcal{A}(E)$ sont appelés des structures presque complexes (spc) sur E .

DÉFINITION 1.3. — Soit $\bar{\partial}_E \in \mathcal{A}(E)$ une spc.

- une section σ de E est dite $\bar{\partial}_E$ -holomorphe si elle vérifie $\bar{\partial}_E \sigma = 0$;
- soit $F \subset E$ un sous fibré réel de rang $2p$, on dit que F est un sous-fibré complexe de (E, \hat{J}) si $\hat{J}|_F$ est une section de $\text{End}(F)$;
- on dit que $F \subset E$ est un sous-fibré $\bar{\partial}_E$ -holomorphe si $\bar{\partial}_E$ envoie $\wedge^{p,q}(F)$ dans $\wedge^{p,q+1}(F)$.

Étant donné une spc $\bar{\partial}_E$, de Bartolomeis et Tian ont démontré ([4]) l'existence d'une unique connexion hermitienne compatible, c'est-à-dire,

d'une unique connexion η sur le $U(r)$ -fibré principal $U_h(E)$ associé à (E, \hat{J}, h) dont la 1-forme de connexion est de type $(1, 0)$. On appellera cette connexion la connexion hermitienne canonique. Soit alors $K_\eta^{(1,1)} = \Lambda_g \Omega_\eta^{(1,1)}$ la contraction par ω_g de la composante $(1, 1)$ de la courbure de cette connexion et posons $\sigma = \text{tr } K_\eta^{(1,1)}$. On a alors l'expression suivante pour le degré de E : $\text{deg}(E) = \int_M c_1(E) \wedge \omega_g^{n-1} = \frac{1}{2\pi n} \int_M \sigma \omega_g^n$ et on définit de manière usuelle la pente de E par $\mu(E) = \frac{\text{deg}(E)}{r}$.

Notons \mathcal{H}_s la mesure de Hausdorff de dimension s . Nous appellerons sous-faisceau généralisé et nous noterons $\mathcal{F}(\bar{\partial}_E)$ la classe suivante d'objets :

DÉFINITION 1.4. — F appartient à $\mathcal{F}(\bar{\partial}_E)$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Il existe un sous-ensemble fermé $S \subset M$ avec $\mathcal{H}_{2n-4}(S) < +\infty$, tel que $F|_{M \setminus S}$ soit un sous-fibré $\bar{\partial}_E$ -holomorphe de $E|_{M \setminus S}$;
- pour tout $x \in S$, et pour toute courbe locale J_M -holomorphe C passant par x et non contenue dans S , $F|_{C - \{x\}}$ s'étend sur C en un sous-fibré de $E|_C$.

Remarque 1.5. — Cette définition est une généralisation de la notion de sous-faisceau cohérent réflexif d'un fibré vectoriel holomorphe. En effet, si M et E sont holomorphes, les éléments de $\mathcal{F}(\bar{\partial}_E)$ sont des sous-faisceaux au sens "classique" : soit $x \in S$, alors sur un voisinage de x , le sous-faisceau généralisé F est donné par une application méromorphe définie en dehors de S et à valeur dans la variété grassmanienne $G_p(E)$ des p -plans de E . Par définition, cette application s'étend sur toute courbe holomorphe passant par x en une application méromorphe. Elle s'étend donc méromorphiquement sur un voisinage de x et on obtient donc un sous-faisceau de E .

Soit d_E la connexion hermitienne canonique associée à $\bar{\partial}_E$ et h (voir [4], Prop. 2.1). Pour $k = 1, 2$, on définit la norme Sobolev L_k^2 sur $A^0(\text{End } E)$ par

$$\|\sigma\|_{L_k^2} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \int_M |d_E^i(\sigma)|^2 \cdot \text{vol}_g \right)^{1/2}$$

et on définit l'espace de Sobolev $L_1^2(\text{End } E)$ comme le complété de $A^0(\text{End } E)$ pour cette norme.

Comme dans le cas intégrable (cf. [2]), on peut associer à chaque $F \in \mathcal{F}(\bar{\partial}_E)$, un projecteur hermitien Sobolev $\pi \in L_1^2(\text{End } E)$ qui vérifie

les deux propriétés $\pi = \pi^2 = \pi^*$ et $(id - \pi) \circ \bar{\partial}\pi = 0$ presque partout. Reprenant les définitions d’Uhlenbeck et Yau (voir [11] et [12]) nous appellerons ces projecteurs Sobolev des “sous-fibrés $\bar{\partial}_E$ -holomorphes faibles”. Réciproquement, De Bartolomeis et Tian ont démontré en généralisant le résultat de Uhlenbeck et Yau qu’étant donné un sous-fibré $\bar{\partial}_E$ -holomorphe faible, il est possible de définir un sous-faisceau généralisé associé $F \in \mathcal{F}(\bar{\partial}_E)$ par un résultat de régularité des applications L^2_1 -faiblement holomorphes (théorème 5.1 de [4]).

Nous pouvons alors définir le degré d’un sous-faisceau généralisé $F \in \mathcal{F}(\bar{\partial}_E)$ à l’aide de la formule de Chern-Weil (cf. [2]) :

$$\text{deg}_g(F) = \frac{1}{2\pi n} \left(\int_M \text{tr}(K_\eta^{(1,1)} \circ \pi) \omega_g^n - \int_M |\bar{\partial}_E \pi|^2 \omega_g^n \right).$$

Si F est régulier (c’est-à-dire si F est un sous-fibré $\bar{\partial}_E$ -holomorphe), cette définition coïncide avec la définition standard du degré, ce qu’on peut vérifier à l’aide des équations de Codazzi-Mainardi (voir [4] 2.3.5 ou la formule de Chern-Weil dans [2]).

On a alors la définition suivante de la stabilité :

DÉFINITION 1.6. — *Un fibré $(E, \bar{\partial}_E)$ est dit g -stable (resp. g -semistable) si, pour tout $F \in \mathcal{F}(\bar{\partial}_E)$, avec $0 < \text{rang } F < r$, on a*

$$\mu_g(F) < \mu_g(E) \text{ (resp. } \mu_g(F) \leq \mu_g(E)\text{)}.$$

Dans [4], les auteurs démontrent que cette notion de stabilité est équivalente à l’existence d’une structure de Hermite-Einstein h sur E (si le fibré $(E, \bar{\partial}_E)$ est simple) généralisant par la même un résultat déjà connu dans le cas intégrable (correspondance de Kobayashi-Hitchin).

2. Sous-faisceau maximal et filtration de Harder-Narasimhan.

Nous nous intéressons ici au comportement d’un fibré non semistable. La proposition suivante donne l’existence d’un plus grand déstabilisant parmi tous les sous-faisceaux généralisés :

PROPOSITION 2.1. — *Soit $(M, J_M, g, E, \bar{\partial}_E)$ un fibré vectoriel complexe au-dessus d’une variété munie d’une métrique de Gauduchon et $\bar{\partial}_E$*

une spc sur E . Supposons $(E, \bar{\partial}_E)$ non g -semistable, alors il existe un sous-faisceau généralisé F de E de pente maximale.

Remarque 2.2. — On montrera dans la suite que le sous-faisceau F est en fait unique et on l'appellera sous-faisceau *déstabilisant maximal* de E .

Démonstration. — L'idée est la même que dans le cas intégrable : on se ramène à un problème de convergence hilbertienne grâce à la notion de sous-fibré $\bar{\partial}_E$ -holomorphe faible.

On vérifie facilement à l'aide de la formule de Chern-Weil que le degré est majoré sur l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}(\bar{\partial}_E)$ (en effet, le premier terme de la formule est borné par une constante ne dépendant que de E , $\bar{\partial}_E$ et h). Soit alors $(F_n)_n$ une suite de sous-faisceaux généralisés dont la pente converge vers le supremum M de toutes les pentes et supposons que tous les F_n ont le même rang. On peut associer à chaque F_n son projecteur Sobolev correspondant $\pi_n \in L_1^2(\text{End } E)$. En utilisant la formule de Chern-Weil et le fait que $\deg(F_n)$ est minoré uniformément, on obtient une borne uniforme L^2 pour $\bar{\partial}_E(\pi_n)$. Les π_n étant des projections hermitiennes, leur norme L^2 est uniformément bornée, on a donc montré que la suite $(\pi_n)_n$ est bornée dans $L_1^2(\text{End } E)$. On peut alors en extraire une sous-suite qui converge pour la topologie faible vers $\pi \in L_1^2(\text{End } E)$ et on peut toujours supposer que la convergence est forte pour la norme L^2 (l'injection $L_1^2 \hookrightarrow L^2$ est compacte). Il reste à vérifier que π est bien un sous-fibré $\bar{\partial}_E$ -holomorphe faible (voir [2] pour les détails). Le théorème 0.2 de [4] nous donne alors l'existence d'un sous-faisceau généralisé $F \in \mathcal{F}(\bar{\partial}_E)$ associé à π . D'autre part la convergence faible de la suite $(\pi_n)_n$ et la formule de Chern-Weil donne : $\deg(F) \geq \overline{\lim} \deg(F_n) = M$. \square

Pour donner dans ce cadre général un équivalent de la notion de filtration de Harder-Narasimhan, remarquons tout d'abord que l'on peut définir une notion de faisceau quotient généralisé de E . Notons $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble de tous les éléments G tels que

- il existe $F, F' \in \mathcal{F}(\bar{\partial}_E)$ et un sous-ensemble fermé S avec $\mathcal{H}_{2n-4}(S) < +\infty$ qui contient les ensembles singuliers de F et F' tel que $G|_{X \setminus S} = F|_{X \setminus S} / F'|_{X \setminus S}$;
- si $x \in S$, alors G s'étend à toute courbe J_M -holomorphe C passant par x et non contenue dans S en un fibré isomorphe au quotient $F|_C / F'|_C$.

Remarque 2.3. — Si F' est le fibré nul, on retrouve la définition usuelle d'un sous-faisceau généralisé de E .

La partie régulière d'un élément $G \in \mathcal{Q}(E)$ hérite d'une métrique hermitienne et d'une structure presque complexe induites par h et $\bar{\partial}_E$. Nous sommes maintenant en mesure de définir le degré d'un quotient généralisé F/F' en utilisant ces structures induites, ce qui revient à poser :

$$\text{deg}(F/F') = \text{deg}(F) - \text{deg}(F \cap F').$$

On obtient donc comme dans le cas intégrable la relation bien connue

LEMME 2.4. — *Soit*

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F/F' \rightarrow 0$$

une suite exacte de sous-faisceaux généralisés, alors

$$\text{rang}(F)[\mu(F) - \mu(F')] + \text{rang}(F/F')[\mu(F) - \mu(F/F')] = 0.$$

DÉFINITION 2.5. — *On dit qu'un faisceau quotient généralisé $F/F' \in \mathcal{Q}(E)$ est stable (resp. semi-stable) si pour tout sous-faisceau généralisé $H \subset F$,*

$$\mu(H/F') < (\text{resp. } \leq) \mu(F/F').$$

Nous pouvons alors donner sens à la notion de filtration de Harder-Narasimhan :

DÉFINITION 2.6. — *Soit $(M, J_M, g, E, \bar{\partial}_E)$ un fibré complexe muni d'une spc $\bar{\partial}_E$ au-dessus d'une variété presque complexe munie d'une métrique de Gauduchon. On appelle filtration de Harder-Narasimhan de E toute filtration*

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{s-1} \subset F_s = E$$

où les F_i sont des sous-faisceaux généralisés de E qui vérifient les deux conditions :

- F_i/F_{i-1} est semi-stable pour $1 \leq i \leq s$,
- $\mu(F_{i+1}/F_i) < \mu(F_i/F_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq s - 1$.

Alors, F_i/F_{i-1} est de pente maximale parmi tous les sous-faisceaux généralisés de E/F_{i-1} .

Remarque 2.7. — En utilisant le lemme 2.4, on remarque que les deux conditions sont équivalentes au fait que F_i est de pente maximale parmi les $\{F \subset E \mid F_{i-1} \subset F\}$.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant (c'est une généralisation de [2] Thm. 3.2) :

THÉORÈME 2.8. — *Soit $(M, J_M, g, E, \bar{\partial}_E)$ comme ci-dessus. Alors E admet une unique filtration de Harder-Narasimhan.*

Démonstration. — On construit pas à pas la filtration. Si E est semistable, alors la filtration est triviale. Supposons donc E non semistable, alors d'après la proposition 2.1, il existe un sous-faisceau généralisé F_1 de pente maximale parmi tous les sous-faisceaux. Prenons de plus F_1 de rang maximal, alors clairement F_1 est semi-stable.

Supposons qu'il existe un autre sous-faisceau généralisé F'_1 qui satisfait les mêmes propriétés. On peut toujours supposer que $F_1/F'_1 \neq 0$. On a alors

$$0 \rightarrow F_1 \cap F'_1 \rightarrow F_1 \rightarrow F_1/F'_1 \rightarrow 0.$$

Puisque F_1 est semi-stable, par le lemme 2.4, $\mu(F_1 \cap F'_1) \leq \mu(F_1) \leq \mu(F_1/F'_1)$. On peut définir le sous-faisceau généralisé \bar{F}_1 par la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow F'_1 \rightarrow \bar{F}_1 \rightarrow F_1/F'_1 \rightarrow 0.$$

Alors,

$$\text{rang}(F'_1)[\mu(\bar{F}_1) - \mu(F'_1)] + \text{rang}(F_1/F'_1)[\mu(\bar{F}_1) - \mu(F_1/F'_1)] = 0.$$

D'autre part, comme $\text{rang}(\bar{F}_1) \text{rang}(F'_1)$, on obtient $\mu(\bar{F}_1) < \mu(F'_1)$ et $\mu(F_1/F'_1) < \mu(F'_1) = \mu(F_1)$ ce qui est une contradiction. Le premier terme de la filtration est donc unique.

Soit E/F_1 est semistable et il n'y a rien d'autre à prouver, sinon, on doit trouver un sous-faisceau généralisé maximal dans le quotient E/F_1 . Remarquons qu'il y a une correspondance bijective entre ces faisceaux quotients et l'ensemble de sous-faisceaux $\mathcal{A} = \{F \subset E \mid F_1 \subset F\}$ (remarque 2.7). On raisonne alors comme dans [2] : on peut associer à toute suite d'éléments de \mathcal{A} des sous-fibrés $\bar{\partial}_E$ -holomorphes faibles et faire le même raisonnement qu'à la proposition 2.1. On obtient alors un sous-faisceau F_2 qui réalise le supremum des degrés sur \mathcal{A} . Il reste juste à montrer que le sous-faisceau limite F_2 contient F_1 . Pour ce faire, remarquons que si F et G sont deux sous-faisceaux généralisés, alors

$$F \subset G \Leftrightarrow (\text{Id} - \pi_G) \circ \pi_F = 0 \text{ presque partout.}$$

La convergence forte dans L^2 de la suite de projecteur implique alors, qu'à la limite, on a toujours $F_1 \subset F_2$. On obtient ainsi le second terme de la

filtration. L'unicité se démontre comme précédemment. Après un nombre fini d'étapes, on obtient le résultat souhaité. \square

3. Convergence en déformation et ouverture de la stabilité.

Nous allons considérer une famille différentiable de fibrés vectoriels complexes au-dessus d'une famille de variétés presque complexes compactes. On regarde donc une famille $(M, T, (J_t)_{t \in T}, (g_t)_{t \in T})$ comme la donnée d'une variété réelle compacte de dimension $2n$, d'un espace de paramètres T , d'une famille lisse de structures presque complexes $(J_t)_{t \in T}$ et d'une famille différentiable de métriques J_t -hermitiennes de Gauduchon (c'est-à-dire vérifiant $\partial_t \bar{\partial}_t \omega_{g_t}^{n-1} = 0$). Il faut garder en tête les deux cas particulier suivants :

- (J_t) est une famille de structures complexes intégrables;
- on considère une variété de base fixe (M, J, g) .

Soit alors $(E, \bar{\partial}_E^t)$ un fibré réel de dimension paire au-dessus de M muni d'une famille différentiable de structures presque complexes $(\bar{\partial}_E^t)_{t \in T}$. Dans cette situation, l'application $t \rightarrow \text{deg}_{g_t}(E_t)$ est différentiable sur T (cf. [3] Chap. 4 pour une preuve détaillée), ce qui donne un sens à la notion de stabilité en déformation.

On obtient alors le théorème de convergence suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit $(M, T, (J_t)_{t \in T}, (g_t)_{t \in T})$ une famille définie comme ci-dessus et $(E, \bar{\partial}_E^t)$ une famille lisse de variétés presque complexes de rang r . Alors pour tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \{1, \dots, r-1\}$, le sous-ensemble*

$$S(p, c) = \{t \in T \mid \text{il existe un sous-faisceau généralisé } F_t \in (E, \bar{\partial}_E^t) \\ \text{tel que } \text{rang}(F_t) = p \text{ et } \mu_{g_t}(F_t) \geq c\}$$

est fermé dans T .

En fait, de toute famille $(F_{t_m})_m$ de sous-faisceaux de E_{t_m} telle que $t_m \rightarrow t_0 \in T$ et $\text{deg}_{g_{t_m}} F_{t_m}$ est minoré uniformément, on peut extraire une sous-suite qui converge au sens des sous-fibrés holomorphes faibles vers un sous-faisceau $F_{t_0} \in E_{t_0}$.

Démonstration. — On va démontrer la deuxième assertion de la proposition dont découle la première. Pour cela remarquons que l'on peut

définir dans chaque fibre une norme Sobolev notée $L^2_{1,t}$ sur $A^0(\text{End } E)$: on munit la déformation de fibrés d'une métrique h_t régulière par rapport à t et on considère la connexion canonique d^t_E associée. On peut définir alors de manière usuelle

$$\|a\|_{L^2_{1,t}} = \left(\int_M |a|^2 \cdot \text{vol}_g \right)^{1/2} + \left(\int_M |d^t_E(a)|^2 \text{vol}_g \right)^{1/2}$$

pour $a \in A^0(E)$ ou $a \in A^0(\text{End } E)$. Supposons donc avoir une suite de sous-faisceaux généralisés $F_{t_m} \subset E_{t_m}$ où $t_m \rightarrow t_0 \in T$ et telle que $\text{deg}_{g_{t_m}}(F_{t_m}) \geq c$. On peut associer à chaque sous-faisceau (voir les rappels) son projecteur Sobolev $\pi_m \in L^2_{1,t_m}(\text{End } E)$. La formule de Chern-Weil s'écrit alors

$$\int_M |\bar{\partial}^{t_m}_E \pi_m|^2 \cdot \omega_{g_{t_m}}^n = \int_M \text{tr}(K_{E_{t_m}}^{(1,1)} \circ \pi) \omega_{g_{t_m}}^n - 2\pi n \text{deg}(F_{t_m}).$$

La courbure moyenne K_{E_t} variant continûment, le premier terme du membre de droite est borné au voisinage de t_0 indépendamment de t , de sorte que l'hypothèse de minoration du degré implique que $\bar{\partial}^{t_m}_E \pi_{t_m}$ est uniformément borné en norme L^2 . Puisque les π_{t_m} sont des projecteurs hermitiens, on en déduit que leur norme L^2_1 est bornée indépendamment de m . De plus, comme toutes les métriques et connexions considérées varient différemment en t , les différentes normes sont toutes équivalentes. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ et un voisinage V de t_0 tel que pour tout $t \in V$,

$$C^{-1} \|a\|_{L^2_{1,t}} \leq \|a\|_{L^2_{1,t_0}} \leq C \|a\|_{L^2_{1,t}}.$$

On regarde tous les projecteurs comme des endomorphismes de E muni de sa norme L^2_{1,t_0} . Alors, π_m est une suite bornée pour cette norme. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement en norme L^2_{1,t_0} vers un projecteur π et supposer, quitte à passer à une sous-suite, que cette convergence est forte dans $L^2_{t_0}$. On en déduit que $\pi^2 = \pi = \pi^*$ par passage à la limite. De plus $\bar{\partial}^{t_m}_E \pi_m$ est uniformément bornée et converge faiblement vers $\bar{\partial}^{t_0}_E \pi$, car par hypothèse, $\bar{\partial}^{t_0}_E \pi_m$ converge faiblement vers $\bar{\partial}^{t_0}_E \pi$ et la famille d'opérateurs $\bar{\partial}^t_E$ étant différentiable, $(\bar{\partial}^{t_m}_E - \bar{\partial}^{t_0}_E) \pi_m$ converge faiblement vers zéro. Ceci assure une convergence au sens des distributions de $(\text{Id} - \pi_m) \circ \bar{\partial}^{t_m}_E \pi_m$ vers $(\text{Id} - \pi) \circ \bar{\partial}^{t_0}_E \pi$. On a donc montré que π est un sous-fibré holomorphe faible de L^2_{1,t_0} et on notera F le sous-faisceau de E_{t_0} associé.

La convergence forte dans L^2 permet de montrer avec la formule de Chern-Weil que $\text{deg}_{t_0} F \geq \limsup \text{deg}_{t_m} F_{t_m}$ (voir [2] Section 2.2 pour les détails de cette preuve). \square

Comme corollaire, on démontre que la propriété de stabilité est ouverte en déformation. Le résultat était déjà connu pour un fibré vectoriel au-dessus d'une variété holomorphe mais la seule preuve existante passe par la difficile correspondance de Kobayashi-Hitchin (cf. [8]).

THÉORÈME 3.2. — *Soit $(E, \bar{\partial}_E^t)$ une famille de fibrés au-dessus de la famille $(M, T, (J_t)_{t \in T}, (g_t)_{t \in T})$, définie comme ci-dessus. Alors,*

$$\{t \in T \mid (E, \bar{\partial}_E^t) \text{ est } g_t\text{-stable au-dessus de } (M, J_t)\}$$

est ouvert dans T .

Démonstration. — Soit $t_0 \in T$ tel que $(E, \bar{\partial}_E^{t_0})$ soit g_{t_0} -stable. Supposons qu'il existe une suite de paramètres $t_n \rightarrow t_0$ tels que E_{t_n} ne soit pas stable, i.e. il existe un sous-faisceau généralisé $F_{t_n} \subset E_{t_n}$ vérifiant $\deg F_{t_n} \geq \deg E_{t_n}$. L'application $t \rightarrow \deg_{g_t}(E_t)$ étant C^∞ , $\deg E_{t_n}$ est borné et converge vers $\deg E_{t_0}$. En appliquant le théorème précédent, on construit un sous-faisceau généralisé F de E_{t_0} tel que $\deg_{t_0} F \geq \limsup \deg_{t_n} F_{t_n} \geq \deg_{t_0} E_{t_0}$. Cela contredit la stabilité de E_{t_0} et finit la démonstration. □

4. La filtration pour les faisceaux sans torsion.

Nous nous plaçons ici sur une variété holomorphe compacte M munie d'une métrique de Gauduchon et nous cherchons à étendre le résultat d'existence de la filtration au cadre plus général des faisceaux cohérents sans torsion. Nous n'avons ici pas de fibré vectoriel ambiant global pour nous raccrocher au travail précédent. Les méthodes employées ci-dessus ou dans [2] utilisent de manière essentielle des métriques définies sur le fibré considéré et des prolongements de sections définies en dehors d'un sous-ensemble. Il est donc naturel de développer tout d'abord la théorie pour des faisceaux réflexifs.

4.1. Faisceaux réflexifs.

Tout faisceau réflexif étant localement libre en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension au moins trois, on pourrait vouloir munir sa partie localement libre d'une métrique hermitienne pour appliquer

directement les méthodes de [2]. Mais, ne travaillant plus sur une base compacte, on tombe sur plusieurs problèmes de convergence, en particulier celui de l'intégrabilité de la courbure moyenne qui nous sert à majorer le degré. Il est encore possible dans le cas kählerien de munir ce faisceau d'une métrique *admissible* avec de "bonnes" propriétés de ce point de vue. Ces métriques sont décrites dans un article de S. Bando et Y-T. Siu [1], mais uniquement dans le cas kählerien. Il resterait encore un problème : celui d'étendre les sous-faisceaux obtenus par cette méthode (et donc définis sur le complémentaire d'un ensemble analytique) sur toute la variété. Pour éviter ces écueils, nous allons plonger localement notre faisceau réflexif dans un fibré, travailler dans ces cartes locales puis, recoller les morceaux.

Soit donc \mathcal{E} un faisceau réflexif de rang r sur (M, g) . Prenons un recouvrement fini $\{U_i\}_{i \in I}$ de M et des résolutions locales $\cdots \rightarrow E_{1,i}^* \rightarrow E_{0,i}^* \rightarrow \mathcal{E}^*|_{U_i} \rightarrow 0$ de \mathcal{E}^* par des fibrés vectoriels holomorphes qui vérifient la propriété de commutativité suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} E_{1,i}^* & \longrightarrow & E_{0,i}^* & \xrightarrow{\varphi_i^*} & \mathcal{E}^*|_{U_i \cap U_j} & \longrightarrow & 0 \\ & & \varphi_{j,i}^* \uparrow & & \parallel & & \\ E_{1,j}^* & \longrightarrow & E_{0,j}^* & \xrightarrow{\varphi_j^*} & \mathcal{E}^*|_{U_i \cap U_j} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où $\varphi_{j,i}^*$ est un isomorphisme vérifiant $\varphi_{ii}^* = \text{Id}$. En dualisant les suites exactes, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\varphi_i} & E_{0,i} & \longrightarrow & E_{1,i} \\ & & \parallel & & \varphi_{j,i} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}|_{U_i \cap U_j} & \xrightarrow{\varphi_j} & E_{0,j} & \longrightarrow & E_{1,j} \end{array}$$

On voit, localement, \mathcal{E} comme un sous-faisceau d'un fibré vectoriel holomorphe $E_{0,i}$. Le faisceau réflexif \mathcal{E} est localement libre en dehors d'un ensemble analytique de codimension trois et les φ_i réalisent, en dehors d'un sous-ensemble analytique S de codimension au moins deux, un plongement de $E = \mathcal{E}|_{M \setminus S \cap U_i}$ dans $E_{0,i}$, en tant que sous-fibré holomorphe.

Prenons une métrique hermitienne \tilde{h}_i quelconque sur $E_{0,i}$ et une partition de l'unité $\{\rho_i\}_{i \in I}$ compatible avec le recouvrement $\{U_i\}$. Soit $h_i = \sum_j \rho_j \varphi_{ji}^* \tilde{h}_j$. Alors les métriques images réciproques $\varphi_i^* h_i$ coïncident et définissent une même métrique hermitienne h sur \mathcal{E} en dehors de S .

Comme dans le cas des fibrés, on peut se restreindre à étudier les sous-faisceaux saturés de \mathcal{E} ([2] Lemme 2.1) et on notera donc \mathcal{A}_p l'ensemble des sous-faisceaux de \mathcal{E} de rang p dont le quotient \mathcal{E}/\mathcal{F} est sans torsion.

Suivant les notations de Kobayashi, on notera l'ensemble de singularités d'un faisceau \mathcal{F} , c'est-à-dire le lieu où il n'est pas localement libre, par $S_{n-1}(\mathcal{F})$. Pour \mathcal{F} dans \mathcal{A}_p , les ensembles de singularités $S_{n-1}(\mathcal{F})$ et $S_{n-1}(\mathcal{E}/\mathcal{F})$ sont de codimension 2. Dans toute la suite, on notera en caractères droits la restriction des sous-faisceaux de \mathcal{E} là où ce sont de vrais sous-fibrés des $E_{0,i}$: c'est-à-dire que si $V = S_{n-1}(\mathcal{F}) \cup S_{n-1}(\mathcal{E}/\mathcal{F}) \cup S$, on note $F = \mathcal{F}|_{M \setminus V}$, et on remarquera que V est toujours de codimension au moins 2 (par ensemble singulier de \mathcal{F} on se référera dans toute la suite à cet ensemble V). Pour simplifier, on notera encore h la métrique induite sur F par celle de E . On peut définir sur $M \setminus V$ la forme $c_1(F, h)$, trace de la courbure de la connexion de Chern associée à h . En notant \mathcal{F}_i (resp. F_i) le plongement de $\varphi_i(\mathcal{F})$ (resp. $\varphi_i(F)$) dans $E_{0,i}$, on remarquera que sur $U_i \setminus (V \cap U_i)$, $c_1(F, h) = c_1(F_i, h_i)$ par construction de h .

4.1.1. Degré d'un sous-faisceau.

On considère dans cette section un sous-faisceau $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$ de \mathcal{E} de rang p et on garde les notations introduites juste au-dessus.

PROPOSITION 4.1 (Formule de Chern-Weil).

$$(1) \quad \text{deg}(\mathcal{F}) = \int_{M \setminus V} c_1(F, h) \wedge \omega_g^{n-1}$$

c'est-à-dire que le degré peut se calculer avec la "partie sous-fibré" de \mathcal{F} .

Démonstration. — On s'inspire du cas localement libre en utilisant les plongements locaux de \mathcal{E} dans $E_{0,i}$. On considère le fibré en droites $\det \mathcal{F}$. Le morphisme injectif de faisceaux $l : \det \mathcal{F} \hookrightarrow (\wedge^p \mathcal{E})^{**}$ induit sur chaque ouvert U_i des morphismes de faisceaux $l_i : \det \mathcal{F} \hookrightarrow \wedge^p E_{0,i}$. Soit α une section holomorphe locale de $\det \mathcal{F}$, posons alors

$$W_i = \{x \in U_i \mid l_i(\alpha)(x) = 0\}.$$

Sur $U_i \cap U_j$, $l_j(\alpha)(x) = (\varphi_j^{\wedge p} \circ l)(\alpha)(x) = (\varphi_{ji}^{\wedge p} \circ \varphi_i^{\wedge p} \circ l)(\alpha)(x)$ et puisque φ_{ji} est un isomorphisme, $W_i|_{U_j} = W_j|_{U_i}$. Appelons W le sous-espace analytique obtenu en recollant les W_i . Il est de codimension supérieure ou égale à deux car $W \subset V$.

On suit maintenant la démonstration de la proposition 2.3 de [2]. Soit u la métrique obtenue par recollement des $l_i^*(\wedge^p h_i)$. Alors, u définit une structure hermitienne naturelle sur $\det \mathcal{F}|_{M \setminus W}$ induite par les métriques h_i , et cette métrique dégénère sur W . Soit \bar{u} une structure hermitienne sur

$\det \mathcal{F}$ au-dessus de M tout entier. On démontre exactement comme dans le cas des fibrés (cf. [2] Lemme 2.4) le lemme suivant :

LEMME 4.2.

$$\int_M c_1(\det \mathcal{F}, \bar{u}) \wedge \omega_g^{n-1} = \int_{M \setminus W} c_1(\det \mathcal{F}, u) \wedge \omega_g^{n-1}.$$

En effet, la preuve n'utilise essentiellement que la codimension de W et le fait que g est une métrique de Gauduchon.

On déduit de ce lemme que

$$\deg \mathcal{F} = \int_{M \setminus V} c_1(\det \mathcal{F}, u) \wedge \omega_g^{n-1} = \int_{M \setminus V} c_1(F, h) \wedge \omega_g^{n-1}$$

ce qui achève la preuve de la proposition. \square

4.1.2. Borne sur le degré.

PROPOSITION 4.3.

(1) *Le degré est majoré sur tous les sous-faisceaux cohérents sans torsion de \mathcal{E} .*

(2) *Soit c un réel fixé et $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$ un sous-faisceau de \mathcal{E} vérifiant $\deg(\mathcal{F}) \geq c$. Alors, la forme $c_1(F, h) \wedge \omega_g^{n-1}$ définie sur $M \setminus V$ est intégrable, on entend par là que sa fonction de densité est L^1 . De plus la borne L^1 est indépendante du sous-faisceau \mathcal{F} considéré et ne dépend que de c et de la résolution choisie.*

Démonstration. — 1. Dans toute la suite, on se fixe un sous-recouvrement $V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$ de $\{U_i\}$ tel que V_i soit relativement compact dans U_i . On notera encore φ_i les restrictions à V_i des plongements locaux de \mathcal{E} . Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$ un sous-faisceau réflexif de \mathcal{E} . Alors sur $V_i \setminus (V_i \cap V)$,

$$c_1(F, h) \wedge \omega_g^{n-1} = c_1(F_i, h_i) \wedge \omega_g^{n-1} = \frac{1}{2\pi n} \operatorname{tr}(K_{F_i}) \cdot \omega_g^n,$$

où K_{F_i} désigne la courbure moyenne de la connexion de Chern. Notons alors π_i (resp. a_i^{10}) le projecteur hermitien de $(E_{0,i}, h_i)$ sur F_i (resp. la seconde forme fondamentale associée à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{F}_i \rightarrow E_{0,i} \rightarrow E_{0,i}/\mathcal{F}_i \rightarrow 0$). Ces deux objets sont définis presque partout sur U_i et C^∞ sur $U_i \setminus (U_i \cap V)$. On a alors la relation entre les courbures :

$$\operatorname{tr}(K_{F_i}) = \operatorname{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i) - |a_i^{10}|^2.$$

Or, la courbure moyenne $K_{E_{0,i}}$ est une section C^∞ du fibré $\text{End } E_{0,i}$ sur tout U_i . L'endomorphisme π_i étant un projecteur hermitien, on peut borner, sur tous les compacts \bar{V}_i , le premier terme du membre de droite :

$$|\text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i)| \leq \sum_{l,k} |K_{E_{0,i}^l}| \leq \sup_{\bar{V}_i} \sum_{l,k} |K_{E_{0,i}^l}| \leq M$$

où M est une constante indépendante de π_i (donc de \mathcal{F}) et de i (le nombre des V_i est fini). Par conséquent la fonction $\text{tr}(K_F)$ est majorée uniformément sur $M \setminus V$ indépendamment de \mathcal{F} et par conséquent le degré $\text{deg}(\mathcal{F})$ aussi ce qui montre le premier point.

2. Supposons qu'il existe un certain réel c tel que

$$\int_{M \setminus V} c_1(F, h) \wedge \omega_g^{n-1} = \frac{1}{2\pi n} \int_{M \setminus V} \text{tr}(K_F) \cdot \omega_g^n \geq c.$$

En combinant cette hypothèse avec ce que l'on vient de démontrer, on voit que la fonction $\text{tr}(K_F)$ est intégrable sur $M \setminus V$. En effet, en notant f^+ (resp. f^-) la partie positive (resp. négative) d'une fonction f , on a $\text{tr}(K_F)^+ \leq \text{tr}(K_{E_{0,i}})^+ \leq M$ sur \bar{V}_i , ce qui implique que la partie positive de la fonction $\text{tr}(K_F)$ est intégrable sur M . Par suite, puisque l'intégrale impropre $\int_M \text{tr}(K_F) \cdot \omega_g^n$ converge, on en déduit que $\int_M \text{tr}(K_F)^- \cdot \omega_g^n < +\infty$ ce qui démontre le fait que $\text{tr}(K_F)$ est L^1 . De plus la borne pour la norme L^1 sur M s'exprime en fonction de c et M et est donc indépendante de \mathcal{F} . □

4.2. Sous-faisceau maximal.

Montrons l'existence d'un sous-faisceau de degré maximal.

PROPOSITION 4.4. — *Pour tout $0 < p < \text{rang}(\mathcal{E})$, il existe un sous-faisceau $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p$ tel que*

$$\text{deg } \mathcal{F} = \sup_{\mathcal{G} \in \mathcal{A}_p} \text{deg } \mathcal{G}.$$

Démonstration. — D'après la proposition 4.3, le degré est borné sur l'ensemble des sous-faisceaux de \mathcal{E} . Soit alors, $(\mathcal{F}^m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-faisceaux de \mathcal{A}_p dont le degré converge vers le supremum des degrés que l'on notera M . L'idée est de se ramener à étudier des sous-faisceaux d'un vrai fibré en utilisant les plongements locaux φ_i .

La métrique h_i sur U_i , avec la structure complexe de $E_{0,i}$, nous permet de définir de manière standard les espaces de Sobolev $L^2(\overline{V}_i, \text{End } E_{0,i})$ et $L^2_1(\overline{V}_i, \text{End } E_{0,i})$. On va donc travailler dans la famille finie d'espaces $\coprod_i L^2_1(\overline{V}_i, \text{End } E_{0,i})$. Sur chaque ouvert du recouvrement $\{U_i\}$, on regarde le sous-faisceau $\mathcal{F}_i^m = \varphi_i(\mathcal{F}^m)$ de $E_{0,i}$ et son projecteur π_i^m associé. Alors, π_i^m est un élément de l'espace de Sobolev $L^2_1(\overline{V}_i, \text{End } E_{0,i})$. En effet, la norme L^2 de π_i^m est bornée sur tout U_i car elle s'exprime en fonction de la trace du projecteur. Quant à celle de la dérivée, $d_{A_i} \pi_i^m$, où d_{A_i} désigne la connexion de Chern de $(E_{0,i}, h_i)$, comme on l'a déjà vu dans [2] (voir la section des rappels), il suffit pour la borner de majorer la norme L^2 de la seconde forme fondamentale a^{10m}_i . Or, la fonction $\text{tr}(K_{F^m})$ est intégrable et sa norme L^1 ne dépend pas de m d'après le second point de la proposition 4.3, donc, en utilisant sur \overline{V}_i la formule

$$\text{tr}(K_{F^m}) = \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i^m) - |a^{10m}_i|^2$$

on obtient :

$$\int_{\overline{V}_i} |a^{10m}_i|^2 \cdot \omega_g^n = \int_{\overline{V}_i} \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i^m) \cdot \omega_g^n - \int_{\overline{V}_i} \text{tr}(K_{F_i^m}) \cdot \omega_g^n \leq C, \quad \forall i, m$$

puisque les deux termes de droite sont bornés indépendamment de m d'après ce qui précède. Par suite, $\pi^m = (\pi_i^m) \in \coprod_i L^2_1(\overline{V}_i, \text{End } E_{0,i})$. De plus, chaque π_i^m satisfait aux conditions des sous-fibrés holomorphes faibles du fibré $E_{0,i}$.

Pour tout i , la suite $(\pi_i^m)_n$ est bornée, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers $\pi_i \in L^2_1(\overline{V}_i, \text{End } E_{0,i})$. Le nombre d'ouverts du recouvrement étant fini, on peut supposer que la même suite converge pour tout i . Il y a convergence forte dans L^2 (à extraction d'une sous-suite près) et la limite π_i est un sous-fibré holomorphe faible de $E_{0,i}$ sur V_i (même démonstration que dans le cas fibré cf. [2], Prop. 2.9). Notons $(\mathcal{F}_i)_i$ la famille finie de sous-faisceaux cohérents réflexifs associés par le théorème d'Uhlenbeck et Yau. Remarquons ici que la démonstration de l'existence du sous-faisceau associé est purement locale, le résultat d'Uhlenbeck reste donc valide sur \overline{V}_i .

Il reste à voir que les \mathcal{F}_i se recollent bien pour donner un sous-faisceau de \mathcal{E} et que ce sous-faisceau est de degré maximal. Rappelons le lemme qui justifie l'utilisation des projecteurs pour caractériser les inclusions de faisceaux :

LEMME 4.5 ([2] Lemme 3.4). — *Soit s une section holomorphe locale de $E_{0,i}$ au-dessus de $U \subset \overline{V}_i$. Alors les solutions de l'équation*

$$\pi_i(s) = s \text{ (presque partout)}$$

sont exactement les sections locales de \mathcal{F}_i sur U .

Quels que soient m, i, j , on a par construction $\varphi_{ji}(\mathcal{F}_i^m) = \mathcal{F}_j^m$, ce qui s'exprime par $(\text{Id} - \pi_j^m) \circ \varphi_{ji} \circ \pi_i^m = 0$ pour tout (i, j, m) . Cette condition passe à la limite car il y a convergence en norme L^2 des π_i^m . Donc, pour tout (i, j) , $(\text{Id} - \pi_j) \circ \varphi_{ji} \circ \pi_i = 0$. Soit alors s une section locale de \mathcal{F}_i , on a

$$\pi_j(\varphi_{ji}(s)) = \pi_j(\varphi_{ji}(s)) + (\text{Id} - \pi_j)(\varphi_{ji}(s)) = \varphi_{ji}(s)$$

ce qui avec le lemme montre l'inclusion $\varphi_{ji}(\mathcal{F}_i) \subset \mathcal{F}_j$, et donc par symétrie $\varphi_{ji}(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_j$.

Par le même raisonnement, \mathcal{F}_i est un sous-faisceau de $\varphi_i(\mathcal{E})$ (on l'exprime en tant que projecteur). On peut donc définir sur V_i l'image inverse de \mathcal{F}_i par φ_i , les deux définitions possibles coïncident sur $V_i \cap V_j$. On notera \mathcal{F} ce sous-faisceau de \mathcal{E} , c'est un élément de \mathcal{A}_p puisqu'il est sans torsion et de quotient sans torsion de part l'injection $\mathcal{E}/\mathcal{F} \hookrightarrow E_{0,i}/\mathcal{F}_i$.

Il reste à montrer que \mathcal{F} est bien de degré maximal.

LEMME 4.6. — Si \mathcal{F} est sur chaque \overline{V}_i limite au sens des sous-fibrés holomorphes faibles des \mathcal{F}^m , alors $\text{deg } \mathcal{F} \geq \limsup \text{deg } \mathcal{F}^m$.

Démonstration. — Rappelons la formule de Chern-Weil (lemme 4.1) :

$$\text{deg } \mathcal{F} = \int_{M \setminus V} \frac{1}{2\pi n} \text{tr}(K_{\mathcal{F}}) \cdot \omega_g^n.$$

Soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une partition C^∞ de l'unité associée au sous recouvrement V_i , alors

$$\begin{aligned} \int_{M \setminus V} \text{tr}(K_{\mathcal{F}}) \cdot \omega_g^n &= \sum_i \int_{V_i} \rho_i \text{tr}(K_{\mathcal{F}}) \cdot \omega_g^n \\ &= \sum_i \int_{V_i} \rho_i \text{tr}(K_{\mathcal{F}_i}) \cdot \omega_g^n \\ &= \sum_i \left(\int_{V_i} \rho_i \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i) \cdot \omega_g^n - \int_{V_i} \rho_i |a_i^{10}|^2 \cdot \omega_g^n \right) \end{aligned}$$

or, la courbure moyenne $K_{E_{0,i}}$ est C^∞ sur U_i de sorte que la convergence L^2 de π_i^m vers π_i implique la convergence L^1 de $\text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i^m)$ vers $\text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i)$ sur \overline{V}_i donc,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{V_i} \rho_i \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i^m) \cdot \omega_g^n = \int_{V_i} \rho_i \text{tr}(K_{E_{0,i}} \circ \pi_i) \cdot \omega_g^n.$$

On a convergence faible en norme L^2 de $\sqrt{\rho_i}a_i^{10^m}$ vers $\sqrt{\rho_i}a_i^{10}$, ce qui assure

$$\liminf \int_{V_i} |\sqrt{\rho_i}a_i^{10^m}|^2 \cdot \omega_g^n \geq \int_{V_i} |\sqrt{\rho_i}a_i^{10}|^2 \cdot \omega_g^n.$$

On en déduit que $\deg \mathcal{F} \geq \limsup \deg \mathcal{F}^m$. □

On a donc $\deg \mathcal{F} \geq M$ puisque $\deg \mathcal{F}^m$ converge vers M . Mais, M étant la borne supérieure des degrés sur \mathcal{A}_p , $\deg \mathcal{F} = M$ et on a trouvé le faisceau désiré. □

Comme corollaire, on retrouve immédiatement l'analogie du lemme 3.3 de [2] dans le cadre des faisceaux réflexifs :

PROPOSITION 4.7. — *Soit \mathcal{E} un faisceau réflexif sur (M, g) . Il existe un unique sous-faisceau \mathcal{E}_1 de \mathcal{E} de quotient $\mathcal{E}/\mathcal{E}_1$ sans torsion et tel que pour tout sous-faisceau \mathcal{F} de \mathcal{E} ,*

- (1) $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E}_1)$ i.e. \mathcal{E}_1 est de pente maximale,
- (2) Si $\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{E}_1)$ alors $\text{rang}(\mathcal{F}) \leq \text{rang}(\mathcal{E}_1)$;

en particulier \mathcal{E}_1 est semi-stable.

L'existence découle de la proposition que l'on vient de démontrer. Quant à l'unicité, elle se prouve comme dans [2] ou [7].

DÉFINITION 4.8. — *On appellera l'unique faisceau \mathcal{E}_1 donné par la proposition 4.7 le sous-faisceau maximal de \mathcal{E} .*

Ce faisceau \mathcal{E}_1 est le premier terme de la filtration de Harder-Narasimhan de \mathcal{E} . Nous allons généraliser ce lemme aux faisceaux sans torsion et faire une récurrence pour démontrer l'existence de la filtration.

4.3. Les faisceaux sans torsion.

Soit \mathcal{E} un faisceau sans torsion sur une variété compacte complexe M munie d'une métrique de Gauduchon g .

Le morphisme canonique $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}^{**}$ est injectif (car \mathcal{E} est sans torsion) et le bidualisé \mathcal{E}^{**} est un faisceau **réflexif**. D'après ce qui précède, il admet donc un unique sous-faisceau $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}^{**}$ de pente maximale (cf. Proposition 4.7). On va construire un sous-faisceau de \mathcal{E} avec la même propriété. L'idée

la plus simple et qui se révèle être la bonne est d'intersecter le sous-faisceau \mathcal{E}_1 avec \mathcal{E} . Rappelons que si l'on considère deux sous-faisceaux \mathcal{H} et \mathcal{G} d'un même faisceau \mathcal{F} , le sous-faisceau $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ est bien défini comme noyau du morphisme canonique $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{H}$. Posons $\mathcal{F}_1 = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1$. Comme sous-faisceau d'un faisceau sans torsion, \mathcal{F}_1 est sans torsion.

PROPOSITION 4.9. — *Le faisceau $\mathcal{F}_1 = \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1$ est le sous-faisceau maximal de \mathcal{E} et vérifie $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\mathcal{F}_1)$.*

Démonstration. — Par définition, le noyau du morphisme naturel obtenu par composition de l'injection de $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}^{**}$ et de la surjection $\mathcal{E}^{**} \rightarrow \mathcal{E}^{**}/\mathcal{E}$ est exactement $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_1 = \mathcal{F}_1$. On a donc la suite exacte suivante :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{E}_1/\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{E}^{**}/\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0$$

où \mathcal{T} désigne le quotient des deux faisceaux. Remarquons alors les faits suivants :

- $\mathcal{E}^{**}/\mathcal{E}$ est un faisceau de torsion, donc $\mathcal{E}_1/\mathcal{F}_1$ et \mathcal{T} sont également de torsion.
- le fibré en droite $\det(\mathcal{E}^{**}/\mathcal{E})$ est trivial. En effet, \mathcal{E} étant sans torsion, $\det \mathcal{E} = (\det \mathcal{E})^{**} = (\det \mathcal{E}^*)^* = \det \mathcal{E}^{**}$ et de plus, on a la relation $\det \mathcal{E}^{**} = \det \mathcal{E} \otimes \det(\mathcal{E}^{**}/\mathcal{E})$ d'où le résultat souhaité.

On va montrer que \mathcal{F}_1 et \mathcal{E}_1 ont la même pente. Remarquons tout d'abord que les deux faisceaux ont le même rang. Pour comparer leur degré, on utilise le lemme suivant :

LEMME 4.10. — *Soit \mathcal{Q} un faisceau de torsion tel que $\det \mathcal{Q}$ soit trivial. Si*

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de faisceaux, alors $\det \mathcal{Q}'$ et $\det \mathcal{Q}''$ sont triviaux.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' sont tous les deux de torsion. Donc d'après un résultat classique (voir par exemple [7] Prop. 6.14, Chap. V), il existe des sections globales non triviales σ' et σ'' de $\det \mathcal{Q}'$ et $\det \mathcal{Q}''$ respectivement. De plus, on a la relation entre les fibrés en droites : $\det \mathcal{Q} = \det \mathcal{Q}' \otimes \det \mathcal{Q}''$. Regardons donc la section $\sigma = \sigma' \otimes \sigma''$ de $\det \mathcal{Q}$. C'est une section globale de ce fibré en droites trivial, c'est-à-dire une fonction holomorphe sur la variété compacte M , elle est donc constante. Or, σ ne peut être identiquement nulle car σ' et σ'' s'annulent au plus sur

un sous-ensemble de codimension 1. Par suite, $\sigma = c \neq 0$ ce qui montre que les deux fibrés linéaires $\det \mathcal{Q}'$ et $\det \mathcal{Q}''$ sont triviaux. \square

Appliquons ce lemme à la suite exacte (\star) , on obtient $\det \mathcal{E}_1 = \det \mathcal{F}_1$. Les deux faisceaux ont donc le même degré par rapport à toute métrique de Gauduchon et donc la même pente : $\mu(\mathcal{E}_1) = \mu(\mathcal{F}_1)$.

Il est alors facile de montrer la proposition : si \mathcal{G} est un sous-faisceau quelconque de \mathcal{E} , c'est un sous-faisceau de \mathcal{E}^{**} et sa pente est inférieure ou égale à celle de \mathcal{E}_1 donc à celle de \mathcal{F}_1 . Le même raisonnement marche pour les rangs. On a donc trouvé le sous-faisceau maximal de \mathcal{E} . \square

L'unicité de ce sous-faisceau maximal se démontre comme dans le cas localement libre (cf. [2]). On a donc démontré la proposition 4.7 dans le cas d'un faisceau sans torsion et construit l'unique sous-faisceau maximal \mathcal{F}_1 de \mathcal{E} qui est le premier terme de la FHN de \mathcal{E} .

Le théorème principal en découle par récurrence sur le rang de \mathcal{E} : soit le faisceau sans torsion $\mathcal{E}/\mathcal{F}_1$ est semi-stable et $0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{E}$ est la FHN de \mathcal{E} , soit il ne l'est pas et on applique l'hypothèse de récurrence au faisceau $\mathcal{E}/\mathcal{F}_1$, puisque $\text{rang}(\mathcal{E}/\mathcal{F}_1) < \text{rang}(\mathcal{E})$. En fin de compte, on a montré

THÉORÈME 4.11 (Filtration de Harder-Narasimhan). — *Soit (M, g) une variété complexe compacte de dimension n munie d'une métrique de Gauduchon. Soit \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur M . Alors \mathcal{E} admet une unique filtration de Harder-Narasimhan.*

Remarque 4.12. — De par le choix fait à chaque étape, la seconde propriété de la définition 2.6 est automatiquement vérifiée.

5. Famille de faisceaux sans torsion.

On se donne ici une déformation $\mathcal{M} \xrightarrow{\omega} T$ d'une variété holomorphe compacte M au-dessus d'une base T lisse. On considère un faisceau cohérent sans torsion \mathcal{E} sur \mathcal{M} qui est (T, \mathcal{O}_T) -plat. Pour tout point $x \in M_t = \omega^{-1}(t)$, la fibre \mathcal{E}_x est plate en temps que $\mathcal{O}_{T,t}$ -module. On notera $\mathcal{E}(t)$ la restriction du faisceau \mathcal{E} à la fibre $\omega^{-1}(t) = M_t$, c'est-à-dire que si $i_t : M_t \hookrightarrow \mathcal{M}$ désigne l'inclusion de la fibre M_t dans l'espace total, $\mathcal{E}(t) = i_t^*(\mathcal{E})$.

Remarquons ici que c'est l'hypothèse de platitude qui nous permet de suivre le degré de manière régulière C^∞ . On a en effet la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. — Soit $(\mathcal{M} \xrightarrow{\omega} T, (g_t)_{t \in T})$ une déformation avec $(g_t)_{t \in T}$ une famille de métriques de Gauduchon et \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur l'espace total de la déformation, plat au-dessus de (T, \mathcal{O}_T) . Alors l'application $t \rightarrow \text{deg}_{g_t}(\mathcal{E}(t))$ est C^∞ en $t \in T$.

Démonstration. — Il suffit de montrer le résultat localement au voisinage d'un point $t_0 \in T$. Il est possible de trouver un ouvert $U \subset T$ contenant t_0 et un nombre fini d'ouverts V_i tels que les $\{U \times V_i\}_i$ forment un recouvrement de $\omega^{-1}(U)$ et sur chaque $U \times V_i$, on a une résolution

$$0 \rightarrow E_{m,i} \rightarrow \dots \rightarrow E_{1,i} \rightarrow E_{0,i} \rightarrow \mathcal{E}|_{U \times V_i} \rightarrow 0$$

par des faisceaux localement libres. Le faisceau déterminant $\det \mathcal{E}$ est défini sur \mathcal{M} comme $\det \mathcal{E}|_{U \times V_i} = \otimes_{l=0}^m (\det E_{l,i})^{(-1)^l}$ et il ne dépend pas du choix de la résolution (voir [7] pour plus de détails). C'est un fibré en droites complexes sur \mathcal{M} . D'autre part, la restriction sur chaque fibre M_t de la résolution reste exacte, puisque le faisceau est plat au-dessus de la base, et donne donc une résolution de $\mathcal{E}(t)$ sur $\{t\} \times V_i$ à l'aide de laquelle on calcule le déterminant $\det \mathcal{E}(t)$. On a donc $(\det \mathcal{E})(t) = \det(\mathcal{E}(t))$. Soit alors h une métrique quelconque sur $\det(\mathcal{E})$ et notons h_t sa restriction à la fibre $\det \mathcal{E}(t)$, alors clairement $\text{deg}_{g_t} \mathcal{E}(t) = \int_M c_1(\det \mathcal{E}(t), h_t) \wedge \omega_{g_t}^{n-1}$ est C^∞ en $t \in U$. □

Nous allons montrer dans ces conditions l'analogie du théorème 3.1 :

THÉORÈME 5.2. — Soit $(\mathcal{M} \xrightarrow{\omega} T, (g_t)_{t \in T})$ une déformation avec $(g_t)_{t \in T}$ une famille de métriques de Gauduchon et \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur l'espace total de la déformation, plat au-dessus de T . Soit r le rang commun de toutes les restrictions $\mathcal{E}(t)$. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \{1, \dots, r - 1\}$, l'ensemble

$$S(p, c) = \{t \in T \mid \text{il existe un sous-faisceau } \mathcal{F}_t \subset \mathcal{E}(t) \text{ avec} \\ \text{rang}(\mathcal{F}_t) = p \text{ et } \mu_{g_t}(\mathcal{F}_t) \geq c\}$$

est fermé dans T .

En fait, soit $(\mathcal{F}_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-faisceaux de $\mathcal{E}(t_n)$ telle que $t_n \rightarrow t_0 \in T$ et $\text{deg}_{g_{t_n}} \mathcal{F}_{t_n}$ soit minoré uniformément, alors il existe un sous-faisceau $\mathcal{F}_{t_0} \subset \mathcal{E}(t_0)$ vérifiant $\text{deg}_{t_0} \mathcal{F}_{t_0} \geq \lim \sup \text{deg}_{t_n} \mathcal{F}_{t_n}$.

Démonstration. — La démonstration s’inspire des idées du théorème 3.1. Considérons le faisceau \mathcal{E}^* , il est réflexif et il existe donc au voisinage de tout point $t_0 \in T$ des résolutions locales en famille de \mathcal{E}^* . Plus précisément, il existe un voisinage compact \bar{U} de t_0 et un recouvrement de $\omega^{-1}(\bar{U})$ par un nombre fini de compacts de la forme $\bar{U} \times \bar{V}_i$, tels que pour tout i , on ait une résolution en famille $\cdots \rightarrow E_{1,i}^* \rightarrow E_{0,i}^* \rightarrow \mathcal{E}^*|_{\bar{U} \times \bar{V}_i} \rightarrow 0$ par des fibrés vectoriels holomorphes sur $\bar{U} \times \bar{V}_i$ qui vérifient la propriété de commutativité :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{**}|_{\bar{U} \times \bar{V}_i \cap \bar{V}_j} & \xrightarrow{\varphi_i} & E_{0,i} & \longrightarrow & E_{1,i} \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi_j & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{**}|_{\bar{U} \times \bar{V}_i \cap \bar{V}_j} & \xrightarrow{\varphi_j} & E_{0,j} & \longrightarrow & E_{1,j} \end{array}$$

En restriction à une fibre $\omega^{-1}(t)$, on a la suite exacte

$$\mathcal{E}_{1,i,t}^* \rightarrow E_{0,i}^*(t) \rightarrow \mathcal{E}^*(t)|_{V_i} \rightarrow 0$$

où $\mathcal{E}_{1,i,t}^*$ est par définition le noyau de la surjection de $E_{0,i}^*(t)$ sur $\mathcal{E}^*(t)$. On a donc sur chaque fibre le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{**}(t)|_{\bar{V}_i \cap \bar{V}_j} & \xrightarrow{\varphi_i(t)} & E_{0,i}(t) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{1,i,t} \\ & & \parallel & & \downarrow \varphi_j(t) & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{**}(t)|_{\bar{V}_i \cap \bar{V}_j} & \xrightarrow{\varphi_j(t)} & E_{0,j}(t) & \longrightarrow & \mathcal{E}_{1,i,t} \end{array}$$

où les différentes flèches sont induites par les morphismes globaux de (2). Soit alors $(\mathcal{F}_{t_n})_n$ une suite de sous-faisceaux de $\mathcal{E}(t_n)$ avec $t_n \rightarrow t_0$.

On suit la démonstration du paragraphe précédent avec les idées introduites pour les faisceaux réflexifs. Quel que soit $t \in U$, on définit, en choisissant des métriques C^∞ sur chaque famille de fibrés, les espaces de Sobolev $L_{1,t}^2(\bar{V}_i, E_{0,i}(t))$ et on peut associer à chaque sous-faisceau \mathcal{F}_{t_n} une famille finie de projecteurs Sobolev $\pi_i^n \in \prod_i L_{1,t_n}^2(\bar{V}_i, E_{0,i}(t_n))$. De par les choix faits, tous ces espaces sont isomorphes lorsque t varie dans U et les normes Sobolev sont globalement équivalentes, quitte à restreindre U . On peut donc voir l’ensemble de ces projecteurs dans l’espace $\prod_i L_{1,t_0}^2(\bar{V}_i, E_{0,i}(t_0))$. Comme on l’a vu dans les paragraphes précédents (théorèmes 4.7 et 3.1), les normes L_1^2 de chaque π_i^n sont bornées indépendamment de la fibre et du projecteur grâce à l’hypothèse de minoration du degré. On a donc convergence d’une sous-suite vers un élément $\{\pi_i\}_i \in \prod_i L_{1,t_0}^2(\bar{V}_i, E_{0,i}(t_0))$, représentant une famille de sous-fibrés holomorphes faibles des $E_{0,i}(t_0)$.

Il reste à démontrer, tout d’abord, que les sous-faisceaux “locaux” $\{\mathcal{F}_i\}_i$ associés se recollent bien et que le faisceau obtenu est bien dans

l'image par $\varphi_i(t_0)$ de \mathcal{E}^{**} . Montrons donc que quels que soient i et j , $\varphi_{ji}(\mathcal{F}_i) = \mathcal{F}_j$ ce qui s'exprime d'après le lemme 4.5 avec les projecteurs par : $(\text{Id} - \pi_j) \circ \varphi_{ji}(t_0) \circ \pi_i = 0$. Cette condition est vérifiée par tous les sous-faisceaux de la suite $\{\pi_i^n\}$ et l'application $t \rightarrow \varphi_{ji}(t)$ est régulière en t ce qui donne le résultat à la limite.

Prouvons que $\mathcal{F}_i \subset \varphi_i(t_0)(\mathcal{E}^{**})$. Là encore, on traduit l'inclusion en termes de projecteurs ce qui est justifié par le lemme 4.5 : quel que soit $t \in U$, le sous-faisceau $\varphi_i(t)(\mathcal{E}^{**})$ de $E_{0,i}(t)$ est réflexif, et est donc défini par un projecteur Sobolev $p_{i,t}$ appartenant à $L^2_{1,t}(\text{End } E_{0,i}(t))$. Quel que soit n , on a par construction $(\text{Id} - p_{i,t_n}) \circ \pi_i^n = 0$. D'après les propositions 4.9 et 5.1, l'application $t \rightarrow \text{deg } \mathcal{E}(t)^{**} = \text{deg } \mathcal{E}(t)$ est C^∞ et donc localement bornée au voisinage de t_0 . De par la proposition 4.3, la fonction $\text{tr}(K_{\varphi_i(t)(\mathcal{E}^{**})})$ (en fait c'est la partie localement libre que l'on considère) est bornée dans L^1 sur \bar{V}_i indépendamment de t et i pour t proche de t_0 . Le raisonnement habituel nous donne que la suite p_{i,t_n} est bornée dans L^2_1 et admet donc une sous-suite convergente pour la topologie faible. La limite de cette suite ne peut être que p_{i,t_0} car la famille de projecteurs est en fait globalement définie sur la déformation et est C^∞ en dehors d'un ensemble de codimension 2. Par conséquent, il y a convergence forte dans L^2 d'une sous-suite de p_{i,t_n} vers p_{i,t_0} . On en déduit le résultat escompté : $(\text{Id} - p_{i,t_0}) \circ \pi_i = 0$.

Il existe donc un sous-faisceau \mathcal{F}_{t_0} de $\mathcal{E}(t_0)^{**}$ de degré supérieur ou égal à la limite supérieure des degrés des \mathcal{F}_{t_n} (cf. Lemme 4.6 pour cette dernière propriété).

La proposition 4.9 nous dit alors que le faisceau $\mathcal{F}'_{t_0} = \mathcal{F}_{t_0} \cap \mathcal{E}(t_0)$ conserve le même degré et vérifie donc les propriétés souhaitées. □

On généralise le résultat d'ouverture de la stabilité au cas des faisceaux sans torsion :

THÉORÈME 5.3 (Ouverture de la stabilité). — *Soit $(\mathcal{M} \xrightarrow{\omega} T, (g_t)_{t \in T})$ une déformation avec $(g_t)_{t \in T}$ une famille de métriques de Gauduchon et \mathcal{E} un faisceau cohérent sans torsion sur l'espace total de la déformation, plat au-dessus de T . Alors l'ensemble*

$$\{t \in T \mid \mathcal{E}(t) \text{ est } g_t - \text{stable sur } M_t\}$$

est ouvert dans T .

Démonstration. — Même raisonnement que dans le cas des fibrés en

remarquant que la platitude implique la constance du rang des faisceaux $\mathcal{E}(t)$ lorsque t varie. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. BANDO and Y-T. SIU, Stable sheaves and Einstein-Hermitian metrics, in T. Ochiai, T. Mabuchi, J. Noguchi, editor, *Geometry and analysis on complex manifolds*, 1994.
- [2] L. BRUASSE, Harder-Narasimhan filtration on non kähler manifolds, *Int. Journal of Maths*, 12(5) 2001, 579–594.
- [3] L. BRUASSE, Stabilité et filtratration de Harder-Narasimhan, Ph.D. Thesis, LATP (UM 6632) CMI, décembre 2001.
- [4] P. DE BARTOLOMEIS and G. TIAN, Stability of complex vector bundles, *J. Differential Geometry*, 43(2) March 1996, 231–274.
- [5] P. GAUDUCHON, Sur la 1-forme de torsion d'une variété hermitienne compacte, *Math. Ann.*, vol. 267 (1984), 495–518.
- [6] G. HARDER and M. NARASIMHAN, On the Cohomology Groups of Moduli Spaces, *Math. Ann.*, 212 (1975), 215–248.
- [7] S. KOBAYASHI, *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton University Press, 1987.
- [8] M. LÜBKE and A. TELEMAN, *The Kobayashi-Hitchin correspondence*, World Scientific, 1995.
- [9] M. MARUYAMA, The theorem of Grauert-Mülich-Spindler, *Math. Ann.*, 225 (1981), 317–333.
- [10] S. SHATZ, The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles, *Composito. Math.*, 35 (1977), 163–187.
- [11] K. UHLENBECK and S. T. YAU, On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 39 (1986), 257–293.
- [12] K. UHLENBECK and S. T. YAU, A note on our previous paper : On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 42 (1989), 703–707.

Manuscrit reçu le 21 janvier 2002,
révisé le 25 juin 2002,
accepté le 14 octobre 2002.

Laurent BRUASSE,
IML, CNRS UPR 9016
Case 907
163 avenue de Luminy
13288 Marseille Cedex 09 (France).
bruassee@iml.univ-mrs.fr