



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Magali BOUFFET

**Factorisation d'opérateurs différentiels à coefficients dans une extension
liouvillienne d'un corps valué**

Tome 52, n° 3 (2002), p. 709-734.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_3_709_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

FACTORISATION D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À COEFFICIENTS DANS UNE EXTENSION LIOUVILLENNE D'UN CORPS VALUÉ

par Magali BOUFFET

1. Introduction.

Soient \mathbb{C} le corps des nombres complexes, et $\mathbb{C}((z))$ le corps des séries de Laurent formelles en z à coefficients dans \mathbb{C} , que l'on munit de la dérivation $\delta = -z^2 d/dz$. On note L le corps $\mathbb{C}((z))(e^{1/z})$. La motivation de ce travail est l'étude des équations différentielles linéaires à coefficients dans L , dans le but d'écrire une théorie de Galois différentielle sur ce corps. On doit donc en particulier déterminer les solutions des équations différentielles linéaires à coefficients dans L , ou ce qui revient au même, factoriser les opérateurs différentiels à coefficients dans L . On s'intéresse à ce type de corps pour étudier des équations différentielles dont les coefficients admettent des singularités essentielles, et non pas seulement des pôles.

Plus généralement on peut s'intéresser à des extensions différentielles de $\mathbb{C}((z))$ par un nombre fini d'exponentielles et de logarithmes algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}((z))$. On est ainsi amené à factoriser des opérateurs différentiels à coefficients dans une extension de ce type. Dans cet article on va en fait se placer dans un cadre plus général, en prenant

Mots-clés : Corps différentiel – Corps valué – Polygone de Newton – Lemme de Hensel – Factorisation – Valuations discrètes – Équations différentielles linéaires – Extensions liouvilleanes.

Classification math. : 11D88 – 12J10 – 34G10.

comme corps de départ un corps différentiel (K, δ) muni d'une valuation discrète v , et tel que la dérivation δ ne soit pas triviale sur K . On va alors considérer des extensions différentielles de ce corps par des exponentielles d'intégrales et des intégrales algébriquement indépendantes sur K , et montrer que sous certaines conditions on dispose d'un théorème de factorisation d'opérateurs différentiels. Les conditions que l'on doit imposer disparaissent lorsque $K = \mathbb{C}((z))$, car elles sont naturellement vérifiées.

De nombreux auteurs ont travaillé sur la factorisation d'opérateurs différentiels. Dans cet article, on va suivre en particulier les travaux menés par B. Malgrange et Ph. Robba. Commençons par rappeler le travail de Robba présenté dans [ROB], et voyons les limites de ses résultats dans notre cadre. Soit (L, δ) un corps différentiel muni d'une valuation v telle que L soit complet. On note \mathcal{A} l'anneau de valuation de L et l son corps résiduel. On note $\alpha_L(\delta)$, ou simplement α s'il n'y a pas d'ambiguïté, le nombre $\inf_{a \in L \setminus \{0\}} \{v(\delta(a)) - v(a)\}$. L'un des résultats obtenus par Robba est la factorisation d'un opérateur différentiel à coefficients dans L par rapport aux pentes de son polygone de Newton.

THÉORÈME 1.1. — *On suppose de plus la valuation v discrète, le corps résiduel l de caractéristique nulle, et $\alpha_L(\delta) > -\infty$. Soit $P \in L[\delta]$ non nul. Alors il existe une extension finie M de L telle que P se factorise en produit de "twistés" d'opérateurs fuchsien dans l'anneau $M[\delta]$.*

Ce théorème nous permet de factoriser l'opérateur P par rapport aux pentes de son polygone de Newton. Dans le cas où $\alpha_L(\delta) \geq 0$, on est ramené à étudier des opérateurs à coefficients dans l'anneau de valuation de M . Robba établit alors un lemme de Hensel différentiel, pour relever une factorisation de l'opérateur du corps résiduel à l'anneau de valuation. Il obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Supposons $\alpha_L(\delta) > 0$. Soit $A \in \mathcal{A}[T]$ de degré $m + n$. Supposons que son image \bar{A} dans $l[T]$ se factorise sous la forme $\bar{A} = QP$, où P est unitaire de degré n , Q et P étant premiers entre eux. Alors, il existe un unique relèvement \tilde{P}, \tilde{Q} de P, Q à $\mathcal{A}[T]$ avec $\deg \tilde{Q} = m$, $\deg \tilde{P} = n$, \tilde{P} unitaire, tel que $A(\delta) = \tilde{Q}(\delta)\tilde{P}(\delta)$.*

L'hypothèse $\alpha > 0$ est cruciale pour la démonstration de ce théorème, elle signifie que la dérivation est triviale dans le gradué associé à la filtration définie par v . Les équations différentielles deviennent alors des équations algébriques, et Robba construit le relèvement de la factorisation comme

point fixe d'une contraction. Cet énoncé n'est plus valable lorsque $\alpha = 0$, et sa démonstration ne s'adapte pas, car il n'est plus possible de construire la contraction qui permet de relever la factorisation. Néanmoins Robba traite un exemple de cas où $\alpha = 0$. Il considère le corps $k((x))$ muni de la dérivation $\delta = xd/dx$ et de la valuation x -adique. On note \mathcal{A} son anneau de valuation. (Le corps k , qui est le corps résiduel de $k((x))$, est encore un corps de constantes pour la dérivation.) Il obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Soit $A \in \mathcal{A}[T]$ de degré $m + n$. Supposons que son image \bar{A} dans $k[T]$ se factorise sous la forme $\bar{A} = QP$, où P est unitaire de degré n . Si $Q(T + s)$ est premier à $P(T)$ pour tout entier $s > 0$, alors il existe un unique relèvement \tilde{P}, \tilde{Q} de P, Q à $\mathcal{A}[T]$ avec $\deg \tilde{Q} = m$, $\deg \tilde{P} = n$, \tilde{P} unitaire, tel que $A(\delta) = \tilde{Q}(\delta)\tilde{P}(\delta)$.*

Ces résultats ne s'appliquent pas à notre cadre, et ne s'adaptent pas. Soit (K, δ) le corps différentiel de départ, muni d'une valuation v . On suppose que la dérivation δ n'est pas triviale sur K . On regarde des extensions $L = K((X))$ avec X transcendant sur K , et on étend la dérivation δ au corps L en posant $\delta(X) = \lambda X$, avec $\lambda \in K \setminus \{0\}$. On munit L de la valuation discrète X -adique, et on note $\mathcal{A} = K[[X]]$ son anneau de valuation. Son corps résiduel est alors K et $\alpha_L(\delta) = 0$. Le fait que le corps résiduel K ne soit pas un corps de constantes est un obstacle majeur. On va donc établir un lemme de Hensel dans ce cadre spécifique. On obtient l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1.4. — *On suppose la valuation v discrète et telle que K soit complet. On suppose $\alpha_K(\delta) > -\infty$. Soit $P \in \mathcal{A}[\delta]$, unitaire, et supposons que son image \bar{P} dans $K[\delta]$ se factorise sous la forme $\prod_{i=1}^n (\delta + y_i)$, avec $\forall k \geq 1, \forall i, 2 \leq i \leq n, v(y_1 - y_i + k\lambda) < \alpha_K(\delta)$. Alors il existe x_1 dans \mathcal{A} et R dans $\mathcal{A}[\delta]$ unitaire tels que $\bar{x}_1 = y_1, \bar{R} = \prod_{i=2}^n (\delta + y_i)$ et $P(\delta) = (\delta + x_1)R(\delta)$.*

Remarque 1.5. — On fait une extension de K par un élément transcendant X , on considère donc le corps $K(X)$. On munit ce corps de la valuation X -adique et on le complète par rapport à cette valuation. Ici on a choisi de compléter K en $L = K((X))$; on aurait pu bien sûr faire le choix de compléter K en $L = K((X^{-1}))$.

Du lemme de Hensel précédent et des résultats de Robba sur la factorisation d'un opérateur différentiel par rapport aux pentes de son polygone de Newton, on déduit le théorème de factorisation suivant :

THÉORÈME 1.6. — *On suppose la valuation v discrète et telle que K soit complet, de corps résiduel de caractéristique nulle. On suppose $\alpha_K(\delta) > -\infty$. On note \overline{K}^{al} une clôture algébrique de K . On suppose $v(\lambda) < \alpha_K(\delta)$. On suppose que tout opérateur de $\overline{K}^{\text{al}}[\delta]$ se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans cet anneau. Soit $P \in L[\delta]$ un opérateur différentiel non nul, alors P se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $M[\delta]$, où $M = \bigcup_{n \geq 1} \overline{K}^{\text{al}}((X^{1/n}))$.*

On regarde également des extensions de K du type $L = K(X)$, avec X transcendant sur K et $\delta(X) = \lambda \in K$. Comme précédemment, on commence par factoriser l'opérateur différentiel à coefficients dans L par rapport aux pentes de son polygone de Newton. Cette fois on ne pourra pas “twister” et se ramener à des coefficients dans l'anneau de valuation, mais on pourra factoriser directement les opérateurs différentiels ainsi obtenus.

Plus généralement, on va considérer des extensions liouvilliennes transcendantes.

DÉFINITION 1.7. — *Soit (K, δ) un corps différentiel. On dit que L est une extension liouvillienne transcendante de K s'il existe une suite de corps différentiels intermédiaires $K = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n = L$ telle que l'on ait pour tout i , $2 \leq i \leq n$,*

– soit $K_i = K_{i-1}(t)$ avec $\delta(t)/t \in K_{i-1}$ (extension par une exponentielle d'intégrale)

– soit $K_i = K_{i-1}(t)$ avec $\delta(t) \in K_{i-1}$ (extension par une intégrale)

avec dans les deux cas t transcendant sur K_{i-1} .

On supposera toujours que $\delta(t)/t$ ou $\delta(t)$, suivant le cas, est non nul.

On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 1.8. — *Soit (K, δ) un corps différentiel complet pour une valuation discrète v , de corps résiduel de caractéristique nulle. On suppose que $\alpha_K(\delta) > -\infty$. Soit L une extension liouvillienne transcendante de K qui s'écrit comme une suite d'extensions différentielles $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_p = L$, telle que $K_i = K_{i-1}(t_i)$, avec pour i , $1 \leq i \leq n$, $\delta(t_i)/t_i = \lambda_i \in K_{i-1} \setminus \{0\}$, et pour i , $n+1 \leq i \leq p$, $\delta(t_i) = \lambda_i \in K_{i-1} \setminus \{0\}$. On note $F_0 = \overline{K}_0^{\text{al}}$, et on définit ensuite pour i , $1 \leq i \leq p$, les corps $F_i = \bigcup_{n \geq 1} F_{i-1}((t_i^{1/n}))$. On suppose que dans le cas d'une extension par une exponentielle d'intégrale, c'est-à-dire pour i , $1 \leq i \leq n$, on a*

$v_{i-1}(\lambda_i) < \alpha_{K_{i-1}}(\delta)$, où v_i désigne la valuation t_i -adique sur le corps K_i . On suppose aussi que tout opérateur de $\overline{K}^{\text{al}}[\delta]$ se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans cet anneau. Soit $P \in L[\delta]$ un opérateur différentiel non nul, alors P se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_p[\delta]$.

On verra que ce résultat nous permet de traiter le cas de plusieurs exponentielles à des “niveaux différents”, mais pas des exponentielles au “même niveau”. Il faudra pour cela raffiner la condition $v_{i-1}(\lambda_i) < \alpha_{K_{i-1}}(\delta)$ en une condition plus faible. On pourra alors appliquer ce résultat au cas d'une extension de $\mathbb{C}((z))$ par un nombre fini d'exponentielles et de logarithmes algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}((z))$, la condition précédente sera naturellement vérifiée dans ce cas.

THÉORÈME 1.9. — On considère le corps $K = \mathbb{C}((z))$ que l'on munit de la valuation z -adique v_z , et d'une dérivation $\delta = ad/dz$ avec $a \in \mathbb{C}((z))$. Soit μ_1, \dots, μ_p des éléments de $\mathbb{C}((z))$ tels que $X_1 = e^{\mu_1}, \dots, X_n = e^{\mu_n}, X_{n+1} = \text{Log}(\mu_{n+1}), \dots, X_p = \text{Log}(\mu_p)$ soient algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}((z))$. Soit l'extension différentielle $K \subset L = K(X_1, \dots, X_p)$. On note $F_0 = \overline{K}^{\text{al}}$, et on définit ensuite pour $i, 1 \leq i \leq p$, les corps $F_i = \bigcup_{n \geq 1} F_{i-1}((X_i^{1/n}))$. Soit $P \in L[\delta]$ un opérateur différentiel non nul, alors P se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_p[\delta]$.

Je remercie B. Malgrange pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, ainsi que pour les nombreuses améliorations qu'il y a apportées.

2. Résolution d'équations différentielles dans un corps valué.

On démontre ici certains résultats concernant la résolution d'équations différentielles qui seront constamment utilisés dans la suite. On va établir une condition suffisante pour pouvoir résoudre dans le corps des coefficients, une équation différentielle linéaire du premier ordre, ainsi qu'une équation différentielle linéaire quadratique du premier ordre.

Soit (K, δ) un corps différentiel muni d'une valuation discrète v pour laquelle il est complet. On note $\alpha_K(\delta) = \inf_{a \in K \setminus \{0\}} \{v(\delta(a)) - v(a)\}$, et on suppose que $\alpha_K(\delta) > -\infty$, c'est-à-dire que la dérivation δ est continue.

Soit \overline{K}^{al} une clôture algébrique de K . Si on suppose que le corps résiduel de K est de caractéristique nulle, alors δ s'étend de manière unique

à \overline{K}^{al} , on note ∂ son prolongement. On note w le prolongement de v à \overline{K}^{al} . Alors on a $\alpha_K(\delta) = \alpha_{\overline{K}^{\text{al}}}(\partial) = \inf_{a \in \overline{K}^{\text{al}} \setminus \{0\}} \{w(\partial(a)) - w(a)\}$.

LEMME 2.1. — Soient a et b deux éléments de K .

(i) Si $v(a) < \alpha_K(\delta)$ alors l'équation différentielle $\delta(u) + au = b$ admet une solution u dans K avec $v(u) = v(b) - v(a)$.

(ii) Si $v(a) < \alpha_K(\delta)$ et $v(b) \geq v(a) + \alpha_K(\delta)$ alors l'équation différentielle quadratique $u^2 + \delta(u) + au = b$ admet une solution u dans K avec $v(u) \geq \alpha_K(\delta)$.

Dans tous les cas on a unicité de la solution.

Démonstration. — Il s'agit d'une application du théorème du point fixe pour les applications contractantes : si F est une partie fermée de K et f une application $f : F \rightarrow F$ telle que $v(f(x) - f(y)) > v(x - y)$ pour tous x et y dans F , alors f a un point fixe, unique. \square

Cet énoncé reste valable si a et b sont dans \overline{K}^{al} . On obtient alors une unique solution u dans \overline{K}^{al} à chacune des équations précédentes, avec la valuation souhaitée.

3. Lemmes de Hensel différentiels.

3.1. Cas d'une extension par une exponentielle d'intégrale.

Soit (K, δ) un corps différentiel muni d'une valuation discrète v , que l'on suppose complet. On suppose également que $\alpha_K(\delta) > -\infty$. On considère une extension de K par une exponentielle d'intégrale, c'est-à-dire une extension du type $K(X)$ où $\delta(X)/X \in K$, et X est transcendant sur K . On note $\lambda = \delta(X)/X$ cet élément non nul de K . On munit ce corps de la valuation X -adique v_X , et on pose $L = K((X))$ le corps des séries de Laurent formelles en X à coefficients dans K . La valuation v_X s'étend de manière évidente à L , et le corps (L, v_X) est complet. On a, en outre, $\alpha_L(\delta) = 0$. On note $\mathcal{A} = K[[X]]$ l'anneau de valuation de L .

Soit $P \in \mathcal{A}[\delta]$, unitaire, $P = \delta^n + a_1\delta^{n-1} + \dots + a_{n-1}\delta + a_n$. On va chercher à factoriser P dans l'anneau $\mathcal{A}[\delta]$ sous la forme

$$(*) \quad P = (\delta + x_1)(\delta^{n-1} + x_2\delta^{n-2} + \dots + x_{n-1}\delta + x_n).$$

Les coefficients a_i sont des éléments de \mathcal{A} , donc ils s'écrivent $a_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} X^k$, avec $a_{i,k} \in K$. On cherche les x_i sous la forme $x_i = \sum_{k=0}^{\infty} x_{i,k} X^k$, avec $x_{i,k} \in K$.

THÉORÈME 3.1.1. — Soit $P \in \mathcal{A}[\delta]$, unitaire non constant. Supposons que \overline{P} se factorise dans l'anneau $K[\delta]$ sous la forme $\prod_{i=1}^n (\delta + y_i)$, avec $\forall k \geq 1, \forall i, 2 \leq i \leq n, v(y_1 - y_i + k\lambda) < \alpha_K(\delta)$. Alors P se factorise dans l'anneau $\mathcal{A}[\delta]$ sous la forme $(\delta + x_1)R$, avec $\overline{x_1} = y_1, R$ unitaire et $\overline{R} = \prod_{i=2}^n (\delta + y_i)$.

Démonstration. — Soit $P \in L[\delta]$, un opérateur unitaire d'ordre $n+1$, et notons

$$\overline{P} = (\delta + y_1)(\delta + y_2)(\delta + y_3) \cdots (\delta + y_{n+1}).$$

On écrit également l'opérateur \overline{P} sous la forme

$$\overline{P} = (\delta + \overline{x_1})(\delta^n + \overline{x_2}\delta^{n-1} + \cdots + \overline{x_n}\delta + \overline{x_{n+1}}) = (\delta + \overline{x_1})\overline{R}.$$

On impose ici $\overline{x_1} = y_1$. Pour trouver les termes d'ordre k dans la factorisation de P , on écrit $x_i = x_{i,0} + x_{i,1}X + \cdots + x_{i,k}X^k + \cdots$ avec $\overline{x_i} = x_{i,0}$. On doit alors résoudre

$$(\delta + \overline{x_1} + k\lambda)A_k + B_k\overline{R} = \text{polynôme de degré } n \text{ en } \delta,$$

où $A_k = x_{2,k}\delta^{n-1} + \cdots + x_{n,k}\delta + x_{n+1,k}$ et $B_k = x_{1,k}$. Il s'agit de démontrer que, sous l'hypothèse du théorème, cette équation admet une solution pour tout second membre. Quitte à remplacer $\overline{x_1}$ par $\overline{x_1} + k\lambda$, cela revient à démontrer la même chose pour $k = 0$ sous l'hypothèse $v(y_1 - y_i) < \alpha_K(\delta)$.

On procède par récurrence. Remarquons que pour $n = 2$ cela revient à résoudre une équation du type $\delta(u) + (y_1 - y_2)u = \text{donnée}$ dans K . Le lemme 2.1 nous permet alors de conclure.

Soit D_k un polynôme de degré n en δ à coefficients dans K . On veut résoudre l'équation $(\delta + \overline{x_1})A_k + B_k\overline{R} = D_k$. En éliminant les termes de plus haut degré, on peut trouver A'_k tel que $(\delta + \overline{x_1})A'_k - D_k$ soit de degré $n - 1$ en δ . On peut donc se ramener au cas où D_k est de degré $n - 1$ en δ . Écrivons alors $\overline{R} = (\delta + y_2)\overline{S}$. Considérons l'équation $(\delta + \overline{x_1})A'_k + B'_k\overline{S} = D_k$. Cette équation admet une solution d'après l'hypothèse de récurrence et $B'_k \in K$. On considère alors l'équation $B'_k = (\delta + y_1)u - u(\delta + y_2)$, c'est-à-dire $B'_k = \delta(u) + (y_1 - y_2)u$. Le lemme 2.1 et l'hypothèse sur la valuation de $y_1 - y_2$ nous permettent de résoudre cette équation dans K . On a alors $(\delta + \overline{x_1})(A'_k + u\overline{S}) - u(\delta + y_2)\overline{S} = D_k$,

c'est-à-dire $(\delta + \bar{x}_1)(A'_k + u\bar{S}) - u\bar{R} = D_k$. On pose alors $A_k = A'_k + u\bar{S}$ et $B_k = -u$. On obtient $(\delta + \bar{x}_1)A_k + B_k\bar{R} = D_k$.

Ceci signifie exactement que l'on peut relever la factorisation de \bar{P} en une factorisation de P . On a ainsi démontré un lemme de Hensel différentiel pour l'anneau $L[\delta]$. \square

Supposons maintenant que le corps résiduel de K est de caractéristique nulle, et soit \bar{K}^{al} une clôture algébrique de K . On étend alors la dérivation δ et la valuation v à \bar{K}^{al} . Soit $L_n = \bar{K}^{\text{al}}((X^{1/n}))$, pour $n \geq 1$, et $\bar{L}^{\text{al}} = \bigcup_{n \geq 1} L_n$. Alors \bar{L}^{al} est une clôture algébrique de $\bar{K}^{\text{al}}((X))$. La valuation v_X et la dérivation δ s'étendent à \bar{L}^{al} et $\alpha_{\bar{L}^{\text{al}}}(\delta) = \alpha_L(\delta) = 0$. L'anneau de valuation de \bar{L}^{al} est $\bigcup_{n \geq 1} \bar{K}^{\text{al}}[[X^{1/n}]]$ que nous noterons \mathcal{A}_{al} , et son corps résiduel \bar{K}^{al} . On a alors :

THÉORÈME 3.1.2. — *Soit $P \in \mathcal{A}_{\text{al}}[\delta]$, unitaire non constant. Soit m le ppcm des ramifications en x de chacun des coefficients de P . On suppose que \bar{P} se factorise dans l'anneau $\bar{K}^{\text{al}}[\delta]$ sous la forme $\prod_{i=1}^n (\delta + y_i)$, avec $\forall k \geq 1, \forall i, 2 \leq i \leq n, v(y_1 - y_i + (k/m)\lambda) < \alpha_{\bar{K}^{\text{al}}}(\delta)$. Alors P se factorise dans l'anneau $\mathcal{A}_{\text{al}}[\delta]$ sous la forme $(\delta + x_1)R$, avec $\bar{x}_1 = y_1$, R unitaire et $\bar{R} = \prod_{i=2}^n (\delta + y_i)$.*

Pour pouvoir relever la factorisation, il faut donc pouvoir factoriser dans le corps résiduel avec une certaine condition de valuation sur les coefficients. Si l'on sait déjà que l'on peut factoriser, la proposition suivante donne une condition suffisante sur λ pour trouver une factorisation du type voulu. Pour alléger les notations notons $\alpha = \alpha_K(\delta) = \alpha_{\bar{K}^{\text{al}}}(\delta)$.

LEMME 3.1.3. — *Soit $P \in \bar{K}^{\text{al}}[\delta]$. Supposons que P se factorise sous la forme $\prod_{i=1}^n (\delta + x_i)$ dans l'anneau $\bar{K}^{\text{al}}[\delta]$. Alors pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, il existe une factorisation $P = \prod_{i=1}^n (\delta + y_i)$, avec $v(y_i - x_{\sigma(i)}) \geq \alpha$.*

Démonstration. — Toute permutation étant le produit de la permutation de deux termes successifs, il suffit de traiter le cas $n = 2$. On écrit alors $(\delta + x_1)(\delta + x_2) = (\delta + y_1)(\delta + y_2)$, ce qui, en développant, donne les deux équations suivantes : $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, et $\delta(x_2) + x_1x_2 = \delta(y_2) + y_1y_2$. Si $v(x_1 - x_2) \geq \alpha$, alors la même factorisation convient. Sinon on prend $y_1 = x_2 + a$ et $y_2 = x_1 - a$, à cause de la première équation. La deuxième équation s'écrit alors $\delta(a) + a^2 + (x_1 - x_2)a = -\delta(x_1 - x_2)$. Le lemme 2.1

nous donne alors une solutions a avec $v(a) \geq \alpha$. □

PROPOSITION 3.1.4. — Soit $P \in \overline{K}^{\text{al}}[\delta]$. Supposons que P se factorise sous la forme $\prod_{i=1}^n (\delta + x_i)$ dans l'anneau $\overline{K}^{\text{al}}[\delta]$. Alors si $v(\lambda) < \alpha$, l'opérateur P se factorise sous la forme $\prod_{i=1}^n (\delta + y_i)$, avec $\forall i < j, \forall r \in \mathbb{Q}, r > 0, v(y_i - y_j + r\lambda) < \alpha$.

Démonstration. — On dit qu'un élément de \overline{K}^{al} est régulier s'il est de valuation supérieure ou égale à α . On considère la relation d'équivalence suivante sur \overline{K}^{al} : on dit que u et v sont équivalents s'il existe q dans \mathbb{Q} tel que $u - v + q\lambda$ soit un élément régulier. Si deux éléments x_i et x_j ne sont pas équivalents, alors $v(x_i - x_j + q\lambda) < \alpha$, ce pour tout q dans \mathbb{Q} . Il s'agit donc de réordonner les coefficients dans chaque classe d'équivalence. Soit i_0 dans $\{1, \dots, n\}$, et $\text{cl}(x_{i_0})$ l'ensemble des éléments équivalents à x_{i_0} . On note \mathcal{E}_{i_0} l'ensemble de leurs indices. On réordonne les éléments de $\text{cl}(x_{i_0})$ de sorte que pour $i < j$ dans \mathcal{E}_{i_0} , x_i soit équivalent à x_j avec $q \leq 0$. Soit pour cela σ_{i_0} une permutation de \mathcal{E}_{i_0} telle que pour $i < j$ on ait $v(x_{\sigma_{i_0}(i)} - x_{\sigma_{i_0}(j)} + q\lambda) \geq \alpha$, avec $q \leq 0$. Alors pour $i < j, \forall r > 0, r \in \mathbb{Q}$, on a $x_{\sigma_{i_0}(i)} - x_{\sigma_{i_0}(j)} + r\lambda = x_{\sigma_{i_0}(i)} - x_{\sigma_{i_0}(j)} + q\lambda + (r - q)\lambda$. Puisque $r - q \neq 0$ et $v(\lambda) < \alpha$, on a $v(x_{\sigma_{i_0}(i)} - x_{\sigma_{i_0}(j)} + r\lambda) < \alpha$. Soit alors σ la permutation de $\{1, \dots, n\}$ obtenue en composant les σ_{i_0} . Alors d'après le lemme précédent, il existe une factorisation $P = \prod_{i=1}^n (\delta + y_i)$, avec $v(y_i - x_{\sigma(i)}) \geq \alpha$. Alors pour $i < j, v(y_i - y_j + r\lambda) = v(y_i - x_{\sigma(i)} - y_j + x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(j)} + x_{\sigma(i)} + r\lambda) < \alpha$. □

Remarque 3.1.5. — La condition que l'on a trouvée pour pouvoir relever la factorisation du corps résiduel à l'anneau de valuation est une condition sur la valuation des coefficients de la factorisation dans le corps résiduel. On peut se demander s'il y a un lien avec le type de conditions obtenues par Robba dans le cadre du théorème 1.2. Supposons donc que dans le corps résiduel on ait $P = \prod_{i=1}^n (\delta + x_i)$, avec $v(x_1 - x_i + (k/m)\lambda) < \alpha_K(\delta)$. (On peut donc relever la factorisation à n'importe quel opérateur différentiel à coefficients dans l'anneau de valuation, qui admet P comme image dans le corps résiduel.) Considérons l'anneau de polynômes $K[T]$. On note $P_i(T) = T + x_i$ et $Q(T) = \prod_{i=1}^{n-1} (T + x_i)$. Puisque $v(x_1 - x_i + (k/m)\lambda) < \alpha_K(\delta)$ on a en particulier $x_1 - x_i + (k/m)\lambda \neq 0$, donc $P_1(T + (k/m)\lambda)$ est premier avec $P_i(T)$, pour $i \geq 2$. Donc $P_1(T + (k/m)\lambda)$ est premier avec $Q(T)$.

La réciproque est fausse. Soit $P = (\delta - \lambda)(\delta + \eta^{\alpha+1})$ dans le corps

résiduel, où η est une uniformisante de K , et $v(\lambda) < \alpha$. Soit $P_1(T) = T - \lambda$ et $P_2(T) = T + \eta^{\alpha+1}$. Alors $P_1(T + (k/m)\lambda)$ et $P_2(T)$ sont premiers entre eux. Mais pour $k = m$, on a $-\lambda - \eta^{\alpha+1} + (k/m)\lambda = -\eta^{\alpha+1}$ qui est de valuation strictement supérieure à α . On ne sait alors pas si cette factorisation peut se relever à tous les opérateurs qui admettent P comme image dans le corps résiduel.

La condition que l'on obtient est donc plus restrictive.

Exemple 3.1.6. — On considère le corps $L = \mathbb{C}((z))((X))$, où $X = e^{1/z}$, que l'on munit de la dérivation $\delta = -z^2 d/dz$. Alors $\delta(X) = X = \lambda X$, avec $\lambda = 1$. On munit L de la valuation X -adique v_X , et $\mathbb{C}((z))$ de la valuation z -adique v_z . Alors $\alpha_{\mathbb{C}((z))}(\delta) = 1$, et $v_z(\lambda) = 0 < 1$. L'anneau de valuation de L est $\mathbb{C}((z))[[X]]$. On considère l'opérateur

$$P(\delta) = \delta^3 + (4z^{-1} + 1 + X)\delta^2 + (5z^{-2} + 3z^{-1} + 5 + z^{-1}X)\delta + (2z^{-3} + 2z^{-2} + 6z^{-1} + 2 - X^2).$$

Alors on a

$$\overline{P}(\delta) = \delta^3 + (4z^{-1} + 1)\delta^2 + (5z^{-2} + 3z^{-1} + 5)\delta + (2z^{-3} + 2z^{-2} + 6z^{-1} + 2).$$

On a montré que l'on peut factoriser \overline{P} dans le corps résiduel de sorte que les coefficients de la factorisation vérifient les conditions de valuations imposées par le théorème 3.1.1. On a

$$\overline{P}(\delta) = (\delta + z^{-1} + 1)(\delta + z^{-1})(\delta + 2z^{-1}),$$

que l'on écrit aussi sous la forme

$$\overline{P}(\delta) = (\delta + z^{-1} + 1)(\delta^2 + 3z^{-1}\delta + 2z^{-2} + 2).$$

On va maintenant relever cette factorisation et écrire P sous la forme

$$P(\delta) = (\delta + z^{-1} + 1 + x_{1,1}X + \dots)(\delta^2 + (3z^{-1} + x_{2,1}X + \dots)\delta + (2z^{-2} + 2 + x_{3,1}X + \dots)).$$

On va expliciter ici le calcul des $x_{i,1}$. On doit résoudre l'équation

$$(\delta + z^{-1} + 1 + \lambda)A_1 + B_1(\delta + z^{-1})(\delta + 2z^{-1}) = \delta^2 + z^{-1}\delta,$$

où $A_1 = x_{2,1}\delta + x_{3,1}$ et $B_1 = x_{1,1}$. On commence par chercher un polynôme A_1'' en δ de degré 1 tel que $(\delta + z^{-1} + 1 + \lambda)A_1'' - (\delta^2 + z^{-1}\delta)$ soit de degré 1. Par exemple $A_1'' = \delta$ convient, et alors $(\delta + z^{-1} + 2)A_1'' - (\delta^2 + z^{-1}\delta) = 2\delta$.

On résout alors $(\delta + z^{-1} + 2)A'_1 + B'_1(\delta + 2z^{-1}) = -2\delta$, avec A'_1 et B'_1 de degré 0. On doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} A'_1 + B'_1 = -2 \\ \delta(A'_1) + (-z^{-1} + 2)A'_1 = 4z^{-1}. \end{cases}$$

On obtient : $A'_1 = -4 - 8z - 16z^2 - 24z^3 + \dots$ et $B'_1 = 2 + 8z + 16z^2 + 24z^3 + \dots$. On résout alors $B'_1 = \delta(u) + (z^{-1} + 1 - z^{-1} + \lambda)u$, et on trouve $u = 1 + 4z + 10z^2 + \dots$. On pose alors $B_1 = -u = -1 - 4z - 10z^2 + \dots$, et $A_1 = A'_1 + u(\delta + 2z^{-1}) + A''_1 = (2 + 4z + 10z^2 + \dots)\delta + (2z^{-1} + 4 + 12z + \dots)$.

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} P(\delta) = & (\delta + z^{-1} + 1 + (-1 - 4z - 10z^2 + \dots)X + \dots) \\ & (\delta^2 + (3z^{-1} + (2 + 4z + 10z^2 + \dots)X + \dots)\delta \\ & + 2z^{-2} + 2 + (2z^{-1} + 4 + 12z + \dots)X + \dots). \end{aligned}$$

Remarque 3.1.7. — On peut rigidifier l'algorithme précédent, et en particulier le choix du polynôme A''_1 . L'équation polynomiale à résoudre dans la démonstration du théorème 3.1.1 peut s'écrire sous la forme du système suivant (les inconnues u_i remplacent les $x_{i,k}$) :

$$(1) \quad \begin{cases} \delta(u_i) + (x_{1,0} + k\lambda)u_i - x_{i,0}u_2 + u_{i+1} = *^{i,k}, & 2 \leq i \leq n \\ \delta(u_{n+1}) + (x_{1,0} + k\lambda)u_{n+1} - x_{n+1,0}u_2 = *^{n+1,k}. \end{cases}$$

Soit \bar{Q} l'opérateur

$$\bar{Q} = (\partial + y_1)(\partial + y_3) \cdots (\partial + y_{n+1}),$$

que l'on écrit également sous la forme

$$\bar{Q} = (\partial + \tilde{x}_{1,0})(\partial^{n-1} + \tilde{x}_{2,0}\partial^{n-2} + \dots + \tilde{x}_{n-1,0}\partial + \tilde{x}_{n,0}).$$

On impose encore $\tilde{x}_{1,0} = y_1$. On a bien sûr des relations entre les $x_{i,0}$ et les $\tilde{x}_{i,0}$.

On considère la même équation pour l'opérateur \bar{Q} . On obtient alors le système suivant (les u_i remplacent les $\tilde{x}_{i,k}$) :

$$(2) \quad \begin{cases} \delta(u_i) + (\tilde{x}_{1,0} + k\lambda)u_i - \tilde{x}_{i,0}u_2 + u_{i+1} = \tilde{*}^{i,k}, & 2 \leq i \leq n - 1 \\ \delta(u_n) + (\tilde{x}_{1,0} + k\lambda)u_n - \tilde{x}_{n,0}u_2 = \tilde{*}^{n,k}. \end{cases}$$

Notons $a = x_{1,0} - x_{2,0} + k\lambda$, $\tilde{a} = \tilde{x}_{1,0} - \tilde{x}_{2,0} + k\lambda$, $b = x_{1,0} + k\lambda$ et $\tilde{b} = \tilde{x}_{1,0} + k\lambda$. Le système (1) s'écrit alors matriciellement sous la forme

$\delta(U) + A_1U = *$, avec

$$U = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } A_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a} - y_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (\tilde{a} - \tilde{b})y_2 + \delta(\tilde{a} - \tilde{b}) - \tilde{x}_{3,0} & b & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ -\tilde{x}_{n-1}y_2 - \delta(\tilde{x}_{n-1,0}) - \tilde{x}_{n,0} & \vdots & \ddots & b & 1 \\ -\tilde{x}_{n,0}y_2 - \delta(\tilde{x}_{n,0}) & 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix}.$$

On rajoute à la partie homogène du système (2) l'équation (E) : $\delta(u) + (y_1 - y_2 + k\lambda)u + u_2 = 0$. Le système ainsi obtenu s'écrit alors matriciellement sous la forme: $\delta(V) + A_2V = \tilde{*}$, avec

$$V = \begin{pmatrix} u \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} \tilde{b} - y_2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{a} & 1 & \ddots & & \vdots \\ & -\tilde{x}_{3,0} & \tilde{b} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & -\tilde{x}_{n-1,0} & \vdots & \ddots & \tilde{b} & 1 \\ 0 & -\tilde{x}_{n,0} & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b} \end{pmatrix}.$$

On a l'égalité $A_2 = P_{12}^{-1}A_1P_{12} + P_{12}^{-1}\delta P_{12}$, avec

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tilde{x}_{2,0} & 1 & 0 & & \vdots \\ \tilde{x}_{3,0} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \tilde{x}_{n,0} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux systèmes sont alors équivalents sur K en choisissant $\tilde{*} = P_{12}^{-1}*$.

Reprenons l'exemple précédent. On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{2,1} = 1 \\ \delta(x_{2,1}) + (-2z^{-1} + 2)x_{2,1} + x_{3,1} = -2z^{-1} \\ \delta(x_{3,1}) + (z^{-1} + 2)x_{3,1} - (2z^{-2} + 2)x_{2,1} = -2z^{-2} - 2, \end{cases}$$

ce qui s'écrit (en oubliant la première équation)

$$\delta \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{3,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z^{-1} + 2 & 1 \\ -2z^{-2} - 2 & z^{-1} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z^{-1} \\ -2z^{-2} - 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $\overline{Q}(\delta) = (\delta + z^{-1} + 1)(\delta + 2z^{-1})$. Le système associé à \overline{Q} s'écrit

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = \tilde{*}^{1,1} \\ \delta(u_2) + (-z^{-1} + 2)u_2 = \tilde{*}^{2,1}. \end{cases}$$

On rajoute

$$\delta(u) + 2u + u_2 = *.$$

En oubliant la première équation le système se réécrit

$$\delta \begin{pmatrix} u \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -z^{-1} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}.$$

On pose

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2z^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les systèmes précédents sont équivalents par P_{12} si l'on pose

$$\delta \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} = P_{12}^{-1} \begin{pmatrix} -2z^{-1} \\ -2z^{-2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z^{-1} \\ 2z^{-2} - 2 \end{pmatrix} \text{ et alors } \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{3,1} \end{pmatrix} = P_{12} \begin{pmatrix} u \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

On résout

$$\delta \begin{pmatrix} u \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -z^{-1} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z^{-1} \\ 2z^{-2} - 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient $u_2 = -2z^{-1} - 4 - 8z - 16z^2 + \dots$, et $u = 2 + 4z + 10z^2 + \dots$, d'où

$$\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{3,1} \end{pmatrix} = P_{12} \begin{pmatrix} u \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4z + 10z^2 + \dots \\ 2z^{-1} + 4 + 12z + \dots \end{pmatrix}.$$

3.2. Cas d'une extension par une intégrale.

Soit (K, δ) un corps différentiel de caractéristique nulle. On considère une extension de K par une intégrale, c'est-à-dire une extension du type $K(X)$ où $\delta(X) \in K$ et X est transcendant sur K . On note $\lambda = \delta(X)$ cet élément non nul de K . On munit ce corps de la valuation X -adique v_X , et on pose $L = K((X))$. La valuation v_X s'étend de manière évidente à L , et le corps (L, v_X) est complet. On a cette fois-ci $\alpha_L(\delta) = -1$. On note $\mathcal{A} = K[[X]]$ l'anneau de valuation de L .

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2.1. — *Soit $P \in \mathcal{A}[\delta]$, unitaire, et supposons que \overline{P} se factorise dans l'anneau $K[\delta]$ sous la forme $(\delta + x_{1,0})(\delta^{n-1} + x_{2,0}\delta^{n-2} + \dots + x_{n-1,0}\delta + x_{n,0})$. Alors il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}^n$ tel que pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $\overline{x}_i = x_{i,0}$ et $P(\delta) = (\delta + x_1)(\delta^{n-1} + x_2\delta^{n-2} + \dots + x_{n-1}\delta + x_n)$.*

Démonstration. — Soit $P \in \mathcal{A}[\delta]$, unitaire, $P = \delta^n + a_{n-1}\delta^{n-1} + \dots + a_1\delta + a_0$. Factoriser P sous la forme

$$(*) \quad P = (\delta + x_1)(\delta^{n-1} + x_2\delta^{n-2} + \dots + x_{n-1}\delta + x_n),$$

dans l'anneau $\mathcal{A}[\delta]$, revient à résoudre dans \mathcal{A} le système différentiel non linéaire de n équations à n inconnues suivant :

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = a_{n-1} \\ x_1x_i + \delta(x_i) + x_{i+1} = a_{n-i}, & 2 \leq i \leq n-1 \\ x_1x_n + \delta x_n = a_0. \end{cases}$$

Les coefficients a_i sont des éléments de \mathcal{A} , donc ils s'écrivent $a_i = \sum_{k=0}^\infty a_{i,k}X^k$, avec $\lambda_{i,k} \in K$. On cherche les x_i sous la forme $x_i = \sum_{k=0}^\infty x_{i,k}X^k$, avec $x_{i,k} \in K$. Alors $\delta x_i = \sum_{k=0}^\infty (\delta(x_{i,k})X^k + k\lambda x_{i,k}X^{k-1})$. On se ramène ainsi à résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients dans K , dont les inconnues sont les $x_{i,k}$, $1 \leq i \leq n$, et $k \geq 1$.

On doit commencer par résoudre dans K le système suivant :

$$(*)_0 \quad \begin{cases} x_{1,0} + x_{2,0} = a_{n-1,0} \\ x_{1,0}x_{i,0} + \delta(x_{i,0}) + \lambda x_{i,1} + x_{i+1,0} = a_{n-i,0}, & 2 \leq i \leq n-1 \\ x_{1,0}x_{n,0} + \delta(x_{n,0}) + \lambda x_{n,1} = a_{0,0}. \end{cases}$$

Ce système sous cette forme ne correspond pas à la factorisation de l'image de l'opérateur P dans le corps résiduel, mais y correspond si on impose $x_{i,1} = 0$, pour tout i , $2 \leq i \leq n$. D'après l'hypothèse on peut factoriser l'opérateur \bar{P} dans le corps résiduel, donc il existe un n -uplet $(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}) \in K^n$ tel que

$$\begin{cases} x_{1,0} + x_{2,0} = a_{n-1,0} \\ x_{1,0}x_{i,0} + \delta(x_{i,0}) + x_{i+1,0} = a_{n-i,0}, & 2 \leq i \leq n-1 \\ x_{1,0}x_{n,0} + \delta(x_{n,0}) = a_{0,0}. \end{cases}$$

On prend $x_{i,1} = 0$, pour tout i , $2 \leq i \leq n$. On doit ensuite résoudre pour chaque $k \geq 1$ un système qui s'écrit :

$$(*)_k \quad \begin{cases} x_{1,k} + x_{2,k} = a_{n-1,k} \\ \sum_{\substack{j+h=k \\ j,h \geq 0}} x_{1,j}x_{i,h} + \delta(x_{i,k}) + (k+1)\lambda x_{i,k+1} + x_{i+1,k} = a_{n-i,k}, & 2 \leq i \leq n-1 \\ \sum_{\substack{j+h=k \\ j,h \geq 0}} x_{1,j}x_{n,h} + \delta(x_{n,k}) + (k+1)\lambda x_{n,k+1} = a_{0,k}. \end{cases}$$

On résout dans l'ordre des k croissants. Ces systèmes nous permettent alors à l'étape k de déterminer de manière totalement algébrique et non

plus différentielle les coefficients $x_{1,k}$, et $x_{i,k+1}$ pour i , $2 \leq i \leq n$. (À l'étape k les coefficients $x_{i,k}$ pour i , $2 \leq i \leq n$ sont connus.) Il y a à chaque fois une unique solution puisqu'on doit résoudre une équation du type $(k + 1)\lambda x_{i,k+1} = \text{donnée}$. \square

On voit donc que dans ce cas il n'y a pas de condition sur la factorisation dans le corps résiduel, il suffit qu'on puisse factoriser pour pouvoir relever la factorisation. Il en est de même si on passe à une clôture algébrique. On garde les mêmes notations qu'au paragraphe précédent.

THÉORÈME 3.2.2. — *Soit $P \in \mathcal{A}_{\text{al}}[\delta]$, unitaire, et supposons que \overline{P} se factorise dans l'anneau $\overline{K}^{\text{al}}[\delta]$ sous la forme $(\delta + x_{1,0})(\delta^{n-1} + x_{2,0}\delta^{n-2} + \dots + x_{n-1,0}\delta + x_{n,0})$. Alors il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_{\text{al}}^n$ tel que pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $\overline{x}_i = x_{i,0}$ et $P(\delta) = (\delta + x_1)(\delta^{n-1} + x_2\delta^{n-2} + \dots + x_{n-1}\delta + x_n)$.*

4. Factorisation des opérateurs différentiels à coefficients dans une extension liouvillienne d'un corps valué.

4.1. Factorisation par rapport aux pentes du polygone de Newton.

Nous avons démontré précédemment un lemme de Hensel différentiel, la première étape pour factoriser est donc de se ramener à un opérateur à coefficients dans l'anneau de valuation, et donc pour cela factoriser l'opérateur par rapport aux pentes de son polygone de Newton. Soit (k, ∂) un corps différentiel quelconque.

DÉFINITION 4.1.1. — *Soit $P \in k[\partial]$, $P = \sum_{i=0}^n a_i \partial^i$, $a_i \in k$. On définit le polygone de Newton de P comme étant la frontière de l'enveloppe supérieure convexe dans \mathbb{R}^2 de l'ensemble des points $\{(i, v(a_i)), 0 \leq i \leq n\}$.*

DÉFINITION 4.1.2. — *Soit $P \in k[\partial]$. On dira que P est fuchsien si son polygone de Newton n'a que des pentes inférieures ou égales à $-\alpha$.*

On trouvera dans [ROB] la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 4.1.3. — *Soit (L, δ) un corps différentiel complet pour une valuation discrète v , et tel que son corps résiduel soit de caractéristique*

nulle. On suppose $\alpha_L(\delta) > -\infty$. Soit $P \in L[\delta]$ non nul. Alors il existe une extension finie M de L , des η_i dans M , $1 \leq i \leq q$, et des P_i dans $M[\delta]$ fuchsien tels que $P(\delta) = P_1(\delta - \eta_1) \cdots P_q(\delta - \eta_q)$.

C'est ce que l'on a appelé dans l'introduction une factorisation en produit de "twistés" de facteurs fuchsien.

Regardons le cas $\alpha = 0$. Les P_i étant des opérateurs fuchsien, leur polygone de Newton n'a que des pentes inférieures ou égales à 0. On peut écrire $P_i = a_i Q_i$, avec $a_i \in M$, et $Q_i \in M[\delta]$ unitaire. Alors l'opérateur Q_i est encore fuchsien, étant unitaire tous ses coefficients sont dans l'anneau de valuation de M . (On remarque qu'avec les hypothèses du théorème la dérivation δ et la valuation v se prolongent d'une unique manière à M , et $\alpha_L(\delta) = \alpha_M(\delta) = 0$, on est donc bien dans le cadre des définitions précédentes.)

Dans le cas $\alpha = -1$, les opérateurs P_i sont fuchsien donc leur polygone de Newton n'a que des pentes inférieures ou égales à 1. Si on suppose les P_i unitaires, alors leurs coefficients ne sont pas nécessairement dans l'anneau de valuation de M .

4.2. Suite d'extensions par une exponentielle d'intégrale.

Notations. — Dans toute cete partie on note (K, δ) un corps différentiel complet pour une valuation discrète v . On suppose que le corps résiduel de K est de caractéristique nulle et que $\alpha_K(\delta) > -\infty$. On considère une suite de p extensions de corps différentiels $K = K_0 \subset \cdots \subset K_p$, avec $\forall i, 1 \leq i \leq p, K_i = K_{i-1}(t_i)$, tel que $\delta(t_i)/t_i = \lambda_i \in K_{i-1} \setminus \{0\}$ et t_i transcendant sur K_{i-1} . Pour tout $i, 1 \leq i \leq p$, on munit le corps K_i de la valuation t_i -adique v_i . On note $F_0 = \overline{K}^{\text{al}}$ une clôture algébrique de K , et on pose $F_i = \bigcup_{n \geq 1} F_{i-1}((t_i^{1/n}))$ pour $i, 1 \leq i \leq p$. On prolonge δ à chacun de ces corps, et chaque valuation v_i au F_i correspondant. Le corps résiduel de F_i est le corps F_{i-1} . Les corps F_i sont algébriquement clos. (Chaque F_i est une clôture algébrique du complété de $F_{i-1}(t_i)$ pour la valuation v_i .) Puisque $\delta(t_i) = \lambda_i t_i$, on a $\alpha_{F_i}(\delta) = 0$ pour $i, 1 \leq i \leq p$.

Premier cas. — Cas où $p = 1$. Soit $P \in F_1[\delta]$. Alors il existe $n \geq 1$ tel que $P \in L[\delta]$ avec $L = \overline{K}^{\text{al}}((t_1^{1/n}))$. Relativement à la valuation v_1 le corps L est complet et on a $\alpha_L(\delta) = 0$. D'après le théorème 4.1.3 on peut

factoriser P dans l'anneau $F_1[\delta]$ sous la forme $P = P_1(\delta - \eta_1) \cdots P_q(\delta - \eta_q)$, avec les P_i fuchsien. On note $P_i = a_i Q_i$, avec $a_i \in F_1$ et Q_i unitaire et encore fuchsien, donc à coefficients dans \mathcal{A}_{al} l'anneau de valuation de F_1 . On se ramène ainsi à factoriser $Q = \delta^n + b_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + b_1\delta + b_0$ avec les b_i dans \mathcal{A}_{al} . Soit $\bar{Q} \in \bar{K}^{\text{al}}[\delta]$ son image dans le corps résiduel et m le ppcm des ramifications en t_1 de tous les coefficients de Q . On suppose que \bar{Q} se factorise sous la forme $\prod_{i=1}^n (\delta + x_i)$ dans l'anneau $\bar{K}^{\text{al}}[\delta]$. On suppose également que $v(\lambda_1) < \alpha_K(\delta)$. La proposition 3.1.4 nous dit que l'opérateur \bar{Q} se factorise sous la forme $\prod_{i=1}^n (\delta + x_i)$ avec $\forall k \geq 1, \forall i, 2 \leq i \leq n, v(x_1 - x_i + (k/m)\lambda_1) < \alpha_K(\delta)$. Le théorème 3.1.2 nous permet alors de relever cette factorisation à Q dans l'anneau $\mathcal{A}_{\text{al}}[\delta]$ sous la forme $Q = (\delta + y_1)(\delta^{n-1} + \cdots + y_n)$. Une récurrence sur le degré de l'opérateur nous permet de factoriser Q en produit d'opérateurs d'ordre 1, et donc finalement de factoriser P en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_1[\delta]$.

On vient de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 4.2.1. — *On fait l'hypothèse $v(\lambda_1) < \alpha_K(\delta)$. On suppose que tout opérateur de $\bar{K}^{\text{al}}[\delta]$ se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans cet anneau. Soit $P \in F_1[\delta]$ non nul, alors P se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_1[\delta]$.*

Récurrence. — On suppose que tout opérateur $P \in F_{p-1}[\delta]$ non nul se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans F_{p-1} . Soit alors P un opérateur non nul de l'anneau $F_p[\delta]$. Alors il existe $n \geq 1$ tel que P soit dans l'anneau $L[\delta]$, où $L = F_{p-1}((t_p^{1/n}))$. Relativement à la valuation v_p le corps L est complet, et son corps résiduel est de caractéristique nulle. En outre $\alpha_L(\delta) = 0$. Alors le théorème 4.1.3 nous dit que l'on peut factoriser P sous la forme $P = P_1(\delta - \eta_1) \cdots P_q(\delta - \eta_q)$, avec les $P_i \in F_p[\delta]$ fuchsien et $\eta_i \in F_p$. Puisque $\alpha_{F_p}(\delta) = 0$, on se ramène à factoriser un opérateur différentiel unitaire Q à coefficients dans l'anneau de valuation de F_p , que l'on note \mathcal{A}_p . On note \bar{Q} son image dans le corps résiduel, $\bar{Q} \in F_{p-1}[\delta]$, et m le ppcm des ramifications en t_p des coefficients de Q . On factorise \bar{Q} sous la forme $\prod_{i=1}^n (\delta + x_i)$ dans l'anneau $F_{p-1}[\delta]$. Puisque $v_{p-1}(\lambda_p) < \alpha_{F_{p-1}}(\delta)$, la proposition 3.1.4 nous dit qu'on peut factoriser \bar{Q} sous la forme $\prod_{i=1}^n (\delta + x_i)$ dans l'anneau $F_{p-1}[\delta]$, avec $\forall k \geq 1, \forall i, 2 \leq i \leq n, v_{p-1}(x_1 - x_i + (k/m)\lambda_p) < \alpha_{F_{p-1}}(\delta)$. Alors le théorème 3.1.2 nous dit que l'on peut factoriser Q sous la forme $Q = (\delta + y_1)(\delta^{n-1} + \cdots + y_n)$ dans l'anneau \mathcal{A}_p . Par récurrence sur le degré de cet opérateur, ceci montre que

Q se factorise dans l'anneau \mathcal{A}_p en produit d'opérateur d'ordre 1, de même que l'opérateur P dans l'anneau $F_p[\delta]$.

On a donc l'énoncé suivant :

THÉORÈME 4.2.2. — *Soit (K, δ) un corps différentiel complet pour une valuation discrète v_0 , de corps résiduel de caractéristique nulle. On suppose que $\alpha_K(\delta) > -\infty$. Soit une suite d'extensions différentielles $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_p$, telle que $K_i = K_{i-1}(t_i)$ avec pour i , $1 \leq i \leq p$, t_i transcendant sur K_{i-1} , $\delta(t_i)/t_i = \lambda_i \in K_{i-1} \setminus \{0\}$, et $v_{i-1}(\lambda_i) < \alpha_{k_{i-1}}(\delta)$, où v_i est la valuation t_i -adique sur le corps K_i . On note $F_0 = \overline{K}_0^{\text{al}}$, et on définit ensuite pour i , $1 \leq i \leq p$ les corps $F_i = \bigcup_{n \geq 1} F_{i-1}(t_i^{1/n})$. On suppose que tout opérateur de $\overline{K}^{\text{al}}[\delta]$ se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans cet anneau. Soit $P \in F_p[\delta]$ un opérateur différentiel non nul, alors P se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_p[\delta]$.*

Exemple 4.2.3. — On va appliquer ce résultat au cas particulier décrit dans [BOU]. On considère $K = \mathbb{C}((z))$ que l'on munit de la valuation z -adique v_z et de la dérivation $\delta = -z^2 d/dz$. Muni de cette valuation le corps K est complet. Le corps $\overline{K}^{\text{al}} = \bigcup_{n \geq 1} \mathbb{C}((z^{1/n}))$ est une clôture algébrique de K . On étend la dérivation δ et la valuation v à \overline{K}^{al} . En outre $\alpha_K(\delta) = 1$. On considère une extension de K par $X = e^{1/z}$. On pose $K_1 = K(X)$ et on étend la dérivation δ à K_1 de manière naturelle en posant $\delta(X) = X$. On a donc $\delta(X) = \lambda X$ avec $\lambda = 1$, et donc $v_z(\lambda) = 0 < \alpha_K(\delta)$. On note $F_1 = \bigcup_{n \geq 1} \overline{K}^{\text{al}}((X^{1/n}))$. On sait que tout opérateur différentiel à coefficients dans \overline{K}^{al} se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $\overline{K}^{\text{al}}[\delta]$. Alors ceci montre que tout $P \in K_1[\delta]$ se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_1[\delta]$.

De manière générale, soit δ une dérivation sur $\mathbb{C}((z))$ du type $\delta = ad/dz$ avec $a \in \mathbb{C}((z))$, et soit $\mu \in \mathbb{C}((z))$ tel que $X = e^\mu$ soit transcendant sur $\mathbb{C}((z))$. On considère $K_1 = K(X)$ et l'on étend la dérivation δ de manière naturelle en posant $\delta(X) = (\delta(\mu))X$ avec $\delta(\mu) = \lambda \in \mathbb{C}((z))$. Alors si $v_z(\lambda) \geq \alpha_K(\delta)$, on a $X \in K$. Donc on a automatiquement la condition $v_z(\lambda) < \alpha_K(\delta)$ dès que l'on prend un élément transcendant. Alors tout $P \in K_1[\delta]$ se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_1[\delta]$.

Remarque 4.2.4. — La condition $v_{i-1}(\lambda_i) < \alpha_{k_{i-1}}(\delta)$ est très restrictive. En effet, soit une première extension du corps K de la forme

$K_1 = K(t_1)$, avec $\delta(t_1) = \lambda_1 t_1$ et $\lambda_1 \in K$. On munit ce corps K_1 de la valuation t_1 -adique, et on a $\alpha_{K_1}(\delta) = 0$. En particulier les éléments de K sont de valuation t_1 -adique nulle. Considérons maintenant une extension de K_1 de la forme $K_1(t_2)$, avec $\delta(t_2) = \lambda_2 t_2$ et $\lambda_2 \in K$. Puisque $\lambda_2 \in K$, on a $v_{t_1}(\lambda_2) = 0 \neq \alpha_{K_1}(\delta)$. Ce cas est exclu de nos hypothèses.

On traite donc le cas d'exponentielles à des "niveaux différents", mais il nous manque le cas de plusieurs exponentielles à un "même niveau". Pour pouvoir traiter le cas d'une extension de K par deux exponentielles d'intégrale t_1 et t_2 , algébriquement indépendantes sur K , il faut affiner la condition sur la valuation.

Une condition suffisante pour résoudre l'équation $\delta(u) + au = b$ dans \overline{K}^{al} est $v(a) < \alpha_K(\delta)$. On note CS_0 cette condition. On dira qu'un élément u de \overline{K}^{al} vérifie CS_0 si $v(u) < \alpha_K(\delta)$. On remarque que pour u, v dans \overline{K}^{al} , $(u \in CS_0 \text{ et } v \notin CS_0) \Rightarrow (u + v) \in CS_0$.

Considérons maintenant le corps $K_1 = K(t_1)$ muni de v_1 . On note $L_1 = K((t_1))$ le complété de K_1 pour la valuation v_1 . Soit l'équation $\delta(u) + au = b$ avec $a, b \in L_1$. On sait qu'une condition suffisante pour résoudre cette équation dans L_1 est $v_1(a) < \alpha_{L_1}(\delta) = 0$. On va donner une autre condition. Supposons que $v_1(a) = 0$, alors $a = \sum_{i \geq 0} a_i t_1^i$. Notons $b = \sum_{i \geq i_0} b_i t_1^i$. On cherche alors u sous la forme $u = \sum_{i \geq i_0} u_i t_1^i$. On a $\delta(u) = \sum_{i \geq i_0} (\delta(u_i) + i u_i \lambda_1) t_1^i$. On cherche u coefficient par coefficient, la première équation à résoudre est donc $\delta(u_{i_0}) + (a_0 + i_0 \lambda_1) u_{i_0} = b_{i_0}$. Les autres sont du même style. Une condition suffisante pour résoudre cette équation dans K est $v(a_0 + i_0 \lambda_1) < \alpha_K(\delta)$.

On remarque que le résultat est encore vrai si les coefficients a et b sont dans le corps F_1 , en remplaçant i dans \mathbb{Z} par i/m dans \mathbb{Q} , où m est la ramification commune des coefficients.

On dira donc qu'un élément u de F_1 vérifie CS_1 si $v_1(u) < 0$, ou si $v_1(u) = 0$ et pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $v(u_0 + q \lambda_1) < \alpha_K(\delta)$. (C'est-à-dire $u_0 + q \lambda_1 \in CS_0$.) On remarque que pour u, v dans F_1 , $(u \in CS_1 \text{ et } v \notin CS_1) \Rightarrow (u + v) \in CS_1$.

LEMME 4.2.5. — *Soit l'équation $\delta(u) + au = b$ avec $a, b \in F_1$. Si $a \in CS_1$, alors cette équation admet une solution dans F_1 .*

On définit alors par récurrence la condition CS_p pour $p \geq 2$, en disant qu'un élément u de F_p vérifie CS_p si $v_p(u) < 0$, ou si $v_p(u) = 0$ et $u_0 + q \lambda_p$ vérifie CS_{p-1} pour tout $q \in \mathbb{Q}$. On remarque que pour u, v

dans F_p , on a $(u \in CS_p \text{ et } v \notin CS_p) \Rightarrow (u + v) \in CS_p$. On a également $u \in CS_p \Rightarrow qu \in CS_p$ pour tout q dans \mathbb{Q} .

LEMME 4.2.6. — Soit l'équation différentielle $\delta(u) + au = b$ avec $a, b \in F_p$. Alors si a vérifie CS_p cette équation admet une solution dans F_p .

Il nous reste maintenant à regarder le cas des équations différentielles quadratiques que l'on aura besoin de résoudre pour modifier la factorisation de l'opérateur dans le corps résiduel.

LEMME 4.2.7. — Soit l'équation $u^2 + \delta(u) + au = -\delta a$ avec $a \in F_p$ et $a \in CS_p$. Alors cette équation admet une solution u dans F_p avec $u \notin CS_p$.

Démonstration. — On remarque d'abord que l'on a $v_p(\delta a) \geq v_p(a) + \alpha_{F_p}(\delta)$.

Supposons d'abord $p = 0$, alors $v_p(a) = v_0(a) < \alpha_K(\delta)$, le lemme 2.1 nous permet de conclure.

On raisonne par récurrence et on suppose que le résultat est vrai pour F_{p-1} , avec $p \geq 1$. On considère alors le cas de F_p . Par hypothèse a vérifie CS_p , donc $v_p(a) \leq \alpha_{F_p}(\delta)$.

- Si $v_p(a) < \alpha_{F_p}(\delta) = 0$, alors le lemme 2.1 nous permet de trouver u avec $v_p(u) \geq \alpha_{F_p}(\delta)$. Si $v_p(u) > \alpha_{F_p}(\delta)$ alors $u \notin CS_p$. Supposons donc $v_p(u) = \alpha_{F_p}(\delta) = 0$. Notons i_a la valuation de a , et n la ramification en t_p de a . Alors on a en particulier $a_{i_a} u_0 = -(\delta(a_{i_a}) + (i_a/n)\lambda_p a_{i_a})$ dans F_{p-1} , $p \geq 1$, ce qui se réécrit $a_{i_a}(u_0 + (i_a/n)\lambda_p) = -\delta(a_{i_a})$. Notons $r_p = i_a/n \in \mathbb{Q}$. On obtient $v_{p-1}(u_0 + r_p\lambda_p) \geq \alpha_{F_{p-1}}(\delta)$. Si $v_{p-1}(u_0 + r_p\lambda_p) > \alpha_{F_{p-1}}$, alors ce terme ne vérifie pas CS_{p-1} , donc $u_0 \notin CS_p$. Si par contre $v_{p-1}(u_0 + r_p\lambda_p) = \alpha_{F_{p-1}}$, alors on regarde dans l'équation précédente les termes de valuation minimale en t_{p-1} , et on obtient une équation dans F_{p-2} du même type. Avec des notations similaires on obtient alors $v_{p-2}((u_0 + r_p\lambda_p)_0 + r_{p-1}\lambda_{p-1}) \geq \alpha_{F_{p-2}}(\delta)$. On itère le raisonnement jusqu'à obtenir $v_0(((\dots((u_0 + r_p\lambda_p)_0 + r_{p-1}\lambda_{p-1})_0 + \dots)_0 + r_2\lambda_2)_0 + r_1\lambda_1) \geq \alpha_K(\delta)$, ce qui signifie que ce terme ne vérifie pas CS_0 , et que donc $u \notin CS_p$.

- Si $v_p(a) = \alpha_{F_p}(\delta) = 0$, on a alors $v_p(\delta(a)) \geq 0$. Puisque $a \in CS_p$, $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}^*$, $a_0 + (k/m)\lambda_p \in CS_{p-1}$. On a alors de nouveau deux cas à distinguer.

- Supposons $v_p(\delta a) > 0$. Alors on cherche $u = \sum_{i>0} u_i t_p^{i/n}$ de

valuation strictement positive. On doit donc résoudre :

$$\forall i > 0, \quad \delta(u_i) + \left(a_0 + \frac{i}{n}\lambda_p\right)u_i = \text{donnée dans } F_{p-1}.$$

Or, $\forall i > 0, a_0 + \frac{i}{n}\lambda_p \in CS_{p-1}$, donc le lemme 4.2.6 nous permet de résoudre toutes ces équations et de trouver u dans F_p avec $v_p(u) > 0 = \alpha_{F_p}(\delta)$, donc $u \notin CS_p$.

• Supposons maintenant que $v_p(\delta a) = 0$. On cherche alors u de valuation nulle. On doit résoudre dans F_{p-1} :

$$u_0^2 + \delta(u_0) + a_0u_0 = -\delta a_0$$

et

$$\forall i \geq 1, \quad \delta(u_i) + \left(a_0 + \frac{i}{n}\lambda_p + 2u_0\right)u_i = \text{donnée dans } F_{p-1}.$$

On a $a_0 \in CS_{p-1}$ (cas particulier de $k = 0$). On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence, et trouver u_0 dans F_{p-1} , $u_0 \notin CS_{p-1}$. Alors on a aussi $2u_0 \notin CS_{p-1}$, et puisque $a_0 + \frac{i}{n}\lambda_p \in CS_{p-1}$, on a $a_0 + \frac{i}{n}\lambda_p + 2u_0 \in CS_{p-1}$. Le lemme 4.2.6 permet alors de conclure, et de trouver u dans F_p avec $v_p(u) = 0$ et $u_0 \notin CS_{p-1}$, c'est-à-dire $u \notin CS_p$. □

Remarque 4.2.8. — L'hypothèse clé qui fait marcher la démonstration c'est que l'on a une équation quadratique d'un type particulier : $u^2 + \delta(u) + au = -\delta(a)$ avec $a \in CS_p$. Si a est de valuation nulle on a $a_0 \in CS_{p-1}$. En passant au corps résiduel, l'équation que l'on obtient est du même type, on peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence.

LEMME 4.2.9. — Soit $Q \in F_{p-1}[\delta]$. On suppose que Q se factorise sous la forme $\prod_{i=1}^n(\delta + x_i)$ dans l'anneau $F_{p-1}[\delta]$. Alors pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, il existe une factorisation $Q = \prod_{i=1}^n(\delta + y_i)$, avec $(y_i - x_{\sigma(i)}) \notin CS_{p-1}$.

Démonstration. — Comme pour le lemme 3.1.3, il suffit de traiter le cas $n = 2$ et $x_1 - x_2 \in CS_{p-1}$. On prend $y_1 = x_2 + a$ et $y_2 = x_1 - a$. On doit alors résoudre $\delta(a) + a^2 + (x_1 - x_2)a = -\delta(x_1 - x_2)$. Le lemme 4.2.8 nous donne alors une solution a avec $a \notin CS_{p-1}$. □

PROPOSITION 4.2.10. — Soit $Q \in F_{p-1}[\delta]$. On suppose que $\lambda_p \in CS_{p-1}$ et que Q se factorise sous la forme $\prod_{i=1}^n(\delta + x_i)$ dans l'anneau $F_{p-1}[\delta]$. Alors l'opérateur Q se factorise sous la forme $\prod_{i=1}^n(\delta + y_i)$ dans l'anneau $F_{p-1}[\delta]$ avec $\forall i < j, \forall r \in \mathbb{Q}, r > 0, (y_i - y_j + r\lambda_p) \in CS_{p-1}$.

Démonstration. — On dit que deux éléments u et v de F_{p-1} sont équivalents s'il existe q dans \mathbb{Q} tel que $(u - v + q\lambda_p) \notin CS_{p-1}$. Si deux éléments x_i et x_j ne sont pas équivalents, alors $(x_i - x_j + q\lambda_p) \in CS_{p-1}$, ce pour tout q dans \mathbb{Q} . Il s'agit donc de réordonner les coefficients dans chaque classe d'équivalence. Soit i_0 dans $\{1, \dots, n\}$, et $\text{cl}(x_{i_0})$ l'ensemble des éléments équivalents à x_{i_0} . On note \mathcal{E}_{i_0} l'ensemble de leurs indices. Soit σ_{i_0} une permutation de \mathcal{E}_{i_0} telle que pour $i < j$ on ait $(x_{\sigma_{i_0}(i)} - x_{\sigma_{i_0}(j)} + q\lambda_p) \notin CS_{p-1}$, avec $q \leq 0$. Alors pour $i < j$, $\forall r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, $(x_{\sigma_{i_0}(i)} - x_{\sigma_{i_0}(j)} + r\lambda_p) \in CS_{p-1}$. Soit alors σ la permutation de $\{1, \dots, n\}$ obtenue en composant les σ_{i_0} . Alors d'après le lemme précédent, il existe une factorisation $P = \prod_{i=1}^n (\delta + y_i)$, avec $(y_i - x_{\sigma(i)}) \notin CS_{p-1}$. Alors pour $i < j$, $(y_i - y_j + r\lambda_p) \in CS_{p-1}$. \square

On a alors :

THÉORÈME 4.2.11. — *Soit (K, δ) un corps différentiel complet pour une valuation discrète v_0 de corps résiduel de caractéristique nulle. On suppose que $\alpha_K(\delta) > -\infty$. Soit une suite d'extensions différentielles $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_p$, telle que $K_i = K_{i-1}(t_i)$ avec pour i , $1 \leq i \leq p$, $\delta(t_i)/t_i = \lambda_i \in K_{i-1} \setminus \{0\}$, et $\lambda_i \in CS_{i-1}$. On note $F_0 = \overline{K_0}^{\text{al}}$, et on définit ensuite pour i , $1 \leq i \leq p$, les corps $F_i = \bigcup_{n \geq 1} F_{i-1}((t_i^{1/n}))$. On suppose que tout opérateur de $\overline{K}^{\text{al}}[\delta]$ se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans cet anneau. Soit $P \in F_p[\delta]$ un opérateur différentiel non nul, alors P se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_p[\delta]$.*

Démonstration. — On procède par récurrence comme pour le théorème 4.2.2. On commence par utiliser le théorème 4.1.3 pour factoriser l'opérateur par rapport aux pentes de son polygone de Newton, et ainsi se ramener à un opérateur à coefficients dans l'anneau de valuation d'un corps complet. On passe alors au corps résiduel où l'on suppose que l'on peut factoriser. La condition $\lambda_i \in CS_{i-1}$ nous permet d'utiliser la proposition 4.2.10, et de factoriser dans le corps résiduel avec la condition voulue sur les facteurs, ce qui nous permet de relever la factorisation grâce au théorème 3.1.2. \square

Exemple 4.2.12. — Regardons de nouveau le cas $K = \mathbb{C}((z))$. On munit ce corps de la valuation z -adique v_z et d'une dérivation $\delta = ad/dz$, avec $a \in \mathbb{C}((z))$. Soit alors μ_1 et μ_2 deux éléments de $\mathbb{C}((z))$ tels que $X_1 = e^{\mu_1}$ et $X_2 = e^{\mu_2}$ soient deux exponentielles algébriquement indépendantes sur $\mathbb{C}((z))$. On pose $K_1 = K(X_1)$ et $K_2 = K_1(X_2)$. On étend la dérivation δ

de manière naturelle en posant $\delta(X_1) = \lambda_1 X_1$, $\delta(X_2) = \lambda_2 X_2$ où $\lambda_1 = \delta(\mu_1)$ et $\lambda_2 = \delta(\mu_2)$ sont dans K . On a déjà vu à l'exemple 4.2.3 que l'on avait automatiquement $v_z(\lambda_1) < \alpha_K(\delta)$ et aussi $v_z(\lambda_2) < \alpha_K(\delta)$. On note v_1 la valuation X_1 -adique sur K_1 . Les éléments de K sont de valuation X_1 -adique nulle, donc on a $v_1(\lambda_2) = 0 = \alpha_{K_1}(\delta)$. Si λ_2 ne vérifiait pas CS_1 , alors on aurait k dans \mathbb{Z} et m dans \mathbb{N}^* tel que $v_z(\lambda_2 + (k/m)\lambda_1) \geq \alpha_K(\delta)$. (On a $(\lambda_2)_0 = \lambda_2$.) Le cas $k = 0$ est exclu sinon X_2 serait dans $\mathbb{C}((z))$. Pour $k \neq 0$ on obtient alors que l'élément $y = \exp(\mu_2 + (k/m)\mu_1)$ est dans $\mathbb{C}((z))$. Donc l'élément y^m aussi, ce qui nous donne $X_2^m X_1^k \in \mathbb{C}((z))$, et donc X_1 et X_2 seraient algébriquement liés sur K . L'hypothèse $\lambda_2 \in CS_1$ est donc aussi automatique. Le théorème précédent nous dit donc que tout opérateur différentiel à coefficients dans $K_2 = \mathbb{C}((z))(X_1, X_2)$ se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_2[\delta]$, où $F_2 = \bigcup_{n \geq 1} F_1((X_2^{1/n}))$ et $F_1 = \bigcup_{n \geq 1} \overline{K}^{\text{al}}((X_1^{1/n}))$.

4.3. Cas d'une extension par une intégrale.

Soit (K, δ) un corps différentiel de caractéristique nulle. On considère une extension de K par une intégrale, c'est-à-dire une extension du type $K(X)$ où $\delta(X) \in K$ et X est transcendant sur K . On note $\lambda = \delta(X)$ cet élément non nul de K . On munit ce corps de la valuation X -adique v_X , et on pose $L = K((X))$. La valuation v_X et la dérivation δ s'étendent de manière évidente à L et le corps (L, v_X) est complet. On a cette fois-ci $\alpha_L(\delta) = -1$. Soit \overline{K}^{al} une clôture algébrique de K , alors $\overline{L}^{\text{al}} = \bigcup_{n \geq 1} \overline{K}^{\text{al}}((X^{1/n}))$ est une clôture algébrique de $\overline{K}^{\text{al}}((X))$. Soit $P \in \overline{L}^{\text{al}}[\delta]$ un opérateur différentiel non nul. On peut appliquer le théorème 4.1.3 et factoriser P sous la forme $P = P_1(\delta - \eta_1) \cdots P_q(\delta - \eta_q)$, avec pour tout i , $1 \leq i \leq q$, $\eta_i \in \overline{L}^{\text{al}}$, et $P_i \in \overline{L}^{\text{al}}[\delta]$ fuchsien. On écrit $P_i = c_i Q_i$ avec $c_i \in \overline{L}^{\text{al}}$ et $Q_i \in \overline{L}^{\text{al}}[\delta]$ unitaire et encore fuchsien. On se ramène ainsi à factoriser un opérateur $Q \in \overline{L}^{\text{al}}[\delta]$ unitaire et fuchsien, donc avec un polygone de Newton n'ayant que des pentes inférieures ou égales à 1. Cette fois-ci l'opérateur que l'on obtient n'a pas nécessairement ses coefficients dans l'anneau de valuation de \overline{L}^{al} , on ne va donc pas utiliser de lemme de Hensel. On va essayer de factoriser directement l'opérateur Q en produit d'opérateurs fuchiens. Soit

$$Q = \delta^n + a_1 \delta^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \delta + a_n, \text{ avec } a_i \in \overline{L}^{\text{al}}.$$

Puisque Q est fuchsien, on a pour i , $1 \leq i \leq n$, $v_X(a_i) \geq -i$. On pose $\partial = X\delta$. Alors on a $\alpha_L(\partial) = 0$. Quitte à multiplier Q par X^n , on a

$Q = \partial^n + b_1\partial^{n-1} + \dots + b_{n-1}\partial + b_n$ avec $v_X(b_i) \geq 0$, pour tout i , $1 \leq i \leq n$. On cherche alors à factoriser Q sous la forme

$$Q = (\partial + x_1)(\partial^{n-1} + x_2\partial^{n-2} + \dots + x_{n-1}\partial + x_n),$$

avec ces deux facteurs fuchsien, c'est-à-dire avec pour tout i , $1 \leq i \leq n$, $v_X(x_i) \geq 0$.

On remarque d'abord que pour tout élément a de \overline{K}^{al} on a $v_X(\partial(a)) = v_X(X\delta(a)) = 1 + v_X(\delta(a)) = 1$. Donc quand on passe au gradué associé, les éléments de \overline{K}^{al} se comportent comme des constantes. Les calculs se font donc comme dans le cas commutatif. Avec des notations évidentes on écrit donc : $\overline{Q} = \partial^n + \overline{b}_2\partial^{n-1} + \dots + \overline{b}_n$, et on écrit aussi : $\overline{Q} = (\partial + \overline{x}_1)(\partial^{n-1} + \overline{x}_2\partial^{n-2} + \dots + \overline{x}_n)$ modulo termes de degré supérieur ou égal à 1. On peut écrire

$$\overline{Q} = (\partial + \overline{y}_1)(\partial + \overline{y}_2) \cdots (\partial + \overline{y}_n) \text{ modulo termes de degré } \geq 1,$$

où les \overline{y}_i sont les opposés des racines de l'équation caractéristique : $T^n + \overline{b}_1T^{n-1} + \dots + \overline{b}_n = 0$. (On pose $\overline{y}_1 = \overline{x}_1$.)

On note m le ppcm des ramifications en X des coefficients b_i . Pour continuer et trouver les termes d'ordre k/m des x_i , on pose $\tilde{R} = (T + \overline{y}_2) \cdots (T + \overline{y}_n)$, et on doit résoudre l'équation commutative suivante :

$$(T + \overline{x}_1 + (k/m)\lambda)A_k + B_k\tilde{R} = \text{polynôme de degré } n - 1 \text{ en } T,$$

où $A_k = x_{2,k}T^{n-2} + \dots + x_{n,k}$ et $B_k = x_{1,k}$. D'après le théorème de Bezout, si $T + \overline{x}_1 + (k/m)\lambda$ et \tilde{R} sont premiers entre eux, alors on peut résoudre cette équation. Il faut donc choisir le premier coefficient \overline{y}_1 de sorte que $-(\overline{y}_1 + (k/m)\lambda)$ ne soit pas une racine de \tilde{R} , ce pour tout k dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il suffit pour cela de réordonner les racines de l'équation caractéristique qui diffèrent d'un multiple de λ .

On factorise ainsi l'opérateur Q sous la forme annoncée, et par récurrence en produit d'opérateurs d'ordre 1.

On a finalement montré le résultat suivant :

THÉORÈME 4.3.1. — *Soit (K, δ) un corps différentiel de caractéristique nulle. Soit $L = K(X)$ une extension de K par une intégrale. On note \overline{K}^{al} une clôture algébrique de K , et $\overline{L}^{\text{al}} = \bigcup_{n \geq 1} \overline{K}^{\text{al}}((X^{1/n}))$. Soit $P \in L[\delta]$ non nul. Alors P se factorise dans l'anneau $\overline{L}^{\text{al}}[\delta]$ en produit d'opérateurs d'ordre 1.*

4.4. Cas d'une extension liouvillienne transcendante.

On résume ici l'ensemble des résultats obtenus précédemment.

THÉORÈME 4.4.1. — Soit (K, δ) un corps différentiel complet pour une valuation discrète v , de corps résiduel de caractéristique nulle. On suppose que $\alpha_K(\delta) > -\infty$. Soit L une extension liouvillienne de K qui s'écrit comme une suite d'extensions différentielles $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_p = L$, telle que $K_i = K_{i-1}(t_i)$, avec pour i , $1 \leq i \leq p$, t_i transcendant sur K_{i-1} , pour i , $1 \leq i \leq n$, $\delta(t_i)/t_i = \lambda_i \in K_{i-1} \setminus \{0\}$, et pour i , $n+1 \leq i \leq p$, $\delta(t_i) = \lambda_i \in K_{i-1} \setminus \{0\}$. On note $F_0 = \overline{K}_0^{\text{al}}$, et on définit ensuite pour i , $1 \leq i \leq p$, les corps $F_i = \bigcup_{n \geq 1} F_{i-1}((t_i^{1/n}))$. On suppose que dans le cas d'une extension par une exponentielle d'intégrale, c'est-à-dire pour i , $1 \leq i \leq n$, on a $\lambda_i \in CS_{i-1}$. On suppose aussi que tout opérateur de $\overline{K}^{\text{al}}[\delta]$ se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans cet anneau. Soit $P \in F_p[\delta]$ un opérateur différentiel non nul, alors P se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_p[\delta]$.

Dans le cas de $\mathbb{C}((z))$ on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 4.4.2. — On considère le corps $K = \mathbb{C}((z))$ que l'on munit de la valuation z -adique v_z , et d'une dérivation $\delta = ad/dz$ avec $a \in \mathbb{C}((z))$. Soit μ_1, \dots, μ_p des éléments de $\mathbb{C}((z))$ tels que $X_1 = e^{\mu_1}, \dots, X_n = e^{\mu_n}, X_{n+1} = \text{Log}(\mu_{n+1}), \dots, X_p = \text{Log}(\mu_p)$ soient algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}((z))$. Soit l'extension différentielle $K \subset L = K(X_1, \dots, X_p)$. On note $F_0 = \overline{K}^{\text{al}}$, et on définit ensuite pour i , $1 \leq i \leq p$, les corps $F_i = \bigcup_{n \geq 1} F_{i-1}((X_i^{1/n}))$. Soit $P \in L[\delta]$ un opérateur différentiel non nul, alors P se factorise en produit d'opérateurs d'ordre 1 dans l'anneau $F_p[\delta]$.

Application. — On se replace dans le cas de l'extension de $\mathbb{C}((z))$ par l'exponentielle $e^{1/z}$. Ce résultat de factorisation nous permettra de mettre en place une théorie de Galois différentielle formelle pour les équations différentielles linéaires à coefficients dans ce corps. Grâce aux résultats présentés ici on peut ramener l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à celle d'équations différentielles d'ordre 1. Ceci nous permet de déterminer la forme des solutions, et par suite de décrire le groupe de Galois différentiel formel en décrivant explicitement un sous-groupe Zariski-dense. On s'inspire pour cela du travail présenté dans [VDP] par M. Van der Put. Nous espérons que ces résultats nous permettront d'aborder l'étude du groupe de Galois différentiel dans le cas analytique.

BIBLIOGRAPHIE

- [AMI] Y. AMICE, Les nombres p -adiques, P.U.F, Collection Sup.
- [BOU] M. BOUFFET, Un lemme de Hensel pour les opérateurs différentiels, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 331 n° 4, Série I, (2000), 277–280.
- [JAC] JACOBSON, Basic Algebra II, Freeman, New York, 1980.
- [LEV] A.H.M. LEVELT, Jordan decomposition for a class of singular differential operators, Arkiv för Matematik, 13 (1975), 1–27.
- [MAL1] B. MALGRANGE, Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières, preprint 1979.
- [MAL2] B. MALGRANGE, Équations différentielles à coefficients polynomiaux, Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1991.
- [ROB] P. ROBBA, Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles, L'Enseignement Mathématique, série 2, 26 (1980), 279–311.
- [SCH] O.F.G. SCHILLING, The theory of valuations, Mathematical surveys IV.
- [VDP] M. VAN der PUT, Recent work on differential Galois theory, Séminaire Bourbaki, 1997-1998, Astérisque, 252 (1998), 341–367.

Manuscrit reçu le 28 mai 2001,
accepté le 27 novembre 2001.

Magali BOUFFET,
Université Paul Sabatier
Laboratoire Émile Picard
Bât 1R2
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4 (France).
bouffet@picard.ups-tlse.fr
bouffet@cict.fr